UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE INFINITO: UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

IVÁN YESID AYALA LAVERDE

DIRECTOR

DR. WILSON GORDILLO THIRIAT

BOGOTÁ, D.C. COLOMBIA

2019

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE INFINITO: UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Presentado por

IVÁN YESID AYALA LAVERDE

CÓDIGO: 20021145061

Director

WILSON GORDILLO THIRIAT

DOCTOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MÁTEMATICAS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.

COLOMBIA

2019

El matemático, que se encuentra bajo su diluvio de símbolos, y trabaja, al parecer, con verdades puramente formales, puede aún alcanzar resultados de infinita importancia para nuestra descripción del universo físico.

KARL PEARSON.

¿Cómo puede ser que la Matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?

ALBERT EINSTEIN.

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

DAVID HILBERT

Esta tesis está dedicada:

Principalmente a Dios, por ser el inspirador y darnos fuerza ante las dificultades para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados.

A mi madre por su amor y su fortaleza ante el cáncer, y ser mi fuente de inspiración en todos estos años.

A cada uno de los profesores de LEBEM, por estar siempre presentes, acompañándome y por el apoyo moral, que me brindaron a lo largo de esta etapa de mi vida.

A todas las personas que nos han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que nos abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.

Agradecimiento:

Agradezco a los docentes ***Juan Pablo Albadan, Diana Gil, Claudia Castro, Néstor Fernando Guerrero,*** de la LEBEM, **Universidad Distrital Francisco José de Caldas** por haber compartido sus conocimientos a lo largo de la preparación de nuestra profesión, de manera muy especial, al ***Doctor Wilson Gordillo Thiriat*** tutor de este proyecto de investigación quien ha guiado con paciencia, exigencia, rectitud y vocación como docente, por último a la comunidad educativa COLEGIO DE LAS MERCEDES por su valioso aporte en la investigación.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Antecedentes y Problemática

1.1. Introducción

En este capítulo se presenta un panorama general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática referentes al problema de investigación que nos atañe: la noción de infinito en estudiantes de educación Básica. Dichas investigaciones y desarrollos nos abren una ventana a esta investigación. Finalmente presentamos una aproximación al problema de investigación.

1.2. Antecedentes

La noción de infinito es “un concepto matemático intuitivo y es común en el lenguaje de los seres humanos” (Vega, 2013. p. 2), dado que no tienen fundamento empírico determinado posee una estructura rigurosa que ha mostrado un desarrollo axiomático. Esta evolución ha sido acompañada con diferentes conceptos y nociones matemáticas como los son: limite, derivada, sucesiones y series que han sido abordadas desde Zenón hasta la actualidad (Buitrago, Gaviria & Márquez, 2014), estas concepciones algunas de ellas intuitivas sobre el infinito hacen conexión con percepciones relacionadas a acciones o situaciones en los que se presenta este noción matemática, involucrando distintas representaciones (Duval, 1999), en que sé que se yuxtaponen en un problema matemático; problema entendido como relación en el entorno de la terna situación – alumno – entorno (Alfaro & Barrantes, 2008).

Una forma de abordar el concepto según Vega (2013) está en la intuición, en el tratamiento de lo intuitivo como una forma de abordar el pensamiento intuitiva, primitiva y opuesta a interpretaciones y concepciones científicas, en donde la intuición debe prevalecer sobre las prácticas en la enseñanza, pero que las secuencias y las transposiciones didácticas (Chevallard, 1991), deben respetar la formalidad de las matemáticas, para que los estudiantes no lleguen a esquemas cognitivos inadecuados (Socas, 1997).

La historia ha jugado un papel importante en el desarrollo de la noción de infinito así se evidencia en López (2014), al abordar la comprensión en problemas planteados por Pascal en torno a la dificultad de la división infinita y la incongruencia de reglas aritméticas en los indivisibles. De igual forma D´Amore (1999), centra sus estudios en torno a las concepciones del infinito actual, en estudiantes de todos los niveles académicos formales utilizando las relaciones y caracterizaciones de estas entre conjuntos; como lo es la biyección y la equipotencia, poniendo en evidencia las contradicciones entre lo intuitivo y lo formal, buscando identificar las diferencias entre del infinito actual y potencial.

Por último, utiliza un software matemático en la enseñanza de las matemáticas ha sido el aporte a la noción de infinito, mediante representaciones (dinámicas), utilizado muchas veces en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus objetos. Así lo evidencia Vega (2013), cuando construye una secuencia didáctica para formalizar conceptos matemáticos abstractos intuitivos. como lo es la noción de infinito, y argumenta la necesidad de vincular de herramientas tecnológicas que permitan la modelación y situación de estas situaciones.

En muchas ocasiones al abordar el estudio del infinito se analiza es la cardinalidad infinita de conjuntos numéricos, desde la comparación de conjuntos numéricos, y en algunos trabajos acerca de la noción del infinito se habla del horror infiniti, en donde solo se caracteriza como indefinido, y que los estudiantes lo dan como verdad absoluta y no se cuestionan en torno a la grandeza de esta noción en las matemáticas. Sfard (2000, p. 211) establece que el infinito lo definen o lo caracterizan en el ámbito de lo discursivo, y el concepto es algo individual, ya que cuando los estudiantes se ven enfrentados a este concepto resuelve a la realidad en la que él se encuentre involucrado.

Siguiendo en el análisis que se hace en el trabajo de la noción de infinito en la escuela primaria su principal trabajo es el conjunto de los números naturales y en los últimos grados de primaria son las operaciones entre los números racionales

Según Montoro, Scheuer y Pérez (2015) afirman que "*el infinito matemático constituye un concepto poco familiar incluso para docentes de nivel primario (para quienes no forma parte del contenido curricular de enseñanza)*" (p.148). Montoro et al. (2015) afirma que este este fenómeno se muestra en las investigaciones de Sbaragli (2004) y Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2010), siendo una de las características más relevantes en la investigación que queremos abordar asociado al trabajo del infinito en la escuela de básica y media en la clase de matemáticas, dado que los errores más frecuentes asociados a la comprensión del infinito en estudiantes de la media y formación universitaria, están inmersos en obstáculos epistemológicos además de modelos que se construyen en base a la intuición impartidos por los profesores que tienen a cabo su capacitación en los primeros años de educación escolar, y en contraparte a la investigación de Montoro et al (2015), nosotros deseamos establecer una secuencia didáctica que permita el abordaje de la noción de infinito tratando de aproximarnos en las causas de sus concepciones acertadas o erróneas de esta noción.

En el tratamiento inicial del infinito potencial asumimos el trabajo realizado bajo las nociones de conteo y la caracterización del conjunto de los Naturales, y sus elementos como la unidad, la reiteración de esta, los subconjuntos de Naturales y la relación biyectiva cuando comparamos algún conjunto discreto de cantidad finita con este conjunto numérico, llegando a la enumeración. (Montoro, 2005). Siguiendo con la caracterización del infinito potencial en donde se asume como un proceso, y el infinito actual como un objeto trascendente, esto lo afirma Roa F. (2011) citando a (Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005a; 2005b; Brown, McDonald & Weller, 2008), para el diseño de esta secuencia se debe tener en cuenta en que contextos está inmerso la noción de infinito y además establecer una pre visualización de las concepciones de los estudiantes en los distintos grados de educación básica y media, en torno a sus concepciones y su experiencias con esta noción, asumidos desde nuestra experiencia en el aula y la consulta de investigaciones que abordan el trabajo con esta noción, creyendo que desde esta investigación se podrá dar más fortalezas o debilidades en la construcción de nuevas estructuras en matemáticas con el trabajo de los conjuntos numéricos, problemas de densidad y ubicación de la recta de cantidades de diferente naturaleza potenciando la noción de infinito hasta el trabajo de sucesiones infinitas, limites, series y otros conceptos de matemática avanzada. Roa F. (2011), establece que las concepciones de los estudiantes en torno a esta noción son contradictorias porque no hay una articulación entre las diferentes registros, representaciones y contexto donde se trabaja esta noción y asocia estas dificultades a su naturaleza y evolución histórica además de la dicotomía entre la potencial y lo actual que presenta esta noción, siendo un punto en común de Roa con nuestra investigación que más que detectar dificultades queremos hacer una reflexión alrededor de la importancia de los mecanismos de interiorización y encapsulación que su suceden en el aula bajo el trabajo cotidiano de la matemática y que permita un trabajo preciso en el desarrollo de la noción y del concepto infinito.

Bajo esta mirada de los dos trabajos citados anteriormente se concluye la importancia de Cantor en la encapsulación de procesos infinitos mediante los mecanismos de interiorización y encapsulaciones relacionadas con el infinito potencial y actual, asociados en la comprensión del concepto infinito Roa (2011) citando a Dubinsky et al. (2005) afirma que Cantor logro encapsular procesos infinitos mediante la construcción de números cardinales y ordinales y fue capaz de pensar en ellos como objetos que pueden ser transformados mediante la aplicación de acciones y procesos; por ejemplo, mediante la comparación de conjuntos o la realización de operaciones aritméticas entre ellos, además Roa (2011) citando a (Dubinsky et al., 2005a, p. 346) menciona:

> *"El infinito potencial es la concepción del infinito como un proceso. Este proceso es construido empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) la cual es una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso"* (p.3)

La riqueza de estas dos concepciones que son el infinito potencial y actual en los conjuntos numéricos y en el trabajo con la cardinalidad y la ordinalidad es que el estudiante puede ver el "infinito como una totalidad" esto se debe a que se pueda encapsular lo potencial para transformarse en infinito actual, tratando de articular el trabajo a realizar en esta investigación con diferentes registros o representaciones y el trabajo de una o más entidades matemáticas, donde se puedan plasmar estas acciones (Dubinsky et al., 2005)., afirma que la existencia de uno no niega el otro y pueden ser percibidos como construcciones cognitivas diferentes relacionadas por el mecanismo mental de encapsulación.

Por lo anterior se establece la importancia de los proceso iterativos más sencillos que como la construcción de los números naturales por la reiteración de la unidad donde este proceso prioriza lo potencial pero está inmersa la dificultad de ver este proceso como un todo dada la naturaleza del proceso que prima sobre la concepción de número natural y de la caracterización de los Naturales, en donde lo más trabajado para esta concepción en la mayoría de investigaciones del todo igual a una de sus partes en un conjunto de cardinalidad infinita, es comparando un conjunto finito de objetos con un conjunto numérico primando el proceso iterativo en el conjunto de objetos y estableciendo la relación biunívoca con el conjunto de los Naturales o alguno de sus subconjuntos, en donde muchas situaciones problemas que trabajan la noción de infinito como las paradojas o representaciones de procesos iterativos infinitos en contextos finitos hacen que las soluciones de estas entre en oposición con la intuición mostrada por los estudiantes en la resolución y la caracterización de sus razonamientos en torno a estas situaciones problema, ya que su principal fundamento de trabajo de estas paradojas son la comparación de conjuntos por su cardinalidad, y que muchas veces no es clara en estudiantes que abordan la noción de infinito bajo estas condiciones pues no se ha hecho un trabajo ordenado y meticuloso con la presentación de estas nociones en contextos más simples y con problemas diseñados en una secuencia didáctica que se aproximen al trabajo más simple desde lo potencial a un nivel más avanzado con lo actual y que sea concatenado y no uno aparte del otro como se presentan en muchas secuencias didácticas que trabajan estas nociones de infinito.

Siguiendo con el trabajo de las nociones del infinito, se indaga en esta investigación los algunos aportes de investigaciones alrededor de la noción de límite que posibilita el abordar el cálculo y en el cual la noción de infinito es el eje fundamental en el desarrollo de estos conceptos matemáticos priorizando en el concepto de número real, expresiones algebraicas y racionales y el concepto de función, Araya y Gordillo (2017) especifican en sus indagaciones la dificultad que tienen los estudiantes en el trabajo de la noción de limite en la identificación y la visualización del concepto, (p.535) dado a que no solo se presenta este problema en la noción de limite sino en otros conceptos trabajados en matemáticas donde estén presentes los conjuntos y los universos numéricos, es decir no se ha hecho de manera juiciosa un tratamiento adecuado de las nociones de infinito potencial y actual para que el estudiante tenga un eficaz aprendizaje del cálculo y los objetos matemáticos que se involucran en él, y por eso Araya y Gordillo, en su investigación desea ver los conflictos semióticos que se presentan en torno al aprendizaje de la noción de límite, a diferencia una vez más de nuestro trabajo es establecer una posible secuencia didáctica en torno al trabajo del infinito pues los conflictos semióticos ya han sido abordados por numerosas investigaciones, y en el análisis de estos antecedentes vemos la necesidad de compilar atreves de un instrumento de indagación un orden y una secuencia de actividades que establezcan un trabajo argumentado y comparado de las nociones de infinito el cual tanto docentes como estudiantes puedan leerlo y digerirlo sin entrar en discusiones complejas de conflictos cognitivos, sino algo más practico analizando el entorno, las representaciones los instrumentos y en fin todo lo que propone el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento que se verá más esbozado en el próximo capítulo de esta investigación, y que con lo dicho anteriormente establecemos que para nuestros intereses en esta investigación se acopla a lo que pretendemos lograr en el desarrollo de las aproximaciones a las nociones del infinito, que hemos discutido durante todo este capítulo. Ahora bien en las conclusiones que establece Araya y Gordillo en su investigación es que el trabajo del concepto matemático en este caso que es la noción de limite en estudiantes de media y universidad, el trabajo priorizan en la forma algebraica la cual no potencia en su totalidad el concepto de limite ya que desde lo geométrico hay una mejor aproximación a esta noción, en donde nosotros como investigadores vemos esta falencia en el trabajo de conceptos matemáticos pues no hay un dinamización de las representaciones de objetos matemáticos en diferentes registros, ni una yuxtaposición de las diferentes representaciones de este, como un nueva clase de representaciones dinámicas, Kaput (2011), a lo cual añade que la modelación es producir "modelos matemáticos" que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad, a lo cual añadimos desde nuestra formación y nuestra experiencia en el aula que la noción de infinito debe ser abordado como algo dinámico y no algo estático en donde intervienen diversas representaciones y diversos registros semióticos y que si se parte desde el infinito potencial y sus procesos iterativos hasta el infinito actual en donde la encapsulación es el obstáculo más grande para el estudiante se debe ver desde la modelación de subprocesos asociados a la noción y no como un proceso total o como un proceso resultante dado por la dinámica del concepto de infinito, fenómeno que suele ocurrir con las paradojas en donde Roa (2011) citando a (Dubinsky et al., 2008), afirma que:

> *En el caso de las paradojas el contexto real como accionar un dispositivo o ubicar personas (por ejemplo, en la paradoja del Hotel de Hilbert), de alguna manera ha limitado el razonamiento de Santiago respecto a considerar los procesos iterativos infinitos identificados como acabados.*
>
> *Por tanto, es necesario pensar en situaciones que en el contexto propio de las matemáticas posibiliten ver el estado último de un proceso iterativo infinito como un todo, en donde la "realidad" no se oponga al estado final del proceso iterativo infinito.* (p.11)

Aquí el autor resalta que se debe priorizar en la construcción de los números naturales como un proceso iterativo infinito, al no poder interiorizar acciones específicas en torno a estos procesos infinitos, ya que ubicados desde el contexto cotidiano dan fe de cierto número de acciones y no sobre un número infinito de ellas.

Finalmente, en el análisis de este trabajo Roa establece al igual que nosotros la necesidad del trabajo de la noción de infinito desde edades tempranas:

> *Por otra parte, surge de este trabajo la necesidad de plantear algunas estrategias metodológicas que generen desde edades tempranas la encapsulación de los números naturales como un proceso iterativo infinito en un objeto. Esto debe ser una meta dentro del sistema educativo que, según nuestros análisis, esperamos apoyar con la finalización de este proyecto, éste es un requisito previo indispensable para la construcción del infinito como un objeto, el infinito actual.* (p.12)

Retomando a Kaput (2011) la modelación es producir "modelos matemáticos" que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad, para nuestra investigación esto algo evidente ya que el estudio de las nociones de infinito en contextos reales solo se podría dar a través de subprocesos o en una primera instancia ver el infinito potencial por varias partes en los conjuntos numéricos y después hacer una abstracción para ver todo como un total de esos procesos iterativos, potenciando las diferentes representaciones aunque estas no siempre van a dar una respuesta satisfactoria a lo requerido para la compresión absoluta de las nociones del infinito dado su naturaleza histórica y sus configuraciones y conflictos semióticos identificados en distintos trabajos de investigación en torno al infinito. Montoro et al. (2015) establece que:

> *Para promover que los estudiantes puedan apropiarse del concepto de infinito cardinal, es indispensable que la enseñanza matemática prevea entre sus meta para los primeros años de la universidad una explicitación de las nociones que, para promover la apropiación del concepto de infinito cardinal, es indispensable que la enseñanza matemática atañe al infinito matemático, de modo de facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática avanzada.* (p.171)

Siguiendo ya con la utilización de los diferentes lenguajes matemáticos para el diseño y la contextualización de los problemas asociados a la noción de infinito Garbin B., & Azcarate C., (2002) establece que un profesor puede resolver varios problemas que son representados de diferente manera pero que presentan la misma noción matemática, (p.100) a lo cual añadimos que debe tener en cuenta la yuxtaposición de las representaciones asignadas a esta noción u objeto matemático, y que como resalta Garbin (2002) "*tendrá que ayudar a establecer las conexiones pertinentes a sus estudiantes de manera que no sean problemas aislados*". (p.100), y sugiere la caracterización y la confrontación de las representaciones semióticas y los registros utilizados, dado desde el EOS que es nuestra metodología de investigación se verá más adelante que son las configuraciones epistémicas que dan luces de este trabajo de diseño de esta posible secuencia didáctica en torno a la aproximación de la noción de infinito y que Garbin (2002) aporta en su investigación señalando que su trabajo abre nuevas investigaciones para:

> *Proponer y llevar experiencias didácticas o intervenciones didácticas concretas en el aula o diseñar alguna unidad de aprendizaje o guía de trabajo, teniendo en cuenta el binomio «coherencia/ consistencia» y la «tarea de conexión» evaluando y analizando los resultados de dichas experiencias.* (p.100)

Estableciendo ya conexiones entre los registros, los lenguajes, los tipos de representación, los subprocesos, y la encapsulación de estos procesos en las nociones de infinito Waldegg G. (1996) añade que en el trabajo de las nociones de infinito se pueden esquematizar ciertas características en la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas, una puede ser importante para nuestra investigación:

1. Teóricamente siempre es posible aproximarse a una cantidad dada, "tanto como se quiera", el proceso de aproximación es un proceso potencialmente infinito. Desde el punto de vista práctico, debido a las limitaciones de los sentidos, de los aparatos de medir y de las necesidades cotidianas, la aproximación es siempre restringida.
2. La variación continua entraña la idea de infinito ya que supone que entre dos estados cualesquiera de la variable, siempre hay una infinidad de estados intermedios.
3. Por ejemplo, si podemos localizar, por biparticiones, una infinidad (potencial) de puntos sobre un segmento, es porque en el segmento hay una infinidad

(actual) de tales puntos. Esta tesis es sostenida por algunos matemáticos e historiadores citando a Koyré (1961) y Thom (1992).

