VALORACIÓN DE IDONEIDAD EPISTÉMICA EN EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN PROFESORES EN FORMACIÓN

ELKIN MAURICIO GARAY VALENCIA

DIANA MARCELA VIVAS ROSO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCSICO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2021

VALORACIÓN DE IDONEIDAD EPISTÉMICA EN EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN PROFESORES EN FORMACIÓN

Elkin Mauricio Garay Valencia

Código: 20161145459

Diana Marcela Vivas Roso

Código: 20161145009

Proyecto presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director:

Wilson Gordillo Thiriat

Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCSICO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2021

Resumen

Este trabajo centra su atención en una valoración de idoneidad epistémica para el razonamiento algebraico elemental que se realizó a un grupo de profesores en formación. Con ayuda de las herramientas propuesta por el enfoque Ontosemiótico y a través de una integración entre datos cualitativos y cuantitativos obtenidos de las soluciones dadas a situaciones problema planteadas, que fueron reunidas en un cuestionario que actuó como indicador observable de cumplimento de componentes y permitió caracterizar la representatividad de los significados institucionales pretendidos para el grupo en estudio.

En el capítulo inicial se presentan antecedentes que involucran investigaciones que tienen relación directa o indirecta con nuestro foco de estudio; el razonamiento algebraico, lo que nos conllevo al planteamiento del problema y la formulación de los objetivos.

En el segundo capítulo se expone el marco teórico con el cual se enmarca el trabajo de investigación. El enfoque Ontosemiótico de conocimiento (EOS) en su dimensión epistémica, las herramientas teóricas del mismo y los niveles de razonamiento algebraico elemental, propuestos por Godino et al. (2012), fue los seleccionados para valorar, analizar, clasificar y reflexionar en proceso idoneidad epistémica.

El tercer capítulo muestra la metodología que permite el proceso de reflexión que articulado con las herramientas que propone el EOS, soporten el enfoque de tipo mixto al interpretar datos que obtienen de la aplicación de un cuestionario a la población en estudio, en nuestro caso veinticuatro profesores de matemáticas en formación.

El cuatro capítulo evidencia la construcción de varias situaciones problema, que reunidas en un cuestionario permitieron poner en juego la caracterización de la población alrededor del razonamiento algebraico elemental.

El quinto capítulo analiza los resultados entregados al cuestionario aplicado a los profesores en formación; resultados que activaron un indicador observable que llevo al cumplimento de componentes para valorar de la idoneidad epistémica en el grupo en estudio. Permitiendo de esta forma asignar un nivel de razonamiento algebraico elemental a cada uno de

los participantes.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, las cuales reúnen los elementos categóricos cualitativos y cuantitativos para el grupo en general, que muestran las valoraciones de criterios epistémicos al ser clasificados y organizados ofreciendo un aporte para los profesores en formación y de esta forma reflexionar sobre el razonamiento algebraico elemental.

Índice General

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Índice de Anexos

Capítulo 1

ANTECEDENTES, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

En este capítulo presentamos un panorama general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática referentes al problema de investigación que nos atañe la valoración de la idoneidad epistémica en el razonamiento algebraico en profesores en formación, estos trabajos de investigación y desarrollo nos abren una ventana a nuestro trabajo. Por último, presentamos el problema de investigación y los objetivos que se proponen cumplir.

1.1. ANTECEDENTES

Para facilitar la presentación de los antecedentes que refieren al problema que nos compete, hemos separado tres grupos de investigaciones, inicialmente aquellas realizadas con la formación de profesores en el razonamiento algebraico elemental, seguido de aquellos estudios que han abordado el razonamiento algebraico elemental en contextos escolares y por último investigaciones sobre idoneidad didáctica en el razonamiento algebraico elemental.

1.1.1. Estudios Sobre la Formación de Profesores en el Razonamiento Algebraico Elemental

Castro y Godino (2008), tienen como objetivo general establecer a través de un modelo Ontosemiótico. Este análisis para la enseñanza de la proporcionalidad considera diversas implicaciones de diseño curricular en una institución, también promueve el crecimiento profesional de los futuros docentes en relación con el razonamiento algebraico, al trabajar con la metodología de la ingeniería didáctica en distribuida en tres fases: estudio preliminar, trayectoria didáctica y evaluación o análisis. Las conclusiones encontradas incluyen elementos de los diferentes significados asignados a la proporcionalidad y como estos se vinculan a los niveles de razonamiento algebraico. De igual manera en Castro (2011) el cual, en su documento pone en gran relevancia el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), en el cual plantea una valoración de desarrollo de competencias en cuanto a lo epistémico y ciertas tareas del RAE, analizando estas a partir de diversas respuestas, teniendo presente la metodología que se utiliza en la investigación es todo lo relacionado con la validez, la confiabilidad y generalización, planteando el constructivismo en la interacción entre el maestro y el alumno, realizando un estudio de casos en cada una de las actividades, planteando las diferentes conclusiones en las cuales mencionan que el objetivo de que los estudiantes lograrán llegar a las categorías o niveles esperados en cada una de las tareas planteadas.

De igual manera Castro (2011), pone en evidencia la relevancia del razonamiento algebraico elemental (RAE), planteando una valoración para desarrollar competencias epistémicas y tareas para el RAE. Analizando diversas respuestas entregadas por el grupo de estudio, que a través de la metodología de investigación propuesta y desarrollada en diferentes fases: validez, confiabilidad y generalización, busca la interacción entre el maestro y el alumno, que a través de un estudio de caso llega a la conclusión que evidencia que los estudiantes pueden alcanzar las categorías o niveles esperados en el RAE en cada una de las tareas planteadas.

Por su parte Aké (2013), presenta un trabajo en el cual aborda diferentes preguntas problema, que tienen como objetivo caracterizar los niveles del RAE que tienen los profesores en formación, teniendo en cuenta las soluciones dadas a problemas de índole algebraico y a través de una metodología de tipo mixto, realiza un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas, evidenciando la dificultad que tienen los profesores en formación al identificar una tarea de este tipo. Los resultados encontrados relacionan problemas con el uso de la letra, la limitación en los argumentos, lo que conlleva a afirmar que los conocimientos matemáticos de los futuros maestros son inadecuados cuando se trata del RAE.

Así mismo Godino et al. (2014), presentan un estudio donde se hace mención a las características que tienen las soluciones de problemas matemáticos asociados a un nivel de razonamiento algebraico, el trabajo contextualiza ejercicios que deben ser construidos y analizados para identificar los procesos clave que categorizan las soluciones. El desarrollo de este trabajo es posible a partir de los criterios que establecen, como son: generalización, unificación, formalización y transformación. El desarrollo de las soluciones de los estudiantes lleva a establecen que los profesores de matemáticas deben tener muy en cuenta los niveles de RAE y las características para el ‘buen’ planteamiento de estos ejercicios.

También Burgos et al. (2017), abordan un trabajo que analiza las combinaciones de diferentes tipos de conocimiento resaltando la importancia de la labor de los profesores cuando se combinación conocimiento con las competencias y habilidades. En cuanto al razonamiento algebraico proponen que debe fijarse como un objetivo a lograrse progresivamente en la educación primaria, y por esto es necesario que el profesor de matemáticas tenga una visión amplia del álgebra, donde reconozca las características de los niveles de razonamiento algebraico, lo cual puede lograrse mediante el reconocimiento de objetos y procesos. Su propuesta tiene en cuenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático del Enfoque Ontosemiótico y a través de este modelo obtienen analizan las respuestas dadas a una actividad de proporcionalidad, donde se identifican los conocimientos que se ponen en juego y de esta forma asignar un nivel de razonamiento en el cual se encuentra un estudiante. Concluyen mostrando la importancia de reconocer los niveles del RAE y de esta forma establecer problemas que den paso al desarrollo correcto de los mismos.

Por su parte Caronía y Martyniuk (2020), mencionan los aportes de la Teoría del Enfoque Ontosemiótico, apoyándose en las herramientas de análisis fundamental , y a través de una metodología cualitativa, enfocan el carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo, en el planteamiento de actividades desarrolladas en problemas algebraicos, que es implementado en alumnos con edad promedio entre 18-20 años, su análisis es importante porque resalta el lenguaje utilizado en cada una de las actividades se plantea y en considera diferentes discontinuidades que se presentan en el aprendizaje del algebra elemental.

1.1.2. Estudios Sobre Razonamiento Algebraico Elemental en un Contexto Escolar

Martínez (2014), plantea en su trabajo tres preguntas que son hilo conductor de la investigación, las cuales están enfocadas en las características algebraicas que se pueden identifican en algunos libros de texto, y de esta forma evidenciar los niveles razonamiento que contienen las preguntas que propone el libro y revisar si estos corresponden con el desempeño de los estudiantes. Planten una metodología de tipo cualitativo, que evidencia el contexto del estudio.

Las conclusiones son separadas en tres categorías: los niveles de algebrización, los libros de texto y con el desempeño de los estudiantes en ciertos ejercicios. acorde a su grado de escolaridad, lo cual sorprende al investigador.

También a Castro (2014), establece como finalidad concientizar la necesidad de poder reconocer los niveles de algebrización que tienen tareas previas establecidas a docentes, y de esta forma enfocar un mejor planteamiento para la adecuada introducción al RAE. Establece ejemplos en diferentes niveles de escolaridad, así como las posibles soluciones a problemas, contrastando los niveles del RAE.

Así mismo Godino et al. (2016), presentan un reporte que tiene como objetivo promover en los profesores de primaria y secundaria el desarrollo de conocimientos para distinguir objetos algebraicos y lograr reconocer los distintos niveles de razonamiento algebraico. Marco metodológico plantea un cronograma que inicialmente presentan los niveles de razonamiento a los profesores, luego deben desarrollar unas tareas a las cuales les deben de asignarles los niveles y finalmente presentar y discutir los estos. Las conclusiones muestran que este tipo de metodología para un taller es útil para la formación didáctico-matemática y su relación con los niveles de razonamiento, puesto que le permite al profesor desarrollar un sentido algebraico, reconocerlo e intervenirlo. De esta forma se puede aumentar los estudiantes desarrollo algebraico a partir de actividades debidamente planificadas, buscando también en los docentes la actuación como agentes de cambio en la enseñanza.

Por otra parte en el trabajo de Felip A. (2016), tiene la finalidad de aportar información respecto al pensamiento algebraico elemental, y de esta forma contribuir a la formación de actividades matemáticas de los estudiantes en los primeros niveles educativos. La conclusión a partir de las actividades muestra relación con los niveles, cuando los estudiantes resuelven actividades de nivel intermedio de algebrización con operaciones y cuyos razonamientos corresponden a nivel de ausencia e incipiente de algebrización.

También Godino y Burgos (2017), muestran que no logran abordar las implicaciones de los modelos de RAE, en la planificación curricular y vincularlos al desarrollo cognitivo de estudiantes. Con las nociones de la configuración Ontosemiótica desglosan y analizan: lenguajes, situaciones problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Las relaciones existen entre estos objetos primarios (ostensivos, extensivos, institucionales, significantes y unitarios), se tienen en cuenta asignar niveles de algebrización y los significados que estos tienen.

Así mismo Castro et al. (2017), en su investigación observa los diferentes ejercicios propuestos en los libros de texto, clasificándolos de acuerdo a los niveles de razonamiento. Estos ejercicios se resolvieron y se determinaron todas las características algebraicas que contenían. bajo una metodología cualitativa se analizan los resultados de estas, encontrando en conclusión la complejidad de los niveles de razonamiento algebraico.

Por otra parte Trujillo (2017), en su investigación tiene como objetivo el realizar un análisis epistémico a partir de tareas estructurales e identificar los niveles de algebrización en cada una de sus soluciones, analizando también libros de texto de quinto grado de educación primaria, y con ayuda de metodología de tipo cualitativo concluye dando aportes donde evidencia que en los estudiantes predomina un lenguaje verbal, y no alcanzan un nivel mayor al nivel uno (incipiente de algebrización), destaca el uso de propiedades y operaciones por parte de los estudiantes, sin embargo, los argumentos utilizados son deductiva o empíricos.

Es gracias a García Yataco (2018), quien realiza un análisis a partir de una tarea denominada estructural, la cual tiene como objetivo analizar la manera en que se generan conjeturas, validaciones y procesos de generalización al momento de usar variables. Con ayuda de las herramientas del enfoque Ontosemiótico del conocimiento centrado en la dimensión personal, analiza la idoneidad cognitiva. Trabajando una metodología de tipo cualitativa y experimental permite reconocer en el estudiante la practica operativa y discursiva, también, se evidencia un diseño estructural de cuatro fases: estudio preliminar, diseño, implementación, y evaluación. Su concluye menciona la predominancia del lenguaje natural y el simbólico.

1.1.3. Estudios Sobre Idoneidad Didáctica en el Razonamiento Algebraico Elemental

Godino et al. (2006), presentan en su documento la construcción un sistema de diferentes nociones teóricas, que logran describir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de la valoración de idoneidad didáctica, muestran una articulación de las dimensiones: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Su trabajo resalta al enfoque Ontosemiótico, en cuanto a través sus herramientas se logra un aporte a la categorización de cada uno de aquellos elementos que intervienen en las dimensiones anteriormente mencionadas.

De esta forma se logra explicar ciertos fenómenos didácticos que se generan en la complejidad del análisis Ontosemiótico.

Además, Godino (2013), aborda la problemática del diseño institucional desde el punto de vista del enfoque Ontosemiótico, presentan la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores empíricos que se desarrollan para un diseño institucional apropiado para orientar la enseñanza y el aprendizaje Las dimensiones que contiene (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica), van asociadas a indicadores que las valida. Finalmente menciona que, para lograr un alto nivel de idoneidad didáctica en alguna acción formativa, es necesario prestar atención a las diversas fases y actuar siempre sobre los contenidos de enseñanza.

Por último Chayña (2019), quien en su trabajo busca analizar la capacidad de razonamiento algebraico e idoneidad didáctica para la enseñanza del álgebra, este siendo el problema fundamental. Lograr establecer las relaciones del RAE y la Idoneidad didáctica a través de un enfoque cualitativo de tipo correlacional. Su conclusión establece la relación positiva entre estos dos compontes quedando abierta la posibilidad de realizar una profundización en el campo de la formación docente en cuanto al razonamiento algebraico e idoneidad.

