



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS**

**Algunas dificultades en el reconocimiento y uso de los
atributos propios de la fracción como parte-todo en
contexto continuo. El caso de un grupo de estudiantes de
grado cuarto**

LUIS FELIPE TALERO PINTO

Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica
con Énfasis en Matemáticas (LEBEM)
Pregrado
Bogotá, Colombia
2020

Algunas dificultades en el reconocimiento y uso de los atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo. El caso de un grupo de estudiantes de grado cuarto

LUIS FELIPE TALERO PINTO

Trabajo final como requisito para optar por el título:
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora:
DIANA GIL CHAVES
Doctora en Educación

Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica
con Énfasis en Matemáticas (LEBEM)
Bogotá, Colombia
2020

Nota de aceptación

Firmas de los jurados

A Dios y la Virgen María.
Por buscarme cuando pierdo el rumbo hacia ellos, poniendo en mi camino gente maravillosa
que me enseñó a amarlos, alabarlos y seguir su Santa Voluntad.

A la profesora Diana Gil Chaves, profesora Claudia Castro, profesor Edwin Carranza y mi
amiga Angie Riaño.

Por creer y forjar en mí un hombre profesional, sencillo y curioso por la investigación.

A la tía Magdalena, tía Claudia, tía Marilyn, Carmen Helena, Zule y mi primo Fernando Vélez.
Porque en los momentos difíciles de mi vida estuvieron ahí, guiándome para retomar mis
estudios y fortalecerme ante adversidades.

A todas aquellas personas que de una u otra forma me brindaron su apoyo para lograr esta meta.

Luis Felipe Talero Pinto

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	8
ANTECEDENTES	9
Manejo de textos	9
Representación gráfica como herramienta visual	10
La relación parte-todo como estructura de operatividad	11
Concepto y caracterización de la fracción	13
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	15
OBJETIVOS	17
General	17
Específicos	17
JUSTIFICACIÓN	18
MARCO TEÓRICO	21
Marco legal	21
La Fracción como parte-todo en contexto continuo	23
Propuesta de actividades	30
MARCO METODOLÓGICO	36
Tipo de estudio	36
Población	36
Fases de la investigación	37
Instrumentos de investigación	40
Prueba diagnóstica	41
Entrevista	41
ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	43
Resultados	43
Primera actividad	43
Segunda actividad	52
Tercera actividad	61
Cuarta actividad	69
Recomendaciones	78
CONCLUSIONES	85
REFERENCIAS	90
ANEXOS	93

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Actividad relación parte-todo en el continuo.	15
Figura 2. Situación prueba ICFES del MEN.	18
Figura 3. Situación prueba ICFES del MEN.	19
Figura 4. Relación todo-parte.	28
Figura 5. El todo, Torta rectangular.	31
Figura 6. Actividad cambio de unidad de medida	32
Figura 7. Actividad sobre subdivisiones equivalentes- partes como todo.	34
Figura 8. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 1.	44
Figura 9. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 1.	45
Figura 10. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 1.	46
Figura 11. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 1.	47
Figura 12. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 1.	48
Figura 13. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 1.	49
Figura 14. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 1.	50
Figura 15. Resumen de los resultados de la actividad 1.	51
Figura 16. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 2.	52
Figura 17. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 2.	53
Figura 18. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 2.	54
Figura 19. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 2.	55
Figura 20. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 2.	56
Figura 21. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 2.	57
Figura 22. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 2.	58
Figura 23. Resumen de los resultados de la actividad 2.	59
Figura 24. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 3.	61
Figura 25. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 3.	62
Figura 26. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 3.	63
Figura 27. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 3.	64
Figura 28. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 3.	65
Figura 29. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 3.	66
Figura 30. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 3.	67
Figura 31. Resumen de los resultados de la actividad 3.	68
Figura 32. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 4.	69
Figura 33. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 4.	71
Figura 34. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 4.	72
Figura 35. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 4.	73
Figura 36. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 4.	75
Figura 37. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 4.	76
Figura 38. Resumen de los resultados de la actividad 4.	78
Figura 39. Actividad de subdivisiones equivalentes en contexto continuo.	81
Figura 40. Actividad sobre partes como un todo.	81

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Relación fases y tipo de actividad según Díaz (2013).	41
Tabla 2. Preguntas de la entrevista a partir de resultados de la prueba diagnóstica.	42
Tabla 3. Actividad 1 y atributos trabajados en esta.	43
Tabla 4. Análisis resultados del sujeto 1 en la actividad 1.	44
Tabla 5. Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 1.	45
Tabla 6. Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 1.	46
Tabla 7. Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 1.	47
Tabla 8. Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 1.	48
Tabla 9. Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 1.	49
Tabla 10. Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 1.	50
Tabla 11. Actividad 2 y atributos trabajados en esta.	52
Tabla 12. Análisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 2.	53
Tabla 13. Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 2.	54
Tabla 14. Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 2.	55
Tabla 15. Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 2.	56
Tabla 16. Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 2.	57
Tabla 17. Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 2.	58
Tabla 18. Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 2.	59
Tabla 19. Actividad 3 y atributos trabajados en esta.	61
Tabla 20. Análisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 3.	62
Tabla 21. Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 3.	63
Tabla 22. Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 3.	64
Tabla 23. Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 3.	65
Tabla 24. Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 3.	66
Tabla 25. Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 3.	67
Tabla 26. Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 3.	68
Tabla 27. Actividad 4 y atributos trabajados en esta.	69
Tabla 28. Análisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 4.	70
Tabla 29. Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 4.	71
Tabla 30. Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 4.	72
Tabla 31. Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 4.	73
Tabla 32. Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 4.	74
Tabla 33. Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 4.	75
Tabla 34. Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 4.	76

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo propone identificar dificultades en el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo, el caso de un grupo de estudiantes de grado cuarto por medio de una prueba diagnóstica y una entrevista, con la intención de proponer aspectos y/o actividades para el tratamiento de estas dificultades.

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

- Antecedentes: se presentan investigaciones que permiten evidenciar algunas dificultades sobre la fracción parte-todo en contexto continuo con una orientación hacia los atributos desde diferentes aspectos.
- Planteamiento del problema: se enfoca en las dificultades en cuanto al manejo de atributos de la fracción como parte- todo en contexto continuo y posibles aspectos que influyan en las mismas.
- Justificación: se presenta evidencias sobre unos puntos de la prueba ICFES que dan cuenta de la reincidencia en: las dificultades hacia la comprensión de los atributos propios de la fracción en el contexto continuo y el mal manejo de representaciones en el abordaje de estos.
- Marco teórico: contiene un soporte legal desde el Ministerio de Educación y un soporte teórico sobre la fracción parte-todo y sus atributos.
- Marco metodológico: compila el tipo de estudio del trabajo, una descripción de la población y la institución educativa, un referente sobre los instrumentos de recolección a manejar (prueba diagnóstica, entrevista) y las fases de la investigación.
- Organización y análisis de los resultados: se realiza una descripción y un análisis de los productos de los estudiantes y de las actividades propuestas, soportados en referentes teóricos.
- Conclusiones: se responde la pregunta de investigación, se da cuenta de los objetivos trazados, los principales aportes del trabajo, las limitaciones presentadas en el trabajo y las implicaciones investigativas que surgen a partir de este.

ANTECEDENTES

En la básica primaria la *fracción* es un objeto matemático en el que estudiantes presentan debilidad hacia la comprensión de la funcionalidad de sus partes y su relación con *la unidad*, por ello varios trabajos han sido orientados desde el reconocimiento de dificultades en el aprendizaje de éste, con el fin de generar estrategias para trabajar la fracción. En este caso enfatizando sobre atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo. Algunos de estas investigaciones se presentan a continuación.

Manejo de textos.

Una de las investigaciones realizadas por Vallejo (2018) plantea que los libros de texto limitan el aprendizaje de la fracción, ya que condiciona las gráficas a representaciones sin sentido dificultando así la comprensión de problemas contextualizados, es decir, el libro apoya al estudiante en la ejercitación como proceso mecánico, pero no de manera significativa. Esto como producto de la preparación del profesor que lo lleva al manejo de textos privilegiando habilidades procedimentales, descuidando la comprensión conceptual de significados, representaciones y magnitudes (Hincapié citado por Vallejo, 2018).

El trabajo de Vallejo concluye que los estudiantes presentan dificultad al realizar el paso de una representación geométrica a su representación numérica, especialmente en el contexto discreto donde el cambio de unidad no es tan evidente.

Además, se afirma que investigaciones en educación matemática reconocen la fracción como un concepto clave en el desarrollo de los pensamientos numérico y variacional, identificando que, en algunos casos, las actividades de enseñanza de las fracciones propuestas en libros pueden llegar a no ser apropiadas para la comprensión y aprendizaje de las fracciones.

En consecuencia, a partir de la experiencia adquirida se concluye que:

La metodología de enseñanza que se usa generalmente en el aula, la cual se limita a la memorización de contenidos encontrados en los libros o textos de matemática, no favorece el

desarrollo de aprendizajes relacionados con la fracción, por el contrario, los limita y lo condiciona solo a representaciones gráficas sin verdadero sentido para los estudiantes, sobre todo en el planteamiento y resolución de problemas contextualizados.

Las diferentes actividades sobre fracciones en los libros de texto adoptan diferentes tipos de representaciones las cuales están aludidas a unos elementos referenciados por Marmolejo, Yudy y Insuaty (2015) tales como: las operaciones visuales que atienden al papel heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad, la visibilidad que presenta elementos que acompañan o hacen parte de una figura los cuales aumentan o disminuyen la complejidad de identificar la operación a aplicar, la aprehensión respecto a las maneras de mirar que permite una figura y la conversión, es decir, el paso de un registro a otro, tales como la escritura aritmética, las figuras y el lenguaje natural.

Los libros presentan diferentes vistas para estudiar las relaciones presentadas entre su contenido y sus potenciales efectos sobre los logros matemáticos de los estudiantes. No obstante, “es poca la atención que se ha prestado a las actividades y exigencias cognitivas que subyacen a la constitución del contenido matemático” (Marmolejo, Yudy y Insuaty, 2015, p.44)

Representación gráfica como herramienta visual.

Acevedo, López, Guerrero y Morales (2013) infieren que las fracciones que no se enseñan de manera gráfica genera inquietudes asociadas a: la existencia de representaciones gráficas, el todo representado como una unidad y la operación entre fracciones de manera gráfica.

Este trabajo concluye que los estudiantes de grado cuarto del Liceo Bet-el presentaron las siguientes falencias:

- Definición del concepto de fracción.
- Confusión de fracciones homogéneas con fracciones heterogéneas.
- Reconocimiento de las fracciones impropias.
- Operatividad de fracciones heterogéneas de forma gráfica.

En consecuencia, sugieren para estudiantes de grado cuarto al abordar la fracción tener en cuenta como parte-todo que “la representación gráfica da paso a comprender la naturaleza de estas, fortaleciendo la comprensión y la parte inductiva de las operaciones suma y resta entre estas” (Acevedo, et al., 2013, p. 4).

Freudenthal (1983) argumenta que, de manera análoga a lo que sucede con los números naturales, las fracciones deben ser abordadas desde diferentes perspectivas, no sólo la gráfica como puntualizan Acevedo et al. (2013). En este sentido, una visión fenomenológica puede partir del lenguaje cotidiano en el que se usa expresiones como “la mitad de (...) seguido de largo, pesado, viejo” (p.3) para comparar cantidades y valores de magnitudes.

La fracción como comparador invita a pensar en un énfasis dinámico en el que la fracción aparece como una relación razón más allá de ser un fracturador que conduce a un camino unidireccional limitado a tareas de “dividir algo en n partes iguales” (p.17). En este sentido, la distancia entre decir “la mitad” a especificar “la mitad de grande” permite centrar la mirada en el trabajo con magnitudes, puntualmente en el operador razón; un aspecto esencial para tener en cuenta en el trabajo con estudiantes de grado cuarto.

La relación parte-todo como estructura de operatividad.

Otros trabajos como el de Niño y Raad (2018) abordan los vacíos de procedimiento y comprensión de los estudiantes al abordar la fracción como parte-todo ya que esta es la base para la construcción de varios objetos matemáticos. Por eso es fundamental comprender que:

En la matemática escolar, encontramos la relación parte-todo en el estudio de las estructuras aritméticas, tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa, con diferente significado. La relación parte-todo es el origen para entender dichas estructuras, ya que da lugar a acciones por las cuales se presenta la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales) Castro (como se cita en Niño y Raad, 2018, p. 26).

Cuando el proceso de enseñanza-aprendizaje no es significativo ocurren dificultades en el aprendizaje de las matemáticas generando fracasos, temores e insatisfacción, como lo plantea, Cockcroft (citado por Niño y Raad, 2018).

En consecuencia, se plantean los siguientes aspectos a considerar para el aprendizaje y enseñanza de la fracción:

- La conceptualización de la fracción como parte-todo para la construcción de otras interpretaciones de la fracción estableciendo una relación entre lo verbal, pictórico y simbólico acorde a Prieto y Vásquez (2015).
- Las relaciones multiplicativas y aditivas en el reconocimiento del todo, sus partes y su relación de las partes con el todo.
- Las fracciones parte-todo como base de la compresión de construcciones matemáticas posteriores acorde a Behr, y Resnick (como se cita en Niño y Raad, 2018, p. 21) y el reconocimiento del número racional.
- La parte-todo desde lo cognitivo y como base matemática debe alcanzarse en los primeros años escolares.
- Trabajar la unidad desde otros campos del conocimiento.
- La aplicación de propuestas en otras instituciones educativas que permitan establecer generalidades.

Por otra parte, la comprensión del concepto de fracción y lo que ello implica concibe dificultades en los estudiantes posiblemente a que en el aula se trabajan pocas situaciones de la vida real, lo cual genera conocimientos previos escasos según Perera y Valdemoros (2009).

A partir de la consulta de datos obtenidos en la prueba saber 2016 en el grado tercero y grado quinto, Vallejo (2018) encuentra lo siguiente: el 24% de los estudiantes no manejan fracciones comunes para describir situaciones que involucran cantidades continuas, el 56% no interpreta ni reconoce las fracciones en diferentes contextos y el 58% no resuelve problemas que requieren fracciones como parte-todo.

Estos factores evidencian falencias en el aprendizaje de los estudiantes y en el abordaje de las fracciones en el aula, esto como producto de “la transmisión de conceptos matemáticos de manera tradicional y dentro de una estructura rígida que impide a los estudiantes descubrir su aplicabilidad dentro de su contexto real, generando desmotivación y desinterés hacia las temáticas tratadas” (Vallejo, 2018, p. 13).

Concepto y caracterización de la fracción.

Durán y Gutiérrez (2015) consideran que en contextos colombianos se presenta una mala interpretación y ejecución de conceptos matemáticos, por ello es importante trabajar la fracción parte-todo desarrollada desde sistemas conceptuales y el lenguaje cotidiano que permita mejorar su enseñanza y aprendizaje.

El reconocimiento de un concepto aplicado a una propuesta en el aula debe estar evidenciado en el manejo apropiado de diferentes representaciones que faciliten el camino hacia la construcción del lenguaje matemático y la construcción de la noción de fracción de forma más amplia y adaptativa. No obstante,

Los diferentes sistemas conceptuales en los que se establece la necesidad de llegar a una concepción de números fraccionarios o fracciones no son tomados en cuenta dentro de la educación matemática, dejándola a la deriva de interpretaciones polisémicas que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje matemático (Durán y Gutiérrez, 2015, p. 2).

Lo que devela la necesidad de dos o más formas distintas de reflejar y representar un objeto matemático, según Artera (citado por Durán y Gutiérrez, 2015). En consecuencia, se requiere y se propone trabajar desde un lenguaje conocido, sencillo para los estudiantes, atendiendo a su relación con el mundo, su entorno y posibles atributos que tenga la fracción como parte-todo.

El manejo del lenguaje cotidiano y representaciones deben concebir la complejidad de algunos elementos relacionados con la enseñanza de fracciones como lo son los atributos de la fracción *parte-todo* por Inhelder y Szeminska y los atributos agregados por Payne (como se cita en Martínez y Lascano, 2001):

1. Manejar el control simbólico de las fracciones, es decir, los símbolos relacionados a las fracciones.
2. Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos.
3. Trabajar con fracciones mayores que la unidad.
4. Reconocer subdivisiones equivalentes; por ejemplo, notar que un tercio es equivalente a dos sextos, a tres novenos, etc. (p. 2).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

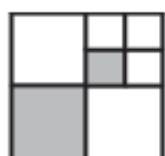
La revisión de la literatura sobre el aprendizaje y la enseñanza de la fracción, así como la experiencia docente en la enseñanza de la fracción como relación parte-todo, evidencian la necesidad de continuar construyendo estrategias y caminos de interpretación del concepto de fracción en contexto continuo aplicado y adaptado a la vida cotidiana, situaciones problema y campos de los conocimientos, para evitar que se convierta en un aprendizaje superficial y mecánico.

Martínez y Lascano (2001) identifican que los estudiantes presentan cuatro dificultades en reconocer y apropiarse de los atributos propios de la fracción como parte-todo en un contexto específico:

1. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
2. Los trozos —partes— son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—
3. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
4. El “todo” se conserva.” (p. 2).

Lo que implica el manejo inapropiado de los símbolos asociados a una fracción como se puede apreciar en el siguiente ejercicio propuesto por Rojas, Mora y Barón (1999):

¿Qué fracción representa la parte sombreada en la siguiente figura?:



Algunas respuestas son:

- * $2/5$ [... porque hay dos negras y cinco blancas]
- * $2/7$ [... porque tomo dos de las siete que hay]

Figura 1. Actividad relación parte-todo en el continuo.

Fuente: Rojas et al. (1999).

En la Figura 1 se puede apreciar que el uso de la relación entre cantidades puede llevar al desconocimiento de la congruencia de las partes en cuanto a área lo que significa que existe una dificultad para interpretar la fracción como parte-todo en contexto continuo.

Ahora, la forma de trabajar la fracción parte-todo en el aula puede ser somera en tanto se desconozca:

1. La relevancia de esta interpretación como estructura de operatividad, puente entre las otras interpretaciones de la fracción, Castro (como se cita en Niño y Raad, 2018, p.26).
2. La relación con otros campos de conocimiento como el arte, la ciencia, entre otros.
3. La cotidianidad del estudiante que aproxime un aprendizaje situado con el fin de evitar desinterés hacia el objeto matemático (Niño y Raad, 2018; Vallejo, 2018).
4. Las formas comunicativas en el aula como actividad semiótica en los términos que lo propone Sáenz (2016).
5. La construcción y/o adaptación de medios para la adquisición del concepto y la operatividad entre fracciones y la adecuación de las gráficas para fortalecer el proceso de enseñanza (Acevedo et al., 2013).

La construcción del concepto de fracción como relación parte-todo en contexto continuo, es importante en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de grado cuarto, por eso se hace necesario indagar sobre las estrategias que puede utilizar el profesor de matemáticas para identificar en los estudiantes de grado cuarto primaria los aprendizajes y las dificultades sobre la fracción en diferentes contextos con el propósito de diseñar actividades de aprendizaje que permitan superar estas dificultades.

Dado los anteriores argumentos sobre dificultades y obstáculos presentes en la construcción del concepto de fracción como relación parte-todo en contexto continuo se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo identificar dificultades en el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción como parte-todo en un contexto continuo, para el caso de un grupo de estudiantes de grado cuarto?