4. Piénsese, por ejemplo, en el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares, claramente subconjunto propio del primero. A cada número natural se le puede asociar un par (su doble) y a cada número par le corresponde un natural (su mitad), lo que implica que hay tantos números pares como naturales, a pesar de que los pares sólo son una parte de los naturales.

Ya con el trabajo de las nociones en el infinito actual el proceso de encapsulación en gran medida corresponde a un análisis poco detallado del proceso de instrucción y la falta de claridad de los contextos y los tipos de representación que se emiten al trabajar el infinito actual, un ejemplo lo muestra Font (2012): "*Por ejemplo, asociar el crecimiento de x hacia el infinito con el crecimiento indefinido de la función y = f(x) permite explicar la generación de las imágenes mentales de los alumnos, que se apoyan en la aproximación gráfica sin tener en cuenta el infinito actual*" (p. 687). Sustentando que es indispensable la representación gráfica numérica y simbólica para el aprendizaje del concepto ye entra en discusión si el límite es visto como un proceso infinito potencial o no. Medrano & Pino-Fan (2016), establecen que el límite es la relación de varios conceptos matemáticos como "el infinito el continuo, aproximación, función y número real" y que estas "relaciones conceptuales" están presente en disciplinas como: "*disciplinas como: la geometría, la aritmética, el álgebra, la geometría analítica, el análisis matemático, la teoría de conjuntos y la lógica matemática*". (p.320), por lo que en nuestra investigación vemos al infinito como algo el eje central de la matemática y el que posibilita ya sea desde lo potencial o desde lo actual todos los objetos matemáticos trabajados desde la educación básica hasta los niveles más avanzados de matemática de ahí la importancia de diseñar una secuencia didáctica que permita una conexión de las nociones de las representaciones ya enunciado anteriormente, al abordar los conceptos matemáticos y los contenidos matemáticos, los primeros son vistos desde la rigurosidad y la formalidad matemática, y los segundos involucran la matemática institucional configurada dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula.

Finalmente, Waldegg (1996) asume que una de las mayores dificultades del infinito actual es que el conflicto aparece al aceptar que el todo es igual a una de sus partes, lo cual contradice el esquema intuitivo del todo mayor que sus partes; igualmente las correspondencias biyectivas como instrumento de comparación presentan serias dificultades.

1.3 Problemática

En el desarrollo de esta propuesta didáctica en torno a las nociones del infinito se establecen dos preguntas que serán desarrolladas más adelante en nuestra investigación y que permiten visualizar las ideas centrales y fundamentales que argumentan una necesidad y un afán de establecer este tipo de trabajos en pro de brindar herramientas al docente de educación básica y media sin ser necesariamente un educador matemático, pues en muchas instituciones escolares de básica especialmente la formación en matemática es propuesta por docentes que carecen de esta formación matemática y la idea es vincularlos a este trabajo viendo la importancia que amerita el objeto matemático, por eso podemos preguntarnos desde el punto de vista epistemológico ¿Qué significado o significados confieren los estudiantes de educación básica al infinito en octavo grado? ¿Es posible por medio del diseño de secuencia didáctica acorde a una metodología de trabajo en el aula práctica y sencilla para estudiantes y profesores mediante los registros numérico, algebraico y geométrico, introducir nociones aproximadas al infinito potencial y actual en estudiantes de educación básica?

Esta dos preguntas orientan nuestra intencionalidad en nuestra investigación por tal motivo queremos entrar en la búsqueda de investigaciones y aportes de las posibles secuencias didácticas en torno a la noción del infinito, que nos permitan identificar la viabilidad de esta propuesta, acorde a los lineamientos curriculares y los estándares del Ministerio de Educación de Colombia (MEN) y de la educación matemática.

Es claro que en la educación básica cuando se aborda la noción de infinito, una de las principales dificultades que se han presentado es la adquisición del orden y cardinalidad como conceptos, así como la noción de densidad y que por falta de representaciones vinculadas a estos concepto el infinito se vuelve un punto un quiebre entre la matemática escolar y el matemática en enseñanza universitaria, revelando que la nociones de infinito solo se pueden abordar desde el pensamiento matemático avanzado.

Como establece en su trabajo de investigación Agudelo y Escobar (2016) las investigaciones en torno a estas problemáticas asociadas a la noción del infinito desde 1980 hasta el momento discuten son los obstáculos epistemológicos en los procesos de enseñanza-aprendizaje concernientes al infinito actual, pero son escasos los trabajo que propongan secuencias didácticas que aproximen al estudiante a las nociones de infinito especialmente un acercamiento al infinito actual, en donde trabajos citados en nuestros antecedentes establecen que muchos errores de interpretación y de un uso inadecuado de los registros sin entender su naturaleza y sin tener en cuenta todos los elementos que se deben estas presentes al momento de hablar de las nociones de infinito en el aula, el desarrollo de esta propuesta didáctica esta intencionada a realizar un aporte a la didáctica de la matemática y a una posible herramienta a los docentes, con un material como lo es esta posible secuencia didáctica que permita superar las dificultades en el aprendizaje del cálculo en la escuela. Como establece Montes y Carrillo (2017) "*El infinito es un concepto subyacente a multitud de conceptos presentes en la matemática escolar*" (p.114), siendo un extraordinario preámbulo para nuestra intencionalidad de establecer una secuencia que aproxime a los estudiantes especialmente los de educación básica a las nociones teniendo claro que, como cita Montes y Carrillo, a Hannula, Pehkonen, Maijala y Soro (2006, p.1) en que:

> *La mayoría de los niños de primaria están muy interesados por el infinito, y disfrutan reflexionando sobre el concepto, si el profesor está listo para ello" reflexión que extendemos a los estudiantes de secundaria. Sin embargo, pese a que creemos que el conocimiento que el profesor pudiera activar para discutir el infinito, pero se puede dar lugar a un campo de estudio interesante, aquí nos centramos en el conocimiento acerca del infinito que resulta útil al profesor para enseñar contenidos matemáticos estandarizados y presentes en los diferentes currículos.* (p.115)

Dado el argumento anterior se puede llegar a que las nociones de infinito, aunque no están presentes de manera explícita en el currículo y los estándares en matemáticas según Montes y Carrillo el "*NCTM (2000) (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos, y probabilidad). Estos temas no incluyen al infinito, pero se puede encontrar su presencia de forma transversal a algunos de ellos*" (p.117), siendo un primer paso para establecer las coherencias que tiene abordar las nociones del infinito en el aula, Montes y Carrillo además propone que como segunda instancia el profesor debe manejar en gran medida un “entendimiento del tópico matemático” relacionando y haciendo conexiones de conceptos matemáticos que se manejen en el aula en diferentes momentos y no solo en una sesión en particular en donde se quieran abordar estas nociones (p.117), llegando a otro momento en el proceso de enseñanza en donde el profesor debe ser consciente de las conexiones y de procesos de “*complejización o simplificación del contenido*” (p,118) siendo según nuestra opinión este un ideal a la hora de abordar las nociones del infinito en el aula, pero dado que muchos profesores que están en la educación básica tienen la responsabilidad de enseñar matemáticas sin tener la formación para enfrentarse a esta tarea, esta investigación con esta posible secuencia que deseamos plantear permite en lenguaje simple y con ejercicios o situaciones problema de fácil comprensión con un lenguaje adecuado y representaciones claros de que pueda llevar a cabo esta tarea y minimizar los impactos de la falta de conocimiento y apropiación de estas concepciones y llevar al estudiante al aprendizaje de estas nociones o por lo menos de plantearle la inquietud del funcionamiento de estas en las matemáticas y de cómo estas influyen en el conocimiento del universo y de su entorno.

Montes y Carrillo por ultimo establece en su investigación citando a Schwab (1978), el “conocimiento sintáctico del contenido” en el profesor que debe proceder conociendo relativamente procesos de validación en matemáticas, demostraciones y razonamientos heurísticos así como procesos de modelización y de generalización, (p.118) donde una vez más creemos que esto sería lo ideal pero en muchos casos no se presenta en el ámbito educativo queriendo a través de esta investigación minimizar la falta de profesores con formación en educación matemática con documentos sencillos como es la propuesta de esta posible secuencia que aborda las nociones del infinito y que permita las conexiones que se buscan para superar todos esos obstáculos que se presentan al momento de adquirir destrezas matemáticas en la resolución de problemas de la vida escolar y cotidiana por parte de los estudiantes, posibilitando que el profesor que carece de esta formación pueda encontrar en nuestra secuencia una poderosa herramienta para el trabajo en el aula en matemáticas.

1.4 Pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos

Todas las investigaciones presentadas en los antecedentes han ayudado importancia realizar una secuencia didáctica para analizar la comprensión de la noción de infinito, y promover el aprendizaje de los estudiantes sobre dicha noción.

En este sentido, este trabajo pretende abordar un aspecto fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente el que tiene que ver con la articulación de los significados institucionales y personales, a su vez relacionados con dos niveles de análisis del conocimiento matemático, nivel de prácticas y nivel configuraciones. Propuestos por el EOS, Esta articulación de las facetas nombradas, en relación con dichos niveles, se hace a través de la *comprensión*, en relación con las *concepciones* matemáticas que hacen emerger *conocimiento.*

Desde el punto de vista epistemológico, se puede plantear la pregunta: ¿Qué es el infinito?; o de forma análoga, ¿Cuál es el significado de la noción matemática infinito? Desde el punto de vista cognitivo, se puede plantear la pregunta: ¿Qué significado o significados confieren los estudiantes al infinito en un momento curricular determinado?

Es claro que, desde un punto de vista idóneo, la respuesta a la segunda pregunta debe ser lo más cercana posible a la respuesta de la primera. Es decir, lo que busca la Educación Matemática es tratar de gestionar un acoplamiento entre los significados pretendidos por una institución educativa y los significados personales (conocimientos/comprensión de los estudiantes sobre objetos matemáticos concretos); lo cual resulta complicado debido a la diversidad, riqueza y complejidad intrínseca de los significados personales de los objetos matemáticos que pueden emerger en el aula, a propósito de la implementación de una situación/problema.

De esta forma, y dada la complejidad del tema, el problema de investigación se puede resumir con las siguientes preguntas:

> *¿Es posible potenciar la comprensión de la noción de infinito que tienen estudiantes de educación básicas? ¿De qué forma?*

Así, para abordar de forma clara y organizada el problema de este trabajo, se presentan las preguntas y objetivos de investigación, por medio de los cuales se pretende realizar una aproximación a las respuestas de las cuestiones anteriores.

En este trabajo de investigación me he propuesto responder, aunque sea de forma parcial, las siguientes preguntas de investigación (*PI*):

> *PI-1: ¿Cuál es la noción de infinito que tienen los estudiantes?*

> *PI-2: ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de infinito, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?*

En relación con las preguntas de investigación Para responder a las en relación a *PI-1* y *PI-2*, el objetivo general (OG) de esta investigación es:

> *OG: Caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes de básica sobre la noción de infinito a través de una secuencia didáctica.*

Para la consecución del *OG* y así dar respuesta a la *PI-1* y *PI-2*, es necesario el planteamiento de una serie de objetivos específicos (*OE*). Estos objetivos se derivarán de preguntas de investigación más concretas (*PCI*), cuyas respuestas contribuirán a la consecución del objetivo general, y por ende, a responder las preguntas de investigación *PI-1* y *PI-2*. Así, una pregunta que surge de manera natural es la siguiente:

> *PCI-1: ¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente en la noción de infinito?*

Para responder a PCI-1, se propone el siguiente objetivo específico:

> *OE-1: Estudiar y caracterizar las investigaciones en torno a la problemática sobre la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente aquellas que tratan sobre la noción de infinito, con el fin de determinar criterios específicos para la elaboración de la secuencia didáctica.*

Como señalamos anteriormente, el objetivo general de esta investigación es caracterizar la comprensión de la noción de infinito, en este sentido, si lo que queremos es evaluar, inicialmente se debe delimitar qué se entiende por dicha noción matemática. La problemática de la delimitación, la podemos resumir con la siguiente pregunta:

PCI-2: ¿Qué es, o cuál es el significado, que se le confiere al infinito?

Para responder a *PCI-2*, se proponen los siguientes objetivos específicos:

OE-2: Identificar y caracterizar, configuraciones ontosemióticas, epistémicas activadas en la práctica, mediante el uso de la herramienta análisis ontosemiótico sobre el objeto infinito.

Una vez determinados los aspectos que deben estar involucrados en la comprensión de los infinitos, estamos en condiciones de abordar la siguiente pregunta:

PCI-3: ¿Cuál es el conocimiento sobre el infinito, que efectivamente tienen los estudiantes de educación básica?

Para responder a *PCI-3*, se proponen los siguientes objetivos específicos:

OE-3: Diseñar un instrumento didáctico que sea representativo de la complejidad del objeto infinito.

OE-4: Implementar el instrumento didáctico en estudiantes de educación básica.

OE-5. Caracterizar a partir de los resultados obtenidos con la implementación de la instrumento didáctico, el conocimiento sobre el infinito de los estudiantes, e identificar los aspectos que, a futuro, se deberán tener en cuenta para mejorar diseños de procesos de enseñanza sobre la noción de infinito.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico y Metodología

2.1 Introducción

Para el desarrollo de este trabajo se ha adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). El EOS ha surgido dentro de la educación matemática, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Para cumplir con este fin adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones o facetas y las interacciones entre las mismas.

El EOS es un enfoque construido sobre diversos modelos o bases para cada una de sus facetas, entre los que se encuentran: las bases antropológicas y socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006), que fundamentan la faceta epistemológica y ecológica de las matemáticas; bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce 1931-58), que sustentan la faceta cognitiva y afectiva de la matemática; bases socio constructivistas (Ernest, 1998; Brousseau, 1997), que orientan la faceta instruccional, y por último bases sistémico-ecológicas (Morin, 1994), que relacionan las facetas anteriores entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural (Maturana & Varela, 1984) en el que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática.

Las facetas del EOS se deben analizar según diversos niveles: las prácticas de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009).

Adicional a esto, las nociones del EOS se han aplicado en diversas investigaciones teóricas y otros trabajos de investigación, y se utiliza en este trabajo porque provee de *herramientas* teóricas y metodológicas que permiten realizar un análisis detallado y pertinente de los conocimientos que poseen estudiantes en relación a la noción de infinito, entendiendo *conocimiento* como el constructo que involucra comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010).

A continuación, se describen las nociones del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

2.2. Sistemas de prácticas: personales e institucionales

Dentro del enfoque onto-semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, la noción de sistema de prácticas juega un papel central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Con esta noción se asume y hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en el que se apoya el EOS. Godino y Batanero (1994) definen sistema de prácticas como: *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"* (p. 334).

Los sistemas de prácticas se proponen como respuestas a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o a la cuestión ontológica, ¿qué es el objeto matemático O? (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). En los siguientes apartados se verá cuál es la relación subyacente entre los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos y sus significados.

2.2.1. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo, puesto que se considera a los *objetos matemáticos* como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, iconos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, como vimos en la sección anterior, los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como *objetos institucionales*, mientras que, si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *objetos personales*.

Godino y Batanero (1994) señalan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociados.

Como se ha señalado, en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.). En este sentido dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
- *Situaciones/Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, tareas...).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).
- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos,...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones/problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. En el apartado 3.4 se muestra cómo estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

2.2.2. Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, infinito,...), desde una perspectiva pragmática-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el *sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones/problemas en las que dicho objeto interviene*. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera: "*significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado"* (p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional. En correspondencia con el significado institucional de un objeto, los autores dan la siguiente definición: *"significado de un objeto personal es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado"* (Ibíd., p. 341).

Hay que resaltar que los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia. Además, es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge la noción de infinito, el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas, que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011).

En general, como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución de enseñanza, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas) de uso donde se pone en juego dicho objeto.

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones (Pino-Fan, Godino & Font, 2011):

1) Significado global, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático.

2) Significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio.