1.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con los antecedentes anteriormente mencionados, son varios los autores que abordan el razonamiento algebraico elemental, sin embargo son Gaita y Wilhelmi (2019) quienes asignan una valoración o nivel a cada actuación al resolver actividades matemáticas.

> los objetos varían desde la operación con números particulares, en el nivel exclusivamente aritmético (nivel 0), a la manipulación de incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares, en un nivel consolidado de algebrización (nivel 3), produciéndose una introducción paulatina de extensivos transformados en diferentes grados y contextos. Esta estructura en niveles permite sobrepasar la dicotomía aritmética-álgebra. (p.3).

Estas valoraciones asignadas o niveles progresivos de asignación y las diferentes investigaciones realizadas en RAE, nos motivan para realizar una establecer una investigación que tenga como protagonistas a los profesores en formación, a los niveles del RAE y que se enfoque en responder a la pregunta:

¿Cómo caracterizar el grado de representatividad de los significados institucionales del álgebra elemental en estudiantes para profesor de matemáticas?

Pregunta que perfila nuestro trabajo de investigación, sustentados como anteriormente se indicó en el hecho de que en la actualidad no hay estudio que vincule la idoneidad epistémica, el razonamiento algebraico y la formación de profesores.

1.3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Nos hemos propuesto un objetivo general y unos objetivos específicos que una vez se cumplan darán respuesta a la pregunta de investigación propuesta.

1.3.1. Objetivo General

- Valorar epistémicamente a profesores en formación en torno del razonamiento algebraico elemental.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Diseñar y aplicar indicadores enfocados en las prácticas matemáticas que pongan en evidencia la caracterización de representatividad del razonamiento del algebraico elemental de los profesores en formación.

- Caracterizar y analizar a partir de objetos matemáticos primarios la representatividad epistémica de álgebra elemental de los profesores en formación.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los elementos teóricos con la cual se sustenta nuestra propuesta de investigación, el cual corresponde al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), específicamente con la herramienta idoneidad didáctica y los niveles de razonamiento algebraico.

2.1. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En este enfoque se trabajan diferentes componentes, entre ellos la idoneidad didáctica (Godino, 2013), los aportes que logra esta herramienta son significativos y reflexivos para la orientación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta idoneidad se trabajan análisis en diferentes dimensiones o facetas como son: la epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

La idoneidad didáctica como lo advierte Godino (2013), es una herramienta que permite una transición entre una didáctica descriptiva explicativa con una didáctica normativa. A continuación, mostramos la descripción de la dimensión epistémica, la cual nos compete en esta investigación.

2.1.1. Dimensión Epistémica de la Idoneidad Didáctica

La dimensión epistémica de la idoneidad didáctica se refiere a una caracterización de "representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia." (Godino, 2013, p. 116), dicho significado será relativo teniendo en cuenta el nivel educativo donde se plantea el estudio y debe ser siempre elaborado pensando en los diversos tipos de problemas y contextos para hacer uso de los objetos de enseñanza.

Se tienen en cuenta diferentes componentes que juegan un papel fundamental para lograr esta noción los cuales pueden desglosares en objetos matemáticos primarios de acuerdo con el EOS, estos son:

- Situaciones problemas: “Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación” (Godino, 2013, p. 119).
- Lenguajes: se presenta que el “Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas” (Godino, 2013, p. 119). menciona que el lenguaje tiene que ser siempre adecuado a los estudiantes a los que se está dirigiendo.
- Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos): Tienen que ser correctos claros y adaptables aquellas definiciones y procedimientos de acuerdo con el nivel educativo, al igual los enunciados del tema a tratar, también “Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos” (Godino, 2013, p. 119).
- Argumentos: se menciona que el uso de “explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen” (Godino, 2013, p. 119) es necesario generar en el estudiante el argumentar cada una de las situaciones.
- Relaciones: Los diferentes objetos matemáticos como lo son diversas definiciones, problemas, proposiciones se relacionan entre ellas, también “Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas” (Godino, 2013, p. 119).

2.2. RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

El razonamiento algebraico como lo menciona Godino et al. (2015), es la forma como un sujeto abordan las situaciones planteadas entorno al algebra. Según el nivel de educativo donde se desarrolle se puede dividir en: educación primaria o en secundaria. Para cada escolaridad existen diferencias, como se muestran a continuación.

2.2.1. Razonamiento Algebraico en Educación Primaria

Esta forma de razonamiento se desarrolla en educación básica primaria se conoce como razonamiento algebraico elemental. Inicialmente, el termino de razonamiento algebraico elemental se usa por la dificultad a la hora de usar el termino álgebra, dado a todas las diferentes clasificaciones y significados que en muchos casos dependen de su contexto. Este trabajo se enfoca en el álgebra en educación primaria, también denominada como ‘algebra temprana’ o ‘early algebra’.

Para Ake (2013), el razonamiento algebraico se puede entender como la capacidad que tiene un sujeto para:

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

Esta capacidad de razonamiento algebraico elemental puede ser desarrollado

> Actividades/tareas matemáticas cuyas soluciones conlleven prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización. Los niveles de algebrización están definidos en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen en la solución de una actividad/tarea matemática en la escuela primaria, estableciendo para la actividad una configuración algebraica (Ake, 2013, p.101-102).

Esta forma de abordar el trabajo con el razonamiento algebraico elemental permite de acuerdo con la solución de las actividades/tareas ubicar un sujeto en un nivel determinado, por ende, es necesario saber cuál es el nivel que se asigna.

> El nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. (Godino et al., 2014, p. 206).

Estos niveles propuestos por Godino et al. (2014, p. 206), se establecen en orden ascendente y con asignación de valor categórico, estos niveles de razonamiento algebraico son:

- NIVEL 0: Ausencia del razonamiento algebraico o aritmético
- NIVEL 1: Incipiente de algebrización.
- NIVEL 2: Intermedio de algebrización.
- NIVEL 3: Consolidado de algebrización.

Estos cuatro niveles se detallan a continuación.

2.2.1.1. Nivel Ausencia del Razonamiento Algebraico o Aritmético

Este nivel cero (0), es denominado ausencia del razonamiento algebraico o aritmético el cual plantea una regla que se debe tener en cuenta a la hora de asignarlo tal y como lo describe Godino et al. (2012):

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla recursiva que generaliza la relación de los casos particulares (p.289).

La Tabla 1 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 1
Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel ausencia del razonamiento algebraico o aritmético.

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES

Se manejan objetos intensivos entendiendo estos como aquellos elementos generales (operaciones básicas) que se denominan de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con los objetos intensivos de primer grado (números particulares).	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos trabajados.

2.2.1.2. Nivel Incipiente de Algebrización

Este nivel uno (1), es denominado incipiente de algebrización el cual plantea una regla que se debe tener en cuenta a la hora de asignarlo tal y como lo describe Godino et al. (2012):

> Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. (p.289).

La Tabla 2 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 2
Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel incipiente de algebrización.

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Se manejan de manera implícita objetos intensivos.	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos, tanto en tareas estructurales como funcionales.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos.

2.2.1.3. Nivel Intermedio de Algebrización

Este nivel dos (2) es denominado intermedio de algebrización dado que plantea una regla la cual se debe tener en cuenta a la hora de asignar este nivel como lo afirma Godino et al. (2012):

> Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial

temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. (p.290).

La Tabla 3 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 3
Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel intermedio de algebrización.

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$ tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se hace uso de esta.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal

2.2.1.4. Nivel Consolidado de Algebrización

Este nivel tres (3) es denominado consolidado de algebrización, ya que plantea una regla la cual se debe tener en cuenta a la hora de asignar este nivel como lo afirma Godino et al. (2012):

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$ y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (p.291).

La Tabla 4 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 4
Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel consolidado de algebrización

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Intervienen indeterminadas incógnitas, ecuaciones, variables y funciones	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

particulares.

2.2.2. Razonamiento Algebraico En Educación Secundaria

Como se ha mencionado anteriormente es necesario, comprender que el RAE se encuentra en la educación primaria y que se plantean ciertos niveles siguientes a estos que dan cumplimiento en la educación secundaria como lo son:

- NIVEL 4: Uso de parámetros.
- NIVEL 5: Tratamiento de parámetros.
- NIVEL 6: Tareas estructurales.

A continuación, se detallan estos tres niveles subsiguientes al nivel de razonamiento algebraico elemental

2.2.2.1. Nivel Uso de Parámetros

Este nivel cuatro (4) se denomina uso de parámetros, ya que plantea una regla la cual se debe tener en cuenta a la hora de asignar este nivel como lo afirma Godino et al. (2015):

> está ligado a los procesos de "operar con la incógnita o con la variable". Se trata de un primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica (p.124).

La Tabla 5 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 5
Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel uso de parámetros

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Intervienen objetos de parámetros los cuales se ponen en juego.	Implican una fase superior en el proceso de reificación de los objetos intensivos representados	Simbólico – matemático los símbolos se usan de manera analítica.

	(familias de ecuaciones y funciones)	

2.2.2.2. Nivel Tratamiento de Parámetros

Este nivel cinco (5) se denomina tratamiento de parámetros, ya que plantea una regla la cual se debe tener en cuenta a la hora de asignar este nivel como lo afirma Godino et al. (2015):

> Puede ligar a la actividad matemática desplegada cuando se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables. Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones) (p. 127).

La Tabla 6 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 6

Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel tratamiento de parámetros

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Intervienen objetos de parámetros variables indeterminadas.	Realiza cálculos analíticos haciendo uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas.	Verbal-simbólico-literal

2.2.2.3. Nivel Tarea Estructural

Este nivel seis (6) se denomina tarea estructural, ya que plantea una regla la cual se debe tener en cuenta a la hora de asignar este nivel como lo afirma Godino et al. (2015):

> La introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o la de grupo), el estudio del álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación

y composición) son temas que se inician en Bachillerato, poniendo en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad (p. 129)

La Tabla 7 muestra los objetos, transformaciones y lenguajes que se debe alcanzar para ser ubicado en este nivel.

Tabla 7

Objetos, trasformaciones y lenguajes para el nivel de tareas estructurales

OBJETOS	TRANFORMACIONES	LENGUAJES
Intervienen objetos de parámetros variables indeterminadas.	Estudia estructuras algebraicas en sí misma, sus definiciones y propiedades estructurales.	Verbal-simbólico – literal

Para este trabajo se utilizaré el nivel de razonamiento algebraico en educación primaria o también conocido como nivel de razonamiento elemental (RAE).

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación tiene un alto énfasis en las características propias de la metodología cualitativa, puesto que el interés es: *caracterizar idoneidad epistémica, la cual vincula objetos matemáticos primarios con razonamiento matemático del álgebra elemental en estudiantes para profesor de matemáticas.*

Así mismo se tendrá un componente cuantitativo, en cuanto que se construirán instrumentos que generan respuestas escritas aplicados a muestras representativas de estudiantes en formación de profesores específicamente en matemáticas. Estos datos se analizarán con métodos estadísticos, los cuales permitirán comparar, contrastar e identificar diferencias

Por consiguiente, esta investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004) puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas, parcialmente incorrectas e incorrectas) y cualitativas (tipo de configuración cognitiva activadas en las distintas prácticas matemáticas llevadas a cabo).

Las investigaciones por métodos mixtos son un tipo de investigación en la que un investigador, o equipo de investigadores, combina elementos de los enfoques de investigación cuantitativo y cualitativo (i.e., uso de puntos de vista cuantitativos y cualitativos, recolección de datos, análisis, técnicas de inferencia) para los propósitos generales de amplitud y profundidad de la comprensión y corroboración (Johnson et al., 2007).(Johnson y Onwuegbuzie, 2004) definen esta metodología de investigación como sigue: "las investigaciones por métodos mixtos están formalmente definida como la clase de investigaciones donde los investigadores mezclan o combinan técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguajes, cuantitativos y cualitativos, dentro de un mismo estudio" (p. 17).

Dadas las características de este estudio, como se ha mencionado, se utilizará una metodología de tipo mixto, cuyos componentes población y fases se detallan más adelante.

3.1. POBLACIÓN Y MUESTRA

Para esta investigación se contó con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (LEMA) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. De los cuales participaron un grupo de veinticuatro estudiantes considerando aquellos que hubieran cursado asignaturas de cuarto semestre, garantizando de esta forma, que quienes hacen parte de esta investigación hubieran cursado los espacios de formación denominados:

- Transición aritmética álgebra.
- Didáctica del álgebra.

Espacios que en su contenido curricular cuenta con alta actividad matemática que incluye problematización del algebra, cuyo contenido matemático se relaciona con nuestra investigación.

Debido a la emergencia sanitaria y a la situación en la que se encontraba el país por confinamiento y aislamiento decretado por el estado Colombiano a causa del COVID-19, en el momento que se desarrolla esta investigación se optó por hacer invitación a participar de forma virtual, a través del espacio de formación configuraciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas, en el cual los estudiantes cumplían con las características ya establecidas.

3.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Para alcanzar los objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación se desarrollaron las siguientes fases:

3.2.1. Fase Uno de Investigación:

Esta fase inicial da las bases de nuestra investigación, en ella se realizó una recolección de información para la construcción de los antecedentes, enfocados en tres pilares, los cuales son el RAE en formación para profesores, en entorno escolar y por último investigaciones sobre idoneidad didáctica en el razonamiento algebraico elemental, tal como se muestra en el capítulo 1. También se determinó la selección del marco teórico para el desarrollo de nuestra investigación, el cual corresponde al enfoque Ontosemiótico de conocimiento y la instrucción matemática como se muestra en el capítulo 2.