OBJETIVOS

General

Diseñar una serie de actividades que permitan identificar dificultades que presentan los estudiantes de grado cuarto en el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo.

Específicos

- Reconocer los planteamientos de autores que trabajan sobre el aprendizaje y la enseñanza de la fracción parte-todo en contexto continuo con una orientación hacia los atributos.
- Adaptar y diseñar actividades que permitan identificar las dificultades de los estudiantes de grado cuarto al reconocer y apropiarse de algunos atributos de la fracción parte-todo en contexto continuo.
- Proponer aspectos a tener en cuenta para el diseño de actividades y algunas actividades que faciliten el tratamiento de dificultades presentadas en el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo por parte de estudiantes de grado cuarto.

JUSTIFICACIÓN

Pruebas estandarizadas en el país como la Prueba Saber propone situaciones con el objetivo de indagar sobre la relación parte-todo involucrando diferentes competencias entre las que se lista la comunicación, el razonamiento y resolución de problemas. A manera de ejemplo, una pregunta de la prueba realizada en el 2013 relacionó la competencia de comunicación en un nivel satisfactorio reportando que tan sólo un 57,2% de estudiantes seleccionó la opción postulada como correcta que en este caso era el literal C:

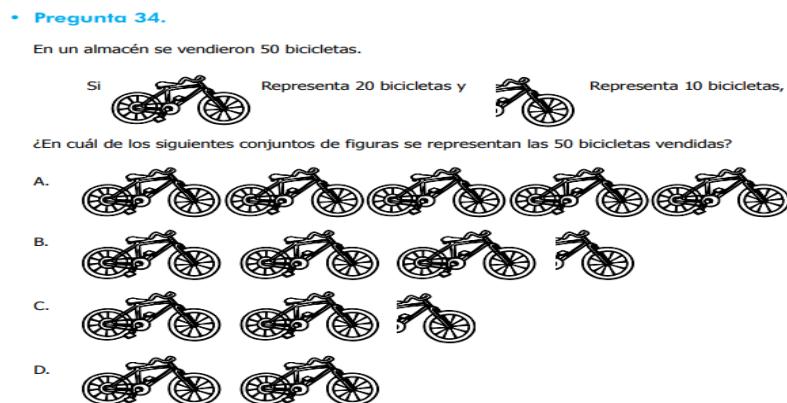


Figura 2. Situación prueba ICFES del MEN.

Fuente: Oquendo y Castillo (2016).

En esa pregunta hay dos elementos importantes para analizar:

1. Si bien la pregunta tiene como objetivo vincular el reconocimiento de diferentes representaciones en la fracción y hacer traducciones entre ellas, se puede observar que el contexto no es oportuno dado que lleva a una contradicción entre lo discreto y lo continuo, ello provoca que para el caso de 10 bicicletas se distorsione atributos propios de la fracción que proponen Llinares y Sánchez (1997).
2. Este error en la pregunta puede llevar a interpretaciones que hacen válido responder la opción A, asumiendo que cada representación de una bicicleta equivale a 10 unidades, porque no parece sensato partir una bicicleta en dos en un contexto real, de hecho, esta opción fue seleccionada por los 117.762 estudiantes de los 484.618 que respondieron la prueba.

Este ejemplo nos devela la necesidad de prestar especial atención a la manera de preguntar, así como a las diferentes interpretaciones que aflora una situación dependiendo de lo pertinente

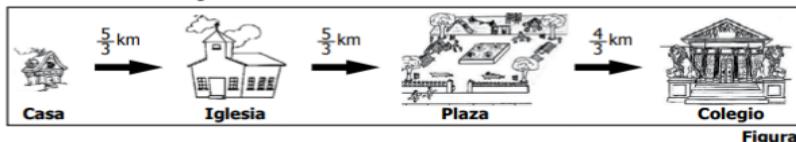
que sea el contexto que se quiera involucrar pues la fracción puede ser vista como:

Una partición; como la representación de la conjugación de dos acciones: dividir/tomar (dividir/comer, dividir/pintar) [...] En ese abordaje, las representaciones más usuales en la escuela son pizzas, pasteles y figuras geométricas que acaban reduciendo las ideas que involucran el referido concepto [...] Cuando el “todo” no es suficientemente claro para los estudiantes, la idea de unidad es oscura y el fraccionamiento es difícil (Butto, 2013, p.2).

Dependiendo cómo las representaciones son manejadas por el docente para la comprensión de la unidad en la fracción como parte-todo puede reforzar negativamente:

• **Pregunta 35.**

Para ir de la casa al colegio, Ana debe pasar por la iglesia y por la plaza. Las distancias que debe recorrer se muestran en la figura.



En total, ¿qué distancia debe recorrer Ana para ir de la casa al colegio?

- A. $\frac{4}{3}$ km.
- B. $\frac{9}{3}$ km.
- C. $\frac{10}{3}$ km.
- D. $\frac{14}{3}$ km.

Figura 3. Situación prueba ICFES del MEN.

Fuente: Oquendo y Castillo (2016).

En este ejemplo, se propone una situación ligada a la competencia resolución cuya respuesta correcta es la D. El porcentaje de respuestas acertadas en el país es de 63,1%

El contexto real se desvincula en relación con las fracciones propias tal como lo menciona Butto (2013):

Dificultades típicas que los niños enfrentan con ese abordaje se presentan al tratar con una fracción impropia (e.g., 5/2). De acuerdo con esta perspectiva de fraccionamiento, tendríamos que el número de partes tomadas es mayor que el número de partes divididas [...]

algunos sujetos afirmaban que “el número de arriba es cuántas partes se va a pintar y el de abajo cuántas partes se va a dividir el círculo”; en ese sentido, se reafirma la comprensión de la fracción en términos de la conjugación de dos acciones: dividir/tomar [...] (p.2)

En este sentido la persistencia de las dificultades en el manejo de la fracción como parte-todo a razón de una mala interpretación en las funciones del numerador y del denominador y el reconocimiento de éstos como entidades separadas, como lo menciona Butto (2013), continúa siendo un problema que es preciso abordar en el aula.

En consecuencia, se diseñan y se adaptan unas actividades y se realizan entrevistas que permitan indagar y poner en evidencia dificultades sobre el reconocimiento y uso adecuado de los atributos propios de la fracción en un contexto continuo en grado cuarto, con la finalidad de proponer aspectos y/o actividades que orienten el tratamiento de esas dificultades.

MARCO TEÓRICO

El presente trabajo se enmarca en documentos que orientan el trabajo con la fracción como parte-todo en contexto continuo para la construcción de saberes oportunos y necesarios:

Marco legal

El Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998) reconoce el papel del contexto en todas las fases del aprendizaje de las matemáticas, en particular, durante la fase de exploración en la que se posibilita al estudiante descubrir y reinventar las matemáticas. Asumiendo que el contexto es:

Los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (MEN, 1998, p.19).

En coherencia con lo anterior, se considera importante el contexto inmediato de los estudiantes de grado cuarto del colegio Mayor Primeros Maestro donde se pueda evidenciar que “el pensamiento numérico es a veces determinado por el contexto en el cual las matemáticas evolucionan” (MEN, 1998, p.26) y es orientado desde la manera como un estudiante concibe las matemáticas.

Ahora, los conocimientos previos de los estudiantes respecto a la fracción como parte todo en contexto continuo y su realidad permiten indagar y trazar un punto de partida para la reestructuración del conocimiento, estos reflejados desde experiencias como: “Para otra estudiante resulta más fácil decir que en $1/2$ libra de queso hay más que en $1/4$ de libra, que determinar cuál es mayor entre $1/4$ y $1/2$ ” (MEN, 1998, p.26). Este ejemplo, lleva a reflexionar en torno a la relación entre la matemática de la escuela y la matemática de la cotidianidad.

En cuanto, al papel que juega la fracción en el contexto de los estudiantes y la construcción de su concepto en sí, se identifican aspectos como:

- Este paso de los números naturales [...] a los números racionales positivos y negativos (con el cero como racional) no sólo amplía el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, configurando así sistemas numéricos diferentes (MEN, 2006, p.6).
- “El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número” (MEN, 2006, p.59).

Estos aspectos reconocen que la fracción es un concepto fundamental que facilita la transición de los números naturales a los números racionales y por ende la necesidad de construir su concepto y lo que ello implica.

No obstante, esta construcción del concepto de fracción especialmente como parte-todo en contexto continuo, no debe caer en obstáculos didácticos que deformen este sino, tener claro durante el proceso formativo que:

[...] el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales. El tejido de estos hilos requiere aceptar, tal como se ha descrito en cada pensamiento, que un concepto matemático admite diversas aproximaciones, como, por ejemplo, los distintos significados de las fracciones (MEN, 2006, p.78).

Sin embargo, caer en el error de abordar todos los significados de la fracción al tiempo dañaría la riqueza del concepto de fracción, el manejo de sus atributos y sus diferentes significados, además de generar vacíos y confusión.

Por ello, se considera que la construcción del concepto de fracción y los atributos propios de esta deben iniciar desde la parte-todo como base de sus otros significados lo cual, requiere de un proceso extenso, continuo y dinámico enmarcado acorde a las necesidades de los estudiantes y situaciones significativas.

La Fracción como parte-todo en contexto continuo

De las diferentes interpretaciones de la fracción, esta monografía profundiza en la fracción como parte-todo en contexto continuo donde la fracción es considerada como un recurso fenomenológico del número racional según Freudenthal (1983) y el contexto continuo posee una connotación dependiendo el autor desde el que se maneje; para el caso de Pruzzo (2012) aborda cantidades continuas, Sáenz (citado por Rojas et al., 1999) trabaja a partir de figuras geométricas planas, Llinares y Sánchez (1997), y Freudenthal (1983) coinciden en el manejo de objetos caracterizados desde el continuo.

Ahora, Llinares y Sánchez (1997) reconocen que los niños inicialmente trabajan la relación parte-todo de forma cualitativa en situaciones de la vida diaria, hasta que comienzan a manejar el contexto continuo-área en el que se deben apoyar en unos atributos. A saber:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido.
3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos —partes—son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—.
6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
7. El “todo” se conserva [...] Payne [...] propone otros cuatro atributos, que ve como esenciales a esta interpretación de la fracción: manejar el control simbólico de las fracciones, es decir, los símbolos relacionados a las fracciones; considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos; trabajar con fracciones mayores que la unidad y reconocer subdivisiones equivalentes (Payne, Piaget, Inhelder y Szeminska, citados por Martínez y Lascano, 2001, p. 2).

No obstante, el manejo de los atributos puede ser dirigido por métodos como: la limitación de la equipartición donde a) un objeto puede ser transformado por medio de la acción ser partido donde la irreversibilidad pone a las partes del todo como elementos discretos lo cual, generan un obstáculo para la reunificación, b) el abordaje de la fracción como tantos de tantos y no desde el tamaño relativo de un entero en el que se tenga presente lo que implica ser menor que, igual que o mayor que un entero según Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013), dividir una figura en partes

iguales a ojo o por tacto, entre otros los cuales, podrían asumirse como actos primitivos acorde a Freudenthal (1983). Esto puede dar una visión falsa del progreso en la construcción de la fracción como parte-todo.

Cabe destacar que el reconocimiento de la función de cada una de las partes de la fracción en una situación específica es fundamental para la construcción de su noción y el abordaje de los atributos anteriormente expuestos.

Siguiendo esta línea de trabajo, Llinares y Sánchez (1997) consideran que para el trabajo de la fracción como parte-todo se debería trabajar de manera gradual cada uno de los contextos, empezando con el continuo y después con el discreto.

Así mismo, Novellis (citado por Rojas et al., 1999) propone unos niveles en los que se analizar de manera progresiva el desarrollo de habilidades en cuanto al reconocimiento de la relación parte-todo: Nivel 1- La fracción a/b , una figura geométrica dividida en b partes congruentes, de las cuales se sombree o tome a partes, en esta primera parte los estudiantes deben reconocer que el todo puede ser dividido en b partes congruentes en forma e iguales en área y se toma a partes con respecto a la fracción dada. Nivel 2- La fracción a/b , una relación relativa entre dos regiones geométricas y la fracción, es decir, resalta que dos cantidades fraccionarias pueden ser comparadas a partir de una relación multiplicativa y a/b , una región geométrica dividida en b partes congruentes en área, pero no en forma, a de las cuales son consideradas, en este caso más de un atributo puede intervenir en tanto la situación lo permita.

Ello nos lleva a reflexionar con respecto al tratamiento de las fracciones a diferencia de los números naturales, considerando que:

No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones. (Freudenthal, 1983, p.2)

El inadecuado trabajo de la didáctica de las matemáticas puede traer consigo errores como: el inducido desde la enseñanza ha consistido en no poder pensar un único todo (la unidad), desde donde se identifique las partes de la fracción, al igual que “en muchos casos, no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejarse por separado... es un error común al trabajar con el concepto de equivalencia” (Hart, citado en Mancera, 1992, p. 8).

Así mismo, Pruzzo (2012) pone en consideración que se presentan diferentes casos de fracción agregando formas alternativas de medir y se descuida la existencia de una unidad (o varias) que se dividen o reparten; lo que puede llevar al no reconocimiento de cantidades o valores de magnitud inmersas en el lenguaje cotidiano, la dificultad para comparar entre sí y con números naturales, fracciones a través de distintos procedimientos y el uso de la unidad para operar fracciones ya que este obstaculiza la comprensión de la unidad estable, el concepto de fracción desde la relación parte-todo que funciona como subconstructo del concepto global de fracción.

Además, el afán por cumplir unos contenidos, conlleva a trabajar diferentes interpretaciones de la fracción, así como diferentes gráficas sin haber una consolidación previa del concepto de fracción interpretado desde Pruzzo (2012) generando un proceso de enseñanza-aprendizaje acelerado y global.

Conjuntamente, tal como lo considera Pruzzo (2012) al mencionar que el manejo de gráficas inadecuadamente o imaginar desplazamientos, rotaciones de una figura no ayudan en la construcción de la noción de fracción.

Un ejemplo que permite reflexionar sobre el extenso, constante y evaluativo trabajo didáctico en el aula de la fracción es la investigación de Martínez y Lascano (2001), quienes manifiestan que: no se evidencian avances significativos en la comprensión de los atributos *consideran las partes como totalidad y reconoce subdivisiones equivalentes* por parte de los estudiantes a pesar de que se propone una secuencia de actividades y se realizan actividades de refuerzo.

Existen por lo menos dos fuentes de concepciones que llevan a un docente a promover

errores de aprendizaje, por un lado, se listan las concepciones personales constituidas fuera del ámbito escolar, y por el otro, obstáculos derivados de la memorización de los conocimientos adquiridos en la escuela éste último señalado por Piaget (Pruzzo, 2012).

Estos permiten evidenciar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la fracción como parte-todo en contexto continuo la posibilidad que los estudiantes presenten dificultades u obstáculos de carácter didáctico, conceptual y/o contextual a la hora de abordar actividades con la fracción.

En consecuencia, se propone una prueba que facilite vislumbrar algunas lagunas adquiridas por la enseñanza impartida o experiencias propias del o de la estudiante en la construcción del objeto matemático, fracción parte-todo en contexto continuo.

Ésta pensada desde la identificación y trabajo con algunos atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo descritos por Piaget et al. (Citados por Llinares y Sánchez, 1997) tales como:

- (Atributo 3) Las subdivisiones cubren el todo: Todas las partes congruentes-iguales forman el todo de manera que se evidencie la relación- parte-todo.
- (Atributo 5) Los trozos -partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruentes: a/b , donde b indica el número de partes congruentes-iguales en que se divide el todo y a las partes tomadas acorde a Rojas et al. (1999). Éstas sujetas a acciones de acuerdo con la situación o la fracción donde el todo puede ser rebanado, cortado, coloreado, etc. En partes iguales.
- (Atributo 6) Considera las partes como totalidad: Se reconocen medidas diferentes para las partes acorde a Rojas et al. (1999).
- (Atributo 7) El “todo” se conserva: Reconocimiento de la unidad y el papel que esta juega con relación a la fracción.
- (Atributo 8) Manejar el control simbólico de las fracciones: “los símbolos relacionados a las fracciones” (Payne, citado por Martínez y Lascano, 2001, p. 2).

- (Atributo 9) Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos: Se caracteriza por trabajar a partir de la clasificación del *todo* en la que este puede ser continuo de una forma flexible y adaptativo a una circunstancia acorde a Freudenthal (1983).
- (Atributo 10) trabajar con fracciones mayores que la unidad: Se resalta el reconocimiento y manejo de la unidad, y el manejo de la multiplicación que no necesariamente es trabajada al interior de la unidad sino también externamente a estalo que con lleva a dos cosas, el manejo de la fracción impropia considerado desde Freudenthal (1983) y la multiplicidad de la unidad desde Duval y Sáenz (2016).
- (Atributo 11) Subdivisiones equivalentes: A la unidad se le puede hacer nuevas subdivisiones según Rojas et al., (1999).

Ahora, estos atributos pueden ser orientados desde la clasificación todo-parte propuesta por Freudenthal (1983) ya que facilita la identificación de la relación parte-todo y todo-parte para la construcción de las diferentes actividades que se propongan a los estudiantes.

Esta clasificación permite describir el todo y su relación con la(s) parte(s) como se puede apreciar en la figura 4.

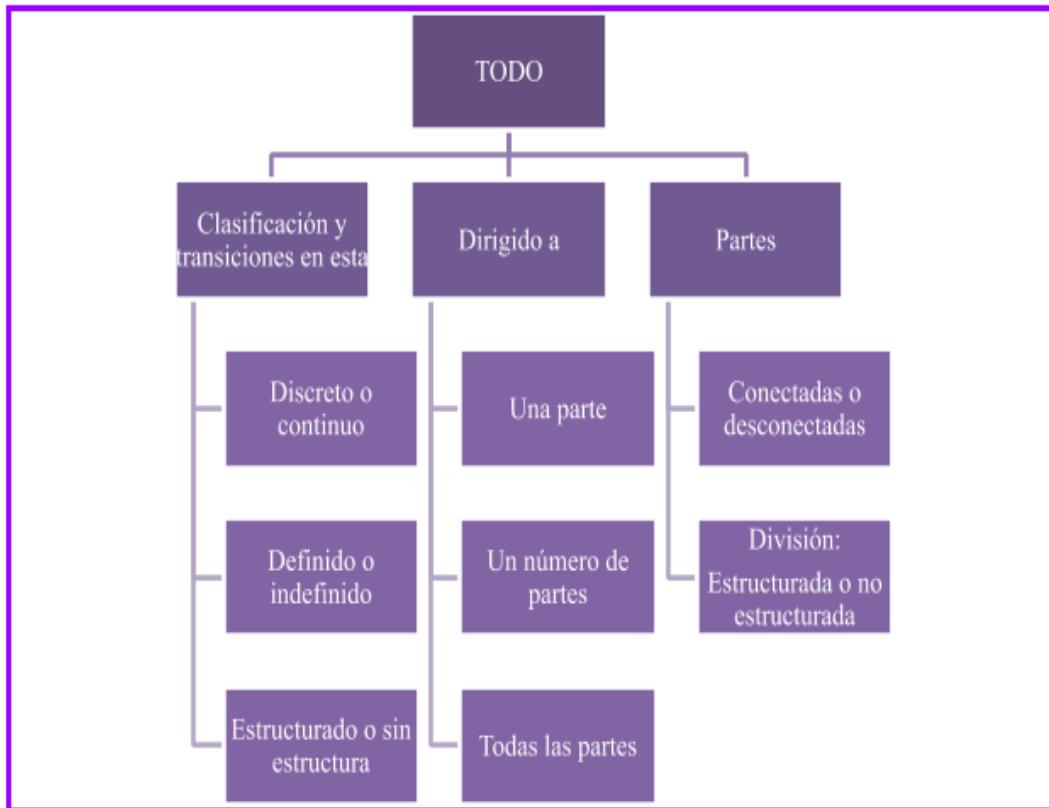


Figura 4. Relación todo-parte.