2.2.3. Configuraciones de objetos y procesos

Para un análisis más detallado de la actividad matemática, en el EOS se ha introducido la tipología de objetos matemáticos primarios antes comentada (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando *redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*, lo que en el EOS se conoce con el nombre de *configuraciones*. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. (Mena-Lorca et al., 2015) p. 337, apunta a estas componentes estableciendo las siguientes situaciones problema en el estudio del infinito potencial y actual:

> *"¿Qué pasa cuando se divide indefinidamente un trazo?, (¿qué significa aproximarse indefinidamente a un número?), ¿cómo se relaciona lo infinitamente pequeño con lo infinitamente grande?; más aún, ¿podemos concebir el infinito potencial?, ¿podemos concebir el infinito actual?; todavía peor, el infinito parece paradójico y ¡hay infinitos más grandes que otros!"*

Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración.*

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): *Personal – institucional, Ostensivo – no ostensivo, Unitario – sistémico, Expresión – contenido, Extensivo – intensivo.*

Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a considerar los siguientes procesos *cognitivos/ epistémicos*:

- Institucionalización – Personalización.
- Generalización – Particularización.
- Descomposición/Análisis – Composición/Reificación.
- Materialización – Idealización.
- Representación – Significación.

Otros procesos como los de resolución de problemas y la modelización pueden ser vistos como *mega procesos* e implican la intervención y activación de los procesos antes mencionados.

Estas configuraciones de objetos y procesos suelen recibir el nombre *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos matemáticos y procesos institucionales o personales, respectivamente.

2.2.4. Comprensión y conocimiento

En concordancia con Pino-Fan (2014), hay dos maneras básicas de entender la *comprensión:* como proceso mental o como competencia (Font 2001, Godino, Batanero y Font, 2007). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como *proceso mental*. Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas) lo cual implica concebirla también como *conocimiento y aplicación de las normas* que regulan la práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* (expresión o contenido); cada elemento de esta función adquiere relaciones que son funtivos[1], en el sentido dado por Hjelmslev (1943). Esta manera de entender la comprensión resulta especialmente útil para hacer *análisis microscópicos* de textos matemáticos como el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005).

[1] Un funtivo es una relación que se establece entre dos elementos de una función lingüsitica (Hjelmslev,1943)

Además, el término *conocimiento* se utiliza en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con la activación de la configuración ontosemiótica cognitiva adecuada, e idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica (o configuración ontosemiótica de referencia), y al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión tiene que ver con las relaciones que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la implementación de una configuración epistémica y cognitiva idónea para un contexto determinado.

2.2.5. Teoría de los registros semióticos

La Teoría de Registros Semióticos fue desarrollada por Duval (1998, 2004), en la que se expresa que el acercamiento de los objetos matemáticos desde su reconocimiento hasta su aproximación se hace a través de sus representaciones semióticas en sus diversos registros (numérico, algebraico, gráfico, simbólico); en el reconocimiento y en la construcción de estos objetos matemáticos se hace de vital importancia el tener en cuenta los registros para su apropiado trabajo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevados a la aula.

Las representaciones semióticas se priorizan en los medios externos (preguntas sobre algún fenómeno, diagramas o dibujos sobre alguna situación que necesite el uso de los objetos y conceptos matemáticos para su resolución, respuestas de las estudiantes y de los profesores del trabajo con la situación) estos objetos matemáticos en las representaciones mentales, el surgir de una idea y la socialización de un objeto o concepto matemático, involucra en gran medida un trabajo cuidadoso con cada una de las representaciones que se tengan en cuenta en el diseño, la argumentación, y el análisis del lenguaje utilizado en la construcción de una secuencia didáctica que permita el acercamiento a estos objetos matemáticos. Según Aznar citando a Duval (2004) p. 35, caracteriza la relación entre la concepción de un objeto con su representación y su socialización en el siguiente fragmento:

“Si bien es comúnmente aceptado que al comprender o conocer un objeto, un sujeto es capaz de representarlo con algún símbolo o grafismo, Duval (1998, 2004) afirma que no hay noesis (aprehensión conceptual de un objeto) sin semiosis (o aprensión o producción de una representación semiótica) afirmando su inseparabilidad.”

Esto sumado a lo expuesto en el capítulo 1 de antecedentes de esta investigación que el trabajo adecuado de un objeto matemático depende de las diversidad de formas o representaciones que presentemos de este objeto además de su conceptualización y su conexión con otros objetos y conceptos matemáticos que se puedan relacionar con este objeto en la conceptualización, por lo menos vinculando 2 registros de representación a cada objeto o concepto matemático involucrado.

Duval afirma que se establecen 3 actividades cognitivas asociadas a la semiosis; las cuales son:

- La formación de una representación identificable como la representación de alguna cosa en un registro.
- El tratamiento como la transformación de una representación en otra en el interior del registro donde fue creada.
- La conversión, que implica la transformación de una representación dada en un registro en otra representación en un registro diferente.

Duval señala también que las mayores dificultades en las actividades cognitivas que involucren trabajos con objetos matemáticos se da en la conversión ya que hay elementos (unidades significantes) que deben estar en univocidad con las representaciones, y que en esa conversión no suele ser tan evidente o fácilmente perceptible en los estudiantes y en los profesores que aborden uno o varios objetos matemáticos, esto significaría para el caso de nuestra investigación que aunque se pueda diseñar una situación en una secuencia didáctica coherente en términos de representación o de utilización de registros semióticos adecuados para visualizar este objeto, el éxito depende de la conversión y de la movilización de los conceptos y de los esquemas, sin que se pierda ninguno de los elementos involucrados en la situación además de la coherencia de cada uno de los registros utilizados en la adquisición de este objeto matemático.

2.3. Metodología

Este trabajo tiene un alto énfasis en las características propias de la metodología cualitativa, puesto que el interés es: e*valuar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición)* de estudiantes de básica

La investigación también tendrá un componente cuantitativo, en cuanto que se construirán instrumentos de evaluación de respuesta escrita que se aplicarán a muestras representativas de estudiantes.

Por consiguiente, esta investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de configuración cognitiva activadas en las distintas prácticas matemáticas llevadas a cabo).

Las investigaciones por métodos mixtos son un tipo de investigación en la que un investigador, o equipo de investigadores, combina elementos de los enfoques de investigación cuantitativo y cualitativo, para los propósitos generales de amplitud y profundidad de la comprensión y corroboración, como lo define Johnson y Onwuegbuzie (2004) p. 17, *"las investigación por métodos mixtos está formalmente definida como la clase de investigaciones donde los investigadores mezclan o combinan técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguajes, cuantitativos y cualitativos, dentro de un mismo estudio."*

2.3.1 Población y muestra

La población de interés de esta investigación, son estudiantes de básica en una institución privada COLEGIO DE LAS MERCEDES, ubicada en la localidad de Santa Fé, barrio La Alameda, de los grados octavo y noveno.

2.3.2. Variables

Como hemos mencionado, este estudio se enmarca en una metodología de tipo mixta, debido a que consideramos variables cuantitativas y cualitativas. Como variable cuantitativa consideramos el grado de corrección de las respuestas de los estudiantes a las diversas tareas que compondrán el cuestionario. Esta variable nos permitirá discriminar entre respuestas correctas, parcialmente correctas y respuestas incorrectas. La especificación y descripción tanto de la variable grado de corrección como su tipología, se realizará cuando realicemos el diseño del cuestionario, dado que el grado de corrección de las respuestas (correctas, parcialmente correctas e incorrectas) dependen de las especificidades particulares de cada tarea

La segunda variable que se considerará es de corte cualitativa y la denominaremos *tipo de configuración Ontosemiótica cognitiva*, la cual refiere a las configuraciones ontosemióticas cognitivas que los estudiantes movilizarán a propósito de una determinada práctica. Nuevamente se reitera, la imposibilidad a estas alturas de describir con profundidad esta variable, ya que la diversidad de configuraciones cognitivas que activarían los estudiantes en sus soluciones, dependerá exclusivamente del tipo de tarea. Sí se puede decir, que una vez definidas las tareas que compondrán el cuestionario, pueden preverse algunos tipos de configuraciones cognitivas (ver anexo 3), y otros se determinarán a posteriori, tras la implementación del cuestionario.

2.3.3. Instrumento para recolección de datos

Para la recolección de los datos hemos considerado, principalmente, el *diseño de un cuestionario* que permita explorar, la articulación de los significados institucionales (faceta epistémica) con los significados personales (faceta cognitiva), a su vez relacionados con dos niveles de análisis del modelo del conocimiento matemático que utilizamos (nivel de prácticas y nivel configuraciones).

2.3.4. Técnicas para el análisis de los datos

La técnica de análisis usada para la variable cualitativa es el análisis semiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes universitarios al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino, Batanero & Font, 2007). Este análisis lo plantearemos desde la perspectiva institucional y personal, lo que dará paso a la descripción detallada tanto de las *configuraciones ontosemióticas epistémicas* (análisis a priori de los conocimientos; conocimientos esperados), como de las *configuraciones ontosemióticas cognitivas* (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

En general, en el transcurso del estudio iremos utilizando las distintas herramientas de análisis que nos proporciona el EOS.

CAPÍTULO 3

Diseño del Instrumento

3.1. Introducción

La construcción de un cuestionario o un instrumento de indagación, no es por sí mismo la investigación, y en nuestro caso el abordar las nociones del infinito bajo problemas algunas veces abordados desde la historia matemática, y otras situaciones simplemente construidas desde la experiencia desde el aula, dan pautas acerca de que conveniente es una situación problema, un ejercicio, o un modelo, para abordar estas nociones del infinito asociado a lo potencial y a lo actual en la educación matemática especialmente con trabajos de investigaciones, revisados y citados que nos permitan obtener la información necesaria, para visualizar la trascendencia del trabajo de las nociones del infinito en el aula, su relación con los diferentes objetos y conceptos matemáticos vistos a lo largo de la educación primaria y secundaria en matemáticas, y por eso es necesario argumentar y validar desde el EOS tanto preguntas como respuestas de los diferentes sujetos involucrados en la investigación.

Como preguntas centrales que orientan el uso del instrumento de indagación en nuestra investigación es posible ver las siguientes:

- ¿Cuál es la noción de infinito que tienen los estudiantes?
- ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de infinito, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?
- ¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente en la noción de infinito?

Para estas preguntas que orientan nuestra investigación establecimos 3 criterios que permiten desglosar nuestro trabajo en la construcción del instrumento de indagación que aborde las nociones de infinito en estudiantes de la básica y de la media:

- Diferencia entre finito e infinito
- Secuencias infinitas (crecientes y decrecientes)
- Diferencia entre infinito actual y potencial

La discusión del infinito, el concepto de límite, del continuo y de la convergencia a sido durante muchos siglos discusiones de tipo matemático, filosófico, físico y teológico. Anacona M. (2003), añade algunos trabajos de Cantor que hace la instauración del infinito en el acto, que permitió el avance de un infinito único a una construcción de infinitos, además Dedekind que aborda el continuo desde un trabajo aritmético y da una visión amplia como lo fue en su momento el abordaje geométrico que tenían los griegos de estas concepciones, esto contribuyo a una mejor comprensión del continuo y del infinito, pero dado este avance en las matemáticas no se puede desconocer las dificultades y la complejidad de ciertos conceptos matemáticos, y el abordar las nociones del infinito en la escuela permite que los estudiantes no sientan que es un conocimiento acabado sino que pueda haber lugar a la creatividad, poniendo a problemas de la matemática como fuente de actividades lúdicas resaltado por Anacona, p.13:

> *"Problemas referidos al infinito, las paradojas, los sistemas formales o las geometrías no euclidianas han ocupado un lugar importante en la historia de las matemáticas y constituyen importantes núcleos de saber. Por tanto, pensar en estrategias lúdicas para propiciar un encuentro informal con ellos, resulta de gran motivación en el proceso de aprendizaje."*

Por otra parte, Mena (2012) p. 6, nos da una pequeña reseña histórica de lo acontecido del infinito en la humanidad:

> *"Desde la historia matemática, el pensar en infinito se da en varias culturas desde lo filosófico lo físico y lo metafísico, y varios filósofos establecen discusiones acerca de la naturaleza del infinito, desde Leucipo y Demócrito establecían que la materia era un conjunto de indivisibles y proponían un universo infinito, luego Parménides y Zenón señalaron varias paradojas acerca del infinito no estaban de acuerdo con las ideas de los dos anteriores filósofos, y estas dos posturas dieron cabida a inimaginables contradicciones,. El primero en abordar la idea del infinito potencial es Aristóteles y evidencia que este puede dar cabida a una existencia actual, con el ejemplo de la división de un trazo que nunca termina, y que el infinito no existe separadamente, atribuyendo que la recta puede ser prolongada tanto como se quiera, Después Agustín de Hipona atribuye el conocimiento del infinito actual a Dios, pero esto estuvo en constante discusión al establecer que el infinito "no puede ser una cosa actual", Descartes expone que estas nociones están más allá de la comprensión, y Galileo al revisar la correspondencia biunívoca entre los números naturales y los números cuadrados dados sus cardinales, concluyo que no podría establecer relaciones de equivalencia o de orden para cuando se habla de infinitos. Euler después utilizando las operaciones algebraicas para tratar series, intento trabajar con el infinito, Cauchy en cambio estableció algunos criterios de convergencia para el trabajo con las series, en otro tiempo Gauss se negaba a la idea de que algo de "magnitud infinita fuera algo completo", y cuestionaba la idea de límite con las nociones del infinito potencial, Bolzano recopila en "Paradojas del infinito", los trabajos de Exhaución de Eudoxio seguido del trabajo de Arquímedes y observado con la aproximaciones infinitesimales, hechos por Leibniz y Newton, lo cual hace que se avance hacia la teoría de conjunto y que Bolzano sea el primero en hablar de las nociones del*

> *infinito actual, asumiendo que el infinito "se comporta de manera paradójica" y que el infinito aunque sea paradójico no es contradictorio, y hace cimientos fuertes hacia la comprensión de estas nociones con las paradojas que permiten estas construcciones e interiorizaciones. Siguiendo con Cantor, en contraposición a algunos Matemáticos de su época atribuía que el "infinito potencial dependía de un concepto previo del infinito actual", desde Cantor y siguiendo con Hilbert al establecer la teoría de los cardinales, que incluía infinitos de diversas magnitudes, no fue muy bien recibida por matemáticos de la época, y se le atribuye a Cantor llegar después de mucha resistencia la aceptación del infinito por parte de la comunidad matemática."*

Para esta trabajo se propone un cuestionario de 10 tareas asociadas a los criterios anteriores mencionados, acudimos a situaciones en donde la comprensión lectora la diversidad de registros simbólicos y gráficos fueran las principales herramientas para establecer conexiones validas en las configuraciones ontosemióticas de estos, procesos y estas respuestas que puedan aproximar al estudiante a una concepción más detallada del infinito bajo las perspectivas de lo potencial o de lo actual, dando significado y a la disparidad que hay entre la respuesta institucional y la respuesta de los estudiantes, entorno a estas nociones, como visto en Gordillo y Araya (2016) en sus conclusiones sobre el trabajo de la noción de límite, teniendo en cuenta que se identifican un trabajo algebraico que da cuenta de la noción, pero desprovista de significado, cuando se trata de abordar bajo una situación más cotidiana, es por eso nuestra preocupación por construir una secuencia que implemente de una manera sencilla, ordenada y planificada unas tareas que lleven al estudiante dependiendo de su grado de escolaridad, al trabajo de las nociones de infinito, como afirma Rojas (2004) *"uno de los problemas de las matemáticas es la falta de situaciones concretas que les den significado"*, y establece que una modelación permitiría ver una representación real útil de una situación real, en nuestro caso en la implementación queremos a partir de situaciones cotidianas que el estudiante establezca condiciones o modelos que le permitan establecer unas conexiones válidas desde el contexto matemático a las nociones de infinito y a todos los objetos matemáticos que están adjuntos a ellas, los sistemas de representación en matemáticas son claves a la hora de plasmar una secuencia que permita argumentar todos estos procederes del docente hacia el aprendizaje del estudiante involucrándolo en una constante búsqueda del dominio de conceptos matemáticos en el aula y en su vida cotidiana ,por eso (Radford, 1998; citado en Rico, 2009) agrega que:

> *"Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas –signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemática de ahí su interés didáctico."*

Aquí en el trabajo de Rojas se aborda el trabajo con limites haciendo uso de las nociones de infinito, el continuo y la convergencia, nuestro trabajo radica en trabajar las nociones de infinito bajo tareas propuestas con el EOS y mirar que involucran los estudiantes a estas nociones, que objetos matemáticos, que definiciones, cuales proposiciones establecen como posibles estructuras para una posible resolución de las tareas ya que como refiere Rojas el concepto de infinito matemático hace parte de la didáctica de las matemáticas. Por otra parte, Cantoral, R, et al. (2003) citado por (Engler, 2015. p. 14) agrega:

> "*Que los conocimientos que como "por decreto" el profesor propone o trata de transmitir y el alumnos acepta de manera totalmente pasiva se olvidan con mucha facilidad y no se alcanzan a integrar a sus estructuras lógicas buscando favorecer y fortalecer su pensamiento matemático"*

Y se hace énfasis que el alumno proponga estrategias que le permitan establecer "estrategias y formas" de resolver los problemas, que es lo que busca el EOS, bajo la implementación de tareas que asumidas por el experto busca que el estudiante tome el control de sus propias actividades matemáticas, tal como señala Cantoral et al. (1995) citado por Engler. (p.14) además propone un lenguaje común entre el profesor y el estudiante que permitiría un ambiente propicio para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, la intención radica en que veamos en el estudiante si acepta el infinito como objeto o proceso, y cuál es el sentido que dan a este concepto, dado desde el axioma del todo mayor a sus partes que es propuesto por Euclides, y que solo se cumple para conjuntos finitos, y más adelante nuevamente con Dedekind "*Un conjunto es infinito cuando se establece una relación biunívoca con una parte propia*", según D`Amore, (2006) p.11, por otro lado argumentando lo anterior se tienen estos 3 ítems que dan una mirada más conjuntista al abordaje de las nociones del infinito potencial y actual:

- La correspondencia biunívoca entre N y Z, entre N y Q, de la cual se concluye que Z y Q tienen la cardinalidad **n** del numerable.
- La imposibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre N y [0, 1], de la cual se deduce que R tiene una cardinalidad mayor de la de N.
- La correspondencia biunívoca entre los conjuntos de puntos de dos segmentos de diferente longitud, entre segmento y semirrecta, entre segmento y recta la correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos de un cuadrado y el conjunto de puntos de uno de sus lados.