3.2.2. Fase Dos de Investigación:

Para esta segunda fase se realizó una búsqueda de información, para la selección de las situaciones problemas que se aplican a la población en estudio, en algunos de ellos se tomó la decisión de adaptarlas y agruparlas en una actividad, así mismo, se decidió que, por razones de confinamiento en el país (como se explicó anteriormente), las actividades se deberían realizar de manera virtual a través de un formulario de Google, el cual se presenta a los sujetos de estudio, en forma de cuestionario, en donde se dan las indicaciones pertinentes y de esta forma obtener las respuestas a cada situación planteada y lograr la caracterización del grupo de estudio.

3.2.3. Fase Tres de Investigación:

Para esta última fase de investigación se establece el uso de variables para el análisis de la información, variables que permiten la categorización de cada una de las situaciones problema presentada a los sujetos, así mismo se hace análisis de su representatividad en el razonamiento algebraico en la población de estudio y de esta forma dar cumplimiento al segundo objetivo específico y con ello al general.

3.3. VARIABLES DE ANÁLISIS

Como hemos mencionado, este estudio se enmarca en una metodología de tipo mixta, debido a que consideramos variables cualitativas y cuantitativas para el análisis de la información. Como variable cualitativa la denominaremos *tipo de configuración Onteosemiótica cognitiva*, la cual refiere a las configuraciones Ontosemióticas cognitivas que los participantes movilizarán a propósito de una determinada práctica. Esta variable nos permitirá discriminar entre respuestas correctas, parcialmente correctas, parcialmente incorrecto y respuestas incorrectas (tipo que se describe más adelante).

La segunda variable que se considerará es de corte cuantitativo y la denominaremos de *tipo descriptiva*, la cual refiere a la organización de las respuestas obtenidas teniendo en cuenta la clasificación hecha en la variable anterior, esto para realizar una descripción de estas.

3.4. INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LOS DATOS

Para la recolección de los datos hemos considerado, principalmente, el diseño de un cuestionario que permita explorar, la articulación de los significados institucionales (faceta epistémica) con los significados personales (faceta cognitiva), relacionados con el razonamiento algebraico elemental.

Profundizaremos en la descripción de este instrumento para la recolección de datos, cuando se aborde el capítulo 4, destinado al diseño de este.

3.5. TÉCNICAS PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS

La técnica de análisis usada para la variable cualitativa es el análisis semiótico (Godino, 2002) la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes para profesor al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino et al., 2007). Este análisis lo plantearemos desde la perspectiva institucional y personal, lo que dará paso a la descripción detallada tanto de las *configuraciones Ontosemióticas epistémicas* (análisis a priori de los conocimientos; conocimientos esperados), como de las *configuraciones Ontosemióticas cognitivas* (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

Capítulo 4

DISEÑO DEL INSTRUMENTO

En este capítulo se presenta el proceso que se siguió para la construcción de un instrumento que permite evidenciar aspectos de razonamiento algebraico elemental en estudiantes para profesor de matemáticas y que a su vez permita construir las *configuraciones Ontosemióticas cognitivas* (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

4.1. OBJETIVO DEL INSTRUMENTO

En este instrumento se ha propuesto realizar una aproximación del razonamiento algebraico elemental para valorarlo epistémicamente, por lo tanto, el diseño se centra específicamente con la intención de que se evidencie una forma de abordar las respuestas a la situación planteada, para asignar un nivel de razonamiento algebraico en el que puede ser ubicado el estudiante.

Este trabajo se enfatiza en el razonamiento algebraico elemental (RAE) por lo cual solo se trabajarán los niveles ausencia del razonamiento algebraico o aritmético hasta el nivel consolidado de algebrización, planteados por Godino et al. (2012).

4.2. CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO

Como parte del proceso de diseño del instrumento, se creó un documento inicial, mediante la recopilación de los trabajos que han sido estudiados en las diversas investigaciones que se tienen en el campo de didáctica del álgebra. A partir de este, se seleccionaron algunas situaciones problema que sus formas de responder cumplieran básicamente con los criterios para la ubicación de un nivel de razonamiento algebraico elemental, que son presentados en el Capítulo 2, dichas situaciones fueron adaptadas a un contexto conocido por los profesores en formación.

4.2.1. Situaciones Problema

El instrumento, consta de cinco situaciones problema, la solución entregada por el estudiante lo ubica en un nivel de razonamiento algebraico elemental alcanzado de acuerdo con el análisis y la caracterización propuesta.

4.2.1.1. Situación Distribución de Dulces

Esta tarea se ha denominado distribución de dulces, es adaptada de Godino et al. (2012), donde la situación original menciona que el ayuntamiento compro flores, cambiado por la profesora y dulces, lo cual le da nombre a la misma, la **Figura 1** muestra la situación planteada que tiene como finalidad determinar la ubicación en el nivel denominado ausencia del razonamiento algebraico o aritmético, esto de acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 1

Situación Distribución de Dulces

La profesora FERNANDA compro para Halloween 25 bolsas de dulces. Cada bolsa contenía 20 dulces. Tras unos días el hijo de la profe se comió 72 de los dulces. ¿Cuántos dulces quedan?

4.2.1.1.1. Configuración Ontosemiótica Epistémica de la situación distribución de dulces

La respuesta plausible por el estudiante es que plante procesos y un razonamiento puramente aritmético, dado que el ejercicio está pensado en que el estudiante maneje objetos intensivos, como lo son la multiplicación y la sustracción en elementos naturales únicamente, haciendo uso de un lenguaje numérico.

4.2.1.1.1.1. Solución Plausible

A continuación, se presentará la solución plausible establecida por los investigadores del trabajo:

Primero debemos determinar la cantidad de dulces que hay en total.

$$\begin{array}{r@{\;}l} 25 \longrightarrow & \boxed{\text{Bolsas}} \\ \times\, 20 \longrightarrow & \boxed{\text{Dulces por bolsa}} \\ \hline 500 \longrightarrow & \boxed{\text{Cantidad de dulces totales}} \end{array}$$

Ahora debemos restar los 72 dulces que se comio el hijo de la profesora.

$$\begin{array}{r@{\;}l} 500 \longrightarrow & \boxed{\text{Cantidad de dulces totales}} \\ -\, 72 \longrightarrow & \boxed{\text{Dulces que se comió el hijo de la profe}} \\ \hline 428 \longrightarrow & \boxed{\text{Dulces que quedan}} \end{array}$$

La Tabla 8 presenta los objetos, transformaciones y lenguajes que debe presentar la solución de la situación distribución de dulces.

Tabla 8

Análisis Ontosemiótico de la Situación Distribución de Dulces

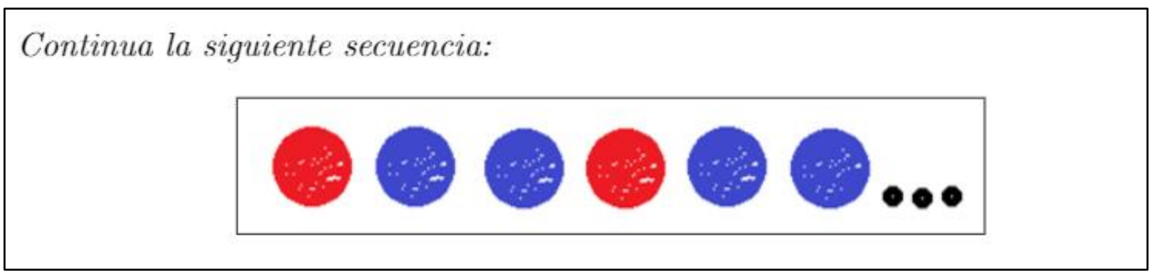
COMPONENTES	DESCRIPCIÓN
Lingüístico	La situación se plantea en un lenguaje en un lenguaje natural y su solución debe estar en un lenguaje matemático.
Proposiciones/ Propiedades	La situación plantea el uso de operaciones básicas (resta y multiplicación) y en el desarrollo de estas debe tener en cuenta la jerarquía entre ellas.
Argumentos	En respuesta de la situación es necesario mencionar el por qué se realiza cada uno de los cálculos planteados por los estudiantes y su vez el cómo estos lo llevan a la respuesta correcta.
Conceptos/ Definiciones	El estudiante debe reconocer la proporcionalidad que se encuentra entre la cantidad de dulces por bolsa y la cantidad de dulces por las $\mathbf{25}$ bolsas.
Procedimientos	El estudiante debe multiplicar y restar.

4.2.1.2. Situación Secuencia de círculos

Esta tarea se ha denominado secuencia de círculos, es adaptada de Godino et al. (2012), la cual estaba representado textual (las palabras de los colores) a una representación gráfica, la **Figura 2** muestra la situación que tiene como finalidad, que la respuesta dada por el estudiante pueda ser ubicada dentro del nivel denominado incipiente de algebrización, esto de acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 2

Situación Secuencia de Círculos



4.2.1.2.1. Configuración Ontosemiótica epistémica de la situación secuencia de puntos

La respuesta esperada es que se genere una "regla" o describa la secuencia que corresponde a la imagen y sus consecutivos, usando un lenguaje natural, estableciendo generalidades, pero sin realizar ninguna manipulación en los objetos.

4.2.1.2.1.1. Solución Plausible

A continuación, se presentará la solución plausible establecida por los investigadores del trabajo:

Para facilitar la descripción de la figura estableceremos los siguiente:

$A \rightarrow$ Azul

$R \rightarrow$ Rojo

Con esto podemos afirmar que siempre después de un punto rojo siguen dos puntos azules.

$$R, A, A, R, A, A \ \cdots$$

La Tabla 9 presenta los objetos, transformaciones y lenguajes que debe presentar la solución de la situación secuencia de puntos.

Tabla 9

Análisis Ontosemiótico de la Situación Secuencia de Puntos

COMPONENTES	DESCRIPCIÓN
Lingüístico	La situación hace uso de un lenguaje icónico y se espera que el estudiante en su respuesta utilice lenguaje natural o matemático.
Proposiciones/ Propiedades	En la situación se plantea una secuencia en la cual se espera que el estudiante establezca los elementos siguientes, además de enunciar la generalidad.
Argumentos	En la solución esperada el estudiante debe justificar el porqué de la generalidad establecida.
Conceptos/ Definiciones	En la solución esperada la única relación que el estudiante puede estableces, es aquella con la imagen, el enunciado y su respuesta.
Procedimientos	El estudiante debe deducir, organizar y generalizar.

4.2.1.3. Situación del Tragamonedas

Esta tarea se ha denominado tragamonedas y es modificada de Godino et al (2012), teniendo en cuenta que la situación original menciona una caja mágica, para este instrumento se cambió esto a una tragamonedas, la **Figura 3** muestra la situación que tiene como finalidad, que la respuesta dada por el estudiante pueda ser ubicada dentro del nivel denominado intermedio de algebrización, esto de acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 3

Situación Tragamonedas

> *Una traga-monedas duplica el número de monedas que se metan en ella, pero después de usarla cada vez hay que pagar cuatro monedas. Fernando probó e introdujo sus monedas en la máquina y efectivamente, se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía FERNANDO al principio?*

4.2.1.3.1 Configuración Ontosemiótica epistémica de la situación el tragamonedas

Se espera que, en esta situación, además de establecer la respuesta que se espera es que el estudiante logre plantear una incógnita y variables para llegar a la solución y así ser ubicado en el nivel que corresponde este ejercicio, haciendo uso de un lenguaje matemático, planteando argumentos que den validez a su respuesta.

4.2.1.3.1.1. Solución Plausible

A continuación, se presentará la solución plausible establecida por los investigadores del trabajo:

Primero debemos determinar las variables con las cuales trabajaremos:

- x: Es la cantidad de monedas iniciales de Fernando.
- y: Es la cantidad de monedas tras el primer intento.

Ahora determinamos lo sucedido en cada intento:

1) $2x - 4 = y$
2) $2y - 4 = 0$

Reemplazamos 1 en 2:

$$\begin{aligned} 2(2x-4)-4 &= 0 \\ 4x-8-4 &= 0 \\ 4x-12 &= 0 \\ 4x &= 12 \\ x &= \frac{12}{4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La Tabla 10 presenta los objetos, transformaciones y lenguajes que debe presentar la solución de la situación el tragamonedas.

Tabla 10
Análisis Ontosemiótico de la Situación el Tragamonedas

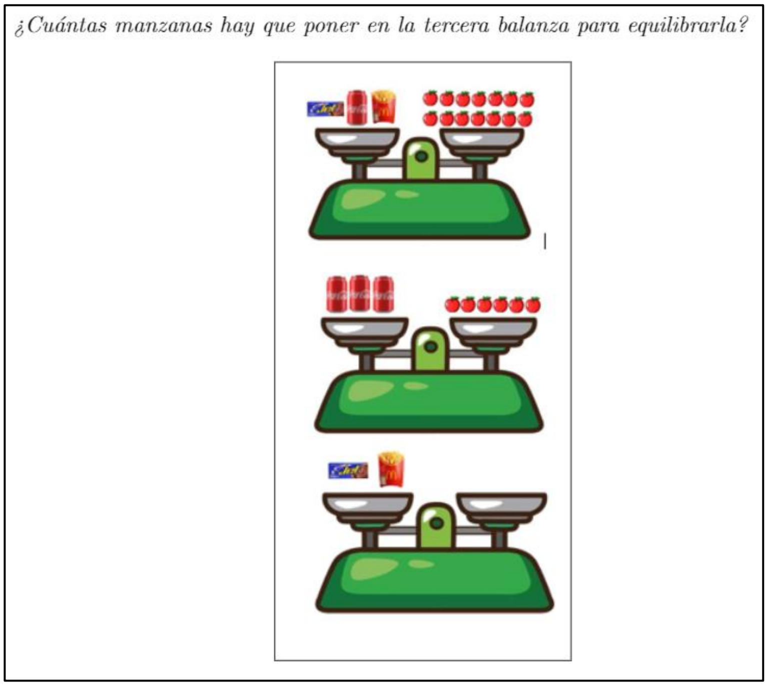
COMPONENTES	DESCRIPCIÓN
Lingüístico	En la situación se establece un lenguaje natural acompañado del matemático, y en la solución esperada el estudiante deberá establecerla con un lenguaje completamente matemático.
Proposiciones/ Propiedades	En la situación se establecen uso de jerarquías en las operaciones además de variables dependientes e incógnitas.
Argumentos	Expresa matemáticamente las operaciones descritas en el enunciado para obtener la solución correspondiente.
Conceptos/ Definiciones	El estudiante reconoce las palabras duplicar y pagar como operaciones matemáticas y la dependencia de los momentos mencionados en el enunciado.
Procedimientos	El estudiante debe establecer ecuaciones, sustituir, desarrollar y despejar.