Fuente: adaptado desde Freudenthal (1983).

A partir de esta interacción entre el todo y la(s) parte(s) se puede resaltar que “un todo es un nuevo término único, distinto de cada una de sus partes y de todas ellas: es una unidad, no pluralidad, y se relaciona con sus partes, pero tiene un ser distinto del de ellas” Russell (como se cita en Castro 2015, p. 104) lo cual, implica analizar sobre el tratamiento de los atributos propuestos.

Además, atiende a la cuestión: veces en que cabe una parte en un todo, bajo condiciones donde se podrían asumir las partes como equivalentes y el criterio puede ser, número o valor de una magnitud, o que la hace más significativa de acuerdo con Freudenthal (1983).

Sin embargo, esta apreciación no puede caer en el error de ver la fracción solamente como fracturador, sino que se exalte la necesidad de reflexionar sobre el manejo de la división y la multiplicación, en la didáctica tradicional de las fracciones. De ello depende un adecuado

tratamiento de las fracciones propias y las fracciones impropias; en la fenomenología de la didáctica de las estructuras matemáticas Freudenthal mencionado por Del Río y Ramírez (2009) considera: a) La representación en la enseñanza de la fracción como una herramienta pedagógica que permite el paso de una estructura simple a una compleja, teniendo en cuenta el contexto para su comprensión, b) las fracciones deben ser acercadas a los estudiantes mediante un lenguaje que ellos entiendan, esto es, hay que considerar una matemática activa, “donde el alumno lleve secuencias y plantea regularidades ante los fenómenos que experimenta y observa, lo cual lo encaminará a las soluciones particulares”(Del Río y Ramírez, 2009, p.19) y c) la distinción entre el fenómeno que se desea comprender y estructurar, y las entidades de pensamiento que lo organizan.

Una vez descrita la relación todo-parte de modo general, esta es adaptada a las necesidades de la propuesta y se hace una interpretación de la clasificación todo-parte propuesta por Freudenthal (1983) desde ejemplos vistos y analizados del documento *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Se espera que ésta permita orientar las actividades y enriquecer lo expuesto por Freudenthal (1983). A saber:

El TODO puede ser:

- Continuo: Figuras u objetos que pueden ser cortados.
- Definido: Figuras cerradas que dan cuenta de finitud.
- Indefinido: Figuras no cerradas que dan cuenta de infinitud
 - + Con estructura: Parte de una plantilla.
 - + Carente de estructura: No parte de una plantilla.

Se tiene en cuenta que puede haber una transición en la clasificación del TODO .

La atención puede estar dirigida a una parte, un número de partes o todas las partes.

Las PARTES pueden estar:

- Conectadas: Las partes están contiguas y del mismo color.
- Desconectadas: Las partes no están contiguas y del mismo color.

- + Regulares: Todas las partes son congruentes en área.
- + Irregulares: No todas las partes son congruentes en forma ni tamaño.

La división puede ser:

- Estructurada o sin estructura Todas las partes atienden a un patrón o patrones.

En este caso se asume que en las diferentes actividades existe la posibilidad de que haya o no una división con estructura.

En complemento, se destacan algunos modos de uso aplicados al contexto continuo considerados por Castro (2015): 1) fraccionar: división equitativa o de manera verbal de un objeto, el actuar sobre un todo para dar paso a partes iguales y 2) medir: “la fracción expresa cuántas veces la parte contiene el todo. Él aborda el problema de expresar un objeto o parte P mediante una unidad de medida mayor T (de la que forma parte)” (p. 105), los cuales ayudan a dar sentido a la relación multiplicativa parte-todo, acorde a Castro (2015) y se presentan, en las actividades propuestas, en diferentes grados. En estas se aprecian una (s) parte (s), un todo y una acción que los relaciona.

Propuesta de actividades

Partiendo de los atributos identificados y descritos anteriormente, se diseñan, adecuan y describen las siguientes actividades, desde diferentes autores y la interpretación a la clasificación todo-parte de Freudenthal (1983), con la finalidad de reconocer las dificultades que presentan los estudiantes de grado cuarto cuando trabajan con algunos atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo.

Actividad 1

Para el abordaje de los atributos: *Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruentes, Las subdivisiones cubren el todo y El “todo” se conserva*, se plantea la siguiente actividad la cual, es adaptada desde Rojas et al. (1999), y la secuencia de Thompson (2001).

Hola, soy “Cristian”:

El 2 de septiembre cumplí años. Yo quería cortar mi pastel rectangular para repartirlo entre ocho invitados y yo. A cada invitado le correspondió un noveno del pastel, sombreá la parte que se comió uno de los invitados.



Figura 5. El todo, Torta rectangular.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la interpretación expuesta, el todo (pastel rectangular) es continuo, definido y carente de estructura y la atención está dirigida a una de las partes del todo, en particular aquella que se comió uno de los invitados en coherencia con las indicaciones en el enunciado.

Ahora, algunas dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la actividad propuesta son: no reconocer la relación parte-todo, no dividir en partes congruentes en forma-tamaño el todo, no conservar el todo después de realizar una división en el interior de este y la transición de una representación a otra.

En consecuencia, se proponen los siguientes criterios de evaluación, de modo que atiendan a los atributos indicados.

Bueno: “Dada una unidad que no está dividida, hace divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella” (Rojas et al., 1999, p. 20)

Malo: Dada una unidad que no está dividida, no hace divisiones en partes congruentes ni obtiene una parte fraccionaria de ella.

Actividad 2

Para el abordaje de los atributos: *Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos (cantidades- valores de magnitud: descripción), Trabajar con fracciones mayores que la unidad y Control simbólico de las fracciones*, se plantea la siguiente actividad, que es adaptada desde la secuencia de Thompson (2001)

Al día siguiente mi mamá me pidió que la acompañara a la tienda para comprar: Medio kilo de carne, un cuarto de kilo de fríjol y una gaseosa tres litros y medio.

¿Cómo escribirías estas cantidades en fracción (números)?

Medio kilo de carne _____

Un cuarto de kilo de fríjol

Una gaseosa tres litros y medio _____

En esta actividad, los todos (carne comprada, fríjol comprado, gaseosa comprada) se caracterizan por ser unos objetos concretos, continuos, no están definidos y carentes de estructura. En esta ocasión se manejan dos magnitudes capacidad y masa, y se requiere un ejercicio más abstracto.

Ahora, algunas dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la actividad propuesta son: no describir las cantidades propuestas desde su representación simbólica ni su apreciación fenomenológica (la escritura en símbolo de la fracción dada, en la que se evidencie la multiplicidad de la unidad) y no evidenciar la relación entre la unidad de medida y el objeto concreto a partir de la numerosidad.

En consecuencia, se proponen los siguientes criterios de evaluación de modo que atiendan a los atributos indicados.

Bueno: Describe todas las cantidades propuestas desde la fracción como fracturador y su interpretación fenomenológica.

Regular: Describe algunas cantidades propuestas desde la fracción como fracturador, sin interpretación fenomenológica.

Malo: No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Actividad 3

Para el abordaje del atributo: *Considera las partes como totalidad.*, se plantea la siguiente actividad la cual, es adaptada desde Rojas et al. (1999).

Sombree la superficie que se indica: Un sexto del rectángulo.

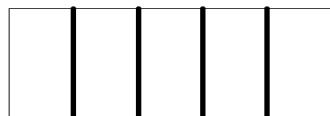


Figura 6. Actividad cambio de unidad de medida

Fuente: Rojas et al. (1999)

En este caso, el todo (rectángulo más grande) es continuo, definido y con estructura. Inicialmente, las partes dadas están conectadas, su división es estructurada y regular.

La atención se fija en una parte con respecto al todo, así como en el modo en que el estudiante divide el todo para lograr sombrear un sexto.

Ahora, algunas dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la actividad propuesta son: no reconocer el todo, no identificar la necesidad de las partes dadas y no reconocer la caracterización de la parte obtenida con respecto al todo y a las partes dadas.

En consecuencia, se proponen los siguientes criterios de evaluación de modo que atiendan al atributo indicado.

Bueno: “Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), puede hacer nuevas subdivisiones de la unidad” (Rojas et al., 1999, p. 21)

Regular: Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), hace subdivisiones de algunas partes existentes sin tener en cuenta la unidad.

Malo: Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.

Actividad 4

Para el abordaje de los atributos: *Subdivisiones equivalentes, Control simbólico de las fracciones, es decir*, se plantea la siguiente actividad la cual, es adaptada desde Rojas et al. (1999).

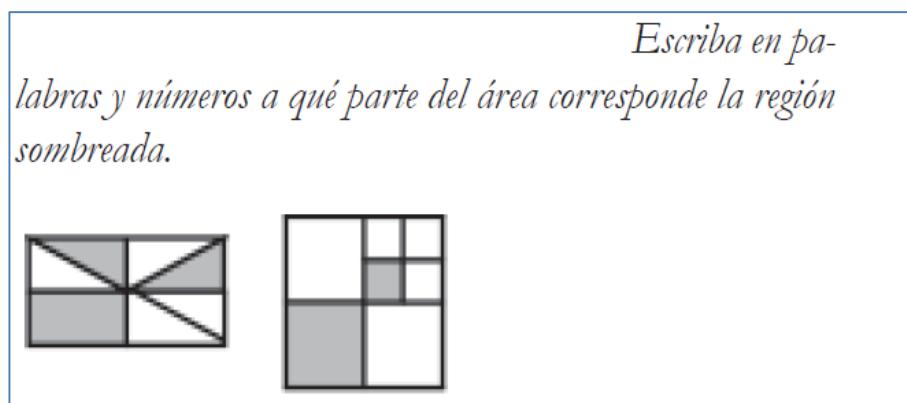


Figura 7. Actividad sobre subdivisiones equivalentes- partes como todo.

Fuente: Rojas et al. (1999)

En esta actividad se reconoce que los todos (rectángulo más grande y el cuadrado más grande) son continuos, definidos y con estructura de retícula subyacente. Inicialmente, en los todos, algunas partes están conectadas explícita o implícitamente, mientras otras no. La división de las partes es estructurada o sin estructura e irregular.

La atención está dirigida a un número de partes (las sombreadas) con respecto al total de partes armadas en el todo, a partir de la construcción de una unidad de medida.

Ahora, algunas dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la actividad propuesta son: no reconocer el cambio de unidad (restructuración del todo para lograr una división regular de las partes), no identificar la relación parte-todo en contexto continuo, ni tener control simbólico de la fracción que representa la gráfica dada.

En consecuencia, se proponen los siguientes criterios de evaluación de modo que atiendan a los atributos indicados.

Bueno: “Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconoce medidas diferentes para las partes” (Rojas et al., 1999, p.20) y registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.

Regular: “Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconoce medidas diferentes para las partes” (Rojas et al., 1999, p.20) sin registrar adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.

Malo: “Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconoce medidas diferentes para las partes” (Rojas et al., 1999, p.20) ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.

MARCO METODOLÓGICO

Tipo de estudio

La metodología utilizada en este trabajo fue un estudio de tipo exploratorio y descriptivo. Caracterizada por la compilación de unos antecedentes y un marco teórico- práctico que pretende profundizar en algunos aspectos (Behar, 2008), para este caso, de la fracción parte-todo en contexto continuo, con énfasis en algunos de sus atributos.

Con intención de enriquecer y delimitar la información en este trabajo se utilizó una prueba diagnóstica que permitió hacer una descripción de las formas de resolver las situaciones planteadas a los estudiantes. En complemento, se utilizó una entrevista con el fin de obtener una mayor comprensión de las actuaciones por parte de los estudiantes.

Población

El estudio se realizó en el Colegio Mayor Primeros Maestros. Esta institución educativa es de carácter privado y católico, se encuentra ubicada en el barrio Tabora en la localidad de Engativá. La filosofía del Colegio se centra en la atención y la formación integral del estudiante, para generar en ellos autonomía y pensamiento crítico; compromiso con la realidad social, política, económica y cultural del País; además, fomentar como principios institucionales el respeto a la dignidad humana, el reconocimiento del otro con sus particularidades y la conciencia ecológica. El Colegio Mayor Primeros Maestros se caracteriza por promover el modelo pedagógico *enseñanza para la comprensión*.

El Colegio presta el servicio educativo en los grados de transición a once. Tiene 172 estudiantes, dentro de ellos, estudiantes en condición de discapacidad intelectual, trastorno de atención dispersa, discapacidad motora y autismo.

El presente trabajo se realizó con estudiantes del grado cuarto, debido a que en los estándares básicos de competencias se considera importante el trabajo con la fracción, relación parte-todo en diferentes contextos y teniendo en cuenta la fracción como tema central de la aritmética que comunica la educación de los niños y jóvenes (MEN citado por Del río y Ramírez, 2009)

De hecho, en la fenomenología didáctica se consideran los caminos en el proceso de la enseñanza de la fracción que permiten la organización de fenómenos del mundo mental, físico y social tal como lo propone Freudenthal y en términos del aprendizaje de la fracción, lo que el estudiante puede experimentar en situaciones basadas en un contexto como propias de las matemáticas, donde los objetos mentales son comprensibles, integrando su conocimiento con lo académico y lo social para el discernimiento de la realidad (Del Río y Ramírez, 2009).

Se realizó un diagnóstico del medio para identificar características de los sujetos, sus actividades diarias, infraestructura de la institución educativa y contexto de los estudiantes. De este se obtuvo la siguiente información:

- Los estudiantes son tres niños y cuatro niñas.
- Ellas(os) se encuentran en edades entre los 9 y 13 años.
- Sus familias pertenecen a los estratos 3 ó 4.
- Un niño tiene atención dispersa.
- Algunos intereses de los estudiantes son: los peces, la natación, el Xbox, la bicicleta, el fútbol, las series de televisión, el patinaje y el baile.
- El colegio cuenta con una sala de sistemas, un patio con televisor y 12 salones.

Fases de la investigación

Cada fase presenta distintos momentos que permitieron la construcción del trabajo. A saber:

Fase I

Momento 1: Se hicieron diferentes consultas bibliográficas sobre la enseñanza y aprendizaje de la fracción como parte-todo en contexto continuo luego, se realizó un resumen de cada una de estas.

Momento 2: Se retomaron los RAES realizados para la construcción de los antecedentes, que orientaron el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos.

Momento 3: Se escribió una justificación y un marco teórico, para dar cuenta de la necesidad de diseñar una secuencia de actividades, a partir de lo descrito en los antecedentes y el planteamiento del problema.

Momento 4: Se realizó un marco metodológico en el que se construyó un escrito soportado en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (citado por Díaz, 2013, p.1), unas fases y un cronograma que orientaran el abordaje del trabajo.

Momento 5: Se hace entrega de un anteproyecto estructurado que reflejó lo que se deseaba trabajar con los estudiantes de grado cuarto.

Fase II

Momento 1: Se realizaron diferentes consultas bibliográficas desde los lineamientos curriculares, los Estándares Básicos de Competencias para Matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje, entre otras. Con las que se construyó un cuadro en Excel para la generación de unas categorías, que orientan el diseño y/o adaptación de actividades y la profundización y estructuración del marco teórico en dos partes: el marco legal y el marco matemático.

Momento 2: El marco teórico se adecuó de acuerdo a las necesidades presentadas a lo largo del desarrollo del trabajo, tales como: la generación de unas categorías con base a algunos atributos propios de la fracción, unos criterios de evaluación y unas actividades diseñadas o adaptadas desde diferentes autores, principalmente Freudenthal (1983), que se articularon con la prueba diagnóstica. Esto a razón de los tiempos que se manejaron.

Momento 3: Se hizo una revisión general del trabajo el cual presentó una necesidad por abordar los atributos propios de la fracción ya que estos eran más coherentes con lo que se propuso en la prueba diagnóstica.

Momento 4: Se aplicó la prueba diagnóstica. Enseguida, se diseñó una entrevista a partir de las respuestas dadas y se trabajó con los estudiantes. Estos instrumentos permitieron recoger información para el análisis de las respuestas obtenidas.

Se decidió eliminar la actividad del punto 2, *Acorde a las compras hechas ¿Qué pesa más la carne o el frijol? ¿Por qué?*, debido a que no maneja una relación multiplicativa que dé cuenta de la fracción como parte-todo. Además, esta tarea exige del resolutor tratar con una unidad de medida abstracta para poder relacionar estos objetos (el frijol comprado, la carne comprada), teniendo como referencia, una actividad que consiste en comparar dos fracciones de tal manera que queden enmarcadas en la relación parte-todo, debe atender a una estructura multiplicativa y no aditiva.

La comparación entre cantidades, en este caso entre valores de magnitud, no sólo requiere el simple ejercicio de comparar sino de un proceso metacognitivo sobre la magnitud y la fracción; es decir, la comparación entre valores de magnitud debe atender a un proceso transitivo de lo formal a lo fenomenológico o viceversa, de modo que la fracción no queda sólo como fracturador. Este aspecto invita a reflexionar sobre la importancia de la enseñanza- aprendizaje de la magnitud y la fracción por separado para luego ser conjugados de manera que permitan evidenciar la naturaleza de los objetos y la comparación entre cantidades, esto es, la fracción como comparador.

Fase III

Momento 1: Se hizo una descripción y un análisis de los resultados con la finalidad de identificar algunas dificultades en el reconocimiento y uso de los atributos propios de la fracción mediante unos cuadros que orienten este trabajo por estudiante.

Momento 2: A partir de la apreciación de los resultados de los estudiantes se procedió a hacer un análisis general de cada una de las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis. Como resultado de este análisis se obtuvieron algunas apreciaciones para las conclusiones del trabajo.

Momento 3: Se realizaron unas conclusiones que dieron cuenta de: la pregunta de investigación, los objetivos trazados, algunos aportes significativos de la investigación, algunas

limitaciones que se presentaron en el trabajo y algunas implicaciones investigativas que se generaron.

Momento 4: Se hicieron unas recomendaciones que den cuenta de aspectos para el diseño o adaptación de actividades que permitan el trabajo con las dificultades detectadas en el presente trabajo.

Instrumentos de investigación

Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica es “un instrumento que permite determinar cuáles son los puntos fuertes o débiles del individuo, en el tópico a tratar en la prueba” (Niño y Raad, 2018, p. 89).

Esta es de carácter escrito, gráfico y numérico; así, los individuos pueden mostrar los procedimientos que consideren pertinentes para cada una de las actividades propuestas, consiguiendo aspectos relevantes para el trabajo.