3.2. Construcción del cuestionario

Se diseñó un cuestionario que consta de 10 tareas separadas por 3 momentos dados del desarrollo de estas nociones a lo largo de la historia matemática y lo visto en los antecedentes y en los trabajos que se han hecho últimamente acerca de las nociones de infinito en estudiantes de secundaria y Universidad, pretendiendo analizar la aproximación y las diversas ideas que tienen los estudiantes acerca de las nociones de infinito en diversos contextos, se darán una diversidad de situaciones donde el estudiante va a poder cuestionarse acerca de las nociones de infinito dependiendo de las situaciones y tratando de resolver las tareas desde diferentes perspectivas, desde el enfoque del EOS se pretende caracterizar las nociones, el tratamiento que hace el estudiante a las tareas propuestas y que aproximación tienen al concepto de infinito dado desde caracterizaciones de este hasta la actualización del infinito en espacios finitos. Al tratar de analizar las respuestas de estas tareas mediante la respuesta o validación institucional, se pretende visualizar la información de una manera esquemática, además de ver la coherencia o no de estas tareas para los estudiantes involucrados en la investigación. Dado lo anterior después se procederá con base en las configuraciones epistémicas de las respuestas arrojadas en la investigación una interpretación y comprensión a gran escala de los resultados obtenidos, posibles conclusiones y observaciones importantes para la educación matemática en pro de que estos trabajos puedan ser abordados por docentes que se enfrentan a estas nociones del infinito, y lo puedan trabajar con sus estudiantes de una forma secuencial ordenada y planificada, con una metodología como el EOS que acerca más a la práctica matemática, que establecer teorías psicológicas que hacen que se pierda el horizonte del trabajo en el aula, que es en este caso son la comprensión de las nociones del infinito potencial y actual.

3.2.1 Las tareas del cuestionario: análisis de contenido

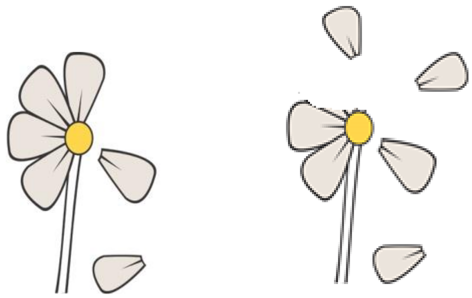
A continuación, se presenta para cada una de las tareas incluidas en el cuestionario, el análisis detallado del contenido que evalúan. Para realizar dicho análisis se presenta para cada tarea, inicialmente, una descripción general de los aspectos que evalúan y la procedencia de la tarea. Luego se presenta de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles. El primer nivel refiere al *contenido ontosemiótico*, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica *configuración ontosemiótica* en su versión epistémica que proporciona el Enfoque Onto-Semiótico. Concretamente, esta herramienta permite la identificación y caracterización de los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos/definiciones*, *proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos*), sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas institucionales.

Para la realización del análisis del contenido (*ontosemiótico*) se propone para cada tarea una solución plausible, solución que se podría decir que refiere a la práctica matemática institucional llevada a cabo para resolver la tarea planteada.

3.2.1.1 Tarea 1: cardinalidad de un conjunto.

Esta tarea (Ver Figura 1), se diseña con el objetivo de asignar cardinalidad en los distintos conjuntos que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, dado con ejemplos de conjuntos de la vida cotidiana, tal como señala Leston (2007) en su trabajo.

1. Observa la siguiente imagen; corresponde a una flor de margarita deshojándose. Respecto a la imagen responde:



1.1.¿Cuantas hojas debió tener la flor antes de iniciar a deshojarse?

1.2.¿En cuántos procesos consecutivos termina de deshojarse completamente la flor?

1.3. Si la flor tuviera al principio un número par cualquiera de hojas, con el mismo proceso anterior, ¿En cuántos procesos terminaría de deshojarse la flor?

1.4.Si la flor tuviera al principio un número impar cualquiera de hojas, con el mismo proceso anterior, ¿En cuántos procesos terminaría de deshojarse la flor?

1.5.Si te piden contar los días del mes de Diciembre. Puedes decir cuantos días hay exactamente en ese mes.

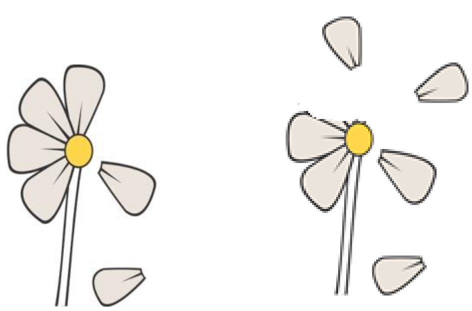
.

1.6.¿Puedes agregar otro día a ese mes? Argumenta tu respuesta.

Figura 1. Tarea1: Cardinalidad de un conjunto

3.2.1.1.1 Solución plausible de la tarea 1.

Observa la siguiente imagen; corresponde a una flor de margarita deshojándose. Respecto a la imagen responde:



¿Cuantas hojas debió tener la flor antes de iniciar a deshojarse?

Rta: Debió tener 8 hojas.

¿En cuántos procesos consecutivos termina de deshojarse completamente la flor?

Rta: En el cuarto proceso.

Si la flor tuviera al principio un número par cualquiera de hojas, con el mismo proceso anterior, ¿En cuántos procesos terminaría de deshojarse la flor?

Rta: Construiríamos la siguiente tabla

NÚMERO DE HOJAS DE LA FLOR	NUMERO DE PROCESOS PARA DESHOJARSE
8	4 PROCESOS
10	5 PROCESOS
12	6 PROCESOS
14	7 PROCESOS
Para n procesos, siendo n par.	$\frac{n}{2}$

Si la flor tuviera al principio un número impar cualquiera de hojas, con el mismo proceso anterior, ¿En cuántos procesos terminaría de deshojarse la flor?

Rta: Si el número de hojas de la flor es impar, y se siguiera el mismo proceso (deshojar de a 2 hojas en cada proceso), siempre quedaría en el último proceso con una hoja y no podríamos deshojarla completamente:

NÚMERO DE HOJAS DE LA FLOR	NÚMERO DE PROCESOS PARA QUEDAR CON UNA HOJA
7	3 PROCESOS
11	5 PROCESOS
13	6 PROCESOS
15	7 PROCESOS
Para n procesos, siendo n impar.	$\frac{n-1}{2}$

Si te piden contar los días del mes de Diciembre. Puedes decir cuantos días hay exactamente en ese mes.

Rta: 31 días.

¿Puedes agregar otro día a ese mes? Argumenta tu respuesta.

Rta: No es posible agregar otro día a este mes debido a que el límite de días que debe tener cada mes es de 30 o 31 días según sea el mes a excepción de Febrero, es decir: Meses de 30 días: Abril, junio, septiembre y noviembre. Meses de 31 días: Enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre. El número de días en el año es 365 días y si agregáramos un día más a Diciembre, tendríamos que quitarle el primer día a Enero del siguiente año, es decir el límite de la cantidad de días de un mes es 31, por ser un subconjunto finito de un conjunto finito que son los días en un año.

3.2.1.1.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 1.

La Tabla 1, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea1

Tabla 1
Analisis Ontosemiótico de la tarea 1

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Verbal, utilización de algunas expresiones asociados a las secuencias con sus respectivas representaciones gráficas y simbólicas.
Situaciones-problemas	Tarea 1
Conceptos- definición	CONJUNTO FINITO: Es aquel conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos, generalmente su cardinal está representado con algún número natural. CONJUNTO INFINITO: Conjunto que no es finito, y que su cardinal no puede ser representado con un número o cantidad natural. NUMERO PAR: Es aquel número natural que es divisible exactamente entre 2. NUMERO IMPAR: Es aquel número que no es par, o sea que no es divisible exactamente entre 2. SECUENCIA: Una secuencia es una lista de números o términos y siempre hay un orden o patrón. TERMINO N-ÉSIMO: Una expresión que ocupa un lugar indeterminado en una serie o sucesión.
Proposiciones	Si un conjunto A es equipotente con el conjunto de números naturales N , se dice que es numerable y se le asigna el propio cardinal de N. Todo conjunto finito se considera numerable por ser coordinable con un subconjunto de N
Procedimientos	Asociación e identificación de los elementos matemáticos presentados en el problema 1 mediante representación gráfica y simbólica. Utilización de los elementos numéricos presentada atraves la construcción de unas secuencias dadas desde las definiciones citadas anteriormente.
Argumentos	Es claro que la actividad propuesta dada desde los objetivos del trabajo pretende la visualización de las diferencias de lo finito y lo infinito, cardinalidad, secuencias y termino enésimo las validaciones están sujetas a las definiciones y proposiciones utilizadas con sus relaciones al término o la noción de infinito.

3.2.1.2 Tarea 2: conjuntos finitos e infinitos.

Esta tarea (ver Figura 2), es hilo conductor diferenciador entre conjuntos finitos e infinitos, reiterando los aportes de Leston (2007), se diseña con el objetivo de contextualizar la idea de infinito intuitivo.

2. A continuación, encontraras algunos ejemplos de conjuntos, ordena los siguientes

conjuntos del más grande al más pequeño teniendo en cuenta su cantidad de elementos:

- Granos de arena de la playa
- Estudiantes de mi colegio
- Peces en el mar
- Estrellas en el cielo
- Automóviles que circulan en Bogotá.
- Células en un ser humano
- Personas en el mundo cuyo primer nombre es Juan

2.1 ¿Cuáles de los anteriores conjuntos cuales consideras son finitos?

2.2 ¿Cuáles de los anteriores conjuntos cuales consideras infinitos?

Explica tus respuestas

Figura 2. Tarea 2: Conjuntos finitos e infinitos

3.2.1.2.1 Solución plausible de la tarea 2.

¿Cuáles de los anteriores conjuntos consideras finitos?

Rta:

- Estudiantes de mi colegio
- Peces en el mar
- Automóviles que circulan en Bogotá
- Personas cuyo primer nombre es Juan
- Células en el ser humano
- Granos de arena en la playa
- Estrellas en el universo.

¿Cuáles de los anteriores conjuntos consideras infinitos? Explica tus respuestas

Rta: Ninguno es infinito, pues todos los conjuntos anteriores son numerables y son finitos o equipotentes a un subconjunto de N.

Estos no son conjuntos infinitos puesto que algunos conjuntos infinitos son equipotentes con el conjunto de los Números naturales.

3.2.1.2.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 2.

La Tabla 2, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 2

Tabla 2
Analisis Ontosemiótico de la tarea 2

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Verbal, Utilización de algunas expresiones asociadas a la aritmetica, con sus respectivas representaciones gráficas y simbólicas.
Situaciones-problemas	TAREA 2
Conceptos- definición	CONJUNTO FINITO: Es aquel conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos, generalmente su cardinal está representado con algún número natural. CONJUNTO INFINITO: Conjunto que no es finito, y que su cardinal no puede ser representado con un número o cantidad natural.
Proposiciones	Si A es un subconjunto infinito de N, existe una aplicación biyectiva $f : N \rightarrow A$, que tiene la siguiente propiedad: $n, m \in N, n < m \Longrightarrow f(n) < f(m)$. “Todo conjunto numerable es finito o equipotente a N” Los números naturales son representantes de la cardinalidad de los conjuntos finitos.
Procedimientos	Utilización del conjunto de los Números naturales y sus propiedades para visualizar la finitud o infinitud de los conjuntos expuestos en la tarea.
Argumentos	Es evidente que el trabajo con conjuntos con cardinales desconocidos, da como resultado unas conjeturas o premisas acerca de lo que es lo finito o lo infinito en la realidad o en el contexto matemático, y la posibilidad de que no se pueda evidenciar estas diferencias. Se ve aquí la noción de infinito potencial involucrada de manera directa.

3.2.1.3 Tarea 3: infinito numerable.

La tarea 3 (ver Figura 3), se propone de acuerdo con las posturas Palmer (2001) p. 86, en donde se plantea que:

“Ahora bien, ¿de qué tipo es este infinito? ¿Se trata de un infinito numerable como el de N, Z o Q? ¿O tal vez piensa más en un infinito no numerable como el de R? …Si el espacio es infinito estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito estamos en cualquier punto del tiempo”

El objetivo de tarea consiste en asociar un infinito a un conjunto contable como lo es de los Naturales, pero que después establezca relación con un infinito contable como lo es los Racionales.

3. Lee con atención y responde a las preguntas

"Imagina que tienes un libro que es mágico, la magia del libro hace que al abrir la primera página, en la numeración de la página aparece la página 345, al cerrarlo y volverlo abrir en la primera página, en la numeración de la página aparece la página 7545, al cerrarlo y volverlo abrir en la primera página, en la numeración de la página aparece la página 34, así cada vez que lo cierras y abres nuevamente el libro en la primera página, en ella se muestra una numeración diferente"

3.1 ¿Cuántas páginas consideras que tiene el libro?

3.2 ¿Qué crees que ocurriría si luego de abrir la primera página, pasas a la página siguiente, que numeración tendría esa segunda página? (Recuerda que el libro es mágico)

Figura 3. Tarea 3: Infinito numerable

3.2.1.3.1 Solución plausible de la tarea 3.

¿Cuántas páginas consideras que tiene el libro?
Rta: Tiene infinitas páginas.

¿Qué crees que ocurriría si luego de abrir la primera página, pasas a la página siguiente, que numeración tendría esa segunda página? (Recuerda que el libro es mágico)
Rta: Se puede escoger en cualquier lado que se abra el libro, la paginación se sustituye cada vez que se abre por un número aleatorio, no importa cuán grande o pequeño sea. El libro no es infinito en peso o en volumen, estaba acotado " por la portada y la tapa trasera del libro" y podían aparecer paginas entre la portada y la primera página del libro, la lista de todas las posibles ordenaciones de los números naturales que son las paginaciones del libro no es contable, ni siquiera infinitamente contable, algo parecido a lo que sucede con los números reales, en la demostración de Cantor "el conjunto de los números Reales no es contable y lo hace entre los números (0, 1):

$$x \in R, tal\ que\ 0 \leq x \leq 1$$

De este teorema se concluye que los números algebraicos entre 0 y 1 son contables y los Reales entre 0 y 1 no lo son, entonces existen números Reales que no son algebraicos, estos son los números trascendentes, y nos llevaría la siguiente Teorema; “El conjunto de los números Reales trascendentes no es contable” y que hay más números trascendentes que algebraicos, que los números algebraicos se pueden dar en una sucesión infinita, pero al involucrar los números trascendentes es improbable dar tal sucesión.

3.2.1.3.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 3.

La Tabla 3, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 3

Tabla 3
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 3

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Verbal, utilización de algunas expresiones asociados a la aritmética, con sus respectivas representaciones numéricas.
Situaciones-problemas	Tarea 3
Conceptos- definición	MAGNITUD: medida de algo conforme una escala determinada. NUMERO REAL: Número racional o irracional, también podría definirse como número algebraico o número trascendente. INDETERMINADO: Es algo que no tiene características específicas o carece de límites definidos. INNUMERABLE: Es algo que no puede ser contado porque sus elementos no tienen un orden establecido. INDEFINIDO: Es algo que no tiene unos límites concretos
Proposiciones	El conjunto de los números Reales no es contable. El conjunto de los números Reales trascendentes no es contable.
Procedimientos	Comprensión de lectura acerca del fragmento del libro mágico. Representación mental de los eventos aleatorios que ocurren con las paginaciones del libro. Conjeturar acerca de la imposibilidad de ordenar o de enumerar o contar las páginas del libro mágico. Relaciones de orden entre los diferentes sinónimos asociados a la noción de infinito, dados en el contexto matemático.
Argumentos	La verificación de la imposibilidad de establecer el orden de las paginaciones del libro mágico involucra el trabajo con cantidades aleatorias que dan otra representación a la construcción del conjunto de los números reales bajo la noción de infinito que este alberga. La noción de infinito actual se ve involucrada en esta parte de la actividad. En la asignación de significados o sinónimos de infinito se establecen características desde el punto de vista matemático donde se involucra las nociones de infinito potencial y actual.

3.2.1.4 Tarea 4: sinónimos.

La tarea 4 (Ver Figura 4), se diseña con el objetivo de identificar el lenguaje, que corresponde a una de la facetas que sugiere el EOS para la identificación de los objetos matemáticos primarios que desglosan la noción de infinito.

4. Escribe tres sinónimos (Palabras que tiene el mismo significado) palabras) para la palabra Infinito, si no encuentras sinónimo usa algún símbolo que pueda usarse como sinónimo.

Figura 4. Tarea 4: Sinónimos

3.2.1.4.1 Solución plausible de la tarea 4.

Escribe tres sinónimos (Que tiene el mismo significado en otra u otras palabras) para la palabra Infinito, si no encuentras sinónimo usa algún símbolo que pueda usarse como sinónimo.

Rta: símbolo (∞), muy numeroso, eterno, muy grande, indeterminado, ilimitado, inagotable, innumerable, indefinido, incalculable

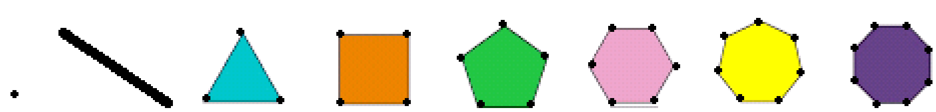
3.2.1.4.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 4.