4.2.1.4. Situación de la Balanza

Esta tarea se ha denominado balanza y es adaptada de Godino et al (2012), esta situación original mente mostraba en la balanza herramientas varias las cuales se cambiaron a comida y de igual manera la cantidad de estas, la **Figura 4** muestra la situación que tiene como finalidad, que la respuesta dada por el estudiante pueda ser ubicada dentro del nivel denominado consolidado de algebrización, de acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 4

Situación de la Balanza



4.2.1.4.1 Configuración Ontosemiótica epistémica de la situación de la balanza

Se espera en esta situación que el estudiante plantea de manera simbólica las ecuaciones que necesite logrando aplicar una técnica de sustitución para resolver la situación haciendo uso de un lenguaje matemático que de concordancia con los argumentos que plantea.

4.2.1.4.1.1. Solución Plausible

A continuación, se presentará la solución plausible establecida por los investigadores del trabajo:

En primera medida debemos establecer las variables a trabajar:

- C = Chocolatina
- G = Gaseosa
- P = Papas
- M = Manzanas
- X = Manzanas que desconocemos

Ahora establecemos las igualdades planteadas en la imagen:

1) $C + G + P = 14M$
2) $3G = 6M$
3) $C + P = X$

Desarrollamos 2):

$$\begin{aligned} 3G &= 6M \\ G &= \frac{6M}{3} \\ G &= 2M \end{aligned}$$

Reemplazamos G en 1) y desarrollamos:

$$\begin{aligned} C + G + P &= 14M \\ C + 2M + P &= 14M \\ C + P &= 14M - 2M \\ C + P &= 12M \end{aligned}$$

Reemplazamos lo obtenido en 3):

$$X = 12M$$

La Tabla 11 presenta los objetos, transformaciones y lenguajes que debe presentar la solución de la situación de la balanza.

Tabla 11

Análisis Ontosemiótico de la Situación de la Balanza

COMPONENTES	DESCRIPCIÓN
Lingüístico	El enunciado se estableció en un lenguaje icónico, en el cual él estudiante debe realizar un cambio a una representación simbólico literal acompañada de lenguaje matemático.
Proposiciones/ Propiedades	El estudiante debe establecer las igualdades que se representan en el enunciado, para así poder realizar desarrollo de estas y encontrar el valor de la incógnita.
Argumentos	Teniendo en cuenta el cambio de representación, el estudiante debe plantear el por qué la representación establecida por él, si hace referencia al enunciado.

Conceptos/ Definiciones	El estudiante debe generar la relación entre las igualdades planteadas y como estas con ayuda de reemplazos y despejes, puede hallar la incógnita.
Procedimiento	El estudiante debe establecer igualdades, ecuaciones, desarrollos y despejes.

4.2.1.5. Situación Medios de Transporte

Esta tarea se ha denominada medios de trasporte y es adaptada de Godino et al (2012), la cual la situación original menciona medios de locomoción y el tren, cambiando estas a caminando y transporte, laesto **de** acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 5 muestra la situación que tiene como finalidad que la respuesta dada por el estudiante pueda ser ubicada dentro de los niveles los cuales trabaja esta investigación, esto de acuerdo con los objetos matemáticos primarios puestos en escena por el estudiante.

Figura 5

Situación Medios de Transporte

Para ir al colegio los estudiantes utilizan dos medios de trasporte. Por cada estudiante que va en carro hay 3 que van caminando. Si hay 212 estudiantes en el colegio. ¿Cuántos estudiantes utilizan cada medio de trasporte?

4.2.1.5.1 Configuración Ontosemiótica epistémica de la situación medios de transporte

Se espera en esta situación que el estudiante plantea de manera simbólica las ecuaciones que necesite logrando aplicar una técnica de sustitución para resolver la situación haciendo uso de un lenguaje matemático que de concordancia con los argumentos que plantea.

4.2.1.5.1.1. Solución Plausible

A continuación, se presentará la solución plausible establecida por los investigadores del trabajo:

En primera medida debemos establecer las variables a trabajar:

- X = Estudiantes que van en carro.

- Y = Estudiantes que van caminando.

Establecemos las igualdades mencionadas:

1) $Y = 3X$
2) $X + Y = 212$

Reemplazamos 1) en 2):

$$
\begin{aligned}
X + Y &= 212 \\
X + 3X &= 212 \\
4X &= 212 \\
X &= \frac{212}{4} \\
X &= 53
\end{aligned}
$$

Reemplazamos X en 1):

$$
\begin{aligned}
Y &= 3X \\
Y &= 3(53) \\
Y &= 159
\end{aligned}
$$

La Tabla 12 presenta los objetos, transformaciones y lenguajes que debe presentar la solución de la situación medios de transporte.

Tabla 12

Análisis Ontosemiótico de la Situación Medios de Transporte

COMPONENTES	DESCRIPCIÓN
Lingüístico	El enunciado se estableció en un lenguaje natural apoyado del lenguaje matemático, el cual él estudiante debe realizar un cambio a una representación simbólico literal acompañada de lenguaje matemático.
Proposiciones/ Propiedades	El estudiante debe establecer las igualdades que se representan en el enunciado, para así poder realizar desarrollo de estas y encontrar el valor incognito.
Argumentos	Teniendo en cuenta el cambio de representación, el estudiante debe plantear el por qué la representación establecida por él, si hace referencia al enunciado.

Conceptos/ Definiciones	El estudiante debe generar la relación entre las igualdades planteadas y como estas con ayuda de despejes, puede hallar la incógnita.
Procedimientos	El estudiante debe establecer igualdades, ecuaciones, desarrollos y despejes.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan los resultados de la aplicación del instrumento. En la primera parte se muestra la descripción de la aplicación del instrumento; en la segunda el análisis cuantitativo de los datos obtenidos a partir de la aplicación del instrumento, y en la tercera parte se hace un análisis cualitativo sobre el razonamiento algebraico elemental de los estudiantes para profesor de matemáticas.

5.1. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Como se indicó en el capítulo 3, el instrumento se aplicó a 24 estudiantes para profesor de matemáticas, Para la resolución de las situaciones problema los estudiantes contaron con un tiempo de dos horas. La prueba se aplicó en una sola sesión en el mes de agosto de 2020.

La aplicación de la prueba estuvo a cargo de los investigadores autores de este trabajo. Antes de comenzar la prueba se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responderla, y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que solamente debían escribir su código para verificar si estaban en el semestre requerido.

5.1.1 Análisis

Para el análisis de los datos obtenidos de la implementación del cuestionario, consideramos dos variables:

1. *Tipo de configuración cognitiva* (respuestas correctas, parcialmente correctas, parcialmente incorrectas e incorrecta).
2. *Tipo descriptiva* (Agrupación y descripción de las respuestas dada su clasificación).

Para el análisis de los datos obtenidos, respecto a esta última variable (tipo de configuración cognitiva), como se ha señalado, se utilizó la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002; Godino et al., 2011; Malaspina & Font, 2010), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por estudiantes al resolver problemas/situaciones, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en las estas prácticas (Godino et al., 2007).

5.1.1.1. Variables y valores considerados en el análisis

Como se he señalado, para el análisis de los datos recolectados con la implementación del instrumento se consideran dos variables: La primera de corte cualitativo que *refiere al Tipo de configuración cognitiva de las respuestas*. En este sentido se asignaron las siguientes categorías:

- Correcto: Se categorizan bajo esta categoría aquellas respuestas que cumplan con un argumento basado en el uso adecuado de las reglas, lenguajes y relaciones que den pie a la solución esperada de dicha situación, además de ser superado el nivel establecido de acuerdo con el RAE.
- Parcialmente Correcto: En esta categoría es necesario que sea evidente en las respuestas planteadas, argumentos que utilicen correctamente las reglas, relaciones y lenguajes necesarios para esta, aunque se presente una respuesta incorrecta, o sus argumentos no sean los suficientemente significativos a pesar de establecer una respuesta correcta, esto logra superar el nivel correspondiente a dicha situación.
- Parcialmente Incorrecto: se categorizan, respuestas en las cuales se presentan una solución acertada para dicha situación, pero no se evidencia de ninguna manera un argumento que demuestre el uso de reglas, relaciones y lenguajes que den sustento a esta, no superando el nivel correspondiente a dicha situación.
- Incorrecto: Como última categoría se establecerán aquellas respuestas que carezcan de uso de reglas, relaciones y lenguajes con una solución incorrecta o aquellas preguntas que no tengan respuesta.

En cuanto a la variable cuantitativa *tipo descriptivo*, se puede señalar que fue principalmente de corte descriptiva y dependió de los procesos, los objetos matemáticos y los significados que a éstos asignaban los estudiantes en la resolución que daban a las situaciones problema. No obstante, debido a las características de las tareas y a las respuestas que éstas admiten, fue posible establecer una agrupación de las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración cognitiva que movilizaban en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas. A partir de dichas agrupaciones, se realiza un estudio cuantitativo (conteo, frecuencias y porcentajes) de los tipos de configuraciones cognitivas movilizadas en la resolución de una situación problema. La codificación asignada a las configuraciones cognitivas activadas en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas, también se presenta en más adelante en este capitulo

5.2. ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES

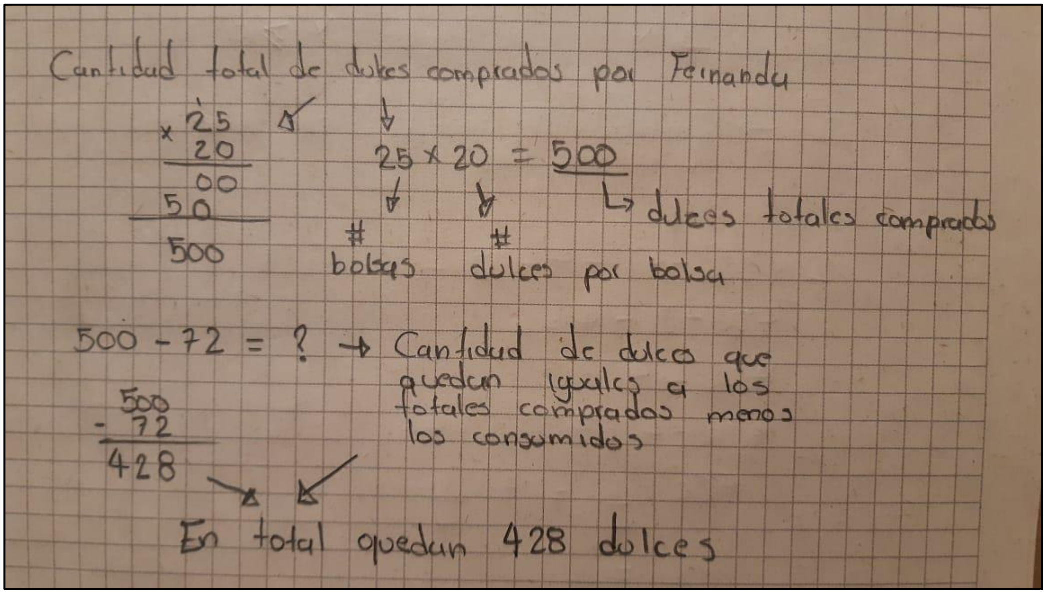
Esta sección presenta el estudio de los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario, considerando las dos variables definidas para la investigación: *tipo de configuración cognitiva de las respuestas* (correctas, parcialmente correctas, parcialmente incorrectas e incorrectas) y *tipo descriptivo.*

5.2.1. Situación Distribución de Dulces

En esta primera situación problema, se presentan dos tipos de respuesta, inicialmente una donde los estudiantes plantean un razonamiento en el cual ponen en juego las reglas de jerarquía de operaciones, al plantear como primer acercamiento un uso lenguaje matemático con objetos intensivos que intervienen para dar argumento a la respuesta, de igual manera, únicamente se expresa el uso de un pensamiento aritmético siendo está ubicada en la categoría denominada correcta, como se muestra en la respuesta del estudiantes 17 (E17), la evidencia de la respuesta se presenta en la **Figura 6.**

Figura 6

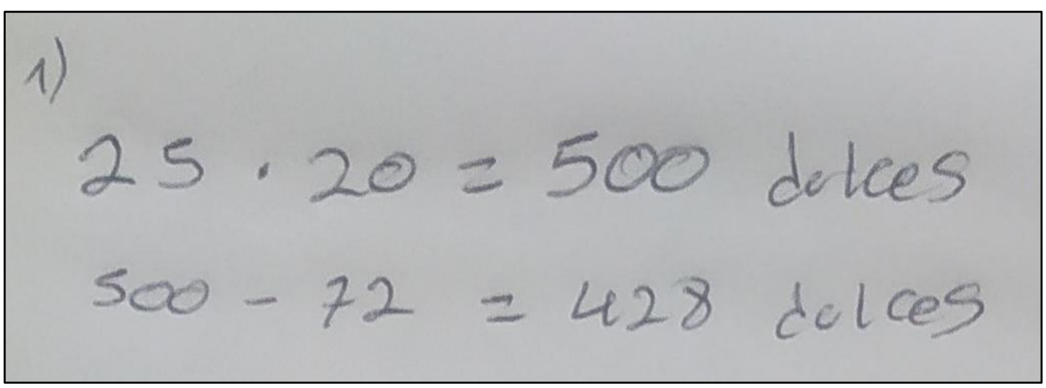
Ejemplo Respuesta Correcta Dada por E17



Por otra parte, los estudiantes pueden optar por no plantear dichas reglas y plasmar el uso de objetos intensivos a partir de un lenguaje matemático o natural donde pone en juego operaciones básicas dado así solución a dicha situación, como lo muestra la respuesta E2, la evidencia de la respuesta se presenta en la **Figura 7**, por ende, a partir de la categorización, esta se ubicada en parcialmente correcta.