El tópico a tratar es sobre algunos atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo trabajados desde cuatro actividades diseñadas o adaptadas de diferentes autores, guiadas desde una interpretación con una mirada del contexto continuo en la clasificación del todo-parte propuesta por Freudenthal (1983) y teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes de grado cuarto.

Bajo estas directrices, se diseña una prueba diagnóstica disponible en el anexo 2, que permitan reflejar aspectos como: conocimientos previos de ellos(as), dificultades en el reconocimiento y manejo de los atributos propuestos y el dominio de la transición de un registro a otro (figura-escritura aritmética-lenguaje natural).

Díaz (2013) vincula actividades a cada una de las fases propuestas en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. Dichas actividades dan cuenta de un proceso complejo de estructuración/ desestructuración /reestructuración mediante operaciones mentales; y se caracterizan a continuación:

Tabla 1.

Relación fases y tipo de actividad según Díaz (2013).

FASE	TIPO ACTIVIDAD
Investigativa	Previa
Acción	De apertura
Formulación- validación	De desarrollo
Institucionalización	De cierre

Fuente: adoptado con base a Díaz (2013)

Este trabajo tiene un enfoque hacia las dos primeras actividades: (Previa) Se propuso unas tareas investigativas sobre dificultades en el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo y (Apertura) Se plantearon unas actividades que permitan a los estudiantes juzgar su acción, que implica una desestructuración de su conocimiento, a partir de parámetros que existen en la misma (Soto, Rodríguez y Piña, 2007).

En consecuencia, se podría considerar que la prueba diagnóstica es un instrumento que permite registrar las acciones realizadas por los estudiantes sobre las actividades diseñadas y presentadas en el marco teórico.

Esta se propuso en el salón de grado cuarto a un grupo de siete estudiantes de manera individual durante una hora y media.

Entrevista

Se selecciona esta técnica de recolección de información debido a que se requiere reportes orales de quienes participaron en la prueba diagnóstica, de modo que se pueda efectuar una comunicación cruzada en la que el entrevistador transmite tranquilidad, interés y motivación, con el fin de que el entrevistado brinde información de forma descriptiva e interpretativa, según Gallardo y Moreno (1999).

Las preguntas propuestas en la entrevista estructurada-convergente son abiertas con un

enfoque de profundización e indagación sobre las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica. Tuvo en cuenta algunos aspectos: estrategia de cuestionario informal en la que se torna en conversación, centrada en el interrogado sin perder el enfoque; se mantiene un orden para las preguntas, se brinda el tiempo suficiente para pensar en las respuestas y realizar pausas cortas entre preguntas, como lo proponen Gallardo y Moreno (1999).

Además, la entrevista con cada niño(a) es desarrollada en un salón o en la sala de profesores, garantizando un espacio de tranquilidad y seguridad a los estudiantes; se usa como recurso la grabación, para la fidelidad de la información adquirida.

El formato de entrevista consta de siete preguntas orientadas y ordenadas en coherencia con las respuestas obtenidas de los estudiantes de grado cuarto como se puede apreciar a continuación:

Tabla 2.

Preguntas de la entrevista a partir de resultados de la prueba diagnóstica.

PUNTO SEGÚN PRUEBA DIAGNÓSTICA	PREGUNTA ORIENTADORA EN ENTREVISTA
1	¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? ¿Qué significa para usted, <i>un noveno de la torta rectangular</i> ?
2	¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación?
3	¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera?
4	¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? ó ¿Por qué consideró esas fracciones para cada figura propuesta? ó ¿Por qué no respondió la pregunta?

Fuente: elaboración propia.

ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Resultados

De la aplicación de la prueba diagnóstica con su respectiva entrevista sobre el reconocimiento y uso de algunos atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo. Se analizan los resultados obtenidos de cada uno de los sujetos en las diferentes actividades propuestas, permitiendo tener una proximidad a la influencia de las representaciones y la interpretación propuesta, a partir del trabajo de Freudenthal (1983) sobre la clasificación todo-parte, en las respuestas obtenidas.

En cada actividad se realiza una reflexión general que oriente su análisis y se complementa por medio del contraste con la teoría y el paralelo con otros trabajos investigativos, acorde a los resultados de los sujetos.

A continuación, se presentan los resultados de la aplicación de las actividades y la entrevista realizada a los estudiantes que realizaron la actividad. Para la valoración de las actividades se tuvieron en cuenta los criterios definidos para cada una de ellas, las consideraciones del investigador hacia los resultados de cada sujeto y las actividades en sí mismas.

Primera actividad

Tabla 3.

Actividad 1 y atributos trabajados en esta.

ACTIVIDAD 1	ATRIBUTOS
<p>Hola, soy Cristian:</p> <p>1. El 2 de septiembre cumplí años. Yo quería cortar mi pastel rectangular para repartirlo entre ocho invitados y yo. A cada invitado le correspondió un noveno del pastel, sombreo la parte que se comió uno de los invitados.</p> 	<p>(Atributo 5) Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente.</p> <p>(Atributo 7) El “todo” se conserva.</p> <p>(Atributo 8) Las subdivisiones cubren el todo.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 1



Figura 8. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 1.

Tabla 4.

Análisis resultados del sujeto 1 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Bueno.</p> <p>El sujeto 1. “Dada una unidad que no está dividida, hace divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella” (Rojas et al., 1999, p. 20)</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>“Porque cada uno de los invitados, para que tenga una parte rectangular de pastel, es más”.</i></p> <p>¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>“Un pedazo para un invitado sombreado”.</i></p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 1 presenta conocimiento de los atributos <i>Las subdivisiones cubren el todo</i> y <i>El “todo” se conserva</i>, ya que, al momento de dividir la unidad, este comprende la relación existente de las partes en el interior del todo (torta rectangular), mientras que el atributo <i>Los trozos- partes- son iguales</i>. <i>Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i>, pudo verse influenciado por la congruencia de las partes a ojo, a lo que Freudenthal (1983) considera como un acto primitivo o no había un apoyo para ello (cuadrícula, otro). Aunque, se resalta que en la entrevista se da cuenta de la relación parte-todo.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 2

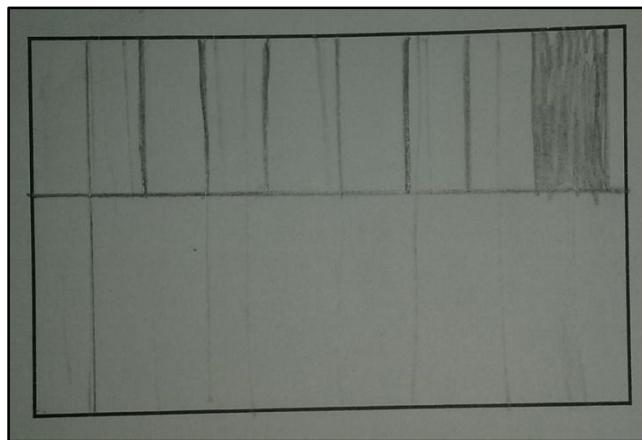


Figura 9. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 1.

Tabla 5.

Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Malo. El sujeto 2. Dada una unidad que no está dividida, no hace divisiones en partes congruentes ni obtiene una parte fraccionaria de ella.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>"Porque un noveno es este...me parecía más fácil".</i> ¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>"La novena parte del pastel, la última parte del pastel".</i></p>
<p>Análisis: El sujeto 2 presenta dificultad de reconocer el atributo <i>El “todo” se conserva</i> ya que no identifica la unidad dada, el pastel rectangular, la cual puede ser dividida en nueve partes congruentes en área y que éstas a su vez conforman el todo. Esto refleja la ausencia del atributo <i>El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido</i>, de la función de cada una de las partes de la fracción dada y de la relación entre estas.</p> <p>Se especula que el sujeto a pesar de no tratar la unidad, posee alguna base sobre la división en partes regulares (<i>Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i>) y quizás sobre la fracción misma en cuanto a sus partes. Esto enfocado en el pedazo de la torta donde se trabaja la fracción dada.</p> <p>Ello da cuenta que el sujeto 2 aún no logra hacer la construcción de una estructura para el todo, donde claramente <i>las subdivisiones cubren el todo</i>, teniendo en cuenta la división regular de las partes en el todo y la fracción dada. Así mismo la transición entre representaciones (simbólico-pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 3

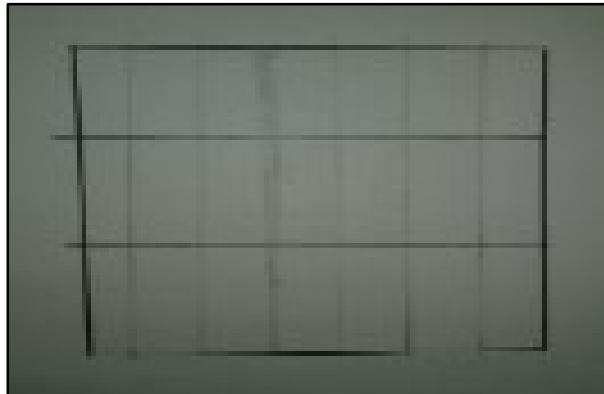


Figura 10. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 1.

Tabla 6.

Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Malo. El sujeto 3. Dada una unidad que no está dividida, no hace divisiones en partes congruentes ni obtiene una parte fraccionaria de ella.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>"porque eran ocho invitados, y tenía que partir la torta así para que queden suficientes".</i> ¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>"Sería como un parte más rico, tal vez la mitad de la torta".</i></p>
<p>Análisis: El sujeto 3 presenta un inadecuado manejo del atributo <i>Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i>, en relación con la fracción dada ya que intenta hacer una división de la torta en partes congruentes en área, realiza una acción a ojo como lo consideraría Freudenthal (1983). Esta división no está relacionada con la fracción dada.</p>
<p>Ahora, el reconocimiento de la relación parte-todo no es coherente con el enunciado en tanto a que: “el conocimiento aplicado a la vida real construido por el individuo, [...] puede ser elaborado por el estudiante en respuesta a los problemas planteados en contextos de situaciones cotidianas o familiares para él o ella” (Mack citado por Castro, 2015, p. 64). Esto podría llevar al estudiante a desconocer el papel de la unidad lo cual, posiblemente no reconoce la función de cada parte de la fracción dada ni la relación entre ellas. Aspectos que de cierta forma influyen en la comprensión de los atributos <i>Las subdivisiones cubren el todo y El “todo” se conserva</i>.</p> <p>Ello permite inferir que el sujeto 3 aún no logra hacer la construcción de una estructura para el todo teniendo en cuenta la división regular de las partes en el todo y la fracción dada. Así mismo la transición entre representaciones (simbólico-pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 4

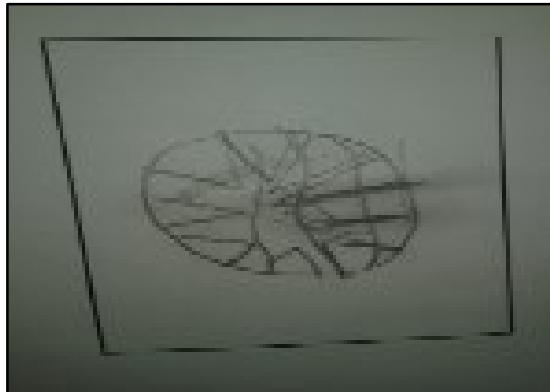


Figura 11. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 1.

Tabla 7.

Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Malo. El sujeto 4. Dada una unidad que no está dividida, no hace divisiones en partes congruentes ni obtiene una parte fraccionaria de ella.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? "...Es un pastel circular...ocho pedazos" (El estudiante no presenta seguridad en su respuesta) ¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? "Un pedazo para un invitado sombreado".</p>
<p>Análisis: Se tiene algunas apreciaciones sobre los atributos propuestos:</p> <ul style="list-style-type: none">• El "todo" se conserva, presenta dificultad en el reconocimiento de la unidad, la torta rectangular, ya que esta es condicionada a su realidad, donde comúnmente una torta es redonda.• Las subdivisiones cubren el todo: Este atributo en el actuar del estudiante se podría evidenciar que, en la unidad elegida, la torta redonda, se muestran ocho trozos de torta separados. Existe un intento por reconocer que los ocho pedazos componen la torta o posiblemente da cavida a otra interpretación.• Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente: En la formación de las partes no se tiene en cuenta la congruencia tamaño-forma entre las mismas. <p>En cuanto al pedazo que le corresponde a un invitado hay especulaciones en cuanto a que el sujeto considera ello como un acto propio de su realidad, un énfasis sobre la palabra <i>un</i>, entre otros aspectos.</p> <p>Lo que sí es claro es que hay dificultades en la construcción de una estructura para el todo, teniendo en cuenta la división regular de las partes en el todo y la fracción dada, como también en la transición entre representaciones (simbólico-pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 5

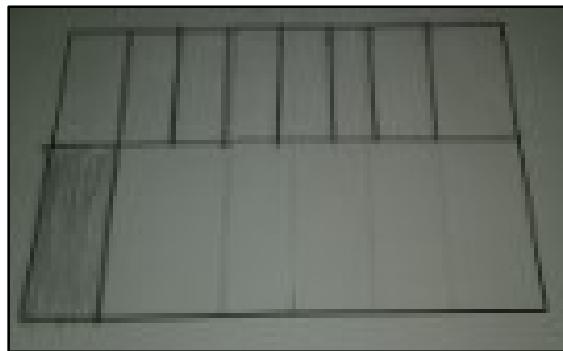


Figura 12. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 1.

Tabla 8.

Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Bueno.</p> <p>El sujeto 5. “Dada una unidad que no está dividida, hace divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella” (Rojas et al., 1999, p. 20)</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>“La hice de diferentes formas y no me dio la forma que yo quería... intenté, no sé...traté de formar de diferentes maneras cada rectángulo para colocar cada rectángulo y sombrear la parte que se comió el invitado”.</i></p> <p>¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>“Una parte de la torta”.</i></p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 5 presenta obstáculos en la fracción dada por medio de la representación gráfica de la situación donde el atributo <i>El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido</i> no es logrado con éxito, aunque haya conciencia (su argumentación trata de dar a entender la comprensión que posee sobre la relación parte-todo) y exista la necesidad por cumplir con <i>las subdivisiones cubren el todo, el todo se conserva y los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i>.</p> <p>Ello indica que el sujeto debe reforzar en la construcción de una estructura para el todo, especialmente, en una figura rectangular, teniendo en cuenta la división regular de las partes en el todo y la fracción dada. Así mismo la transición entre representaciones (simbólico-oral-pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 6

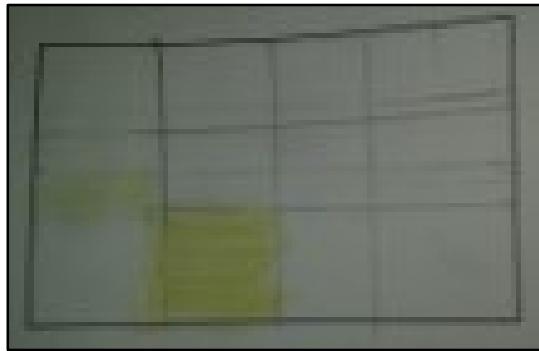


Figura 13. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 1.

Tabla 9.

Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Bueno. El sujeto 6, “Dada una unidad que no está dividida, hace divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella” (Rojas et al., 1999, p. 20)</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>“porque eran ocho invitados y él debía comer pastel también, entonces la corté rectangular en tres partes, porque tres y tres son nueve entonces por eso”</i>. ¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>“Significa que para el cumpleañero debe comer un pedazo de la torta, él tiene que cortarlo en mismas partes pues para que todos tengan la misma cantidad de pastel de tal manera que no sobre, no falte”</i>.</p>
<p>Ánalisis: El sujeto 6, en la gráfica que realiza no maneja toda la unidad, torta rectangular, sino un pedazo de la misma lo cual implica que no permite evidenciar que <i>el todo se conserva</i>. Ahora, el sujeto en la entrevista reconoce la importancia del atributo <i>El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido</i> lo que conlleva de una u otra forma a la comprensión de que <i>las partes cubren el todo y Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i>. No obstante, la gráfica hecha refleja que lo pensado por el sujeto no es coherente con lo realizado. Se resalta que la argumentación dada por el sujeto da cuenta de la relación parte-todo para esta actividad específica prevalecen los atributos propuestos. Ello hace pensar que el sujeto 6 aún no logra la transición entre representaciones (simbólico-oral- pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 7

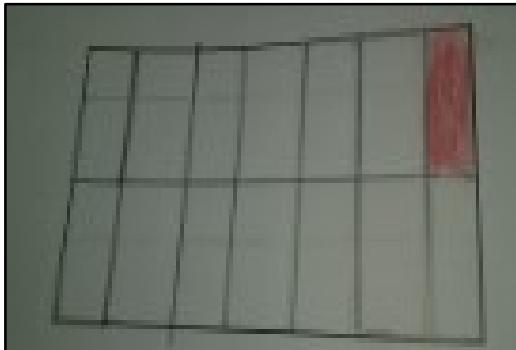


Figura 14. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 1.

Tabla 10.

Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 1.

<p>Evaluación: Malo. El sujeto 7. Dada una unidad que no está dividida, no hace divisiones en partes congruentes ni obtiene una parte fraccionaria de ella.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera? <i>"Para las personas...no quería que hiciera falta".</i> ¿Qué significa para usted, un noveno de la torta rectangular? <i>"Que la parten en cuatro mitades y tienen que ser de igual forma..."</i>.</p>
<p>Análisis: El sujeto 7 presenta un inadecuado manejo del atributo <i>Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente</i> en relación a que la unidad puede ser dividida en el número de partes solicitado. Se considera importante tener presente que para hacer la división de las partes se realiza una acción a ojo como lo consideraría Freudenthal (1983), aunque se destaca el intento por mantener las partes congruentes en tamaño-forma.</p> <p>Ahora, el reconocimiento de la relación parte-todo no es coherente con el enunciado, en tanto que: "el conocimiento aplicado a la vida real construido por el individuo, puede ser elaborado por el estudiante en respuesta a los problemas planteados en contextos de situaciones cotidianas o familiares para él o ella" (Mack citado por Castro, 2015, p. 64). Esto reflejado en la respuesta: <i>"Que la parten en cuatro mitades y tienen que ser de igual forma..."</i>.</p> <p>En cuanto a los atributos <i>el todo se conserva y las subdivisiones cubren el todo</i>, se ve reflejado en la gráfica una posible comprensión de estos, a pesar de que para este caso específico no guarden cierta relación con la fracción dada.</p> <p>Ello indica que el sujeto 7 aún no logra hacer la construcción de una estructura para el todo teniendo en cuenta la división regular de las partes en el todo y la fracción dada. Así mismo, no logra hacer la transición entre representaciones (simbólico-pictórico).</p>

Fuente: elaboración propia.

En resumen, para la actividad 1 se puede afirmar que más de la mitad de los estudiantes presentaron dificultad en reconocer y usar adecuadamente los atributos: 5 *Los trozos- partes- son iguales*, 6 *Las partes tienen el mismo tamaño-congruente* y 7 *El “todo” se conserva y Las subdivisiones cubren el todo*.