Por ser una tarea global, solo tiene elementos lingüísticos verbales y no se consideran los demás elementos primarios.

3.2.1.5 Tarea 5: secuencias infinitas crecientes.

La tarea 5 (Ver Figura 5), se diseña con el objetivo de asociar la cardinalidad y la relación biunívoca entre un conjunto numerable y así mismo establecer una noción de infinito potencial.

5. Observa las siguientes secuencias teniendo en cuenta los vértices de cada figura y su posición.



1	2	3	4	5	6	7	8

5.1 ¿Describe que figura se puede construir, si tienes 10 vértices?

5.2 ¿Describe que tipo de figura se puede construir si tienes 135 vértices?

5.3 ¿Describe que tipo de figura se puede construir si tienes infinitos vértices?

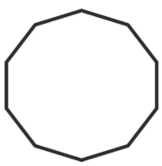
5.4 ¿Qué tipo de secuencia numérica observas, creciente o decreciente?

Figura 5. Tarea 5: Secuencias infinitas crecientes

3.2.1.5.1 Solución plausible de la tarea 5.

¿Describe que figura se puede construir, si tienes 10 vértices?

Rta:



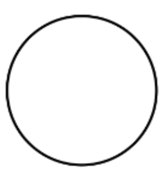
Polígono regular de 10 lados con 10 vértices, donde se pueden trazar 35 diagonales

¿Describe que tipo de figura se puede construir si tienes 135 vértices?

Rta: Polígono regular de 135 lados, donde se pueden trazar 8910 diagonales

¿Describe que tipo de figura se puede construir si tienes infinitos vértices?

Rta:



Circunferencia: polígono regular de infinitos lados, vértices e infinitas diagonales.

¿Qué tipo de secuencia numérica observas, creciente o decreciente?

Rta: Se observa secuencias numéricas crecientes. Para comprobar esto hacemos la siguiente tabla (ver tabla 4):

Tabla 4
Secuencias Númericas

Número de vértices	*Número de Lados*	*Número de diagonales*
1	0	0
2	0	0
3 (triángulo)	3	0
4 (cuadrado)	4	2
5 (pentágono)	5	5
n (polígono regular de vértices n)	*N*	$\frac{n(n-2)}{2}$
Tipo de secuencia: Creciente	Tipo de secuencia: Creciente	Tipo de secuencia: Creciente

3.2.1.5.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 5.

La Tabla 5, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 5

Tabla 5
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 5

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Verbal, Utilización de algunas expresiones asociadas a la geometría, con sus respectivas representaciones gráficas y simbólicas.
Situaciones-problemas	Tarea 5
Conceptos- definición	LINEA: es una longitud sin anchura. SUPERFICIE: es aquello que sólo tiene longitud y anchura. TRIANGULO: es una figura rectilínea es aquella que está comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres. FIGURA: es aquello que está contenido por cualquier límite o límites. CIRCULO: es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí. SEGMENTO DE RECTA: Semirrecta y segmento rectilíneo: toda recta se prolonga al infinito por sus dos extremos; por eso su longitud no puede ser calculada. Si en una recta se fija un punto, este divide la recta en dos partes opuestas llamadas semirrectas. Si en una recta se fijan dos puntos, la parte de recta comprendida entre dichos puntos se denomina segmento rectilíneo. ANGULO: Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto. Estas rectas se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice. LADO: En un polígono, un lado es un segmento de recta cuyos extremos están en dos vértices consecutivos del polígono. CIRCUNFERENCIA: La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo *C* que es el centro de la circunferencia. La distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de sus puntos se llama radio (r) VÉRTICE: Es un punto el que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono. POLÍGONO REGULAR: Un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí. CONJUNTO INFINITO: Conjunto que no es finito. SECUENCIA: Son la reunión de objetos o números que se relacionan entre sí por

	uno o varios patrones de cambio. TERMINO ENESIMO: Una expresión que ocupa un lugar indeterminado en una serie o sucesión. CRECIENTE: Es algo que aumenta de manera progresiva. DECRECIENTE: Es algo que disminuye de manera progresiva.
Proposiciones	Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A; en cualquier otro caso A es finito.
Procedimientos	Asociación e identificación de los elementos matemáticos presentados en el problema 1 mediante representación gráfica y simbólica. Utilización de los elementos euclidianos presentada atraves la construcción con regla y compas euclidianos desde las definiciones citadas anteriormente. Conjeturar acerca de lo que es una secuencia numérica creciente o decreciente.
Argumentos	Es claro que la actividad propuesta dada desde los objetivos del trabajo pretende la visualización del infinito continuo, esta concepción está determinada desde las matemáticas formales, las validaciones están sujetas a las definiciones y proposiciones utilizadas con sus relaciones al término o la noción de infinito.

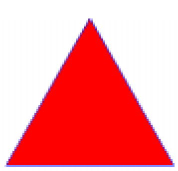
3.2.1.6 Tarea 6: triángulo de sierpinski.

La tarea 6 (ver Figura 6), fue propuesta por Roa (2018), la cual ha sido modificada para nuestro estudio, el objetivo de esta actividad es colocar al estudiante en una situación de conflicto cognitivo.

6. Lee detenidamente y observa las siguientes imágenes, en ella se muestra un triángulo equilátero inicial y dentro de él, se construyen triángulos equiláteros, este procedimiento se llama el TRIÁNGULO DE SIERPINSKI y fue propuesto en 1919 por Waclav Sierpinski (1882-1969).

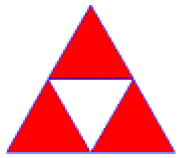
Para construir el triángulo se debe proceder de la siguiente manera:

Paso Inicial (0): Construimos un triángulo equilátero de lado a:

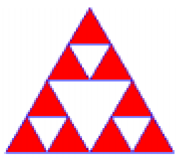


Paso 1: Uno los puntos medios de los lados y resulta la siguiente figura:

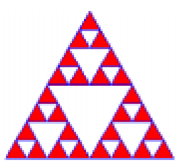
Tres triángulos equiláteros sombreados y un hueco que es otro triángulo equilátero.



Paso 2 : Repetimos el proceso en cada uno de los triángulos sombreados y obtengo la siguiente figura:



Paso 3: Repetimos lo mismo en cada uno de los triángulos equiláteros sombreados obteniendo la figura siguiente:



Y así sucesivamente..!

Observemos que en cada paso el triángulo de Sierpinski se obtiene con tres figuras del paso anterior, siendo cada una de ellas semejante a la del paso anterior y con razón de semejanza de ½.

6.1 ¿Cuantos triángulos equiláteros sombreados hay el paso 3?

6.2 ¿Si continuaras la secuencia de construcción de triángulos equiláteros, puedes describir cuándo acabará la secuencia? Explica tu respuesta

6.3 ¿Si pudieras sumar las longitudes del perímetro de todos los triángulos equiláteros en cada posición esta longitud crecería o decrecería al aumentar la posición de la secuencia?

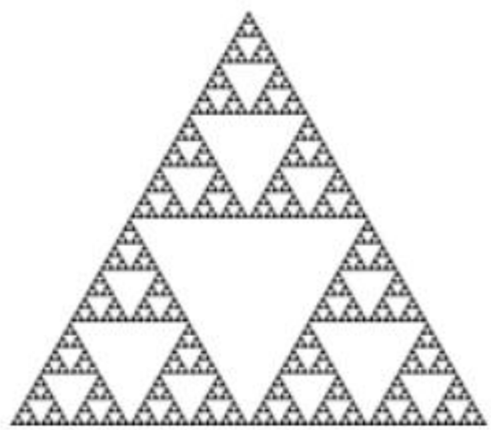
6.4 Observando los triángulos de la figura responde a las siguientes preguntas

6.4.1 Calcula el número de triángulos sombreados de cada uno de los sucesivos pasos y escribe la sucesión que se forma.

6.4.2 ¿Qué tipo de sucesión es?

6.4.3 Escribe su término general:

6.4.5 Ahora observa la siguiente figura:



Calcula cuantos triángulos sombreados se generarán cuando hayamos aplicado 20 veces el mismo procedimiento.

6.5 Completa la siguiente tabla:

Paso	Nº triángulos	Long. de un lado del triángulo	Perímetro triángulo	Perímetro total
0	1	a	3a	3a
1	3	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{9a}{2}$
2				
3				
...				
n				

6.5.1 Podrías decir que tipo de sucesión son (creciente finita-creciente infinita-decreciente finita-decreciente infinita):

- Números de triángulos

• Longitud de un lado del triangulo • Perímetro del triangulo • Perímetro total

Figura 6. Tarea 6: Triángulo de sierpinski

3.2.1.6.1 Solución plausible de la tarea 6.

¿Cuantos triángulos equiláteros sombreados hay el paso 3?

Rta: Hay 27 triángulos.

¿Si continuaras la secuencia de construcción de triángulos equiláteros, puedes describir cuándo acabará la secuencia? Explica tu respuesta

Rta: No podría acabar la secuencia de triángulos pues cada vez que se cambia de posición aparecen nuevos triángulos tres por cada triángulo sombreado que aparece en la posición anterior.

¿Si pudieras sumar las longitudes del perímetro de todos los triángulos equiláteros en cada posición esta longitud crecería o decrecería al aumentar la posición de la secuencia? Rta: Crecería la longitud de la suma de los perímetros de los triángulos equiláteros sombreados en cada posición.

Observando los triángulos de la figura:

Calcula el número de triángulos sombreados de cada uno de los sucesivos pasos y escribe la sucesión que se forma.

Rta:

Posición o paso	Número de triángulos sombreados
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
n	3^n

¿Qué tipo de sucesión es?

Rta: estrictamente creciente, acotada inferiormente

Escribe su término general:

Rta: s_n: 3^n:

Calcula cuantos triángulos sombreados se generarán cuando hayamos aplicado 20 veces el mismo procedimiento.

Rta: Hay $3^{20} = 3486784401$ triángulos equiláteros sombreados.

Completa la siguiente tabla:

Rta:

PASO	N° DE TRIANGULOS	LONGITUD DE UN LADO DEL TRIANGULO	PERIMETRO DEL TRIANGULO	PERIMETRO TOTAL
0	1	a	3a	3a
1	3	a/2	3a/2	9a/2
2	9	a/4	3a/4	27a/2
3	27	a/8	3a/8	81a/2
4	81	a/16	3a/16	243a/2
n	3^n	$a/2^n$	$3a/2^n$	$3^n a/2$

Podrías decir que tipo de sucesión son:

- Números de triángulos
- Longitud de un lado del triangulo
- Perímetro del triangulo
- Perímetro total

Rta:

- Números de triángulos: Estrictamente creciente, acotada inferiormente, divergente.
- Longitud de un lado del triángulo: Estrictamente decreciente, acotada superiormente, convergente.
- Perímetro del triángulo: Estrictamente decreciente, acotada superiormente, convergente.

Perímetro total: Estrictamente creciente, acotada inferiormente, divergente.

3.2.1.6.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 6.

La Tabla 6, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 6:

Tabla 6
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 6

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Lenguaje verbal. Utilización de algunas expresiones asociadas a la geometría, con sus respectivas representaciones gráficas y simbólicas.

Situaciones-problemas	ITEM 6
Conceptos- definición	TRIANGULO: es una figura rectilínea es aquella que está comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres. FIGURA: es aquello que está contenido por cualquier límite o límites. ANGULO: Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto. Estas rectas se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice. LADO: En un polígono, un lado es un segmento de recta cuyos extremos están en dos vértices consecutivos del polígono. TRIANGULO EQUILATERO: Es una figura trilátera, con sus lados de la misma longitud. PERIMETRO: Conjuntos de líneas que conforman el contorno de una superficie o figura. TERMINO N-ÉSIMO: Una expresión que ocupa un lugar indeterminado en una serie o sucesión. SUCESIÓN: Es un conjunto ordenado de números, pueden dividirse en sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas. DIVERGENTE: Es la separación o diferencia entre 2 o más elementos CONVERGENTE: Unión de dos o más elementos que confluyen a un mismo punto. ACOTADO: Es una situación en la que para cierto objeto matemático o un elemento construido a partir del mismo puede establecerse una relación de orden con otro tipo de entidad llamada cota superior o inferior.
Proposiciones	Si A es un conjunto no vacío, se llama sucesión de elementos de A a cualquier aplicación de N en A. En particular, una sucesión de números reales es una aplicación de N en R. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y sea $x \in R$. Decimos que $\{x_n\}$ converge a x, y escribimos $\{x_n\} \rightarrow x$, cuando, para cada número real y positivo ε, puede encontrarse un número natural m, de forma que se tenga $\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$ para cualquier $n \in N$ que verifique $n \geq m$. Así pues, simbólicamente: $\{x_n\} \rightarrow x \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m \in N : n \geq m \Rightarrow \lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$. Toda sucesión convergente está acotada. Una sucesión es divergente si los términos se aproximan cada vez más a infinito o a menos infinito ($+\infty$ o $-\infty$). Una sucesión (a_n) tiene por límite $+\infty$ ó diverge a $+\infty$ si elegido un número k tan grande como se quiere, se puede encontrar un subíndice n_o tal que para cualquier $n \geq n_o$, $a_n > -k$.
Procedimientos	Se realiza la acción de bisecar segmentos de los triángulos equiláteros originados de bisecciones de los lados anteriores de los triángulos equiláteros anteriores, haciéndolo un proceso reiterativo, y se establece la relación entre la continuidad de la figura y los elementos que la conforman. Se caracteriza el tipo de sucesión o de sucesiones, según lo visto en las secuencias y su comportamiento.
Argumentos	Se involucra la noción de infinito actual, dado que al realizar el proceso en un triángulo equilátero definido, se encuentran puntos o lugares geométricos infinitos que originaran más triángulos equiláteros que se acercaran, en este caso el límite es un punto en el que se acercan progresivamente los términos asociados a los elementos de estos triángulos equiláteros de una secuencia infinita de procesos dada la naturaleza de la situación problema.

3.2.1.7 Tarea 7: del infinito potencial al actual.

La tarea 7 (ver Figura 7), ha sido propuesta por De Lorenzo (2001), el objetivo de la tarea es llevar al estudiante a desplegar la expansión decimal para que llegue a actualizar la secuencia infinita dada.

7. Observa la siguiente secuencia numérica

1º	2º	3º	4º	5º	6º	…
0,9	0,99	0,999	0,9999	0,9999	0,999999	…

¿Si continuas con las secuencia que número estará en la posición 9º, en la 10º y en la 12º?

¿Si continuas la secuencia, en qué posición puede el número 0,9 llegar a convertirse en el número 1? Explica tu respuesta

Figura 7. Tarea 7: Del infinito potencial al actual

3.2.1.7.1 Solución plausible de la tarea 7.

¿Si continuas con las secuencia que número estará en la posición 9º, en la 10º y en la 12º?

Rta:

- 9°: 0,999999999
- 10°: 0,9999999999
- 12°: 0,999999999999

¿Si continuas la secuencia, en qué posición puede el número 0,9 llegar a convertirse en el número 1?

Rta: Primero realizaremos una comprobación algebraica mediante la igualdad para decir que 1 = 0,999999999… Tomando esta igualdad desde otro punto de vista, se establece una ecuación en que:

$$x = 0{,}9999999999\ldots$$

Multiplicando por 10 se obtiene:

$$10x = 9{,}999999999\ldots$$

Reescribimos

$$10x = 9 + 0{,}999999999\ldots$$

Por último, restando la igualdad:

$$x = 0{,}9999999999999999\ldots$$

A la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} 10x &= 9 + 0{,}999999999999\ldots \\ -x &= \quad - 0{,}999999999999\ldots \\ \hline 9x &= \quad 9 \end{aligned}$$

Despejando *x*: $x = 1$

Si continuamos la secuencia para una posición *n* tan grande como queramos puede el 0,9 llegar a convertirse a 1.

3.2.1.7.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 7.

La Tabla 7, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 7

Tabla 7
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 7

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Lenguaje verbal, Representación de algunas expresiones asociados al cálculo infinitesimal, con sus respectivas representaciones numéricas y simbólicas.
Situaciones-problemas	ITEM 7
Conceptos- definición	SUCESIÓN: Es una función de N en R. ECUACIÓN: Igualdad entre dos expresiones que tiene una o mas variables IGUALDAD: Son dos expresiones similares o distintas que denotan un mismo objeto matemático. DECIMAL FINITO: Son aquellos que provienen de fracciones que se pueden escribir como fracción decimal. DECIMAL INFINITO: Son aquellos en que se repite infinitamente una o más cifras decimales. La parte que se repite se llama período.
Proposiciones	Todo número decimal limitado se puede expresar en forma de fracción decimal. Todo numero decimal ilimitado, no se puede expresar en forma de fracción decimal.
Procedimientos	Se establece igualdades y ecuaciones asociado a la situación, y se conjetura sobre el comportamiento de los números racionales aquí expuestos, con una expresión matemática que dé cuenta de las respuestas que argumenta el sujeto, a la hora de explicar de comparar o de satisfacer las igualdades.
Argumentos	Dado el proceso reiterativo del modelo planteado en los problemas, se busca que la noción del infinito actual, se evidencie con el trabajo de sucesiones, cota inferior, cota superior, y límite de una sucesión.

3.2.1.8 tarea 8: Potenciando el infinito.

La tarea 8 (ver Figura 8), tiene el objetivo de incentivar al estudiante en la construcción del infinito potencial, buscando que la expansión decimal acerque al estudiante al crecimiento o decrecimiento numérico:

8. Escribe un número que tenga 5 cifras decimales iguales, luego agrega a ese número más cifras decimales iguales, ¿si el nuevo número crece, describe a que número, si el número decrece describe a que número?