Figura 7

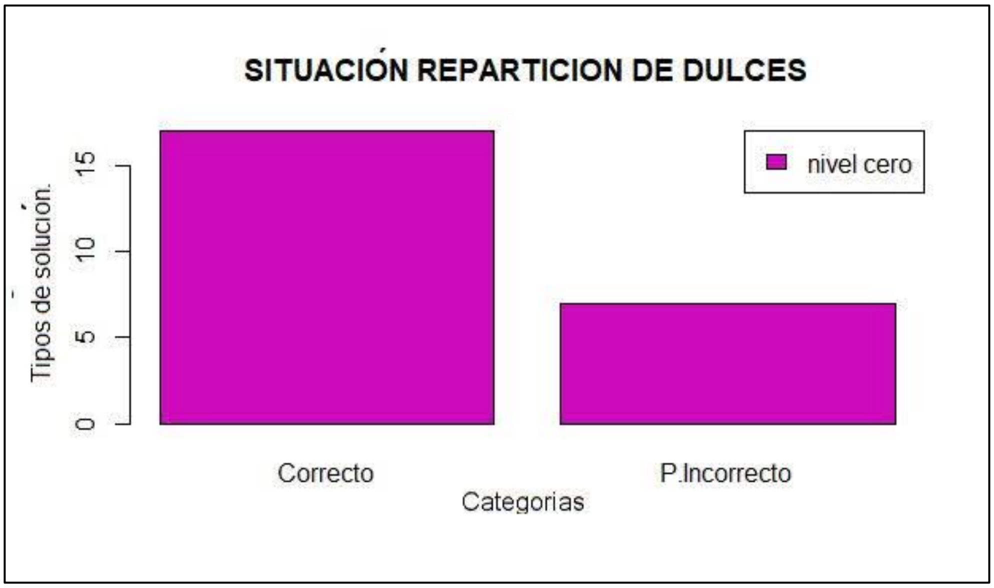
Ejemplo Respuesta Parcialmente Correcta Dada por E2



Con estos tipos de respuesta, es de notar como se muestra en la **Figura 8**, que diecisiete de los veinticuatro profesores en formación, se encuentran categorizados en las respuestas tipo correcto y siete de estas son categorizadas en tipo parcialmente correcto, en consecuencia, dicha muestra logra superar el nivel 0 o ausencia del razonamiento algebraico o aritmético, que plantea esta situación, expresando un uso de pensamiento aritmético.

Figura 8

Gráfico Situación Distribución de Dulces

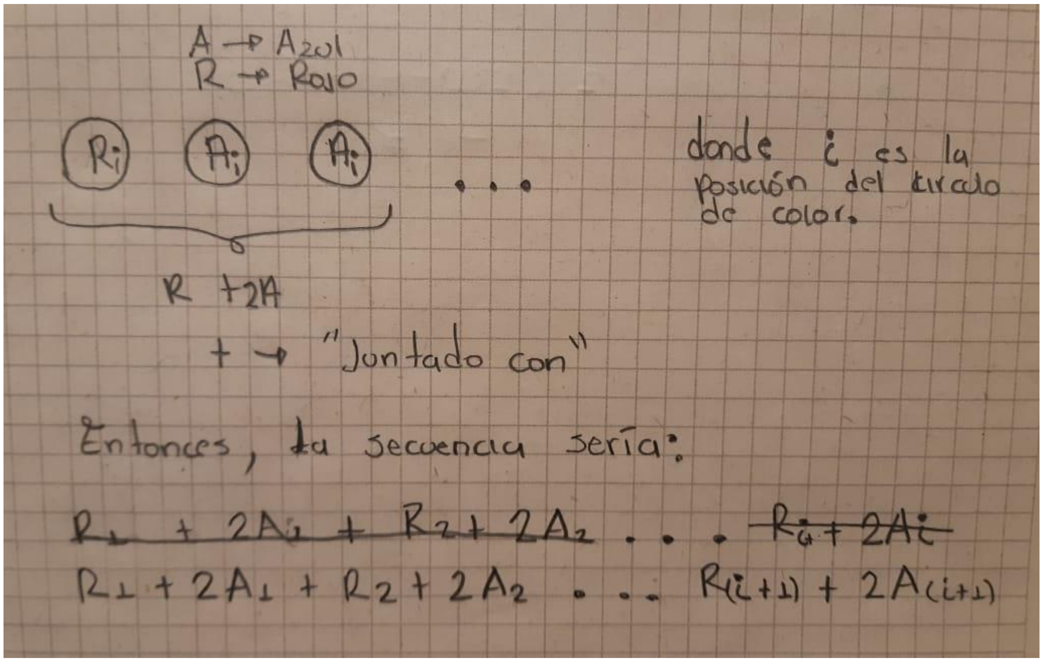


5.2.2. Situación Secuencia de Círculos

Para esta situación problema los estudiantes presentan dos tipos de respuestas, una de estas logra plasmar un lenguaje natural o matemático, donde pone en juego argumentos algebraicos, estos relacionados a partir de ciertas reglas implícitas, en este caso generalizaciones, como se muestra en la respuesta E16 la evidencia de la respuesta se presenta en la **Figura 9**, este razonamiento da pie a una categorización de tipo correcto, donde el estudiante supera el nivel que plantea esta situación.

Figura 9

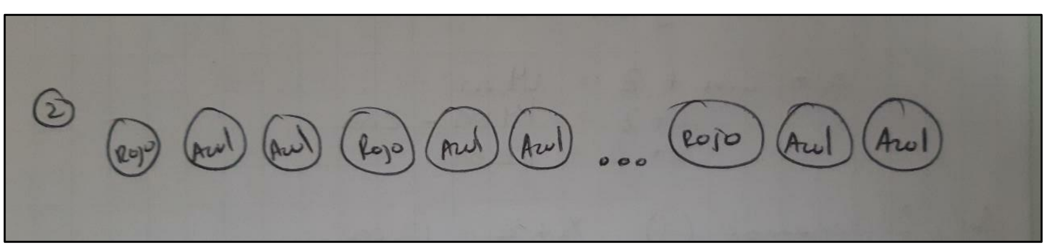
Ejemplo Respuesta Correcta Dada por E16



El otro tipo de respuesta que se pudo apreciar es cuando los estudiantes se limitan a plasmar los elementos que completan la secuencia, con un lenguaje matemático o natural, sin establecer ningún tipo de argumentos o reglas como las generalidades, como lo muestra la respuesta E7, la evidencia de la respuesta se presenta en la **Figura 10**, esto categorizándolos en un tipo parcialmente incorrecto, no logrando superar el nivel que se espera.

Figura 10

Ejemplo Respuesta Parcialmente Incorrecta Dada por E7



Estas respuestas y como se observa en la **Figura 11** la cual plantea que veintitrés de los veinticuatro profesores en formación se encuentra categorizados en tipo parcialmente incorrecto generando así, que estos sean ubicados en el nivel cero o ausencia del razonamiento algebraico o aritmético, dado a un desarrollo únicamente aritmético, en comparación al estudiante que logra la categoría de tipo correcto y por ende logra superar el nivel uno o incipiente de algebrización, planteando así, concepciones de un razonamiento algebraico.

Figura 11

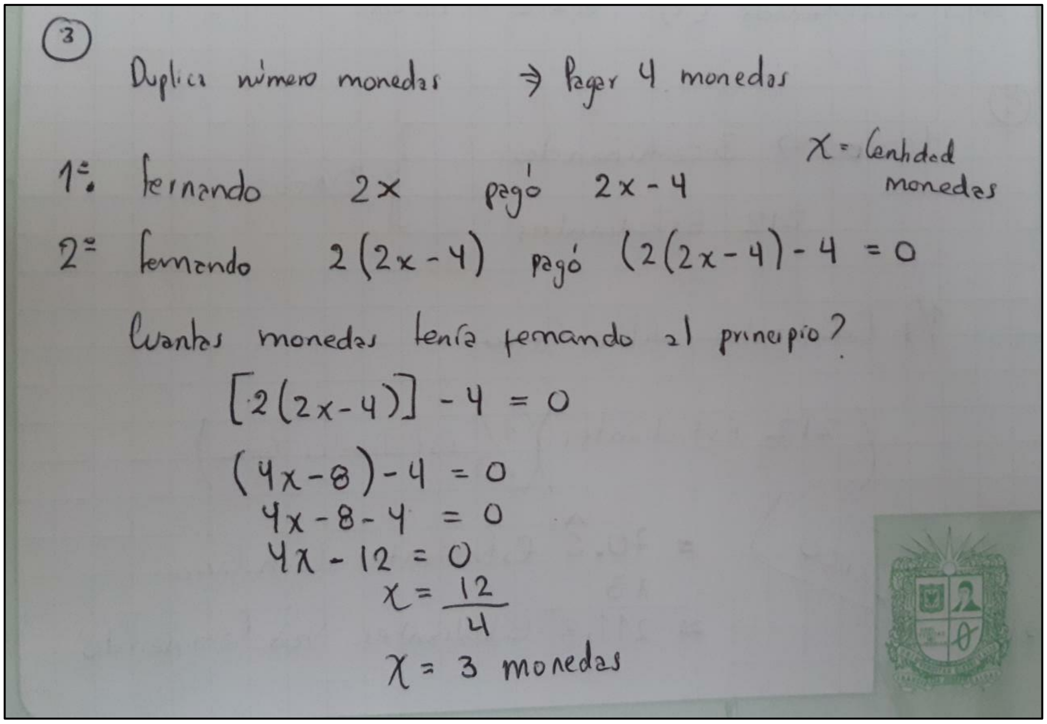
Gráfica Situación Secuencia de Puntos

5.2.3. Situación del Tragamonedas

Para esta situación se presentan todos los tipos de categorización, ya que, en el primer tipo de respuesta como la respuesta E7, la evidencia se presenta en la **Figura 12**, se encuentran los profesores en formación que plantean un argumento donde pone en juego incógnitas, desarrollando un pensamiento algebraico relacionando estas con el uso de un lenguaje matemático o natural, además de lograr establecer la respuesta esperada logrando estar categorizada en correcto.

Figura 12

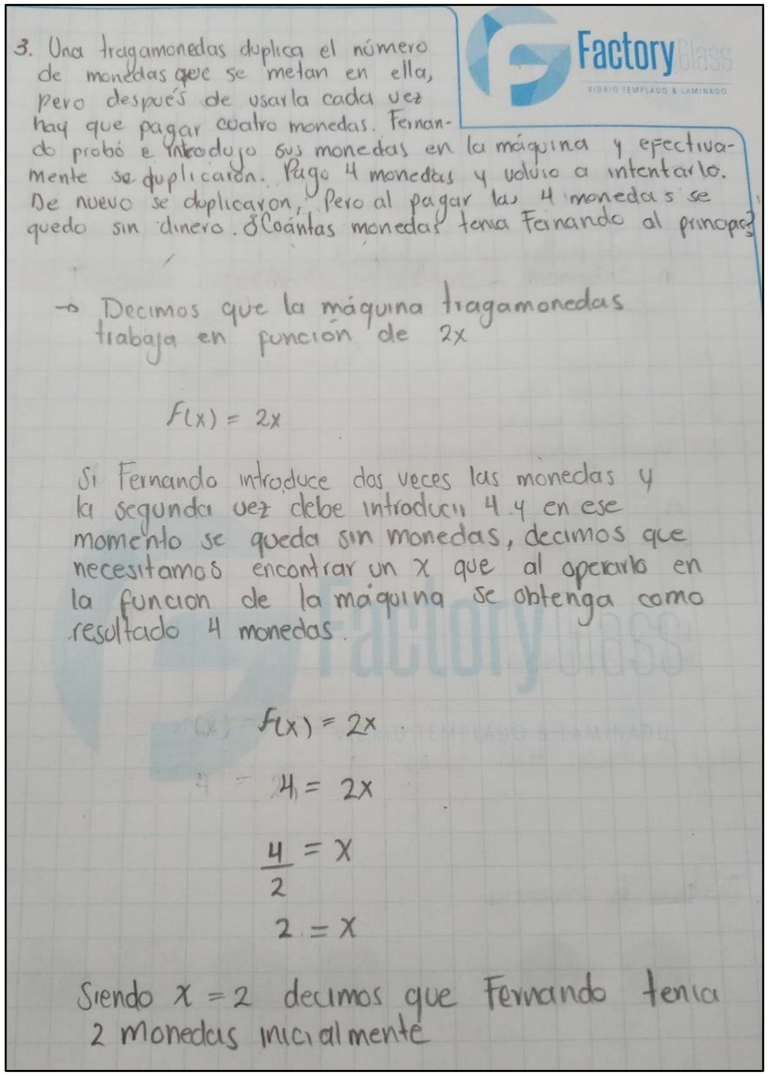
Ejemplo Respuesta Correcta Dada por E7



En una segunda manera de responder como lo muestra la repuesta E8 y la evidencia se presenta en la **Figura 13**, se presenta la categorización de tipo parcialmente correcta, dado que el estudiante desarrolla incógnitas, razonamiento algebraico, argumentos y lenguajes ya sean natural o matemático, pero esto no llega a la respuesta esperada.

Figura 13

Ejemplo Respuesta Parcialmente Correcta Dada por E8



3. Una tragamonedas duplica el número de monedas que se metan en ella, pero después de usarla cada vez hay que pagar cuatro monedas. Fernando probó e introdujo sus monedas en la máquina y efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Fernando al principio?