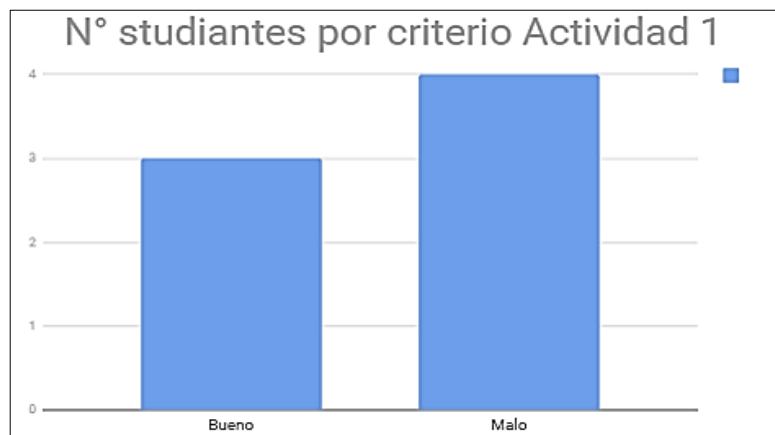


Figura 15. Resumen de los resultados de la actividad 1.

Fuente: elaboración propia.

Desde el punto de vista de Rojas et al. (1999), estos estudiantes se encontrarían en un nivel 0 donde prevalece la dificultad en hacer divisiones sobre la unidad. Ello con un enfoque hacia la congruencia de los partes o trozos iguales bajo la relación de equivalencia.

Así mismo, Freudenthal (1983) apoya esta idea mediante el reconocimiento de un proceso de división del pastel, las partes del pastel rectangular son comparadas por congruencia, lo que debe probar la igualdad de área.

No obstante, las partes que componen el todo no pueden ser comparadas fácilmente entre sí debido a que los estudiantes se ven obligados a hacer una comparación de forma mental porque la representación pictórica no facilita la modelación de esta acción a diferencia del manejo de un material concreto y estructurado.

Por otro lado, los resultados obtenidos de los estudiantes con criterio de evaluación *bueno*, resaltan la importancia de la transición de una representación a otra ya que al momento de describir la actividad planteada de forma oral, esto permitió evidenciar una mayor comprensión de la misma, mientras que de forma pictórica fue más complejo obtener los resultados esperados, es decir, las representaciones juegan un papel importante en la comprensión de los conceptos que se desean construir o desarrollar acorde a Llinares y Sánchez (1997).

Segunda actividad

Tabla 11.

Actividad 2 y atributos trabajados en esta.

ACTIVIDAD 2	ATRIBUTOS
2. Al día siguiente mi mamá me pidió que la acompañara a la tienda para comprar: Medio kilo de carne, un cuarto de kilo de fríjol y una gaseosa tres litros y medio. ¿Cómo escribirías estas cantidades en fracción (números)?	(Atributo 8) Manejar el control simbólico de las fracciones. (Atributo 9) Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos (descripción de cantidades-número de medida). (Atributo 10) trabajar con fracciones mayores que la unidad.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 1

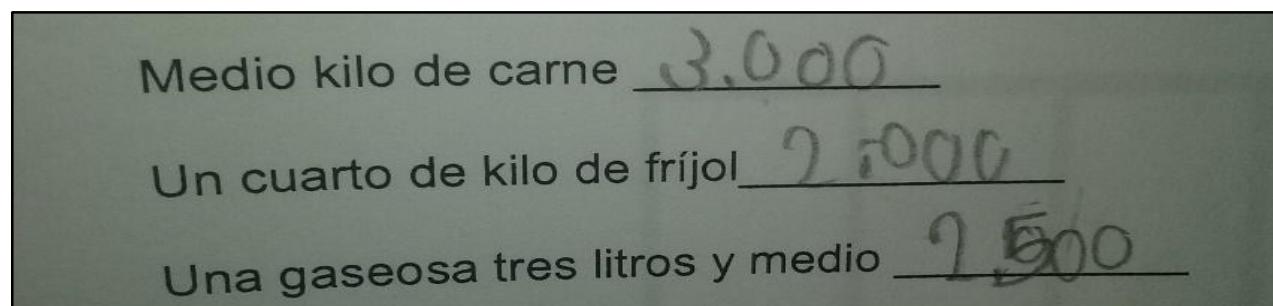


Figura 16. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 2.

Tabla 12.

Ánalisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 2.

Evaluación: Malo . El sujeto 1. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.
Entrevista: ¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "Cada uno pesa diferente como digamos la carne pesa más, 3000, 2000 y 2500... pues como te digo balancea el peso".

Análisis:

Inicialmente, se consideraba que el sujeto había considerado los precios de cada cantidad de producto. No obstante, en la entrevista se aprecia su énfasis en el peso: "*Cada uno pesa diferente como digamos la carne pesa más, 3000, 2000 y 2500... pues como te digo balancea el peso*". En esta respuesta el sujeto intenta hacer una estimación de la magnitud masa de cada producto, sin tener en cuenta la numerosidad, la unidad de medida y el todo concreto; es decir, no presenta una descripción propia de las cantidades propuestas lo cual no deja ver que realmente haya un *manejo del control simbólico de las fracciones dadas*. Posiblemente, no considera la relación parte-todo para esta situación específica ni dominio de una fracción impropia o mixta.

A partir de la respuesta dada por el sujeto se puede considerar que este no alcanza a relacionar las cantidades dadas escritas y su parte simbólica numérica, es decir, hay una falencia en el manejo de la representación verbal y simbólica, así como del proceso de comunicación. Aunque, hay conciencia de que esta situación se presenta de una forma más abstracta, lo que la hace compleja.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 2

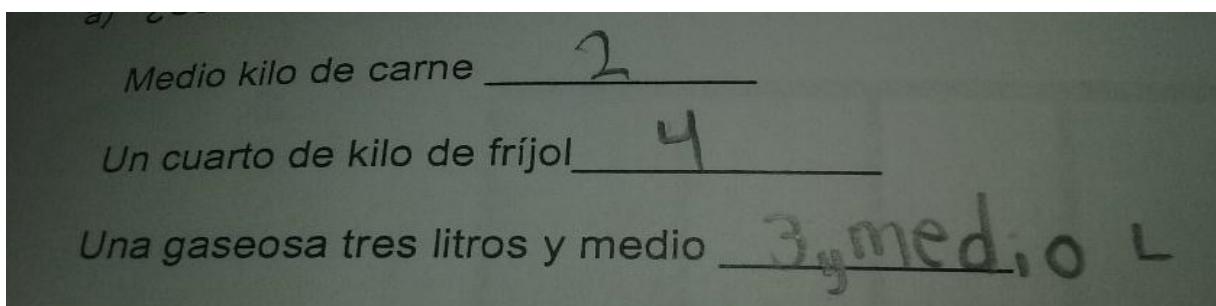


Figura 17. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 2.

Tabla 13.

Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 2.

Evaluación: **Malo**.

El sujeto 2. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "pensé en el número cuatro y lo dividí en la mitad, osea la mitad es 2 y el cuatro, pues un cuarto de fríjol, cuatro kilos no más".

Análisis:

Si se hace un contraste entre la prueba diagnóstica y la entrevista se puede evidenciar que:

El sujeto 2 desde su apreciación asocia las dos primeras

cantidades una es la mitad de la otra en tanto numerosidad. Por otra parte, señala *un cuarto de frijol* como *cuatro kilos* suponiendo que se está hablando de lo mismo, lo que implica que no hay comprensión de las partes de una cantidad, ni de la *relación parte-todo*, *para estos casos específicos* ni tiene *control simbólico de la fracción*.

En el caso de los “3 y medio L”, se considera que el sujeto no desconece *el medio*, pero sin tener control simbólico sobre este; para el caso del todo concreto, no es tenido en cuenta al momento de escribirse la respuesta. Ello se podría deber a que en la escuela no ha habido un trabajo minucioso de la fenomenología propuesta por Freudenthal (1983). Aunque, se destaca su intento por identificar la *fracción impropia o mixta* que se está considerando en la situación.

Esto implica que el sujeto 2 aún presenta dificultades en la transición entre representaciones, especialmente en la verbal y requiere del fortalecimiento del proceso de comunicación.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 3

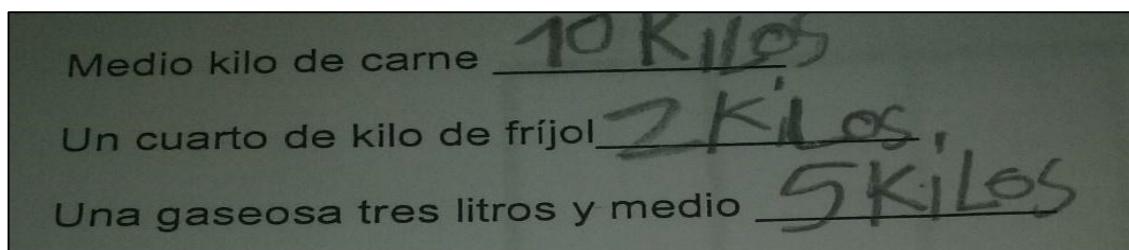


Figura 18. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 2.

Tabla 14.

Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 2.

Evaluación: **Malo**.

El sujeto 3. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "por lo que pensé que eran como 20 kilos entonces por ahí serían como la mitad de los kilos que por ahí era 10 o algo así...un cuarto de frijol como que serían dos kilos (pensó)".

Análisis:

El sujeto 3 presenta inconvenientes en asociar la parte escrita en palabras con la parte simbólica numérica. En cuanto a la magnitud considera litros y kilos como la misma cosa; para el caso del todo concreto, no es tenido en cuenta al momento de escribirse la respuesta, ello se podría deber a que aún no se ha logrado construir una relación entre la magnitud y la numerosidad, es decir, no se ha alcanzado su abordaje fenomenológico, lo cual le impide tener *control simbólico de las cantidades dadas*.

Esto muestra dificultad para describir cantidades por medio de su representación simbólica e interpretación fenomenológica, así como identificar *fracciones mixtas* gracias a una relación multiplicativa un tanto compleja ya que se maneja un líquido que podría ser más manipulable si se reconoce que está en un embase. El hecho de no manejar las cantidades propuestas dificulta la construcción de la fracción propia o de la *fracción mayor que la unidad*.

Ahora, el sujeto 3 realiza una asociación entre los términos *medio* y *mitad de*, enmarcados en el conjunto de los números naturales, pero sin formar una relación parte-todo asociada a una fracción.

Finalmente, el sujeto presenta dificultad para identificar una fracción como relación parte-todo en un contexto continuo, ello debido a que no hay un adecuado manejo del objeto concreto y la unidad de medida.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 4

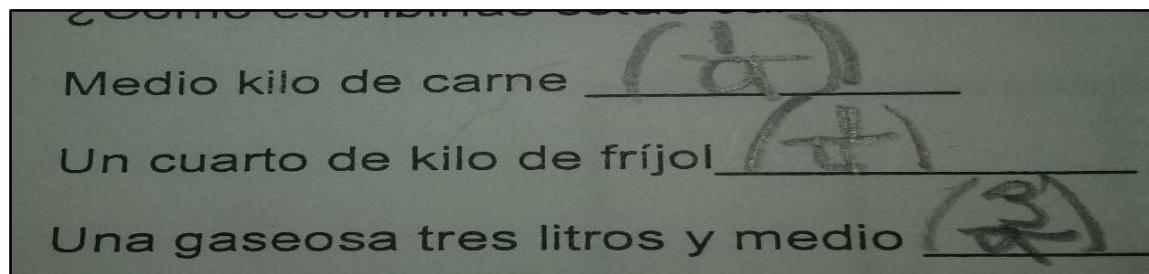


Figura 19. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 2.

Tabla 15.

Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 2.

Evaluación: **Malo**.

El sujeto 4. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "porque pensaba que era así..."

Análisis:

El sujeto 4 considera *medio* y *un cuarto* como cosas iguales, razón por la que escribe la misma numerosidad lo cual, pone en evidencia la dificultad de *manejar el control simbólico de las fracciones*. Esta misma circunstancia es reafirmada en el caso de $\frac{3}{4}$, donde se asume como *tres y medio*.

El sujeto se queda en el manejo de fracciones propias, sin darse cuenta que una de las cantidades propuestas es una *fracción mayor que la unidad*.

Claramente se identifica que el sujeto 4 tiene una dificultad en el manejo de la transición entre representaciones, el reconocimiento y uso de una fracción mixta en este caso a partir de un objeto concreto, líquido y la descripción de las cantidades dadas, teniendo en cuenta su numerosidad y unidad de medida.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 5

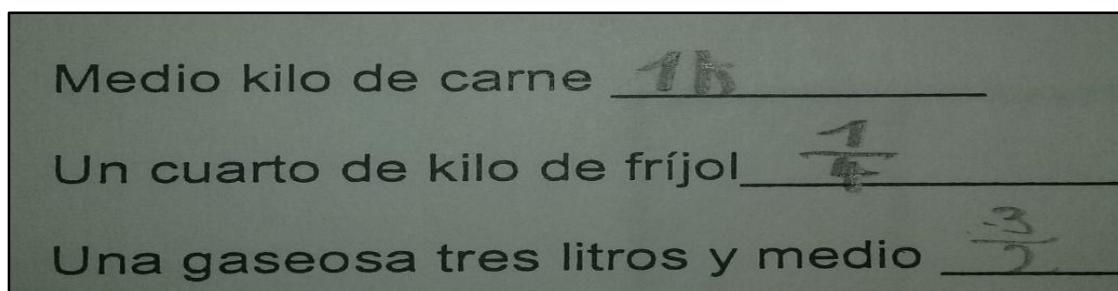


Figura 20. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 2.

Tabla 16.

Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 2.

Evaluación: Regular.

El sujeto 5. Describe algunas cantidades propuestas desde la fracción como fracturador, sin interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "un kilo de carne, 1k...me equivoque...no sé cómo hacer (3 litros y medio de gaseosa)".

Análisis:

El sujeto 5 presenta unas respuestas peculiares en las que se resalta la numerosidad y en una respuesta, la unidad de medida. En el caso de la primera respuesta, el sujeto no lee medio kilo de carne, sino un kilo de carne, por ello proporciona ese resultado; en la segunda, escribe adecuadamente la numerosidad, pero descuidando los otros aspectos (unidad de medida y objeto concreto) y en la tercera, muestra duda frente cómo se escribe realmente la cantidad solicitada, lo que implica que no *maneja el control simbólico sobre las fracciones dadas*.

Ahora, la relación parte-todo en esta situación específica para el sujeto 5 requiere de un mayor esfuerzo, debido a que esta es un nivel superior de abstracción que las otras situaciones propuestas; para el caso de la descripción de cantidades vistas desde lo fracturador-fenomenológico, aún no se ha logrado esta transición y el reconocimiento de fracciones mayores que la unidad se presenta compleja, en tanto que es más fácil el abordaje de la fracción propia.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 6

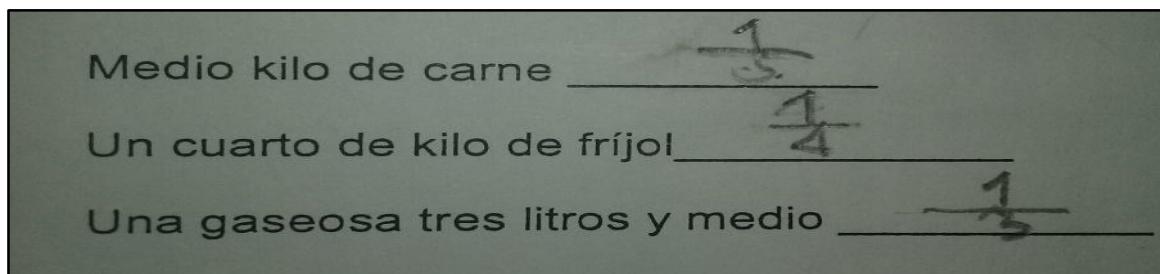


Figura 21. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 2.

Tabla 17.

Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 2.

Evaluación: Malo.

El sujeto 6. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "...creí que era así".

Análisis:

El sujeto 6 considera que los términos *medio* y *tres y medio* son el mismo y su símbolo numérico en fracción es $1/3$, lo cual demuestra que no hay comprensión del *control simbólico de las cantidades dadas*, especialmente de la primera y la última.

Ahora, el sujeto presenta vacíos en cuanto a la relación parte-todo ya que para esta situación específica requiere más de un análisis abstracto. Así mismo, el manejo de fracciones impropias requiere de un arduo trabajo de la unidad, porque si no hay claridad acerca de esta, difícilmente se logra abordar una *fracción mayor que la unidad*.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 7

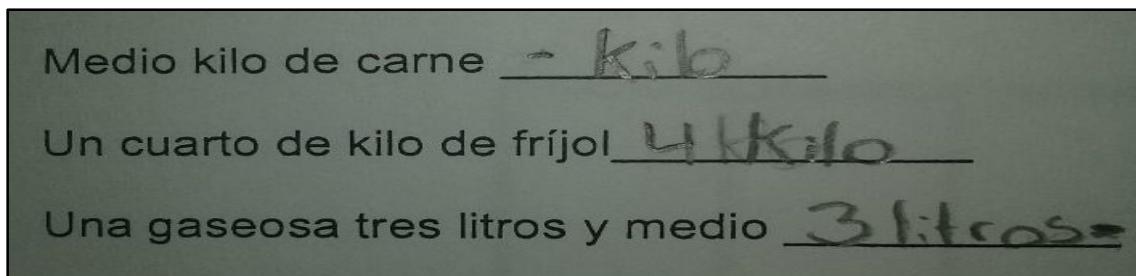


Figura 22. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 2.

Tabla 18.

Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 2.

Evaluación: Malo.

El sujeto 7. No describe ninguna cantidad propuesta desde la fracción como fracturador ni su interpretación fenomenológica.

Entrevista:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación? "medio kilo, (por qué el 4) porque es un cuarto".

Análisis:

El sujeto 7 reconoce las unidades de medida propuestas, pero descuida la numerosidad y los objetos concretos. En cuanto, la numerosidad el sujeto relaciona un guion con *medio* y 4 con un cuarto, es decir, con su ordinal. Esto se podría deber a que no hay claridad en cuanto a la escritura numérica de estos números, no hay *control simbólico de las fracciones dadas*.

Ahora, se puede apreciar que el sujeto con su respuesta “3 litros -” refiere a una parte entera y otra fraccionaria, partiendo de la escritura de esta cantidad. Un intento por expresar *un medio*.

El sujeto se esfuerza por comprender la *fracción mayor que la unidad*.

Finalmente, el sujeto aún presenta dificultad en el paso del número natural al número fraccionario; con la descripción de las cantidades desde su numerosidad, unidad de medida y objeto concreto.

Fuente: elaboración propia.

En esta actividad, la descripción de las fracciones dadas no es fácil, en tanto que requiere una comprensión abstracta de estas, razón por la que la relación parte-todo en esta situación no es tan evidente como en las otras actividades. Ello implica un adecuado manejo de la fenomenología de los racionales y para el caso de las fracciones mayores que la unidad, que se necesita manejar la relación multiplicativa en las fracciones.

En consecuencia, los sujetos no logran el abordaje de la actividad ya que el nivel de abstracción de ésta es alto y los referentes que ellos poseen son escasos, descuidando aspectos como el tamaño de los objetos o en el caso de los líquidos lo cuales, están condicionados a su recipiente.