Figura 8. Tarea 8: Potenciando el infinito

3.2.1.8.1 Solución plausible de la tarea 8.

Rta: Algunos números racionales se pueden expresar como decimales finitos y otros como decimales infinitos:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333 \ldots$$

Ahora establecemos el siguiente proceso en la igualdad anterior:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333 \ldots$$

Al multiplicar a ambos lados de la igualdad por 3 se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{1}{3} \times (3) = (3) \times 0{,}3333333333333333 \ldots$$

$$1 = 0{,}9999999999999999 \ldots$$

$$0{,}33333 \quad \text{o} \quad 33333/100000$$

$$0{,}3333333333 \quad \text{o} \quad 3333333333/10000000000$$

- El numero crece
- El número tiende a 1/3

3.2.1.8.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 8.

La Tabla 8, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 8:

Tabla 8
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 8

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Lenguaje verbal, Representación de algunas expresiones asociados al cálculo infinitesimal, con sus respectivas representaciones numéricas y simbólicas.
Situaciones-problemas	Tarea 8
Conceptos- definición	SUCESIÓN: Es una función de N en R. ECUACIÓN: Igualdad entre dos expresiones que tiene una o mas variables IGUALDAD: Son dos expresiones similares o distintas que denotan un mismo objeto matemático. DECIMAL FINITO: Son aquellos que provienen de fracciones que se pueden escribir como fracción decimal. DECIMAL INFINITO: Son aquellos en que se repite infinitamente una o más cifras decimales. La parte que se repite se llama período.
Proposiciones	Todo número decimal limitado se puede expresar en forma de fracción decimal. Todo numero decimal ilimitado, no se puede expresar en forma de fracción decimal.
Procedimientos	Se establece igualdades y ecuaciones asociado a la situación, y se conjetura sobre el comportamiento de los números racionales aquí expuestos, con una expresión matemática que dé cuenta de las respuestas que argumenta el sujeto, a la hora de explicar de comparar o de satisfacer las igualdades.
Argumentos	Dado el proceso reiterativo del modelo planteado en los problemas, se busca que la noción del infinito actual, se evidencie con el trabajo de sucesiones, cota inferior, cota superior, y límite de una sucesión.

3.2.1.9 Tarea 9: el hotel infinito.

La tarea 9 (ver Figura 9), es la construcción abstracta de David Hilbert. Llevando a partir de metáforas la introducción a la cardinalidad de los Transfinitos, esa forma de acercamiento literario al infinito es propuesta por Leston (2007):

> *"Enfrentar a los estudiantes con una serie de textos y tiras cómicas en que se tratara al infinito, aunque no de forma matemática, e identificar cuáles son las ideas que ese tratamiento despertaba en ellas. A partir de ideas presentadas en textos, se espera que puedan salir a la vista las ideas intuitivas que forman parte del modelo de los estudiantes, evidenciados a partir del análisis o crítica que puedan hacer de las ideas presentadas por otros."* (p.67)

9. Lee con atención las tres siguientes situaciones y responde a las preguntas:

“Imagina un hotel con un número finito de cuartos, y supongamos que todos están ocupados. Llega un nuevo turista y pide una habitación. Lo lamento –dice el propietario-, pero todos los cuartos están ocupados.

Ahora imaginemos un hotel con un número infinito de cuartos, también todos ocupados. A dicho hotel viene un nuevo turista y pide una habitación. ¡Por supuesto!” –exclama el propietario; y traslada la persona que ocupaba anteriormente el cuarto Nº 1 al cuarto Nº 2, al ocupante del cuarto Nº 2 al Nº 3, al ocupante del cuarto Nº 3 al Nº 4 y así sucesivamente. El nuevo cliente recibe la habitación Nº 1, que queda libre como consecuencia de los traslados.

Imaginemos ahora un hotel con un número infinito de cuartos, todos ocupados, y un número infinito de nuevos turistas que vienen y piden habitaciones.

¡Sin duda, caballeros –dice el propietario-; esperen nada más que un minuto!. Pasa al ocupante del cuarto Nº 1 al Nº 2, el del Nº 2 al Nº 4, el del Nº 3 al Nº 6 y así sucesivamente... Ahora todos los cuartos con número impar quedan desocupados y el infinito de los nuevos turistas se puede acomodar fácilmente en ellos”

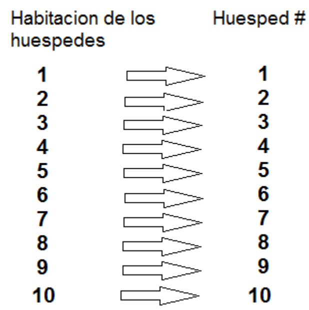
9.1 Realiza alguna representación (dibujo, diagrama, modelo) que pueda dar una explicación de lo que ocurre en cada una de los situaciones anteriores.

Figura 9. Tarea 9: Hotel Infinito

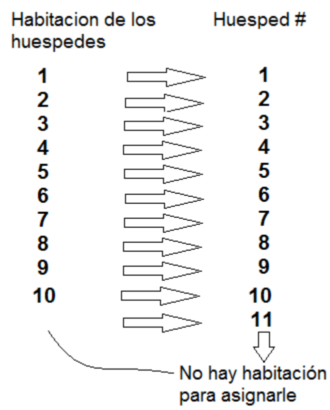
3.2.1.9.1 Solución plausible de la tarea 9.

Realiza alguna representación (dibujo, diagrama, modelo) que pueda dar una explicación de lo que ocurre en cada una de las situaciones anteriores:

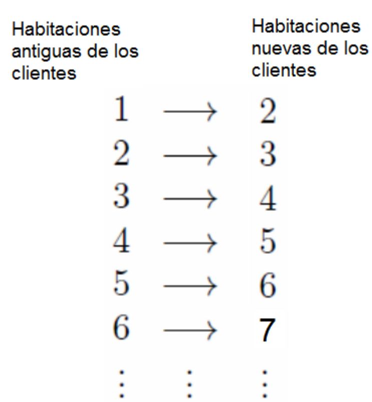
Rta: Para el hotel de finitas habitaciones tenemos:



Si el hotel es de 10 habitaciones y si hay 10 turistas, pero si llega un turista más:



Para el hotel de infinitas habitaciones lleno y llegando un turista nuevo:



Es decir, si hay *n* turistas se le asignaría al turista *n* la habitación $n+1$, y al turista que acabo de llegar o sea el $n+1$ le tocara la habitación 1.

Habitaciones antiguas de los clientes		Habitaciones nuevas de los clientes
1	$\longrightarrow$	2
2	$\longrightarrow$	4
3	$\longrightarrow$	6
4	$\longrightarrow$	8
5	$\longrightarrow$	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\longrightarrow$	2n

Como el conjunto de los números impares y el de los números pares son infinitos entonces se puede alojar infinitos grupos de infinitos huéspedes dentro de un hotel con únicamente infinitas habitaciones.

3.2.1.9.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 9.

La Tabla 9, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 9:

Tabla 9
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 9

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Lenguaje verbal. Representación de algunas expresiones asociados al cálculo infinitesimal, con sus respectivas representaciones numéricas.
Situaciones-problemas	Tarea 9
Conceptos- definición	NUMERO NATURAL: son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto. RELACION BIYECTIVA: Es cuando una relación es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, es decir, para cualquier elemento y del codominio existe un único elemento x del dominio tal que y es la imagen de x por f. NUMERO PAR: Es aquel número natural que es divisible exactamente entre 2. TERMINO ENESIMO: Una expresión que ocupa un lugar indeterminado en una serie o sucesión.
Proposiciones	Si un conjunto A es equipotente con el conjunto de números naturales N , se dice que es numerable y se le asigna el propio cardinal de N. Todo conjunto finito se considera numerable por ser coordinable con un subconjunto de N .
Procedimientos	Utilización del concepto de cardinalidad, y de conjunto finito y conjunto infinito para conjeturar acerca de la situación problema.
Argumentos	La asociación del conjunto de los N, a los subconjuntos propios que son los números pares e impares, y sin son numerables, estableces relaciones entre la noción de infinito potencial y actual, desde la formalidad matemática, aunque en la respuesta no se evidencia el manejo de estas dos nociones.

3.2.1.10 tarea 10: El pastel más grande.

La tarea 10. (ver Figura 10), se propone una actividad alterna a la paradoja de Aquiles y la tortuga, construyendo un problema no solo que potencialice la acontecido con esta paradoja sino que actualice cuando el estudiante establezca un proceso infinito en un contexto finito, como la afirma Crespo (2001) p. 41:

> "*La paradoja de Zenón fue enunciada hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, un discípulo de Parménides hacia el 450 a.C. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. Se ocupó de tres problemas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, los tres tratados a partir del movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía.*"

De esta forma se pueden generar espacios geométricos asociados al infinito en una superficie finita y que, de manera intuitiva, se den características de los conjuntos finitos que asocian a la noción de infinito.

10. Lee con atención la siguiente situación y responde a las preguntas:

"Jordán es un niño, que le gusta jugar y es un gran apasionado por las matemáticas, especialmente por las fracciones y las paradojas. Su mamá le organiza una fiesta de cumpleaños y decide invitar a familiares amigos y demás conocidos, todos celebran muy contentos, hasta que llega la repartición del pastel pero la mamá no conoce la cantidad de personas que están en la fiesta y duda cual debe ser la porción adecuada para que alcance para todos los invitados, viendo esto recurre a preguntarle a Jordán de que como debe repartir el pastel y que todos los invitados puedan probarlo sin dejar a ninguno antojado, Jordán rápidamente, toma pedacitos de papel, escribe los números naturales desde el 1 en adelante y los deposita en una bolsa, y explica a los invitados que deben sacar uno de los papelitos para saber qué cantidad de pastel le corresponde, y que si esta en los primeros se le dará un pedazo más grande, pero si esta en los últimos se le dará un pedazo más pequeño, de la siguiente manera:

Al invitado número 1 se le dará una muy buena porción de pastel.

El invitado número 2 se le dará la mitad de la porción que le toco al invitado número 1.

El invitado número 3 se le dará la mitad de la porción que le toco al invitado número 2.

El invitado número 4 se le dará la mitad de la porción que le toco al invitado número 3, Así sucesivamente…

Jordán asegura que todos los invitados por lo menos probaran un trozo de pastel y que sobrara siempre algo para guardarlo en la nevera, y que si él quisiera podría invitar a todas las personas que habitan el planeta Tierra a su fiesta y brindarle pastel con la condición antes mencionada y que alcanzaría para todos y seguiría sobrando un pedazo para guardarlo en la nevera. La mamá de Jordán no está muy convencida de la solución que le propone su hijo para repartir el pastel"

10.1 ¿Está Jordán en lo correcto o está equivocado? Jordán está en lo correcto, porque. Argumenta tu respuesta.

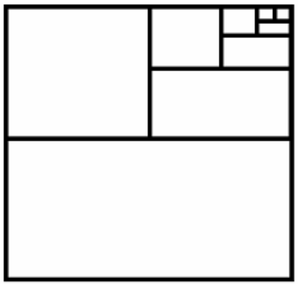
10.2 Realiza alguna representación (dibujo, diagrama o modelo) que pueda dar una explicación de lo que ocurre en la repartición del pastel.

Figura 10. Tarea 10: El pastel más grande

3.2.1.10.1 Solución plausible de la tarea 10.

¿Está Jordán en lo correcto o está equivocado? Jordán está en lo correcto, por qué. Argumenta tu respuesta.

Rta: Está en lo correcto porque divídase como se divida el pastel teniendo en cuenta el proceso siempre habrá un pedazo de pastel para cada invitado.



Realiza alguna representación (dibujo, diagrama, modelo) que pueda dar una explicación de lo que ocurre en la repartición del pastel.

Rta: La siguiente serie explica de manera detallada el proceso llevado a cabo para la repartición del pastel, donde 1 representa el pastel, y si hiciéramos el proceso dándole la mitad del pastel al primer invitado:

$$1 \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

Esto sería para las primeras 6 personas que reciban pastel o los primeros 6 números naturales: $1 \simeq \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$

Si deseáramos tener un modelo para saber que porción de pastel le toco al invitado número *n*: $\frac{1}{2^{n+1}}$; y para saber si el pastel alcanza para los *n* invitados o para *n*+1 invitados, se tiene esta sumatoria: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

Donde esta sumatoria es convergente hacia 1, y nos garantiza como dijo Jordán que si hay una cantidad bastante grande de invitados siempre van a probar un pedazo de pastel y va quedar un pedazo muy pequeño para guardar en la nevera.

Podríamos obtener un modelo general si al primer invitado se le diera 1/n pedazo (con $n \geq 2$, $n \in N$) y siguiéramos el proceso:

$$1 \geq \frac{1}{2^0 n} + \frac{1}{2^1 n} + \frac{1}{2^2 n} + \frac{1}{2^3 n} + \frac{1}{2^4 n} + \frac{1}{2^5 n} + \cdots \frac{1}{2^6 n} + \cdots$$

Al ser esta sucesión menor o igual que 1, se garantiza que todos los invitados por lo menos probaran un pedazo de pastel.

Si quisiéramos también que la primera parte del pastel fuera estrictamente mayor a ½ o lo más cercano a ½ (por ejemplo 11/20), sería imposible que el proceso anterior de la repartición del pastel se cumpliera a cabalidad dado que:

$$1 \leq \frac{11}{20} + \frac{11}{40} + \frac{11}{80} + \frac{11}{160}$$

Solo alcanzaría la torta hasta el tercer invitado, ya que para el cuarto invitado le correspondería 11/160, y esta parte es mayor a la que falta por repartir que es el resto de la torta entre las porciones de los tres primeros invitados:

$$\frac{77}{80} = \frac{11}{20} + \frac{11}{40} + \frac{11}{80}$$

Dado que faltarían 3/80 del pastel para repartir entre más invitados y el cuarto invitado le correspondería la 11/160 parte del pastel, se presentaría lo siguiente:

$$\frac{3}{80} < \frac{11}{160}$$

Es decir, el cuarto invitado no podría recibir completa la porción de pastel que le corresponde.

Si hiciéramos una tabla (ver tabla 10) para ver qué pasa cuanto más nos acercamos a la fracción ½, tendríamos lo siguiente

Tabla 10
Asignacion de pastel por invitado

Fracción o parte que se tomara inicialmente para el primer invitado	*Invitado que no podría recibir su porción de pastel*
11/20	4° invitado
101/200	7° invitado
1001/2000	10° invitado
10001/20000	13° invitado
$\frac{10^n + 1}{10^n * 2}$ Con n Є N, n>0	$(n * 3) + 1$

3.2.1.10.2 Análisis Ontosemiótico de la tarea 10.

La Tabla 11, muestra el análisis de contenido Ontosemiótico de la tarea 10:

Tabla 11
Análisis Ontosemiótico de la Tarea 10

Objetos Primarios	*Desglose de los Objetos Primarios*
Elementos lingüísticos	Lenguaje Verbal, utilización de algunas expresiones de asociados a la aritmética y la geometría, con sus respectivas representaciones numéricas.
Situaciones-problemas	Tarea 10
Conceptos- definición	MAGNITUD: medida de algo conforme una escala determinada. SUCESIÓN: Es un conjunto ordenado de números, pueden dividirse en sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas CONVERGENTE: Unión de dos o más elementos que confluyen a un mismo punto. SUMATORIA: Es la operación matemática que permite calcular la suma de muchos o infinitos sumandos, con un término enésimo, asociado a una cota inferior y una cota superior.
Proposiciones	Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A; en cualquier otro caso A es finito.
Procedimientos	Comprensión de lectura acerca del problema de la repartición Visualización del pastel como un todo mayor pero nunca igual a la suma de sus partes, obtenidas del proceso. Conjeturar acerca de la posibilidad de repartir en un proceso iterativo e infinito el pastel. Asociación del pastel con lo que ocurre en el segmento de recta Real $\overline{0\,1}$, cuando se biseca repetidamente. Argumentación y generalización y de la situación planteada, proponiendo modelo para cuando el primer pedazo es una fracción irreductible tanto menor que ½ como estrictamente mayor que ½.
Argumentos	El establecer la veracidad matemática del proceso realizado en el problema, El problema en primera medida es pensar que la suma de una serie infinita de números tiene que ser infinita, esto, sin embargo, no es cierto: existen numerosas series infinitas cuya suma es finita, propuesto en el texto del problema y que se tiene que validar si se tiene una noción de infinito actual.

CAPÍTULO 4

Análisis de Resultados

4.1 Introducción

Básicamente en lo que se espera en los resultados de la aplicación del instrumento de indagación bajo las herramientas propuestas por el EOS, es tener en cuenta que fenómenos ocurren dentro de las practicas discursivas, operativas y normativas como lo señala Mejía 2018) p. 36:

> *"Prácticas discursivas, emergen como elementos del significado los argumentos al atender a que en los textos de los estudiantes se evidencian diferentes argumentos planteados por los estudiantes en la solución de las situaciones. En lo que refiere a prácticas operativas, emergen como elementos del significado las acciones al permitir a los estudiantes explicitar diferentes estrategias en la solución de las actividades y accionar sobre la misma. En cuanto a las prácticas normativas, emergen como elementos del significado los conceptos, al ser estos los más utilizados por los estudiantes al buscar justificar sus razonamientos."*

4.2 Aplicación del cuestionario

A continuación se presenta los resultados que se obtuvieron con la aplicación del cuestionario. La aplicación tiene varias funciones dentro de la investigación, aunque el objetivo principal de su aplicación, en concordancia con lo que señalan Cohen, Manion y Morrison (2011), es incrementar y sustentar la fiabilidad, validez y factibilidad del cuestionario.

4.2.1. Método

Esta investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de observación de variables cuantitativas (grado de corrección de las tareas: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de resolución o configuraciones cognitivas propuestas por estudiantes).

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos*), y sus significados, que intervienen en dichas prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007).