→ Decimos que la máquina tragamonedas trabaja en función de 2x

$$f(x) = 2x$$

Si Fernando introduce dos veces las monedas y la segunda vez debe introducir 4 y en ese momento se queda sin monedas, decimos que necesitamos encontrar un x que al operarlo en la función de la máquina se obtenga como resultado 4 monedas.

$$f(x) = 2x$$

$$4 = 2x$$

$$\frac{4}{2} = x$$

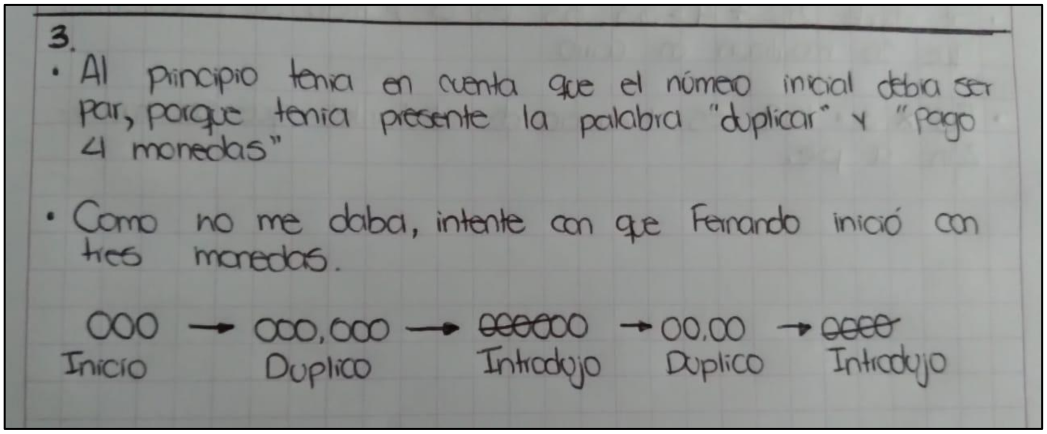
$$2 = x$$

Siendo $x = 2$ decimos que Fernando tenía 2 monedas inicialmente

Para estas respuestas los profesores en formación lograban llegar a la solución esperada, como se muestra en la respuesta E12 y se evidencia la respuesta en la **Figura 14**, usando un lenguaje matemático, planteando objetos intensivos, pero no logran un razonamiento algebraico ya que lo planteado se limita al tanteo siento esto un desarrollo aritmético, por ende, se categoriza en el tipo parcialmente incorrecto.

Figura 14

Ejemplo Respuesta Parcialmente Incorrecto Dada por E12



3.
- Al principio tenia en cuenta que el número inicial debia ser par, porque tenia presente la palabra "duplicar" y "pago 4 monedas"
- Como no me daba, intente con que Fernando inició con tres monedas.

000 → 000,000 → ~~000000~~ → 00,00 → ~~0000~~

Inicio Duplico Introdujo Duplico Introdujo

Como último, en las respuestas que se categorizan en el tipo incorrecto, como por ejemplo la respuesta E21 que se evidencia en la **Figura 15**, ya que son aquellas las cuales los profesores en formación se limitan única y exclusivamente a plantear una respuesta, esta siento no acertada, sin ningún tipo de argumento o lenguaje matemático como.

Figura 15

Ejemplo Respuesta Incorrecta Dada por E21

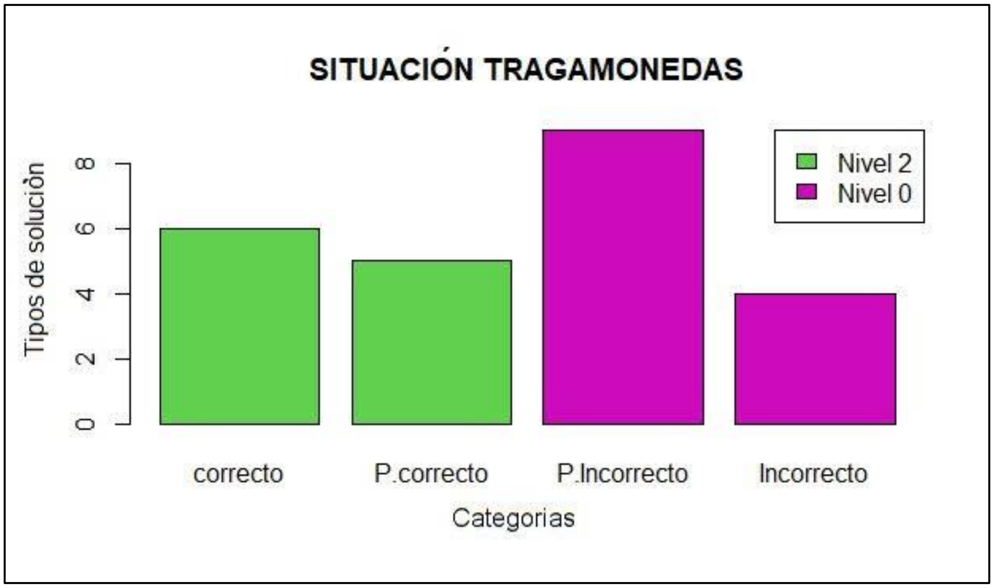
Fernando en su primer uso metió sus primeras dos monedas y se duplicaron a cuatro monedas, después tuvo que pagar las cuatro monedas por el uso de la máquina, luego, metió otras dos monedas y se duplicaron a cuatro de ellas, pero tuvo que pagar las cuatro monedas por el uso de la máquina. En consecuencia, Fernando tenía 4 monedas en su bolsillo al iniciar a jugar.

Dada la variedad de categorización que se logró plantear en las respuestas de esta situación, y como se muestra en la **Figura 16** podemos decir, que once de los veinticuatro profesores en formación superan el nivel que se determina para esta, siendo denominado intermedio de algebrización, comprendiendo que en estos se encuentran aquellos categorizados en correcto y parcialmente correcto, en la categoría inicial se encuentras seis estudiantes y en la siguiente cinco.

Los estudiantes que no superan este nivel son trece ya que nueve de ellos se categorizan en parcialmente incorrectos y los cuatro faltantes en la categoría incorrecto, ubicando estos en el nivel ausencia del razonamiento algebraico o aritmético.

Figura 16

Gráfica Situación del Tragamonedas

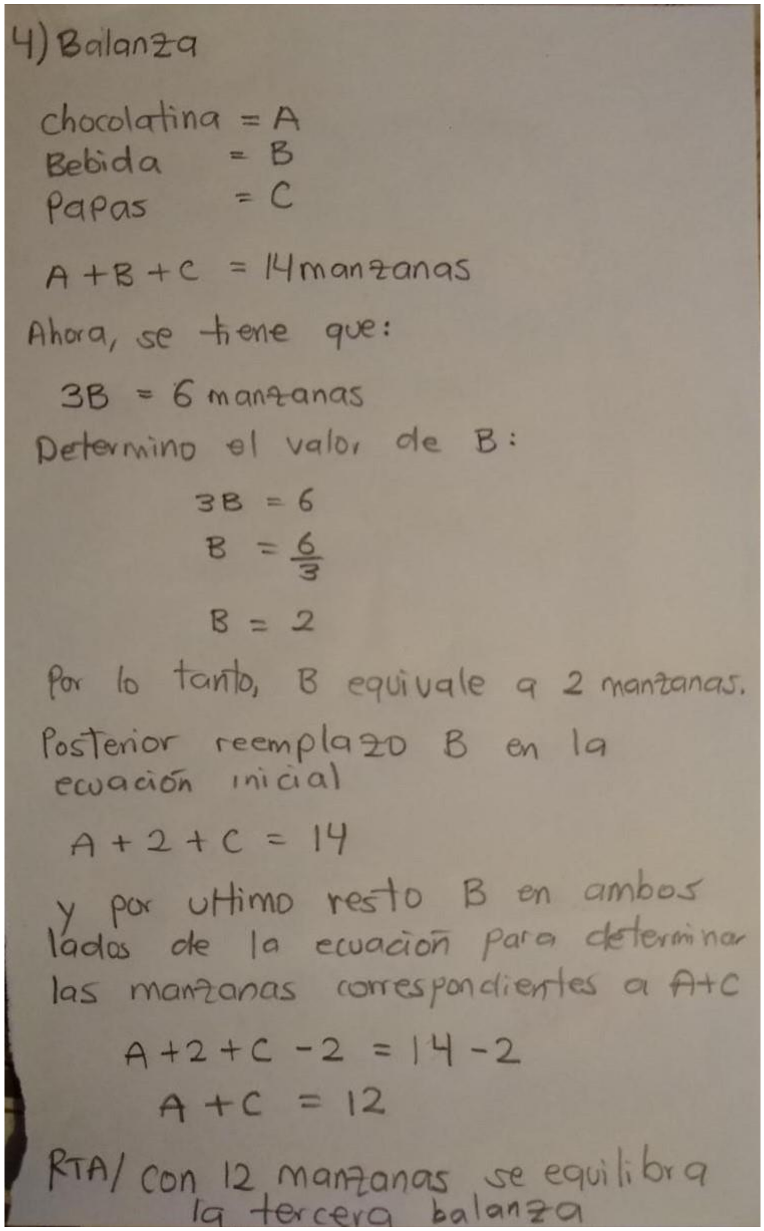


5.2.4. Situación de la Balanza

Para esta situación problema, se observan que a partir de las respuestas se generan varios tipos de abordaje, inicialmente como se muestra en la respuesta E18 y se evidencia en la **Figura 17**, donde los profesores en formación logran plantear a partir del uso de reglas, en este caso plantear igualdades, incógnita y sustituir para encontrar la solución, sin dejar de lado el uso del lenguaje matemático o natural, planteando objetos intensivos al igual que operaciones entre ellas, por ende a este tipo de respuesta la categorización que corresponde es correcto.

Figura 17

Ejemplo Respuesta Correcta Dada por E18



4) Balanza

Chocolatina = A
Bebida = B
Papas = C

A + B + C = 14 manzanas

Ahora, se tiene que:

3B = 6 manzanas

Determino el valor de B:

$3B = 6$

$B = \frac{6}{3}$

$B = 2$

Por lo tanto, B equivale a 2 manzanas.

Posterior reemplazo B en la ecuación inicial

$A + 2 + C = 14$

y por ultimo resto B en ambos lados de la ecuación para determinar las manzanas correspondientes a A+C

$A + 2 + C - 2 = 14 - 2$

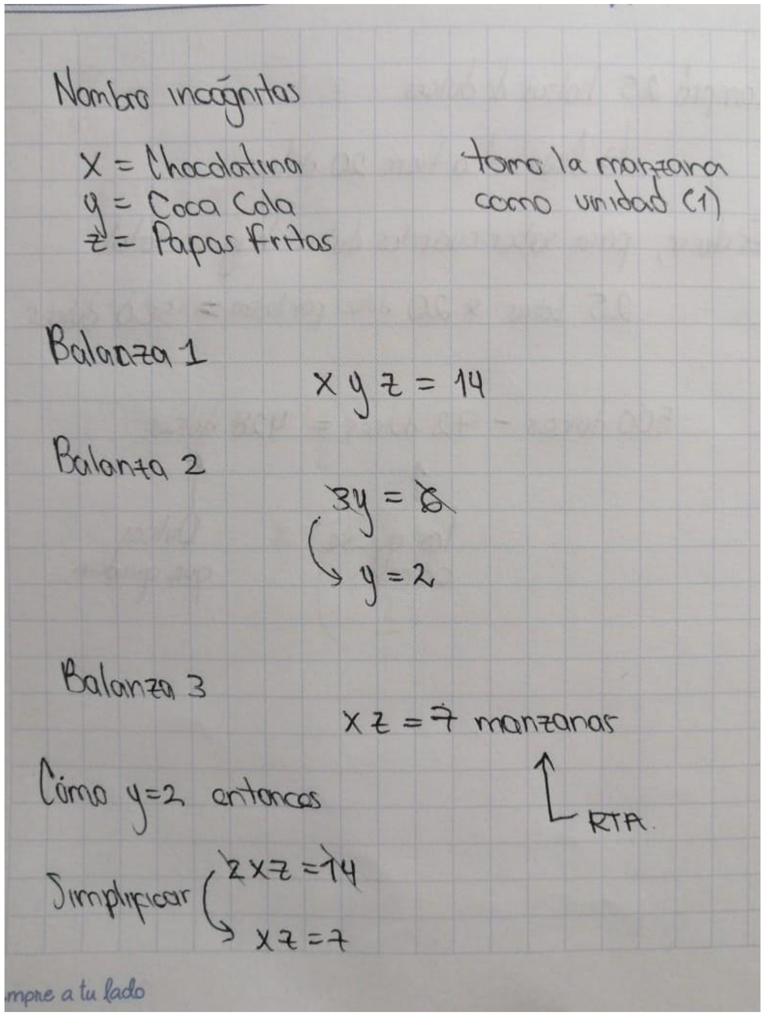
$A + C = 12$

RTA/ con 12 manzanas se equilibra la tercera balanza

Otro tipo de abordaje es aquel como el que se observa en la respuesta E5 y se evidencia en la **Figura 18**, donde el profesor en formación hace uso de un lenguaje matemático o natural, plantea igualdades, incógnita y sustituciones, pero estas no las desarrolla de la manera correcta y por ende no llega a la solución esperada, aunque plantee un razonamiento algebraico, estas respuestas se categorizan en el tipo parcialmente correcto.

Figura 18

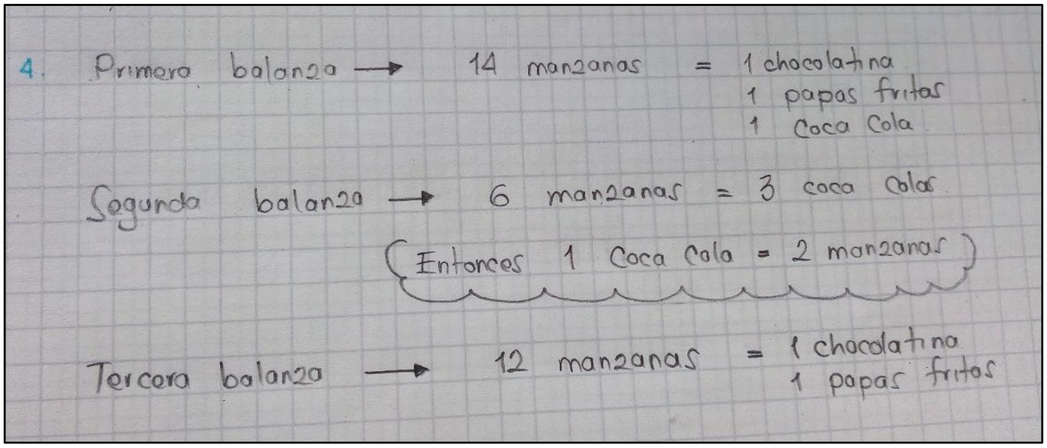
Ejemplo Respuesta Parcialmente Correcta Dada por E5



Como siguiente tipo de abordaje, se muestra en la respuesta E2 y como se evidencia en la **Figura 19** donde puede el profesor en formación limitarse a realizar operaciones aritméticas, como lo es el tanteo para llegar a la solución, sin plantar argumentos reglas o relaciones entre los elementos que intervienen a la hora de poner en juego esta situación, por tal razón este tipo de respuestas se categoriza como parcialmente incorrecto.