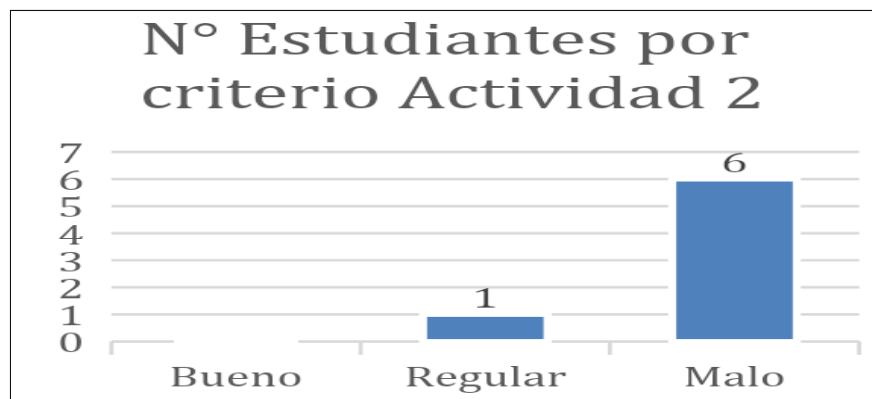


Figura 23. Resumen de los resultados de la actividad 2.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo a la Figura 23 los sujetos presentaron dificultad en el abordaje de la descripción de las cantidades propuestas en su forma simbólica numérica, influenciada por el abordaje de la fracción como fracturado hacia la fracción como recurso fenomenológico.

Ahora, algunos estudiantes *no consideraron la relación parte-todo en contexto continuo*, debido que no alcanzaron a reconocer la relación entre una unidad de medida y el objeto a partir de la numerosidad; no manejaron un adecuado *control simbólico de las fracciones*, porque la representación numérica estaba condicionada a la representación verbal (Castro, 2015) lo que pudo generar una mala transición entre representaciones o, simplemente, no se presentó un proceso netamente memorístico- mecánico.

Así mismo, algunos sujetos reconocieron la unidad de medida posiblemente por el trabajo que se ha realizado anteriormente sobre magnitudes, pero persiste un vacío sobre el reconocimiento de los objetos concretos, a razón de la ausencia de equilibrio entre la magnitud y lo fenomenológico en la didáctica de la fracción en coherencia con Freudenthal (1983).

Por otra parte, no se dominó las fracciones mixtas, aunque hubiera una aproximación por algún sujeto, ello posiblemente a falta de conocimiento sobre la estructura multiplicativa en fracciones para *trabajar con fracciones mayores que la unidad*.

Esta actividad es más compleja que las otras en tanto que exige un nivel de abstracción superior, ello visto desde el abordaje de objetos que están ligados a una magnitud como es el caso de la carne, el fríjol o la gaseosa la cual si es vista desde una botella, cuál sería el todo y de considerarse el todo, la botella, cómo se vería la fracción impropia, esto dificulta aún más el entendimiento de la fracción mixta debido al trabajo enfocado hacia la partición y el conteo, según Obando (citado por Rico, 2017, p. 36).

Casos como el de los productos comprados muestran que no toda representación facilita la comprensión de los mismos ya que la magnitud condiciona de manera errónea al tamaño del objeto de forma unilateral, la partición-conteo se asocia con la fracción impropia sin considerarse la relación multiplicativa según Poveda (citado por Niño y Raad, 2018).

Tercera actividad

Tabla 19.

Actividad 3 y atributos trabajados en esta.

ACTIVIDAD 3	ATRIBUTOS
<p>Cuando llegamos a casa me puse a hacer los ejercicios que puso de tarea el profesor de matemáticas. ¿Cómo los resolverías tú?:</p> <p>3. Sombree la superficie que se indica: Un sexto del rectángulo</p> 	<p>(Atributo 6) Considera las partes como totalidad.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 1



Figura 24. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 3.

Tabla 20.

Ánalisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 1. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.</p>
<p>Entrevista:</p> <p><i>¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? "porque dice que es un sexto del rectángulo, o sea hay sólo cinco rectángulos, entonces faltaría el sexto, o sea no podríamos tener el rectángulo, o sea no tendría una sexta parte...sombrear el quinto cuadro".</i></p>

Análisis:

El sujeto 1 reconoce *el un sexto del rectángulo* como un error en el enunciado quitando toda posibilidad de hacer una nueva subdivisión de las partes regulares existentes en la unidad.

Ahora, se puede especular que el sujeto hace una relación de conteo evidenciado en el número de rectángulos pequeños sin tener en cuenta el todo.

Ello significa que no se reconoce el atributo *Considera las partes como totalidad*, debido a la falta de desestructurar el todo de tal manera que las nuevas subdivisiones atiendan a la fracción dada, a partir de las partes regulares ya existentes.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 2



Figura 25. Resultado diagnóstico del sujeto 2 en la actividad 3.

Tabla 21.

Análisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 3.

Evaluación: **Malo.**

El sujeto 2. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.

Entrevista:

¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? *"porque un rectángulo significa que debo sombrear la superficie quel del sexto, entonces yo coloreé este porque me pareció lo mejor".*

Análisis:

El sujeto 2 asume que la unidad está dividida en seis partes congruentes en forma-tamaño y asocia el término *un sexto* con la idea de sombrear el sexto rectángulo pequeño que hay en la unidad, ordenándolos de su izquierda a su derecha.

A partir de ello se deduce que el sujeto aún no ha identificado la importancia de la desestructuración del todo y su interacción con las partes.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 3

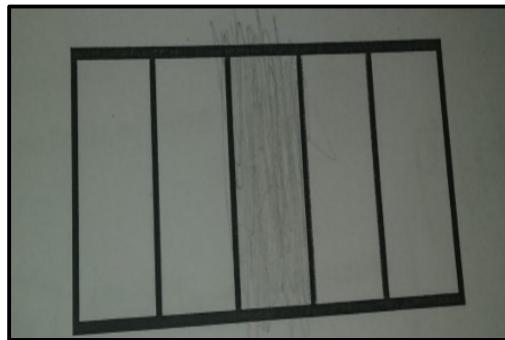


Figura 26. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 3.

Tabla 22.

Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 3. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? <i>"pues porque, pues como era un sexto de rectángulo entonces como era un sexto... pensé que era como la mitad del rectángulo... que sería un tercero (se refiere al rectángulo sombreado)"</i>.</p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 3 asocia <i>un sexto</i> con <i>la mitad del rectángulo</i> entendiéndose esta como la parte regular existente que queda justamente en la mitad de la unidad y a su vez se encuentran ligados al término <i>un tercero</i>, ello atendiendo a un orden estricto $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$ y 5°. Esto permite demostrar que el estudiante no tiene claridad en la relación parte-todo donde las partes de una fracción juegan un papel importante y existe una relación entre estas.</p>
<p>Para el sujeto 3 la ausencia de la construcción de noción de fracción se vuelve un obstáculo para el adecuado uso del atributo <i>considera las partes como totalidad</i>, con la finalidad de resolver esta actividad. Así mismo, el desconocimiento en la desestructuración del todo y su interacción con las partes trae consigo dificultad para la construcción de una nueva unidad de medida para la unidad, partiendo de las partes regulares existentes.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 4

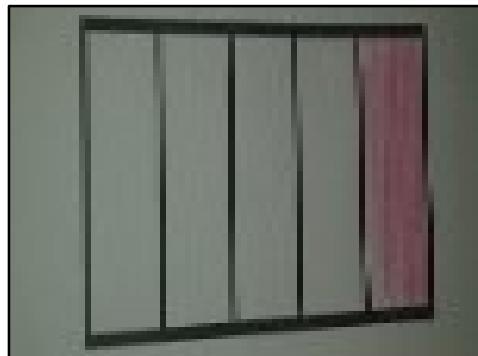


Figura 27. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 3.

Tabla 23.

Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 4. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? <i>"porque como era el último cuadro, pensé que era ese".</i></p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 4 da por hecho que la unidad está dividida en seis partes congruentes (en área) y que hay que colorear la última debido a que esta es la sexta, para ello el sujeto considera un orden para las partes regulares existentes, de su izquierda a su derecha.</p>
<p>Ahora, los resultados muestran que no hay claridad en la relación parte-todo ni en la desestructuración del todo y su interacción con las partes lo cual, se vuelve un obstáculo para el reconocimiento y manejo del atributo <i>considera las partes como totalidad</i> por medio de la actividad.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 5

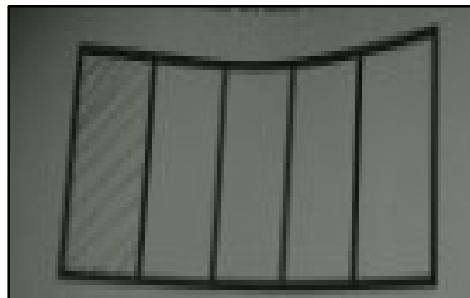


Figura 28. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 3.

Tabla 24.

Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 5. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), no hace nuevas subdivisiones de la unidad, teniendo en cuenta las ya existentes.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? <i>"porque un sexto le quito una parte, digamos tengo seis le quito uno entonces sería un sexto, se sombrea un rectángulo...no sé porque lo pusieron así (la manera como está dibujado el rectángulo de esa manera)".</i></p>
<p>Ánalisis:</p> <p>El sujeto 5 usa inadecuadamente la operación resta: <i>"tengo seis le quito uno entonces sería un sexto"</i> donde considera que la resta entre dos números naturales, su diferencia es un número fraccionario.</p>
<p>Ahora, los resultados muestran que para el sujeto 5 no hay claridad en la relación parte-todo ni en la desestructuración del todo y su interacción con las partes lo cual se vuelve un obstáculo para el reconocimiento y manejo del atributo <i>considera las partes como totalidad</i> en la actividad.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 6

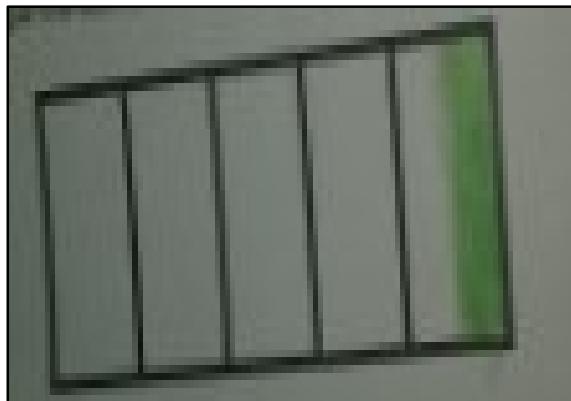


Figura 29. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 3.

Tabla 25.

Análisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Regular.</p> <p>El sujeto 6. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), hace subdivisiones de algunas partes existentes sin tener en cuenta la unidad.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? <i>"yo lo respondí de esta manera porque como habían 1, 2, 3, 4, 5 yo lo hice así, pero tocaba como hacer otro rectangulito ahí para luego sombrearlo y entonces lo resolví porque creí que era así..."</i></p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 6 reconoce que el todo no está dividido en seis partes, pero se enfoca en la numerosidad de las partes, lo que le lleva a un abordaje desde lo discreto y no desde lo continuo donde se destaque lo propio del atributo <i>Los trozos- partes- son iguales. Las partes tienen el mismo tamaño-congruente.</i></p> <p>Se reconoce que el sujeto 6 pudo estar intentando construir una nueva unidad de medida en el todo, pero por la ausencia de un referente para el manejo adecuado de la regularidad de las nuevas partes no maneja con propiedad el atributo <i>Considera las partes como totalidad</i> y ello le podría generar una confusión en la distinción entre un contexto continuo y uno discreto.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 7



Figura 30. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 3.

Tabla 26.

Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 3.

<p>Evaluación: Regular. El sujeto 7. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), hace subdivisiones de algunas partes existentes sin tener en cuenta la unidad.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera? <i>"porque ahí dice que indique un sexto del triángulo, por eso lo partí por la mitad, no tan en la mitad...porque haría un sexto".</i></p>
<p>Análisis: El sujeto 7 en la prueba diagnóstica toma tres partes regulares conectadas existentes en el todo y divide cada una por la mitad, esto puede presentar varias interpretaciones en las que se podría considerar la capacidad de hacer subdivisiones en algunas partes regulares conectadas en el todo, el reconocimiento de múltiplos, la asociación del término <i>un sexto</i> con el número de partes congruentes (en área) que se deben formar a partir de algunas partes regulares conectadas en el todo sin importar las restantes, es decir, <i>un sexto</i> estaría asociado a una distorsión de la acción del denominador de una fracción como se puede apreciar en la respuesta obtenida de la entrevista: <i>"porque ahí dice que indique un sexto del triángulo, por eso lo partí por la mitad, no tan en la mitad...porque haría un sexto"</i>, lo cual hace perder el rol que juega cada una de las partes de la fracción y su relación propiamente.</p> <p>Se puede inferir que el sujeto 7 posee cierto dominio del atributo <i>Considera las partes como totalidad</i>, pero sin su adecuado abordaje lo cual podría llevarle a la desorientación en la relación parte-todo y la desestructuración del todo y su interacción con las partes.</p>

Fuente: elaboración propia.

La comprensión de la desestructuración del todo, teniendo en cuenta las partes regulares existentes, requiere de la construcción de una nueva unidad de medida que permita evidenciar la fracción dada.

No obstante, algunos estudiantes no se percatan que el todo está dividido en cinco partes regulares conectadas y no seis como lo consideran, razón por la que no se cuestionan o piensan en la necesidad de construir una nueva unidad de medida en el todo a partir de las partes regulares conectadas existentes como referente. Sólo pocos intentaron reconocer la importancia de establecer una nueva unidad de medida.

En consecuencia, se obtuvieron los siguientes resultados descritos en la Figura 31:

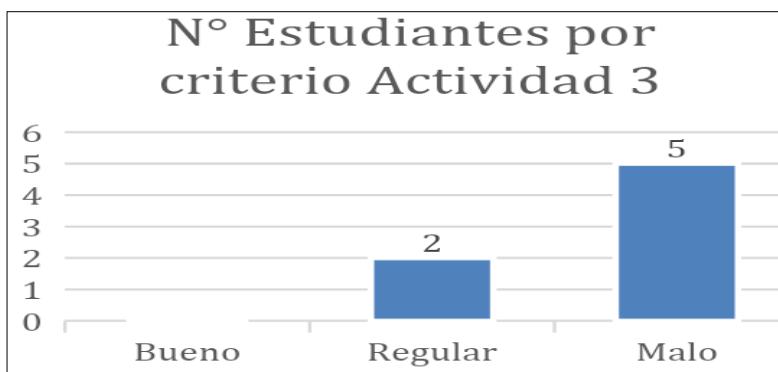


Figura 31. Resumen de los resultados de la actividad 3.

Fuente: elaboración propia.

Rojas et al. (1999) clasifica unas actividades en niveles, de acuerdo a la relación existente entre las partes y el todo. En este caso específico, se reconoce que esta se encuentra en el último nivel ya que se requiere de una desestructuración del todo para la generación de una nueva unidad de medida que atienda a la fracción dada lo cual para ello se necesita de conocimientos sobre divisibilidad y atributos propios de la fracción parte-todo que permitan orientar esta acción.

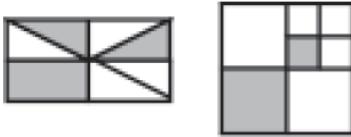
Entonces, los resultados indican que algunos estudiantes no consideraron relevante el manejo del atributo: *Considera las partes como totalidad* debido a que asumieron el todo dividido en seis partes congruentes (en área) y se tomaba uno. En cambio, los que tuvieron el criterio de evaluación *Regular* destacan la importancia del atributo, pero descuidando la unidad y enfocando su atención a unas partes.

Ahora, la apreciación anterior facilita identificar que el manejo de áreas aún se encuentra en proceso. De no llevarse un proceso de aprendizaje adecuado podría presentarse más adelante obstáculos en la suma entre fracciones heterogéneas acorde Rojas et al. (1999).

Cuarta actividad

Tabla 27.

Actividad 4 y atributos trabajados en ésta.

ACTIVIDAD 4	ATRIBUTOS
<p>Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada.</p> 	<p>(Atributo 6) Considera las partes como totalidad. (Atributo 11) Subdivisiones equivalentes.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 1

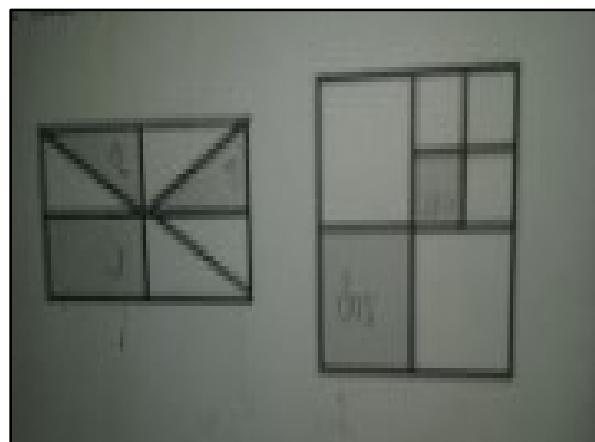


Figura 32. Resultado diagnóstico del sujeto 1 en la actividad 4.

Tabla 28.

Análisis de los resultados del sujeto 1 en la actividad 4.

<p>Evaluación: Regular.</p> <p>El sujeto 1. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconoce medidas diferentes para las partes sin registrar adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? “<i>pues digo yo que la región sombreada pues debe tener por qué son diferentes o sea... estaría dividida en una, dos tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho partes a cambio esta pues como en 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15 partes...para saber las partes sombreadas, o sea las que tomaba como colorear</i>”.</p>
<p>Análisis:</p> <p>En un principio, el sujeto 1 se enfoca en las partes irregulares sombreadas en el todo mediante una relación de conteo, lo que implica desconocimiento en el tratamiento de la irregularidad de las partes que constituyen el todo a través de la desestructuración del todo y la construcción de una unidad de medida.</p> <p>No obstante, la pregunta de la entrevista permite al sujeto 1 reflexionar sobre la necesidad de construir una nueva unidad de medida en relación con las partes que constituyen al todo para determinar enseguida las partes sombreadas lo cual, hace alusión al atributo <i>considera las partes como totalidad</i>.</p> <p>En cuanto al atributo <i>las subdivisiones equivalentes</i> esta se muestra más compleja en tanto que el sujeto debe saber sobre equivalencia de fracciones.</p> <p>La dificultad radica en representar de forma simbólica la relación entre la totalidad de las partes en el todo y las sombreadas. En consecuencia, no hay claridad de la relación parte-todo lo que podría afectar en el uso adecuado de los dos atributos por medio de la actividad propuesta.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 2

Tabla 29.

Ánalisis de los resultados del sujeto 2 en la actividad 4.

Evaluación: Malo. El sujeto 2. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, el estudiante no responde nada de la actividad.
Entrevista: ¿Por qué no respondió el ejercicio? <i>"porque no entendí... no entendí el enunciado"</i> .
Análisis: El sujeto 2 plantea que no comprendió el enunciado de la actividad y por tal razón no respondió nada. Esto puede significar que el enunciado no es cercano al lenguaje que maneja el sujeto o que no hay una comprensión lectora del mismo. No se pueden hacer inferencias con exactitud debido a que no se tiene la información necesaria.