4.2.1.1. Sujetos.

La prueba se aplicó a una muestra de 29 estudiantes de básica, distribuidos de la siguiente forma

- 14 Estudiantes de grado octavo
- 15 Estudiantes de grado noveno

Los cuales conforman un único grupo de estudio

Es importante comentar que en este estudio no se hace distinción alguna de género de los estudiantes (hombres y mujeres) que participaron en el estudio.

4.2.1.2. Procedimiento.

Para la resolución de las tareas del Cuestionario, los estudiantes contaron con un tiempo de cuatro horas. La prueba se aplicó en dos sesiones de dos horas cada una, en diferentes días en el Colegio Las Mercedes en la cuidad de Bogotá, en el mes de marzo de 2019

La aplicación de la prueba estuvo a cargo del investigador. Antes de comenzar la prueba se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responderla[2], y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que aquellos que no quisieran escribir su nombre, podrían omitirlo y colocar en dicho apartado “Sujeto-Hombre” o “Sujeto-Mujer”.

4.3. Análisis

Para el análisis de los datos obtenidos de la implementación del cuestionario,

[2] Las instrucciones también fueron dadas por escrito en la primera parte del cuestionario tal y como se muestra en el Anexo 1.

consideramos dos variables:

1. *Grado de corrección de la tarea* (respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas).
2. *Tipo de configuración cognitiva* (tipología de resolución propuestas por los estudiantes, especificando los objetos y procesos puestos en juego en las mismas).

Para el análisis de los datos obtenidos, respecto a esta última variable (tipo de configuración cognitiva), como se ha señalado, se utilizó la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002; Malaspina & Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por estudiantes al resolver problemas/situaciones, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en las estas prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007).

4.3.1. Variables y valores considerados en el análisis

Para el análisis de los datos recolectados con la implementación del cuestionario, se consideran dos variables: La primera de corte cuantitativo que refiere al grado de corrección de las tareas. En este sentido se asignaron las siguientes puntuaciones:

- NR: No responde
- 0 : Respuesta incorrecta
- 1: Respuesta parcialmente correcta.
- 2: Respuesta correcta.

En cuanto a la variable cualitativa tipo de configuración cognitiva, se puede señalar que fue principalmente de corte descriptiva y dependió de los procesos, los objetos matemáticos y los significados que a éstos asignaban los estudiantes en la resolución que daban de las tareas. No obstante, debido a las características de las tareas y a las respuestas que éstas admiten, fue posible establecer una agrupación de las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración cognitiva que movilizaban en la resolución de cada uno de las tareas. A partir de dichas agrupaciones, se realiza un estudio cuantitativo (conteo, frecuencias y porcentajes) de los tipos de configuraciones cognitivas movilizadas en la resolución de una tarea.

4.3.2. Análisis de las encuestas de los estudiantes

Para el análisis de las encuestas de los estudiantes se tendrán en cuenta el modelo presentado anteriormente de análisis de las respuesta del experto mediante tablas de contingencia, como se mencionó anteriormente y respaldado por Molinero M. (2003), p. 2 :

> *"Denominamos variables cualitativas a aquellas cuyo resultado es un valor o categoría de entre un conjunto finito de respuestas posibles. El sexo, el estado civil o el grupo sanguíneo son ejemplos de variables cualitativas. Cuando se analizan variables cualitativas es habitual representar en tablas las frecuencias de casos observados para cada una de las diferentes categorías de las variables, las cuales se denominan tablas de contingencia"*

Lo anterior se establece para observar la pertenencia o no de las tareas propuestas para el desarrollo de estas nociones de infinito potencial y actual en estudiantes de la básica.

4.3.2.1 Contingencia de corrección de las tareas.

A continuación se muestra el desglose de grado de correcccion de cada una de las tareas propuestas y de ítem que las conforman, adicionalmente se muestra el porcentaje del grado de correción para las mismas.

4.3.2.1.1 contingencia de corrección de la tarea 1.

La tabla 12, muestra el grado de correccion de la tarea 1:

Tabla 12
Grado de corrección de la Tarea 1

SUJETO	*Item1.1*	*Item1.2*	*Item 1.3*	*Item 1.4*	*Item 1.5*	*Item 1.6*
1	*2*	*0*	*2*	*1*	*2*	*1*
2	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
3	*0*	*1*	*0*	*0*	*2*	*1*
4	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
6	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
7	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*
8	*2*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
9	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*NR*
10	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*

11	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
12	*2*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
13	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
14	*2*	*0*	*NR*	*NR*	*1*	*1*
15	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*
16	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
17	*0*	*0*	*1*	*1*	*2*	*1*
18	*2*	*0*	*0*	*0*	*2*	*0*
19	*1*	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*
20	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*
21	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*
22	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
23	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
24	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
25	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
26	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*0*
27	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
28	*0*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
29	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*

La tabla 13, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 1, en esta tabla se logra visualizar que el 20,6% de los estudiantes costetasron correctamente al ítem 1.1 de la tarea 1 y el 58.6% de los estudiantes contestraon correctamete al ítem 1.5 ninguno de los estudiantes contesto correctamente al ítem 1.4 y 1.6 de la tarea propuesta.

Tabla 13
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 1

TAREA 1	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 1.1	*0%*	*75.8%*	*3.4%*	*20.6%*
ITEM 1.2	*0%*	*86.2%*	*10.3%*	*3.4%*
ITEM 1.3	*3.4%*	*68.9%*	*24.1%*	*3.4%*
ITEM 1.4	*3.4%*	*62%*	*34.4%*	*0%*
ITEM 1.5	*0%*	*20.6%*	*79.3%*	*58.6%*
ITEM 1.6	*3.4%*	*17.2%*	*79.3%*	*0%*

4.3.2.1.2 contingencia de corrección de la tarea 2.

La tabla 14, muestra el grado de correccion de la tarea 2:

Tabla 14
Grado de corrección de la Tarea 2

SUJETO	*Item2.1*	*Item2.2*
1	*1*	*0*
2	*1*	*0*
3	*1*	*0*

4	*1*	*0*
5	*1*	*0*
6	*1*	*0*
7	*0*	*0*
8	*1*	*0*
9	*1*	*0*
10	*1*	*0*
11	*1*	*0*
12	*1*	*0*
13	*1*	*0*
14	*1*	*0*
15	*1*	*0*
16	*1*	*0*
17	*1*	*0*
18	*1*	*0*
19	*1*	*0*
20	*1*	*0*
21	*1*	*0*
22	*1*	*0*
23	*1*	*0*
24	*1*	*0*
25	*1*	*0*
26	*1*	*0*
27	*1*	*0*
28	*1*	*0*
29	*1*	*0*

La tabla 15, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 1, en esta tabla se logra visualizar que el 96.5% de los estudiantes contestaron parcialmente correcto al ítem 2.1 de la tarea 2 y ninguno de los estudiantes contesto correctamente a la tarea propuesta.

Tabla 15
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 2

TAREA 2	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 2.1	*0%*	*3.4%*	*96.5%*	*0%*
ITEM 2.2	*0%*	*99.9%*	*0%*	*0%*

4.3.2.1.3 Contingencia de corrección de la tarea 3.

La tabla 16, muestra el grado de correccion de la tarea 3:

Tabla 16
Grado de corrección de la Tarea 3

SUJETO	*Item 3.1*	*Item3.2*
1	*1*	*1*
2	*1*	*1*
3	*1*	*1*

4	*1*	*1*
5	*1*	*1*
6	*1*	*1*
7	*1*	*1*
8	*1*	*1*
9	*1*	*0*
10	*1*	*1*
11	*1*	*1*
12	*1*	*1*
13	*1*	*1*
14	*1*	*1*
15	*1*	*2*
16	*1*	*2*
17	*1*	*0*
18	*1*	*1*
19	*1*	*1*
20	*1*	*1*
21	*1*	*1*
22	*1*	*0*
23	*1*	*0*
24	*1*	*0*
25	*1*	*1*
26	*1*	*0*
27	*1*	*0*
28	*1*	*1*
29	*1*	*1*

La tabla 17, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 3, en esta tabla se logra visualizar que ninguno de los estudiantes respondio correctamente el item 3.1

Tabla 17
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 3

TAREA 3	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 3.1	*0%*	*0%*	*99.9%*	*0%*
ITEM 3.2	*0%*	*24.1%*	*68.9%*	*6.8%*

4.3.2.1.4 Contingencia de corrección de la tarea 4.

La tabla 18, muestra el grado de correccion de la tarea 4:

Tabla 18
Grado de corrección de la Tarea 4

SUJETO	*Item 4*
1	*2*
2	*2*
3	*1*
4	*1*
5	*1*
6	*1*
7	*2*
8	*1*
9	*1*

10	*1*
11	*1*
12	*1*
13	*1*
14	*1*
15	*2*
16	*2*
17	*2*
18	*2*
19	*1*
20	*2*
21	*2*
22	*2*
23	*1*
24	*NR*
25	*1*
26	*2*
27	*2*
28	*2*
29	*2*

La tabla 19, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 4, en esta tabla se logra visualizar que ninguno de los estudiantes tiene respuestas incorrectas.

Tabla 19
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 3

TAREA 4	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 4.1	*3.4%*	*0%*	*48.2%*	*48.2%*

4.3.2.1.5 Contingencia de corrección de la tarea 5.

La tabla 20, muestra el grado de corrección de la tarea 5.

Tabla 20
Grado de corrección de la Tarea 5

SUJETO	*Item 5.1*	*Item 5.2*	*Item 5.3*	*Item 5.4*
1	*2*	*1*	*0*	*1*
2	*0*	*NR*	*NR*	*2*
3	*2*	*NR*	*NR*	*2*
4	*2*	*1*	*0*	*2*
5	*2*	*NR*	*NR*	*2*
6	*2*	*2*	*0*	*2*
7	*1*	*2*	*0*	*2*
8	*2*	*NR*	*0*	*2*
9	*2*	*2*	*1*	*2*
10	*2*	*2*	*0*	*2*
11	*NR*	*NR*	*0*	*2*
12	*2*	*2*	*0*	*2*
13	*2*	*2*	*0*	*0*
14	*1*	*1*	*1*	*2*
15	*2*	*2*	*1*	*2*
16	*2*	*0*	*1*	*2*

17	*2*	*2*	*0*	*2*
18	*2*	*NR*	*1*	*2*
19	*0*	*NR*	*NR*	*0*
20	*2*	*1*	*0*	*2*
21	*2*	*NR*	*2*	*2*
22	*2*	*NR*	*0*	*2*
23	*2*	*0*	*0*	*2*
24	*2*	*0*	*0*	*2*
25	*2*	*2*	*0*	*2*
26	*2*	*2*	*0*	*2*
27	*2*	*NR*	*0*	*2*
28	*2*	*2*	*0*	*2*
29	*1*	*1*	*0*	*2*

La tabla 21, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 5, en esta tabla se logra visualizar que el 79.3% contestaron correctamente el ítem 5.1, y con el 89.6% el ítem 4, los ítems 5.2 y 5.3 su porcentaje fue más bajo en respuestas correctas y parcialmente correctas y en el ítem 5.2 el 34.4% no respondieron el ítem, algo parecido sucede en el ítem 5.3 con el 13.7%.

Tabla 21
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 5

TAREA 5	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 5.1	*3.4%*	*6.8%*	*10.3%*	*79.3%*
ITEM 5.2	*34.4%*	*10.3%*	*17.2%*	*37.9%*
ITEM 5.3	*13.7%*	*65.5%*	*17.2%*	*3.4%*
ITEM 5.4	*0%*	*6.8%*	*3.4%*	*89.6%*

4.3.2.1.6 Contingencia de corrección de la tarea 6.

La tabla 22, muestra el grado de corrección de la tarea 6:

Tabla 22
Grado de corrección de la Tarea 6

SUJETO	*Item6.1*	*Item6.2*	*Item 6.3*	*Item 6.4*	*Item 6.5*
1	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*
2	*2*	*0*	*1*	*NR*	*NR*
3	*2*	*1*	*1*	*0*	*1*
4	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
5	*2*	*0*	*1*	*0*	*1*
6	*2*	*0*	*2*	*1*	*1*
7	*2*	*1*	*0*	*0*	*1*
8	*0*	*1*	*1*	*0*	*NR*
9	*0*	*NR*	*1*	*0*	*1*
10	*2*	*0*	*0*	*1*	*1*
11	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
12	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*
13	*2*	*1*	*NR*	*NR*	*0*
14	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*
15	*0*	*1*	*1*	*1*	*NR*
16	*2*	*1*	*1*	*0*	*0*

17	*2*	*0*	*NR*	*0*	*NR*
18	*2*	*NR*	*0*	*0*	*1*
19	*2*	*1*	*1*	*0*	*0*
20	*2*	*1*	*NR*	*0*	*1*
21	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
22	*0*	*1*	*NR*	*0*	*1*
23	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
24	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*
25	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*
26	*2*	*0*	*NR*	*1*	*0*
27	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
28	*2*	*0*	*1*	*0*	*0*
29	*2*	*1*	*1*	*0*	*0*

La tabla 23, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 6, en esta tabla se logra visualizar que el 68.9% de los estudiantes contestaron correctamente al ítem 6.1 y en los ítems 6.2, 6.3, y 6,5 más de la mitad de los estudiantes responde parcialmente correcto a estos ítems, en el ítem 6.4 más de la mitad de los estudiantes responde de manera incorrecta, y en el ítem 6.3, es donde hay más estudiantes que no responden el ítem con un 17.2%.

Tabla 23
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 6

TAREA 6	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 6.1	*0%*	*31%*	*0%*	*68.9%*
ITEM 6.2	*6.8%*	*27.5%*	*62%*	*3.4%*
ITEM 6.3	*17.2%*	*17.2%*	*58.6%*	*6.8%*
ITEM 6.4	*6.8%*	*62%*	*31%*	*0%*
ITEM 6.5	*13.7%*	*31%*	*55.1%*	*0%*

4.3.2.1.7 Contingencia de corrección de la tarea 7.

La tabla 24, muestra el grado de corrección de la tarea 7.

Tabla 24
Grado de corrección de la Tarea 7

SUJETO	*Item7.1*	*Item7.2*
1	*2*	*0*
2	*2*	*NR*
3	*2*	*NR*
4	*2*	*0*
5	*2*	*0*
6	*2*	*0*
7	*2*	*1*
8	*2*	*1*
9	*2*	*1*
10	*2*	*0*
11	*2*	*0*
12	*2*	*0*

13	2	1
14	2	1
15	2	0
16	2	NR
17	2	1
18	2	NR
19	0	NR
20	2	0
21	2	0
22	2	0
23	2	1
24	2	0
25	0	0
26	0	0
27	0	0
28	2	0
29	2	0

La tabla 25, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 7, en esta tabla se logra visualizar que el 89.6% de los estudiantes contestaron correctamente al ítem 7.1 y ninguno de los estudiantes contesto correctamente el ítem 7.2, además de generarse un 58.6% de respuestas incorrectas en ese mismo ítem.

Tabla 25
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 7

TAREA 7	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 7.1	*0%*	*10.3%*	*0%*	*89.6%*
ITEM 7.2	*17.2%*	*58.6%*	*24.1%*	*0%*

4.3.2.1.8 Contingencia de corrección de la tarea 8.

La tabla 26, muestra el grado de corrección de la tarea 8.

Tabla 26
Grado de corrección de la Tarea 8

SUJETO	*Item 8*
1	2
2	NR
3	0
4	0
5	1
6	2
7	0
8	0
9	NR
10	0
11	1
12	1

13	*NR*
14	*0*
15	*NR*
16	*NR*
17	*2*
18	*1*
19	*NR*
20	*NR*
21	*NR*
22	*NR*
23	*1*
24	*0*
25	*1*
26	*2*
27	*NR*
28	*NR*
29	*0*

La tabla 27, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 8, en esta tabla se logra visualizar que el 13.7% de los estudiantes contestaron correctamente al ítem 8, el 20.6% los estudiantes contesto parcialmente de forma correcta al ítem, el 27.5% contestaron de manera incorrecta y un gran porcentaje 37.9% no respondieron el ítem.

Tabla 27
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 8

TAREA 8	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 8	*37.9%*	*27.5%*	*20.6%*	*13.7%*

4.3.2.1.9 Contingencia de corrección de la tarea 9.

La tabla 28, muestra el grado de corrección de la tarea 9:

Tabla 28
Grado de corrección de la Tarea 9

SUJETO	*Item 9.1*
1	*1*
2	*0*
3	*1*
4	*0*
5	*1*
6	*NR*
7	*1*
8	*1*
9	*1*
10	*1*
11	*0*
12	*1*

13	*1*
14	*1*
15	*1*
16	*1*
17	*1*
18	*0*
19	*1*
20	*1*
21	*1*
22	*0*
23	*1*
24	*1*
25	*1*
26	*1*
27	*1*
28	*0*
29	*1*

La tabla 29, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 9, en esta tabla se logra visualizar que el 75.8% de los estudiantes contestaron parcialmente correcto al ítem 9.1 y el 20.6% contesto de manera incorrecta el ítem.

Tabla 29
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 9

TAREA 9	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 9.1	*3.4%*	*20.6%*	*75.8%*	*0%*

4.3.2.1.10 Contingencia de corrección de la tarea 10.

La tabla 30, muestra el grado de corrección de la tarea 10:

Tabla 30
Grado de corrección de la Tarea 10

SUJETO	*Item 10.1*	*Item 10.2*
1	*0*	*1*
2	*NR*	*0*
3	*1*	*1*
4	*0*	*1*
5	*0*	*1*
6	*0*	*0*
7	*1*	*0*
8	*0*	*0*
9	*1*	*1*
10	*0*	*1*
11	*0*	*NR*
12	*0*	*0*
13	*1*	*1*
14	*0*	*0*
15	*1*	*1*

16	*0*	*0*
17	*NR*	*1*
18	*0*	*0*
19	*0*	*0*
20	*1*	*1*
21	*0*	*1*
22	*0*	*0*
23	*1*	*1*
24	*1*	*1*
25	*1*	*1*
26	*1*	*0*
27	*1*	*1*
28	*0*	*0*
29	*NR*	*0*

La tabla 31, muestra el porcentaje del grado de corrección de la tarea 10, en esta tabla se logra visualizar que el 37.9% responde de manera parcialmente correcta el ítem 9.1 e incorrectamente un 51.7%, el ítem 9.2 lo contestan correctamente el 51.7% e incorrectamente el 44.8%, donde hay mayor porcentaje de no responder es en el ítem 9.1 con un 10.3% de los estudiantes encuestados.