Figura 19

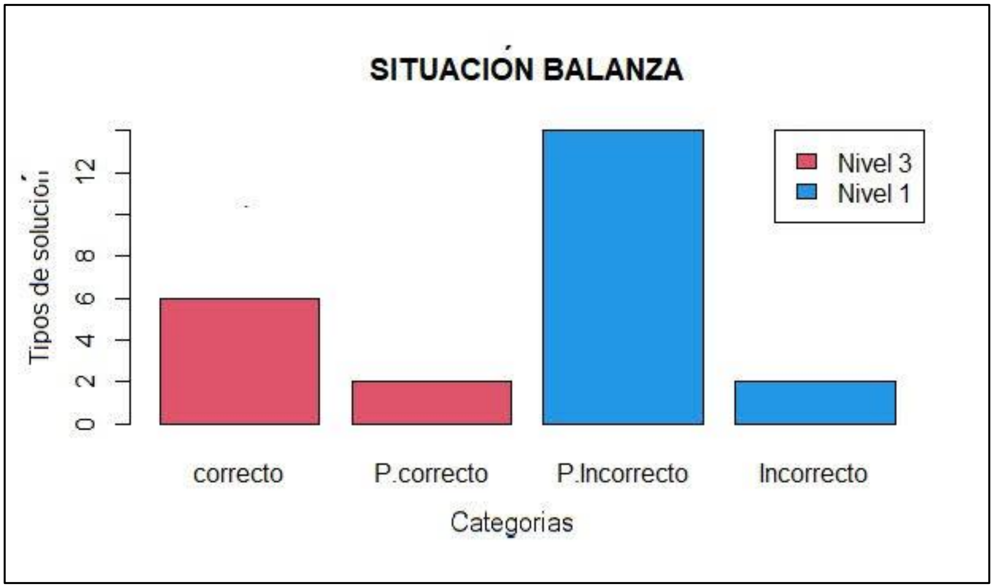
Ejemplo Parcialmente Incorrecto Dada por E2



Comprendiendo estos abordajes o tipos de solución y como se evidencia en la **Figura 20**, podemos decir que ocho de las veinticuatro respuestas dadas por los profesores en formación, dan lugar a que sea superado el nivel denominado consolidado de algebrización, según las categorizaciones seis de estas son ubicadas en tipo correcto y dos se ubican en parcialmente correcto. para las respuestas faltantes, estas pasan a ser ubicadas en nivel denominado incipiente de algebrización, ya que, estas se categorizan catorce en parcialmente incorrecto y finalmente en esta situación se presentan dos casos en donde no dan solución alguna, por ende, estos se plantean en la categorización denominada incorrecta.

Figura 20

Gráfica Situación de la Balanza

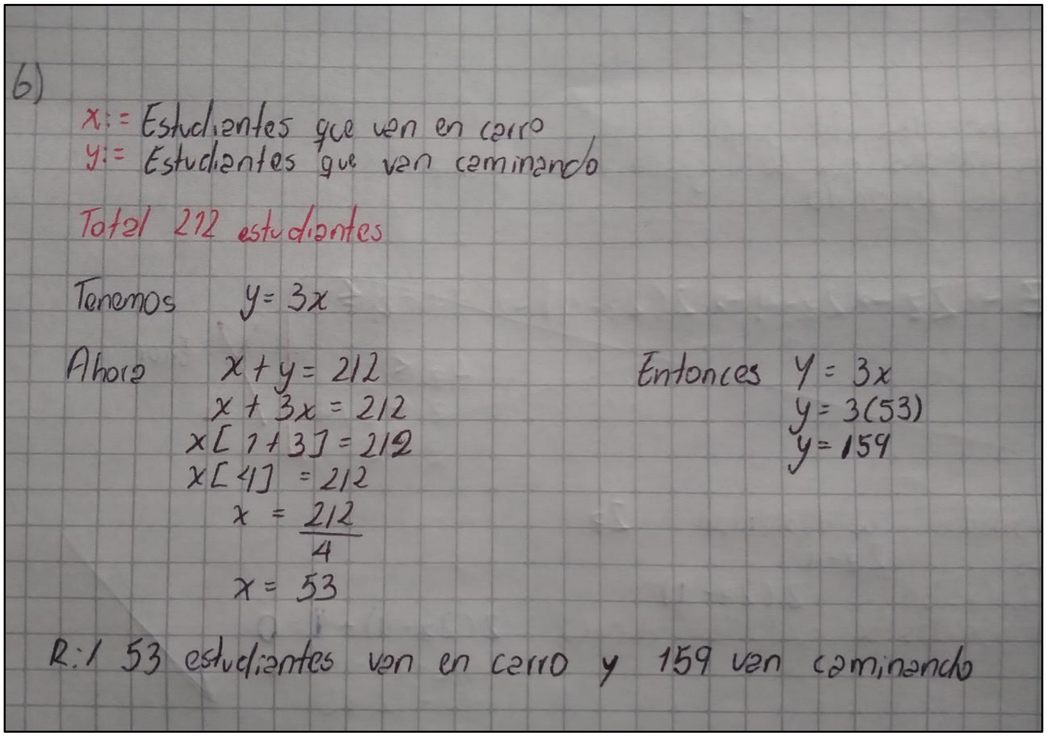


5.2.5. Situación Medios de Transporte

Dada la naturaleza de la situación, se logran evidenciar todas las categorías que se plantean y estas se identifican de la siguiente manera, inicialmente como se muestra en la respuesta E6 y se evidencia en la **Figura 21**, ya que los estudiantes usan lenguaje matemático para establecer igualdades, incógnita y sustituciones y así dar validez a su respuesta, logrando categorizarse en el tipo correcto.

Figura 21

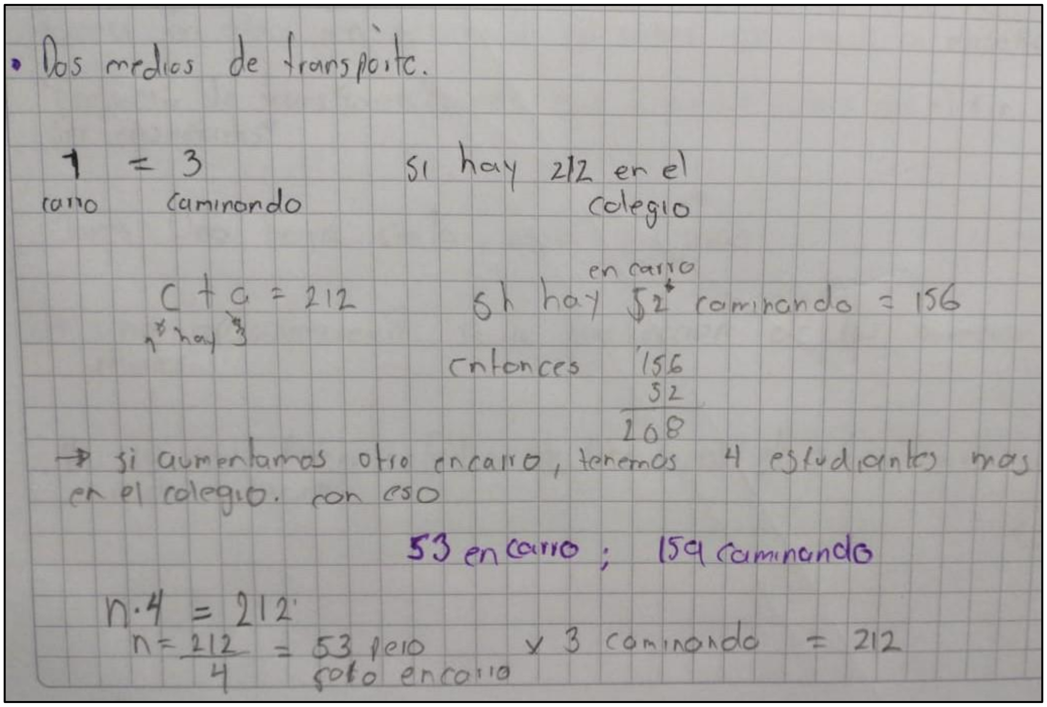
Ejemplo Correcto Dada por E6



Los estudiantes como se muestran en la respuesta E3 y se evidencia en la **Figura 22**, plantean el uso de incógnitas, desarrollando con estas diferentes argumentos y reglas, para dar validez a su respuesta, aunque en ocasiones, puedan presentar errores de ejecución, plantea un razonamiento algebraico y dado esto se categoriza en parcialmente correcto.

Figura 22

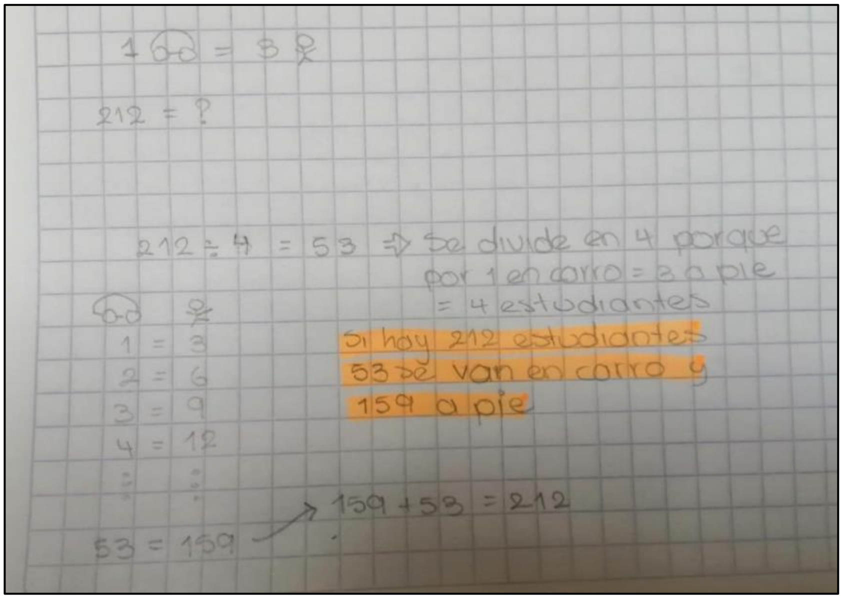
Ejemplo Respuesta Parcialmente Correcta, E3 Situación Cinco



En ciertas ocasiones los estudiantes plantean un razonamiento algebraico donde logran realizar una correlación entre los datos planteados en la situación y diversas variables que planteen para dar solución, como se muestra en la respuesta E2 evidenciado en la **Figura 23**, usando un lenguaje matemático o natural, para generar una argumentación valida a su respuesta y esto se categoriza en parcialmente incorrecto, ya que plantea concepciones básicas en torno al pensamiento algebraico.

Figura 23

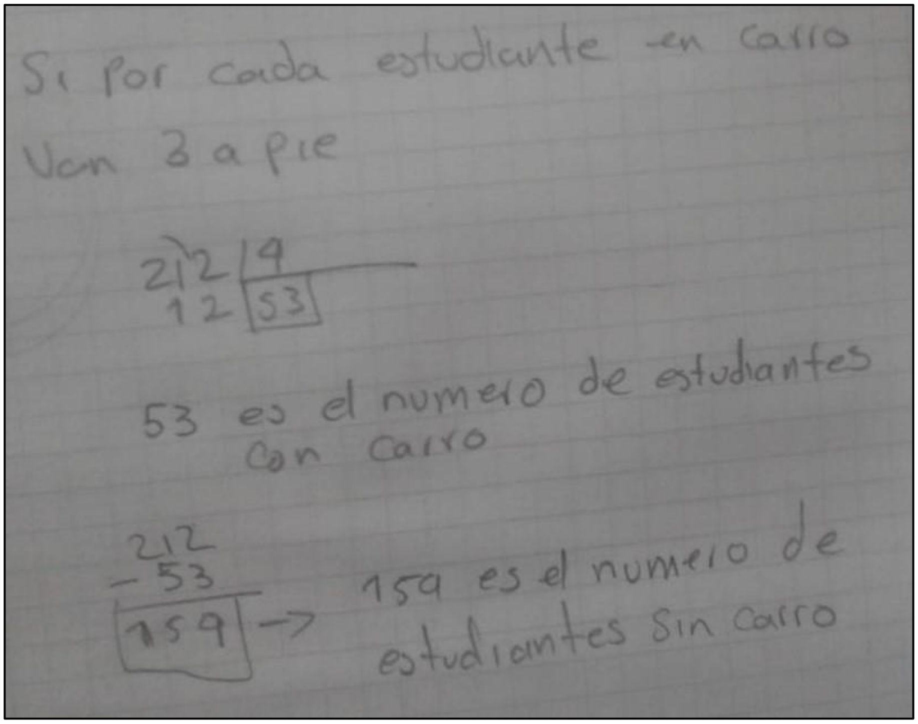
Ejemplo Respuesta Parcialmente Incorrecto, E2 Situación Cinco



Como último, los estudiantes plantean un pensamiento aritmético para dar solución a la situación, como se muestra en la respuesta E11 y se evidencia en la **Figura 24**, dado que, esto logra ser resuelto a partir de operaciones básicas entre objetos intensivos, usando un lenguaje matemático o natural, categorizado en el tipo incorrecto, a causa de no tener algún razonamiento algebraico.