Fuente: elaboración propia

SUJETO 3

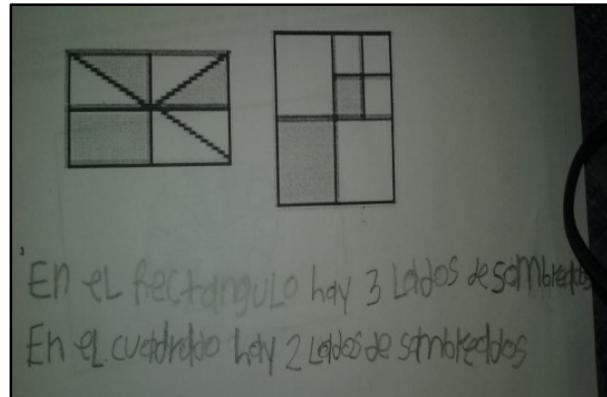


Figura 33. Resultado diagnóstico del sujeto 3 en la actividad 4.

Tabla 30.

Análisis de los resultados del sujeto 3 en la actividad 4.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 3. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, no reconoce medidas diferentes para las partes ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? "porque cuando estaba mirando la figura pensé que como había aquí los lados blancos como había sin color y sólo había dos entonces pensé que era la respuesta y aquí en el otro como vi que hay cuatro lados blancos pensé que era tres".</p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 3 se concentra en las partes irregulares sombreadas en el todo lo cual, podría considerarse dos aspectos: 1. Se trabaja desde un contexto discreto en la que claramente no se evidencia una relación parte-todo y 2. Se maneja una relación de conteo.</p> <p>Los atributos <i>considera las partes como totalidad y las subdivisiones equivalentes</i> en esta actividad no son reconocidos ni usados por el sujeto 3. Esto se puede deber a que él no tiene claridad en la relación parte-todo especialmente en un contexto continuo o discreto.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 4

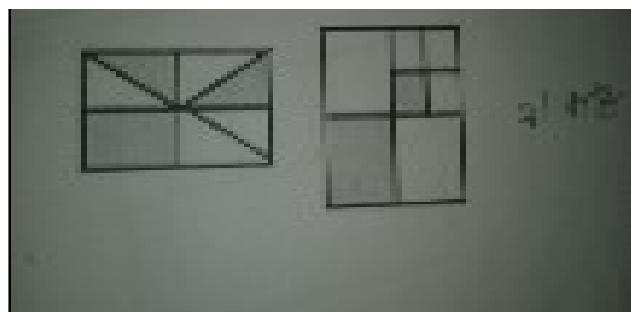


Figura 34. Resultado diagnóstico del sujeto 4 en la actividad 4.

Tabla 31.

Análisis de los resultados del sujeto 4 en la actividad 4.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 4. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, no reconoce medidas diferentes para las partes ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué no respondió el ejercicio? <i>"ARTE...que yo pensé que correspondía al arte...sí (relación con la situación planteada)".</i></p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 4 asocia la actividad con un contexto específico: El arte. Esto implica que no se tiene en cuenta el enunciado y su atención está enfocada en la formación de cuadros u otro trabajo artístico, perdiendo el foco de la actividad y por tanto no establece ninguna relación con los atributos de la fracción necesarios para resolver la misma.</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 5



Figura 35. Resultado diagnóstico del sujeto 5 en la actividad 4.

Tabla 32.

Análisis de los resultados del sujeto 5 en la actividad 4.

<p>Evaluación: Malo.</p> <p>El sujeto 5. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, no reconoce medidas diferentes para las partes ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.</p>
<p>Entrevista:</p> <p>¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? "sería tres séptimos, porque están sombreados tres y en total hay siete... porque hay dos partes sombreadas y siete partes no sombreadas".</p>
<p>Análisis:</p> <p>El sujeto 5 expone un ejemplo de una fracción parte-todo en contexto discreto donde se tiene un conjunto de figuras sin importar su forma ni tamaño y la relación de estos con el todo, teniendo en cuenta una(s) característica(s) específica(s) como la es el color. Esta acción impide ver los atributos <i>considera las partes como totalidad y las subdivisiones equivalentes</i> de tal modo que se puedan aplicar en la actividad propuesta.</p> <p>Lo anteriormente, demuestra que el sujeto 5 desliga la actividad propuesta del contexto continuo donde las figuras, rectángulo grande y cuadrado grande, no son asumidas como todos y estos pierden su relación con las partes que las componen.</p> <p>Las dificultades que se pueden identificar en el sujeto 5 son: por una parte, el desconocimiento de los atributos propuestos, la fracción parte-todo en contexto continuo para este tipo de actividades y por otra, la relación entre representaciones (pictórica-simbólica).</p>

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 6

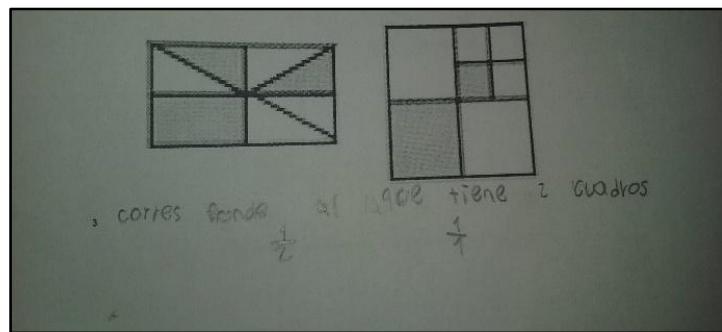


Figura 36. Resultado diagnóstico del sujeto 6 en la actividad 4.

Tabla 33.

Ánalisis de los resultados del sujeto 6 en la actividad 4.

Evaluación: **Malo**.

El sujeto 6. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, no reconoce medidas diferentes para las partes ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.

Entrevista:

¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? "yo mire que eran fracciones, entonces eran dos y acá de uno, en el otro pues era uno y uno porque no podía poner uno y dos porque sería igual que éste entonces tenía que poner uno y uno".

Análisis:

El sujeto 6 intenta asociar las partes de una fracción de la siguiente manera: Para el rectángulo más grande (unidad), el numerador da cuenta del número de rectángulos pequeños sombreados y el denominador del número de triángulos sombreados y para el caso del cuadrado grande (unidad) el tamaño juega un papel importante ya que el numerador muestra un cuadrado pequeño sombreado mientras el denominador el número de cuadrados medianos sombreados.

Ello muestra que no hay claridad en: la relación-parte todo para este tipo de actividades, la función de las partes de una fracción y la aplicabilidad de los atributos *Considera las partes como totalidad y Subdivisiones equivalentes*, es decir, el tratamiento de la irregularidad en la relación entre la unidad de medida y las partes que constituyen el todo.

Fuente: elaboración propia.

SUJETO 7

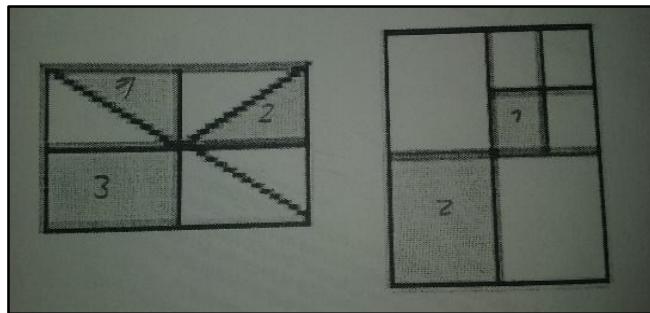


Figura 37. Resultado diagnóstico del sujeto 7 en la actividad 4.

Tabla 34.

Análisis de los resultados del sujeto 7 en la actividad 4.

<p>Evaluación: Malo. El sujeto 7. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, no reconoce medidas diferentes para las partes ni registra adecuadamente el símbolo de los números fraccionarios que representan las gráficas dadas.</p>
<p>Entrevista: ¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas? "porque ahí decía que la región sombreada, hay lugares con sombra y otras que no".</p>
<p>Análisis: El sujeto 7 hace énfasis en el enunciado sobre las partes sombreadas sin tener en cuenta las otras partes en el todo, motivo por el que realiza una relación de conteo netamente. No obstante, la respuesta en la entrevista permite evidenciar que el sujeto discrimina las partes blancas por lo que se podría indagar sobre su comprensión en la relación parte-todo y la aplicabilidad de los atributos propuestos. Esto da a entender que no hay una construcción de la noción de fracción sólida o quizás está empezando a formarla. Lo anterior, se convierte en un obstáculo para trabajar y entender los atributos <i>considera las partes como totalidad y subdivisiones equivalentes</i> de forma adecuada.</p>

Fuente: elaboración propia.

En resumen, la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en: reconocer nuevas medidas para las partes acorde a Rojas et al. (1999). Ellos consideran unos niveles donde la presente actividad se encuentra en el nivel 2 de 4 lo que significa, los(as) niños(as) están en un

estado inferior al nivel propuesto. Este factor permite exponer que los estudiantes aún presentan dificultad para realizar la transición de los números naturales a los racionales por medio de las fracciones lo cual, se convierte en un obstáculo para el adecuado reconocimiento y manejo de los atributos propuestos en esta actividad. Un factor influyente en los resultados presentados en la Figura 38.

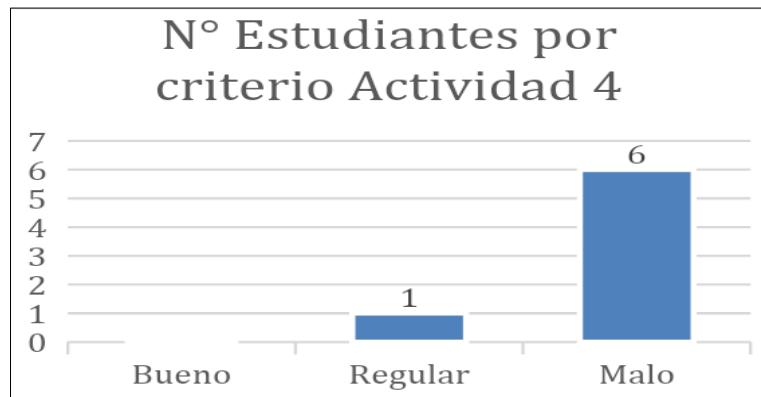


Figura 38. Resumen de los resultados de la actividad 4.

Fuente: elaboración propia.

Además, esta concepción muestra que los atributos: *Considera las partes como totalidad y subdivisiones equivalentes* no fueron reconocidos ni usados con éxito, posiblemente a que no hubo comprensión de: a/b , una región geométrica dividida en b partes congruentes en área, pero no en forma, a de las cuales son consideradas, en este caso más de un atributo puede intervenir en tanto la situación lo permita, mencionado por Novellis (citado en Rojas et al., 1999, p. 14), la composición de áreas en el todo desde el manejo de una unidad de medida, identificando unas partes por medio del tratamiento de la irregularidad de las partes y la diferenciación entre un contexto continuo y uno discreto.

Desde una mirada general, se percibe que tres de las cuatro actividades (1, 3 y 4) manejaron una figura elemental (rectángulo) que sirvió para representar cantidades de la magnitud área.

Esta representación hace “abstracción de las características físicas del todo y las muestran homogéneas y dotadas de propiedades de simetría que permiten su fragmentación o división mediante construcciones geométricas sencillas” (Castro, 2015, p. 102). Ello implica que hay

conceptos geométricos que jugaron un papel importante en el desarrollo de la relación parte-todo para el caso de las actividades propuestas.

Los rectángulos son una figura convencional que comparados con el círculo presentan una mayor dificultad para trabajar la totalidad, divisible en partes iguales mediante técnicas geométricas acorde a Castro (2015). En coherencia con esto, aun cuando se agregó el manejo de la magnitud área en un todo con estructura pre-establecida que requiere de una desestructuración e interacción con sus partes, se da apertura a dos opciones: 1. No hay comprensión de las condiciones de las actividades propuestas y 2. El manejo consciente del área como atributo crítico de la fracción es limitado en contextos continuos (Morris citado por Bustos, Ballén, Santana, Sierra y Méndez, 2003).

Finalmente, la actividad 2 requiere del manejo de la magnitud y su relación con la fracción exige un trabajo más abstracto ya que no toda representación es funcional para la aprehensión de ello, motivo por el que se vuelve más difícil la comprensión fenomenológica de la fracción en esta actividad y el manejo de la medida la cual, se asocia más al número natural.

Recomendaciones

El análisis de los resultados permitió identificar algunas dificultades en el reconocimiento y manejo de algunos atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo las cuales, orientaron la búsqueda de aspectos y/o actividades que promuevan un adecuado tratamiento de estas.

Inicialmente, se requiere para el abordaje y superación de estas dificultades tener en cuenta la construcción de la fracción como relación parte-todo en contexto continuo desde Rojas et al. (1999), quienes consideran los siguientes aspectos: el conocimiento matemático, el conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas y el conocimiento sobre el proceso instructivo.

Se considera cada uno de los conocimientos propuestos por Rojas et al. (1999) con la idea de destacar algunos aspectos que permitan orientar el trabajo con las dificultades descritas anteriormente:

- Conocimiento matemático: Se destaca la construcción de la noción de fracción a partir de la relación parte- todo, donde primero se identifica el todo y enseguida se realiza alguna acción sobre este generando partes iguales lo cual, implica una acción mental o física con resultados acorde a Martínez y Lascano (2001).
- Conocimiento sobre el aprendizaje de las nociiones matemáticas: Aborda los conocimientos previos de los estudiantes con respecto a la fracción como parte-todo en contexto continuo y todas aquellas propuestas que permitan orientar el aprendizaje de ello. En el caso de una secuencia, la introducción de nuevas nociiones en un proceso complejo de estructuración, desestructuración, reestructuración mediante la relación con su entorno, recolección de información, elegir, abstraer, explicar, demostrar, entre otros que permitan la verbalización de aprendizajes significativos (Díaz, 2013).
- Conocimiento sobre el proceso instructivo: Comprende las representaciones, recursos didácticos, interacciones didácticas y las tareas. Esta última la dejo a criterio de cada educador.

Se destaca la relación parte-todo en contexto continuo debido a que esta no sólo permite identificar cada una de las partes de una fracción sino, la relación existente entre ellas. Si bien, Rojas et al. (1999) reconocen la importancia de las otras interpretaciones de la fracción, pero visto desde Vasco (citado en Rojas et al., 1999, p. 8) la relación parte-todo es la más básica y la más peligrosa, entonces esta requiere de cuidado, trayendo consigo una reflexión sobre el afán por abordar el contenido y el tiempo que necesita para ser aprendido. Este debe ser progresivo.

Además, la relación parte-todo en contexto continuo requiere prever la complejidad existente en el manejo de operaciones físicas sobre objetos y operadores conceptuales sobre magnitudes. (Vasco citado por Rojas et al., 1999, p. 8), donde los atributos toman un papel importante ya que estos vislumbran características y propiedades de esta relación.

Inicialmente, los estudiantes tienen una aproximación de la relación parte-todo en contexto continuo mediante apreciaciones cualitativas de sus experiencias, motivo por el que

se debería introducir la estimación en el proceso de enseñanza de las nociiones de fracciones, con el propósito de favorecer la formación de “estructuras operativas”

necesarias para que aborde la resolución de situaciones problema en las cuales esté implícita la noción de fracción. (Rojas et al., 1999, p. 15).

En cuanto a las apreciaciones cuantitativas de esta, por parte de los estudiantes, se apoyan de los atributos acorde Rojas et al. (1999). Ello pone en evidencia la importancia de reconocer y manejar los atributos propios de la fracción en contexto continuo.

Esta apreciación identifica el lenguaje como un elemento fundamental ya que este permite comunicar la acción o el resultado. Así pues, se presentan las diferentes representaciones “que ponen de manifiesto la relación que se establece entre las partes y el todo y se dota de sentido y significado a la fracción en su interpretación como relación parte-todo y al símbolo matemático que la representa” (Martínez y Lascano, 2001, p. 4).

Ello soportado desde la idea de inspeccionar la relación parte-todo como generadora de símbolos y lenguaje, y transitar por las diferentes representaciones, según Martínez y Lascano (2001).

En coherencia con ello, Martínez y Lascano (2001) reconocen que las actividades propuestas por Sáenz (citada por Martínez y Lascano, 2001) y Coxford et al. (citados por Llinares y Sánchez, 1997). Así como una adecuada transición entre representaciones permiten evidenciar las relaciones existentes entre estas y la relación entre las partes y el todo.

La actividad de pliegues muestra a los estudiantes que el todo es divisible, el número de dobleces no coincide con el número de partes iguales en que queda dividido el todo y la conservación del todo acorde a Martínez y Lascano (2001). En el abordaje de esta actividad es necesario tener presente aspectos como: El comportamiento de las partes iguales en cuanto al número en que se desea quede dividida la unidad, la forma de la figura: poligonal (regular, irregular), circular o curva, la magnitud (área), la simetría, la congruencia forma-tamaño de las partes, preguntas orientadoras, entre otros. Una actividad complementaria a esta puede ser la papiroflexia propuesta desde Kieren, Mason y Pirie (citados por Castro, 201).

En complemento a ello, Rojas et al. (1999) exponen la secuencia de Adalira Sáenz ya que esta podría desarrollar habilidades por medio de un modelo de área. A saber:

1. Trabajo a partir de gráficas de figuras comunes, sombreando partes de ellas (congruencia en área

- y forma, luego sólo de área). Manejo de la medida.
2. Divisiones y subdivisiones de figuras (área)
 3. Gráficos de relación parte-parte y parte-todo de manera verbal inicialmente, luego escrita.
 4. Introducción de lenguaje matemático a partir del lenguaje materno. Ejemplo $\frac{2}{3}$ (pp. 148-149).

Así mismo, partiendo de la investigación de Martínez y Lascano (2001), ellas proponen las actividades de la Figura 39 y la Figura 40 que deben ser trabajadas simultáneamente ya que los atributos *Subdivisiones equivalentes* y *Considera las partes como totalidad* guardan relación entre sí y podrían contribuir al reconocimiento y manejo de estos. Además, estas dan cuenta de la importancia del cambio de unidad y la habilidad de “reconocer cuando distintas partes de un mismo todo, obtenidas de diferentes divisiones, nos dan la misma parte de la totalidad” (Llinares y Sánchez, 1997, p.81):

Subdivisiones equivalentes en contexto continuo

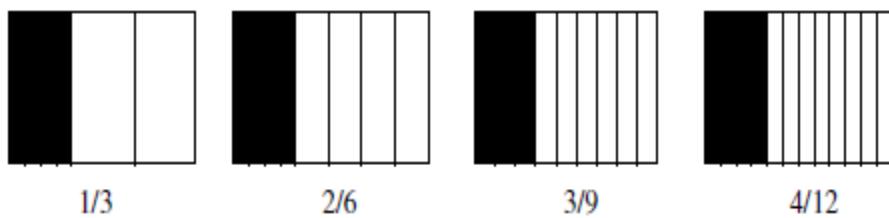


Figura 39. Actividad de subdivisiones equivalentes en contexto continuo.

Fuente: Martínez y Lascano (2001)

Considera las partes como totalidad en contexto continuo

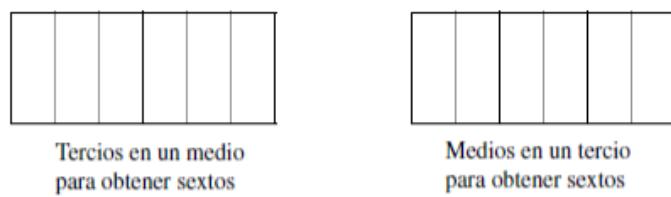


Figura 40. Actividad sobre partes como un todo.

Fuente: Martínez y Lascano (2001)

Las actividades en el aula sobre la fracción parte-todo en su idea geométrica requieren tener la intención de desarrollar habilidades de “partir todos o unidades de varios tipos, reconstruir todos desde las partes, subdividir en partes congruentes y establecer la relación entre las subpartes y el todo original” (Piaget citado por Bustos et al., 2003, p. 3) lo cual hay que reconocer los aspectos relevantes de los atributos para una aproximación más significativa del concepto de fracción según a Bustos et al. (2003), ello con el fin de que los estudiantes comprendan las relaciones internas en el todo para el caso de la magnitud área o en el tratamiento de otra magnitud ya que la fracción parte-todo no se reduce sólo al área.

Así mismo, el lenguaje, las representaciones, el manejo adecuado de la cotidianidad de los estudiantes y de los textos escolares se hacen partícipes en la comprensión de las condiciones expuestas en cada una de las actividades, como lo resalta Rojas et al. (1999) para algunas de estas:

- Cotidianidad: Los estudiantes solucionan situaciones sobre fracciones no acorde a contextos con significado matemático, sino de acuerdo a su cotidianidad y las representaciones se pueden quedar cortas, por eso las acciones a proponer deben estar encaminadas a nuevos significados (p. 3).
- Textos escolares: Se recurre a ellos por los símbolos numéricos y los algoritmos, pero se requiere trabajar otras representaciones antes del uso de los símbolos (p. 9).

La primera apreciación alude al lenguaje (Materno y al matemático) y al tratamiento de los atributos y la fracción parte-todo desde lo informal hasta lo formal. Acorde a esto, Mack (citado por Castro) recomienda desarrollar un conocimiento informal basado en partición de tal manera que una vez se relacione el símbolo y procedimientos matemáticos se podría ampliar la concepción de número racional.

Así mismo, hay que guardar consistencia entre las representaciones en el aula particular “...y conservar el equilibrio entre las situaciones con aplicación práctica” (Mancera citado por Bustos et al., 2003, p.71) de modo que en las actividades propuestas se evalúe la pertinencia de los contextos y representaciones acorde Ball (citado en Castro 2015), en coherencia con los atributos propuestos los cuales, faciliten la descripción de la relación parte-todo y promuevan la

identificación, tratamiento y conversión de representaciones para facilitar la construcción de significados acorde a Duval (citado en Rico, 2017).

En complemento a ello se debe tener un conocimiento sobre el lenguaje informal y fragmentado de los estudiantes, al igual que manejar modelos concretos y situaciones reales según Llinares y Sánchez (1997), con el fin de orientar actividades de aprendizaje que haciendo énfasis en diferentes operaciones mentales y la formación de nuevas nociones mediante la relación con el entorno, acorde a Díaz (2013).

En la segunda apreciación se identifican las representaciones como camino guía, pero hay que tener en cuenta que los textos escolares actualmente vienen con nuevas adaptaciones curriculares y funcionan como apoyo en el proceso de aprendizaje.

Ahora, el trabajo de Rojas et al. (1999) da cuenta de lo propuesto por Pierce (citado en Duval y Sáenz, 2016), quien resalta la importancia de la triada reflejada en la interacción entre los elementos de un signo que facilitan la expresión del pensamiento convencional y del pensamiento original. En esta triada, semiosis, se aprecia los siguientes elementos:

Objeto: Idea mental u objeto físico.

Interpretante: Camino mental o material.

Representamen: Idea producida en la mente.

Estos pueden concebirse como elementos de un proceso cíclico interactivo en la construcción de conocimiento que, para las fracciones, Sáenz (citada por Duval y Sáenz, 2016) reconoce que la enseñanza de estas debe ser progresiva, reflejada en un trabajo basado en la multiplicidad de unidades y la cardinalidad de la iteración de la unidad ya que facilita la comprensión de la fracción como parte-todo en contexto continuo y su paso al contexto discreto.

Este aspecto descrito por Sáenz (citada en Duval y Sáenz, 2016) hace alusión al proceso en la construcción de un conocimiento y al paso de los números naturales al reconocimiento de la noción de fracción.

Otros aspectos que se podrían tener presentes para el trabajo con los atributos y la relación parte-todo son:

- No hay que caer en el error de trabajar la subdivisión de cantidades continuas y su abordaje algorítmico de una única forma y caer en cuenta de la importancia de la medida, la partición y subdivisión en la construcción del concepto de fracción. Esta idea orientada desde Streefland (citado en Mancera, 1992, p. 6).
- El manejo adecuado de los significados (plano conceptual) y significantes (plano de representaciones), especialmente en los fenómenos de sinonimia y homonimia de una fracción, en coherencia con Mancera (1992).
- La necesidad de trabajar con situaciones reales de reparto, de organización y de compensación en contextos continuos acorde a Gómez (citado en Bustos et a., 2003).
- “La didáctica de las magnitudes no puede ser construida sobre la de las fracciones, que a su vez requiere magnitudes para que sean enfocadas didáctica y fenomenológicamente” (Freudenthal, 1983, p. 17).
- Proponer actividades orientadas desde los errores en el tratamiento de la fracción orientados desde Poveda (citado en Niño y Raad, 2018) para el trabajo con algunos atributos propios de la fracción parte-todo.
- La relación parte-todo y sus atributos no deben ser reducidos ya que estos van más allá de la simple acción de fracturar:

La “fracción como facturador” puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en n partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más amplio alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos de cada clase de equivalencia (Freudenthal, 1983, p. 17).

CONCLUSIONES

Se presentan las conclusiones obtenidas en el desarrollo de esta investigación. Se inicia atendiendo a los objetivos y se describen los principales aportes, enseguida se muestran algunas limitaciones e implicaciones de la investigación.

Teniendo en cuenta el desarrollo de esta investigación en un grupo de estudiantes de grado cuarto del Colegio Mayor Primero Maestros se pudo apreciar los siguientes aspectos:

En esta monografía se privilegiaron planteamientos de autores como Marmolejo, Yudy y Insuaty (2015), Castro (2015), Freudenthal (1983), Pruzzo (2012), Butto (2013), Duval y Sáenz (2016) quienes han investigado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la fracción parte-todo en contexto continuo destacando elementos como las representaciones, contextos, el papel de la unidad, la comprensión de la estructura multiplicativa así como la comparación de cantidades

El diseño y adaptación de actividades permitió identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes en el reconocimiento y uso de los atributos propuestos:

- El paralelo entre la prueba diagnóstica y la entrevista permitieron reconocer que cuando no hay claridad en la relación existente entre las representaciones, la comprensión sobre las actividades puede variar y/o volverse paradójica.
- Una dificultad reflejada en los resultados es la persistencia en que las partes de una fracción se pueden ver como dos valores independientes acorde a Hart (como se cita en Mancera, 1992) o en algunos casos, se adopta un contexto discreto en uno continuo.
- Los estudiantes muestran dificultad en el fraccionar y en el medir como lo propone Castro (2015) lo cual, dificulta el trabajo de la relación multiplicativa parte-todo.
- El manejo de las representaciones en favor del reconocimiento y manejo de los atributos propuestos por medio de las actividades trabajadas y la entrevista.

- El lenguaje en tanto que la representación verbal se encuentra vinculada a la representación numérica el cual organiza y condiciona la representación de la relación parte-todo, acorde a Castro (2015). Además, juega un papel fundamental en la compresión de un enunciado.
- Algunos resultados de los estudiantes pudieron haberse reflejado en un “registro según su propia experiencia, lo que desearía comunicar, aunque no se corresponda con aquello que la consigna demanda” Halliday (citado por Jurado, 2019, p.29).
- El desconocimiento en la identificación y manejo de conceptos geométricos tales como el área (composición-descomposición), simetría, entre otros, afectaron el adecuado desarrollo tanto de la relación parte-todo como de los atributos propuestos en contexto continuo.
- Los estudiantes presentan vacíos en su transición del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.
- Los resultados reflejaron una dificultad en la comprensión de la desestructuración del todo y el tratamiento de la irregularidad de las partes en situaciones que requieren especialmente la construcción de una nueva unidad de medida en el todo.
- Se encuentran obstáculos en la conexión entre magnitud y fenomenología que permita el adecuado abordaje de cantidades, en un proceso de la medida.

En lo que respecta al diseño de actividades que faciliten el tratamiento de dificultades presentadas en el reconocimiento y manejo de atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo, se considera que:

Los resultados y evidencias del trabajo realizado en un grupo de estudiantes de grado cuarto del Colegio Mayor Primeros Maestros, en la ciudad de Bogotá, resaltan la importancia de

continuar generando en los estudiantes de grado cuarto, estrategias que faciliten el reconocimiento y uso de los atributos propios de la fracción de modo que permitan una adecuada descripción y caracterización de la relación parte-todo para el caso del contexto continuo, el cual se considera primordial para la introducción del contexto discreto.

Ahora, este trabajo intentó realizar una interpretación de la clasificación todo-parte propuesta por Freudenthal (1983) con la finalidad de enriquecer el diseño de actividades que atiendan a la relación parte-todo en contexto continuo y sus atributos.

Además, las actividades que se propongan a los estudiantes de grado cuarto no solo deben atender a las diferentes representaciones, sino, también, a la relación existente entre ellas.

Asimismo, el lenguaje y los contextos de los estudiantes juegan un papel importante en la interpretación y desarrollo de las actividades, ya que estos se vuelven factores influyentes en el aprendizaje de la fracción parte-todo en contexto continuo y sus atributos.

Finalmente, se invita a continuar enriqueciendo el trabajo de Freudenthal, identificar patrones en el aprendizaje de la fracción parte-todo en contextos continuo con una mirada hacia sus atributos y realizar una evaluación constante de los posibles caminos que promuevan la superación de dificultades frente a este objeto matemático.

En este trabajo se plantearon diferentes soportes teóricos y se realizó un análisis desde la teoría de los resultados obtenidos de unos instrumentos de recolección dotándola de validez en las interpretaciones y las conclusiones expuestas. No obstante, se reconoce que presenta algunas limitantes tales como:

- Este trabajo se planteó para un grupo pequeño de estudiantes de grado cuarto, semi-personalizado, lo cual no es garante de su funcionalidad en grupos más numerosos. Se aconseja aplicar este trabajo a un grupo más numeroso o a otros colegios con educación semi-personalizada con la finalidad de identificar generalidades.
- El contexto de los estudiantes es cambiante y su realidad juega un papel importante en la construcción de conocimiento.

- Las respuestas de algunos estudiantes frente al manejo de las representaciones propuestas variaron, ya que se presentaban de forma paradójica en tanto a la comprensión de las actividades.
- El trabajo no presentó una secuencia en la que se pudiera profundizar con respecto al diseño, seguimiento y evaluación de actividades que permitieran complementar las actividades.

A continuación, se presentan algunas implicaciones investigativas a modo de sugerencia para enriquecer este campo tan amplio y atender a las limitaciones presentadas en el trabajo:

- Realizar una secuencia que permita avanzar sobre el presente trabajo.
- Profundizar en la interpretación realizada a la clasificación todo-parte propuesta por Freudenthal(1983).
- Promover la construcción de un marco teórico sólido sobre la relación multiplicativa y su diferenciación con la relación aditiva, para el caso de la fracción; especialmente, en la relación parte-todo en contexto continuo.
- Fortalecer el trabajo con los atributos de modo que se pueda comprender la noción de fracción, especialmente, en la caracterización de la relación parte-todo en contexto continuo.
- Identificar generalidades que atiendan a necesidades reales de la población colombiana y a las exigencias internacionales.
- Manejar el libro de texto como herramienta complementaria en el aprendizaje de los atributos propios de la fracción parte-todo en contexto continuo.
- Orientar la investigación sobre la identificación, tratamiento y traslación de representaciones en estudiante de grado cuarto para una mayor comprensión de los atributos propios de la fracción.
- Consultar sobre propuestas que encaminen el paso de un lenguaje informal- materno a un lenguaje matemático.
- Reflexionar sobre la commensurabilidad en la magnitud y el abordaje de otros contextos continuos diferentes a la superficie y la longitud.

- Profundizar sobre la relación entre la magnitud y la fracción, especialmente en los procesos de medida asociados a la relación parte-todo.
- Considerar actividades que promuevan el fortalecimiento de la fracción propia, especialmente, de la unidad, para el abordaje de la fracción impropia en situaciones que requieran de la relación parte-todo.

REFERENCIAS

- Acevedo, D. M., López, M. A., Guerrero, Y. A. y Morales, L. F. (2013, octubre). La fracción parte-todo a través de una mirada gráfica. *Educación científica y tecnológica*. Recuperado de <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7051/8723>
- Behar, D. (2008). Metodología de la investigación. Recuperado de https://issuu.com/draesperanzagarciaayala/docs/libro_metodologia_investigacion_pdf
- Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes pedagógicos*. Recuperado de <https://revistas.iberoamericana.edu.co/index.php/rhpedagogicos/article/view/403/368>
- Bustos, A., Ballén, M., Santana, C., Sierra, M. y Méndez, H. (2003). Reconocer atributos de la relación parte-todo. *EMA*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1518/1/96_Bustos2003Reconocer_RevEMA.pdf
- Castro, E (2015). Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros. Recuperado de file:///C:/Users/Alumnos/Downloads/24939493.pdf
- Cortina, J., Zúñiga, C y Visnovska, J (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/405/40528961002.pdf>
- Del Río, K. y Ramírez, L. (2009). Las fracciones a partir de la fenomenología didáctica. Universidad de Antioquia. Recuperado de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/744/1/JC0583.pdf>
- Díaz, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%A1da-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%A1z.pdf
- Durán, J. y Gutiérrez, O. (2015). Hacia un concepto de fracciones en la educación básica. Ejes. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/9795/1/Duran2015Hacia.pdf>
- Duval, R. y Sáenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en Matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas (trabajo de doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Recuperado de <https://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf>
- Gallardo, Y. y Moreno, A. (1999). Recolección de la información. Recuperado de https://www.academia.edu/8645657/YOLANDA_GALLARDO_DE_PARADA_ADONAY_MORENO_GARZ%C3%93N

Jurado F. (julio de 2019). El lenguaje de las matemáticas en el contexto escolar. *Ruta maestra*, (26), 30-35. <https://santillanaplus.com.co/RM26.pdf>

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1997). Fracciones. Madrid, España: Síntesis.

Mancera, E. (1992, agosto). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/9540/1/Significados1992Mancera.pdf>

Marmolejo, G., Yudy, L. y Insuaty, A. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica. ¿Figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista Científica*, 23, 43-56.

Martínez, C y Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. EMA. recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1127/1/75_Mart%C3%ADnez2001Acerca_RevEMA.pdf

MEN (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Niño, A. L. y Raad, Y. (2018). Interpretación de la fracción como relación parte-todo en contextos continuos y discretos, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que privilegia la competencia comunicativa (tesis de Magíster). Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.

Oquendo, D. y Castillo M. (2016). Saber 3°, 5° y 9° 2015 Cuadernillo de prueba Primera Edición. Recuperado de http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/2101/2009_Perea_Ense%C3%BAanza%20experimental%20de%20las%20fracciones%20en%20cuarto%20grado.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Perera, P. B. y Valdemoros, M. E. (2009, abril). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*. Recuperado de http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/2101/2009_Perea_Ense%C3%BAanza%20experimental%20de%20las%20fracciones%20en%20cuarto%20grado.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Prieto, D. P. y Vásquez, M. S. (2015). Propuesta de una secuencia de actividades sobre interpretación de la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos, a partir de la propuesta de Sáenz (tesis pre-grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

- Pruzzo, V. (2012). Fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. Pilquen. Recuperado de: file:///C:/Users/Alumnos/Downloads/Dialnet-LasFraccionesProblemaDeAprendizajeOProblemasDeLaEn-4059230.pdf
- Rico, N. (2017). Enseñanza del concepto de fracción desde el significado de medida (tesis maestría). Universidad Externado de Colombia, Colombia.
- Rojas, P., Mora, L. y Barón C. (1999). La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor: Los niños y las fracciones. Recuperado de funes.uniandes.edu.co/12262/1/Rojas1999Los.pdf
- Soto, M., Rodríguez, M. y Piña, C. D. (2007). Las situaciones (didácticas) de formación matemática o las competencias del saber “enseñado” (presidencia). XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Málaga, España.
- Thompson (2001). Secuencia de actividades de Thompson. Material en versión digital, recuperada en el 2000 (versión no disponible actualmente en la web).
- Vallejo, Z. D. (2018). Propuesta pedagógica para fortalecer la comprensión del concepto de fracción (parte-todo) en el grado quinto (tesis de Magíster). Fundación Universidad del Norte, Colombia.

ANEXOS

ANEXO 1



Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



COLEGIO
MAYOR PRIMEROS MAESTROS

Educación y Respeto

NOMBRE: _____ **Grado Cuarto**

FRACCIONES EN MI VIDA COTIDIANA Y EN EL COLEGIO

Hola, soy Cristian:

1. El 2 de septiembre cumplí años. Yo quería cortar mi pastel rectangular para repartirlo entre ocho invitados y yo. A cada invitado le correspondió un noveno del pastel, sombreá la parte que se comió uno de los invitados.



2. Al día siguiente mi mamá me pidió que la acompañara a la tienda para comprar: Medio kilo de carne, un cuarto de kilo de frijol y una gaseosa tres litros y medio.

2.1 ¿Cómo escribirías estas cantidades en fracción (números)?

Medio kilo de carne _____

Un cuarto de kilo de frijol _____

Una gaseosa tres litros y medio _____

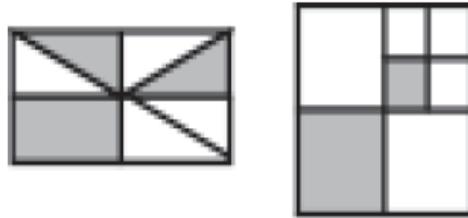
2.2 Acorde a las compras hechas ¿Qué pesa más la carne o el frijol? ¿Por qué? (eliminado por no tener en cuenta la fracción parte-todo desde una relación multiplicativa entre las partes con el todo)

Cuando llegamos a casa me puse a hacer los ejercicios que puso de tarea el profesor de matemáticas. ¿Cómo los resolvierías tú?:

3. Sombree la superficie que se indica: Un sexto del rectángulo.



4. Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada.



ANEXO 2

PREGUNTAS ORIENTADORAS SOBRE LA PRUEBA DIAGNÓSTICO PARA ENTREVISTA

PUNTO 1:

¿Por qué dividió la torta rectangular de esa manera?

¿Qué significa para usted, *un noveno de la torta rectangular*?

PUNTO 2:

¿Por qué consideró otras cantidades diferentes a las dadas en la situación?

PUNTO 3

¿Por qué resolvió el ejercicio de esa manera?

PUNTO 4

¿Por qué enumeró las partes sombreadas de cada figura sin tener en cuenta las partes no sombreadas?

¿Por qué consideró esas fracciones para cada figura propuesta?

¿Por qué no respondió la pregunta?

Descripción de cada punto de la prueba.