Figura 24

Ejemplo Respuesta Incorrecto Dada por E2



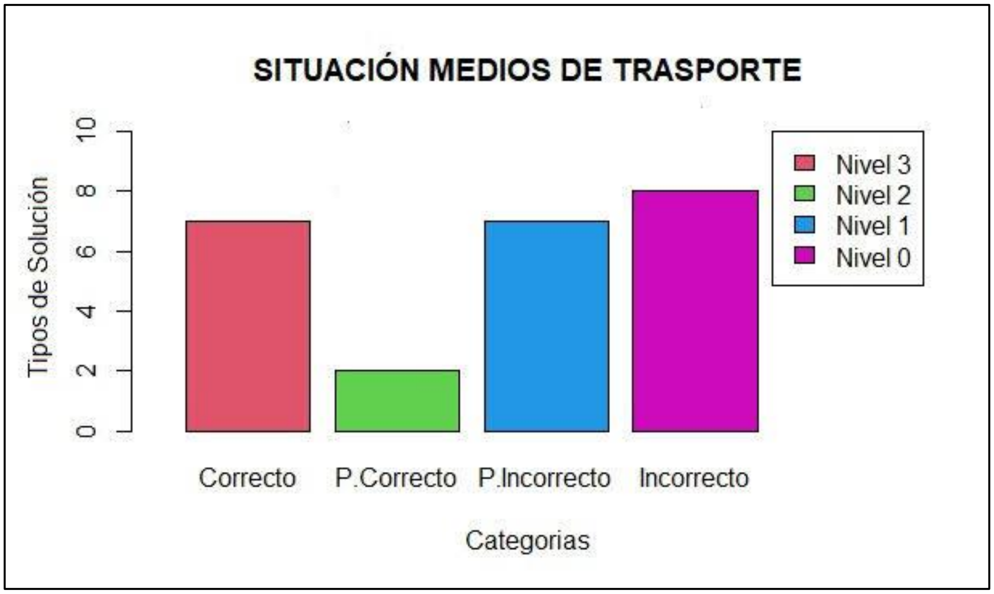
La variedad en las respuestas plantea que los profesores en formación se encuentran clasificados en diferentes niveles, como se evidencia en la **Figura 25** ya que gracias a las categorizaciones se puede decir que siete de las veinticuatro respuestas se ubican en un nivel tres denominado consolidado de algebrización, ya que estas se categorizan en tipo correcto.

Las respuestas que se ubican en el nivel intermedio de algebrización, son aquellas que en su categorización se encuentran en tipo parcialmente correcto, presentándose en las respuestas de dos profesores en formación, de igual manera siete de las soluciones planteadas se encuentran categorizadas en el tipo parcialmente incorrecto y por tal en el nivel incipiente de algebrización.

Finalmente, las respuestas que se categorizan en el tipo incorrecto, las cuales son ocho de estas, se ubican en el nivel ausencia del razonamiento algebraico o aritmético.

Figura 25

Gráfica Situación Medios de Transporte



Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este capítulo presentaremos una síntesis de los resultados que se han obtenido con el desarrollo de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación, estos resultados son producto de la pregunta de investigación y de los objetivos (general y específicos) planteados en el Capítulo 1, los cuales se propusieron para la consecución de la respuesta a dicha pregunta.

Como se señala en el Capítulo 1, se presentaron algunas investigaciones sobre el razonamiento algébrico elemental, resaltando la investigación de (Godino, Aké, et al., 2012) que explora los diferentes niveles del RAE y que pone en evidencia la relación de estos con la idoneidad didáctica, basándonos en dicho documento se realiza la construcción del marco teórico que se presenta en el capítulo 2, el cual permite realizar una articulación y evidenciar los diversos aspectos relevantes con respecto al significado personal y a las carencias formativas entorno al objeto matemático que se está trabajando, resaltando que la valoración epistémica es … para el razonamiento algebraico elemental.

Posteriormente se plantea que el desarrollo de la investigación se realizaría a partir de un enfoque mixto, el cual es explicado en el capítulo 3, en consecuencia se realiza la construcción de un instrumento para el análisis, el cual se presenta en el capítulo 4; Se llevó a cabo con estudiantes para profesor de cuarto semestre, esto con ayuda de las herramientas propuestas por el enfoque Ontosemiótico del conocimiento, se realizaron los análisis a cada una de las situaciones seleccionadas y aplicadas ya que estas fueron la base para la ubicación de cada uno de ellos en un nivel de razonamiento algebraico elemental (Godino, Aké, et al., 2012), de igual manera es importante enfatiza que cada pregunta se le realizo un análisis Ontosemiótico (epistémico y cognitivo) lo que permito validar cada pregunta como lo realizado en Gordillo y Pino-Fan (2015).

CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION.

A continuación, se evidenciarán el objetivo general considerando de igual forma los específicos presentados en el capítulo 1.

Objetivo general (OG) l: Valorar epistémicamente a profesores en formación en torno del razonamiento algebraico elemental.

Para dar respuesta a este objetivo se plantean los siguientes objetivos específicos:

OE-1: Diseñar y aplicar indicadores enfocados en las prácticas matemáticas que pongan en evidencia la caracterización de representatividad del razonamiento del algebraico elemental de los profesores en formación.

Para dar cumplimiento a este objetivo se plantea la construcción de un cuestionario, por tal razón se decide recopilar ciertas tareas propuestas por Godino et. al (2012) y estas fueron adaptadas al contexto en el cual se realizaron, de igual manera para la construcción de este se contempla los niveles de razonamiento algebraico elemental apoyándose en enfoque Ontosemiótico, con la intención de cada uno debía evidenciar el uso del RAE por parte de los estudiantes, para proseguir a la aplicación de el mismo es necesario tener en cuenta ciertas condiciones las cuales los estudiantes debían cumplir, con esto notamos la importancia de poder establecer indicadores los cuales propicien el análisis futuro a realizar, esto dado que cada uno fue considerado para poder establecer al estudiante en cada nivel del RAE.

OE-2: Caracterizar y analizar a partir de componentes los resultados que se obtienen para poder medir la representatividad de los profesores en formación.

Para este objetivo inicialmente se plantearon ciertos componentes que dan lugar al análisis de cada una de las situaciones, estos siendo los pilares fundamentales de la idoneidad epistémica, los cuales son: lingüístico, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos, gracias a lo anterior se logra realizar una clasificación (correcto, parcialmente correcto, parcialmente incorrecto e incorrecto) respecto a cada pregunta, esto a su vez ubicados en los niveles de razonamiento algebraico elemental, dependiendo del razonamiento que tuvo el estudiante para dar respuesta a las situaciones, siendo así posible dar pie a una caracterización del grupo.

Dando cumplimento a estos objetivos se logra dar respuesta al objetivo general, ya que, gracias a los diferentes análisis se puede llegar a categorizar la muestra en un nivel bajo, esto a consecuencia de que inicialmente la agrupación por niveles de razonamiento en su gran mayoría no lograba superar el nivel incipiente de algebrización, entendiendo este como aquel donde el estudiante comprende generalizaciones y plantea el uso de lenguajes matemáticos, pero que el uso de variables no se ve explicito, de igual manera al realizar un análisis Ontosemiótico, se determina que el grupo en general, plantea un lenguaje matemático, no logran concretar definiciones, realizan procedimientos aritméticos en ejercicios donde se podrían plasmar procesos algebraicos, por ende, el uso de propiedades no se plasma y finalmente el uso de la argumentación a pesar de que se presenta de una manera muy natural, el estudiante la realiza en cada uno de los pasos para llegar a la solución de cada situación.

Y finalmente con todo lo anterior se da respuesta a la pregunta de investigación que plantea: ¿Cómo caracterizar el grado de representatividad de los significados institucionales del álgebra elemental en estudiantes para profesor de matemáticas?

Esto partiendo de las herramientas establecidas anteriormente para cumplir los objetivos, como lo fueron: los componentes, indicadores y niveles de razonamiento, que dieron pie a generar la categorización respecto a la idoneidad epistémica en un análisis Ontosemiótico.

Bibliografía

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental en Maestros en Formación* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. https://doi.org/http://hdl.handle.net/10481/31332

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. (2017). Reconocimiento de Niveles de Algebrización en una Tarea de Proporcionalidad por Futuros Profesores de Matemáticas de Secundaria. *Investigación En Educación Matemática XXI*, *2017*, 177–186. https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf

Caronía, S., & Martyniuk, N. (2020). Configuraciones Cognitivas Y Niveles de Algebrización de un Grupo de Estudiantes Universitarios de la FCEQyN. *Revista de La Escuela de Ciencias de La Educación*, *2*(15). https://doi.org/10.35305/rece.v2i15.551

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. file:///C:/Users/Usuario/Downloads/19656257.pdf

Castro, W. F. (2014). Razonamiento Algebraico Elemental: Propuestas para el Aula-Elementary Algebraic Reasoning: Classroom Proposals. *Revista Científica*, *3*(20). https://doi.org/10.14483/23448350.7696

Castro, W. F., & Godino, J. (2008). Evaluación del Razonamiento Algebraico Elemental en Futuros Maestros: Un Estudio Exploratorio. *Investigación En Educación Matemática XII*, 1–10. http://funes.uniandes.edu.co/1199/1/Castro2008Evaluacion_SEIEM_273.pdf

Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D., & Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(2), 164. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981

Chayña Apaza, J. V. (2019). *El Razonamiento Algebraico y su Relación con la Idoneidad Didáctica de los Docentes del V Ciclo de Educación Básica Regular de la Ciudad de Puno - 2016* [Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Altiplano].

http://repositorio.unap.edu.pe/handle/UNAP/13492

Felip A., S. (2016). *Desarrollo del Razonamiento Algebraico en Alumnos de Educación Primaria* [Tesis de Maestria, Universitat Jaume I]. http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/161973/TFG_2015_felipS.pdf?sequence=1

Gaita, R., & Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 268–289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

Garcia Yataco, J. L. (2018). *Niveles de Algebrización que Alcanzan los Estudiantes de Primer Grado de Secundaria en la Resolución de Tareas Estructurales de Números Racionales* (Vol. 30) [Tesis de Maestria, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://doi.org/10.22201/cieg.2594066xe.2004.30.1957

Godino, J. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *22*, 237–284. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. (2013). Indicadores de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *8*(11), 111–132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de Razonamiento Algebráico Elemental. *Investigacion En Matemática XVI*, *1*, 285–294. http://funes.uniandes.edu.co/11214/2/Godino2012Niveles.pdf

Godino, J., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar. Implicaciones para la Formación de Maestros. *Enseñanza de Las Ciencias*, *32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Revista Paradigma*, *53*(9), 1–25. http://funes.uniandes.edu.co/15016/1/Godino2006Análisis.pdf

Godino, J., & Burgos, M. (2017). Perspectiva Ontosemiótica del Razonamiento Algebraico

Escolar. *Investigación En Educación Matemática XXI*, 49–66. http://funes.uniandes.edu.co/11182/1/Godino2017Perspectiva.pdf

Godino, J., Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42b), 483–511. https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000200005

Godino, J., Contreras, Á., Estepa, A., & Wilhelmi, M. R. (2016). Reconocimiento de Niveles de Razonamiento Algebraico en Primaria y Secundaria. *XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de Las Matemáticas. Matemáticas, Ni Más Ni Menos*, 364–368. http://funes.uniandes.edu.co/21778/1/Godino2016Reconocimiento.pdf

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2–3), 247–265. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9278-x

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de Algebrización de las Prácticas Matemáticas Escolares. Articulación de las Perspectivas Ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 117–142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. R. (2015). Un Ejemplo de Análisis Ontosemiótico para una Tarea sobre la Antiderivada. En C. Vázquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX. Villarica, Chile: SOCHIEM*, 170–175.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come. *Educational Researcher*, *33*(7), 14–26. https://doi.org/10.3102/0013189X033007014

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a Definition of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research*, *1*(2), 112–133. https://doi.org/10.1177/1558689806298224

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The Role of Intuition in the Solving of Optimization Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107–130. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9243-8

Martínez-Escobar, J. D. (2014). *Caracterización del Razonamiento Algebraico Elemental de*

Estudiantes de Primaria Según Niveles de Algebrización [Tesis de Maestría, Universidad de Medellin]. https://repository.udem.edu.co/handle/11407/299

Trujillo, E. C. J. (2017). *Configuración Epistémica e Identificación de Niveles de Algebrización en Tareas Estructurales de los Textos Oficiales del V Ciclo de Educación Primaria* [Tesis de Maestria, Pontifica Universidad Católica del Perú]. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/9282/JULIAN_TRUJILLO_CONFIGURACIÓN_EPISTÉMICA_E_IDENTIFICACIÓN_DE_NIVELES_DE_ALGEBRIZACION.pdf?sequence=1

Anexos

Taller Presentado a los Profesores en Formación

Para profesores en Formación

El siguiente formulario tiene como intención realizar una recolección de datos teniendo como objetivo determinar ciertas perspectivas de la licenciatura en matemáticas (LEMA), por esta razón las fotos correspondientes a las respuestas planteadas no es necesario que sean solamente la versión final, si hicieron intentos anteriores, por favor anexarlas igualmente. ¡NO HAY RESPUESTA INCORRECTA!

*Obligatorio

1. ¿De qué semestre está usted cursando la mayor cantidad de materias? *

Marca solo un óvalo.

- 1º
- 2º
- 3º
- 4º
- 5º
- 6º
- 7º
- 8º
- 9º
- 10º

2. La profesora FERNANDA compro para Halloween 25 bolsas de dulces. Cada bolsa contenía 20 dulces. Tras unos días el hijo de la profe se comió 72 de los dulces, ¿Cuántos dulces quedan? *

3. Continua la siguiente secuencia: *

4. Una tragamonedas duplica el número de monedas que se metan en ella, pero después de usarla cada vez hay que pagar cuatro monedas. Fernando probó e introdujo sus monedas en la máquina y efectivamente, se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía FERNANDO al principio? * Archivos enviados:

5. ¿Cuántas manzanas hay que poner en la tercera balanza para equilibrarla? *

6. Para ir al colegio los estudiantes utilizan dos medios de trasporte. Por cada estudiante que va en carro hay 3 que van caminando. Si hay 212 estudiantes en el colegio ¿Cuántos estudiantes utilizan cada medio de trasporte? *