Tabla 31
Porcentaje del Grado de corrección de la Tarea 10

TAREA 10	*No responde*	*Respuesta incorrecta*	*Respuesta parcialmente correcta*	*Respuesta correcta*
ITEM 10.1	*10.3%*	*51.7%*	*37.9%*	*0%*
ITEM 10.2	*3.4%*	*44.8%*	*51.7%*	*0%*

4.4. Configuraciones epistémicas

Las configuraciones epistémicas se hacen en general para las respuestas 1 y 2 en cada uno de los ítems de las tareas propuestas, dado que por el nivel matemático que tienen nuestros sujetos indagados obtener un uno en las respuestas algunas de las nuestro instrumento nos acerca bastante a lo que planteamos en los objetivos de establecer estas actividades en pro de construir unas nociones de infinito potencial y actual más acorde con las representaciones, tipos de lenguaje etc además de caracterizar los objetos matemáticos que se relacionan con estas nociones:

Tabla 32
Configuraciones epistémicas de la tarea 1

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos

Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano.* *Utilización de algunas expresiones de asociados a las secuencias con representaciones gráficas y simbólicas.*
Situaciones-problemas	*TAREA 1*
Conceptos- definición	*CONJUNTO FINITO, NUMERO PAR: NUMERO IMPAR: SECUENCIA,*
Proposiciones	*Todo conjunto finito se considera numerable por ser coordinable con un subconjunto de N*
Procedimientos	*Asociación e identificación de los elementos matemáticos presentados en el problema 1 mediante representación simbólica.* *Utilización de los elementos numéricos presentada a través la construcción de unas secuencias dadas desde las definiciones citadas anteriormente.*
Argumentos	*Es claro que la actividad propuesta dada desde los objetivos del trabajo pretende la visualización de las diferencias de lo finito y lo infinito, cardinalidad, secuencias y termino enésimo, su asociación de cardinalidad finita y comparación de conjuntos según sus elementos es apropiada para su grado de escolaridad.*

Tabla 33
Configuraciones epistémicas de la tarea 2

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano.* *Utilización de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la aritmética, con sus respectivas representaciones simbólicas.*
Situaciones-problemas	*TAREA 2*
Conceptos- definición	*CONJUNTO FINITO,CONJUNTO INFINITO*
Proposiciones	*"Todo conjunto numerable es finito o equipotente a N"* *Los números naturales son representantes de la cardinalidad de los conjuntos finitos.*
Procedimientos	*Utilización del conjunto de los Números naturales y sus propiedades para visualizar la finitud o infinitud de los conjuntos expuestos en el ítem.* *No explica las razones que le implican escoger 3 conjuntos de los expuestos en el ítem con cardinal infinito.*
Argumentos	*Es evidente que el trabajo con conjuntos con cardinales desconocidos, da como resultado no ver la diferencia entre lo finito y lo infinito además que no se pueda evidenciar la caracterización de estos conjuntos. Se ve aquí la noción de infinito potencial involucrada de manera indirecta.*

Tabla 34
Configuraciones epistémicas de la tarea 3 y 4

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano.* *Utilización de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la algebra, con sus respectivas expresiones verbales.*
Situaciones-problemas	*TAREA 3 Y 4*
Conceptos- definición	*AZAR, MAGNITUD, NUMERO INDETERMINADO*
Proposiciones	*Ausentes las proposiciones para la resolución de la tarea.*
Procedimientos	*Comprensión de lectura acerca del fragmento del libro mágico.* *Representación mental de los eventos aleatorios que ocurren con las paginaciones*

	del libro. *Relaciones de orden entre los diferentes sinónimos asociados a la noción de infinito, dados en el contexto cotidiano.*
Argumentos	*La verificación de la imposibilidad de establecer el orden de las paginaciones del libro mágico involucra el trabajo con cantidades aleatorias que dan otra representación a la construcción del conjunto de los números reales bajo la noción de infinito que este alberga. La noción de infinito actual no se ve involucrada en esta parte de la actividad. En la asignación de significados o sinónimos de infinito se establecen características desde el punto de vista matemático donde se involucra las nociones de infinito potencial solamente.*

Tabla 35
Configuraciones epistémicas de la tarea 5

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano* *Utilización de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la geometría, con sus respectivas representaciones verbal.*
Situaciones-problemas	*TAREA 5*
Conceptos- definición	*ESPIRAL, FIGURA, POLIGONO REGULAR, CONJUNTO INFINITO, SECUENCIA*
Proposiciones	*Ausentes las proposiciones para la resolución de la tarea.*
Procedimientos	*Asociación e identificación de los elementos matemáticos presentados en la tarea, mediante representación gráfica y simbólica.* *Enuncia pero no conjetura de lo que es una secuencia numérica creciente o decreciente.*
Argumentos	*Es claro que la actividad propuesta dada desde los objetivos del trabajo pretende la visualización del infinito continuo, esta concepción está determinada desde las matemáticas formales, las validaciones que establece el sujeto no están argumentadas desde lo verbal, y asocia la infinitud de la secuencia presentada a una espiral, y no a una circunferencia, ahí se ve que tiene presente el infinito potencial pero no establece que una área finita puede realizar uno o más procesos reiterativos infinitos.*

Tabla 36
Configuraciones epistémicas de la tarea 6

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano. Utilización de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la geometría y la aritmética, con sus respectivas representaciones verbales.*
Situaciones-problemas	*TAREA 6*
Conceptos- definición	*TRIANGULO, TRIANGULO EQUILATERO, PERIMETRO,* *TERMINO ENESIMO, SUCESIÓN, SUCESIÓN CRECIENTE:*
Proposiciones	*Si A es un conjunto no vacío, se llama sucesión de elementos de A a cualquier aplicación de N en A. En particular, una sucesión de números reales es una aplicación de N en R.*
Procedimientos	*Se le dificulta la acción de bisecar segmentos de los triángulos equiláteros originados de bisecciones de los lados anteriores de los triángulos equiláteros anteriores, y no establece la relación entre la continuidad de la figura y los elementos que la conforman.* *Se caracteriza el tipo de sucesión o de sucesiones, según lo visto en las secuencias y su comportamiento.*

Argumentos	*No involucra la noción de infinito actual, dado que al realizar el proceso en un triángulo equilátero definido, no encuentra puntos o lugares geométricos infinitos que originaran más triángulos equiláteros que se acercaran, sin embargo cuando se le pregunta por la suma de la longitud de los triángulos asume que esta longitud es infinita dado que entiende el proceso reiterativo que se establece en el triángulo de Sierpinski.*

Tabla 37
Configuraciones epistémicas de la tarea 7 y 8

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal, cotidiano.* *Representación de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la aritmética, con sus respectivas representaciones numéricas y simbólicas.*
Situaciones-problemas	*TAREA 7 Y TAREA 8*
Conceptos- definición	*SUCESIÓN, IGUALDAD, DECIMAL LIMITADO, DECIMAL ILIMITADO*
Proposiciones	*Todo número decimal limitado se puede expresar en forma de fracción decimal.* *Todo numero decimal ilimitado, no se puede expresar en forma de fracción decimal.*
Procedimientos	*Se establece igualdades asociada a la situación, y se conjetura sobre el comportamiento de los números racionales aquí expuestos, con una argumentación de igualdad y noción de limite que da cuenta de las respuestas que argumenta el sujeto, a la hora de explicar de comparar o de satisfacer las igualdades.*
Argumentos	*Dado el proceso reiterativo del modelo planteado en los problemas, se busca que la noción del infinito actual, se evidencie con el trabajo de representación de decimales limitados e ilimitados. En el ítem 7 no actualiza el infinito (0,99999=1) pero en el ítem 8 si lo actualiza (0,4444444=0,45)*

Tabla 38
Configuraciones epistémicas de la tarea 9

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal cotidiano.* *Representación de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados al cálculo infinitesimal, con sus respectivas representaciones numéricas.*
Situaciones-problemas	*TAREA 9*
Conceptos- definición	*NUMERO NATURAL, RELACION BIYECTIVA*
Proposiciones	*Ausentes las proposiciones para la resolución de la tarea.*
Procedimientos	*Utilización del concepto de cardinalidad, y de conjunto finito y conjunto infinito para conjeturar acerca de la tarea propuesta.*
Argumentos	*La asociación del conjunto de los N, a los subconjuntos propios que son los números pares e impares, y sin son numerables, no establece relaciones entre la noción de infinito potencial y actual, desde la formalidad matemática, aunque en la respuesta no se evidencia el manejo de estas dos nociones, utiliza el símbolo ∞ para representa el hotel, no muestra la posible biyección entre los huéspedes y el número de habitaciones en cada uno de los cambios de situación de la tarea propuesta.*

Tabla 39
Configuraciones epistémicas de la tarea 10

Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos	
Elementos lingüísticos	*Verbal cotidiano.* *Utilización de algunas expresiones de objetos matemáticos asociados a la aritmética y la geometría, con sus respectivas representaciones numéricas.*
Situaciones-problemas	*TAREA 10*
Conceptos- definición	*MAGNITUD, SUCESIÓN*

Proposiciones	*Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A; en cualquier otro caso A es finito.*
Procedimientos	*Comprensión de lectura acerca del problema de la repartición* *Dificultad en la visualización del pastel como un todo mayor pero nunca igual a la suma de sus partes, obtenidas del proceso.* *No Conjetura acerca de la posibilidad de repartir en un proceso iterativo e infinito el pastel.* *Imposibilidad de la representación iterativa e infinita de la repartición del pastel.*
Argumentos	*No puede establecer la veracidad matemática del proceso realizado en la tarea, El problema en primera medida es pensar que la suma de una serie infinita de números tiene que ser infinita, esto, sin embargo, no es cierto: pero para el sujeto si lo es, no valida ni argumenta lo noción de infinito actual.*

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este último capítulo se presentan las respuestas a cada una de las pregunta concretas de investigación (PCI) que nos ayuna a responder a las objetivos específicos (OE) que una vez alcanzados no llevan al cumplimiento del objetivo general (OG).

En el capítulo 1 se presentaron los antecedentes de la investigación y en ese sentido nos propusimos vincular el objeto matemático infinito con un modelo de compresión. Para hacer esto, nos apoyamos sobre los posicionamientos del EOS, que llevan a entender la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Este posicionamiento nos amplía la perspectiva vinculando el término *conocimiento*, en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209).

Luego nos planteamos las siguientes preguntas generales de investigación

> *PI-1: ¿Cuál es la noción de infinito que tienen los estudiantes?*
>
> *PI-2: ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de infinito, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?*

Para dar respuesta a preguntas de investigación *PI-1* y *PI-2*, nos propusimos el objetivo general de esta investigación:

> *OG: Caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes de básica sobre la noción de infinito a través de una secuencia didáctica.*

Con la finalidad de lograr este objetivo general y, en consecuencia, las respuestas a las preguntas generales de nuestra investigación, planteamos objetivos específicos cuya consecución contribuirían a dicho fin.

OE-1: Estudiar y caracterizar las investigaciones en torno a la problemática sobre la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente aquellas que tratan sobre la noción de infinito, con el fin de determinar criterios específicos para la elaboración de la secuencia didáctica.

El cual se responde a partir de la pregunta concreta de investigación.

PCI-1: ¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente en la noción de infinito?

En el capítulo 1, se hace una revisión exhaustiva de la literatura y se encuentran factores que involucran el objeto matemático infinito diferenciados entre lo didáctico y lo disciplinar entre ellos Vega (2013), quien muestra que la limitación de representaciones no permite el paso del infinito actual al potencial, así mismo Montoro, Scheuer y Perez (2015) quienes muestran que el concepto de infinito es poco familiar para los docentes de educación básica (primaria) de esta forma damos respuesta a la PC-1 cumpliendo con el objetivo específico OE-1

Siguiendo con la consecución de la investigación se plantearon los objetivos OE-2 y OE-3

OE-2: Identificar y caracterizar Configuraciones ontosemióticas epistémicas activadas en la práctica, mediante el uso de la herramienta análisis ontosemiótico sobre el infinito, lo cual permitirá la identificación de los distintos significados parciales de dicho objeto matemático.

OE-3: Diseñar un instrumento didáctico que sea representativa de la complejidad del objeto infinito.

Para el cumplimiento de estos objetivos se propusieron las preguntas PCI-2

PCI-2: ¿Qué es, o cuál es el significado, que se le confiere al infinito?

A través de la definición del comprensión propuesta por el enfoque ontosemiótico y con ayuda de la teoría de las representaciones, ambas presentada en el marco teórico en el capítulo 2, se diseñó y construyó un instrumento representativo del objeto matemático infinito como aprecia en el capítulo 3, allí se diseñaron 10 preguntas y para cada uno de ellas se elaboró un desglose de los objetos matemáticos primarios, esto con ayuda de una de las herramientas propuestas por el enfoque ontosemiótico lo cual se evidencia en el capítulo 3, así mismo damos cumplimiento a los objetivos OE-2 y OE-3

Una vez se hace se hace el proceso de validación del instrumento a través del análisis ontosemiótico de cada una de las preguntas, se plantea la aplicación, dando cumplimiento al OE-4.

OE-4: Implementar el instrumento didáctico, en estudiantes de educación básica.

El instrumento es aplicado y cada una de las respuestas dada por los estudiantes es analizada con un grado de corrección como se muestra en el capítulo 4. Estos análisis conllevan a realizar una caracterización epistémica general, como se muestra en la tabla sobre los conocimientos de los estudiantes de educación básica sobre la noción de infinito.

Tabla 39
Configuración epistémica general

	Configuración epistémica común a los ítems de los problemas propuestos
Elementos lingüísticos	Lenguaje verbal cotidiano. Representación de algunas expresiones asociados al cálculo infinitesimal, con sus respectivas representaciones numéricas, en contextos aritméticos y geométricos.
Situaciones-problemas	INSTRUMENTO DE INDAGACION
Conceptos- definición	NUMERO NATURAL, RELACION BIYECTIVA, NUMERO PAR, NÚMERO IMPAR, SUCESION, TERMINO ENESIMO, POLIGONO REGULAR, SUCESION CRECIENTE, ∞.
Proposiciones	Si un conjunto A es equipotente con el conjunto de números naturales N, se dice que es numerable y se le asigna el propio cardinal de N. Todo conjunto finito se considera numerable por ser coordinable con un subconjunto de N.
Procedimientos	Utilización del concepto de cardinalidad, y de conjunto finito y conjunto infinito para conjeturar acerca de las situaciones problema.
Argumentos	La asociación del conjunto de los N, a los subconjuntos propios que son los números pares e impares, y sin son numerables, estableces relaciones entre la noción de infinito potencial y actual, desde la formalidad matemática, aunque en la respuesta no se evidencia el manejo de estas dos nociones. Dificultad de actualizar el infinito por el desconocimiento de las propiedades de los conjuntos numéricos y además de objetos matemáticos como la circunferencia, número decimal limitado e ilimitado, relaciones entre conjuntos y propiedades de figuras geométricas.

Al analizar las diferentes configuraciones epistémicas de los estudiantes podemos ver que el trabajo hacia las nociones del infinito encontradas en nuestra secuencia concuerda con lo encontrado por Vega (2014) p.93:

> *"El infinito es un concepto al que se le ha dado un tratamiento disciplinar muy bajo, como lo pueden ser los conjuntos numéricos, las representaciones geométricas, los teoremas fundamentales del álgebra, la aritmética y el cálculo, y esto se debe en gran medida al carácter intuitivo que este término posee y por lo cual su definición está muy alejada de constituir un objeto de conocimiento que las personas generan fácilmente a partir de su interacción con el mundo físico."*

De esta forma damos cumplimiento al OE-5

> *OE-5. Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del instrumento didáctico, el conocimiento sobre el infinito de los estudiantes, e identificar los aspectos que, a futuro, se deberán tener en cuenta para mejorar diseños de procesos de enseñanza sobre la noción de infinito.*

Una vez alcanzado los objetivos específicos propuestos, nos enfocamos a dar respuesta a las a la preguntas de investigación (*PI*):

> *PI-1: ¿Cuál es la noción de infinito que tienen los estudiantes?*
>
> *PI-2: ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de infinito, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?*

El análisis de las respuestas dada por cada uno de los estudiantes, encontramos que los estudiantes de educación básica, tienen concepciones del infinito, en acepciones como algo que no tiene fin o que nunca se acaba, así mismo las respuestas evidencian que no hay paso de infinito potencial a infinito actual, es decir solo se maneja un término "infinito", así damos cumplimiento al OG propuesto.

> *OG: Caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes de básica sobre la noción de infinito a través de una secuencia didáctica.*

Estas conclusiones nos conllevan a determinar que los estudiantes de educación básica no comprenden la noción de infinito, ni el paso del infinito potencial al actual, pese a las diferentes representaciones en las cuales se abordó el concepto, a pesar de esos contextos donde se les presentaron estas nociones, nos llevan a cuestionar el encasillamiento del concepto a uno solo, como se dijo anteriormente, adicionalmente se encontró que el currículo en la educación básica no trabaja tareas que puedan enriquecer la noción, la cual es importante en la construcción de otros conceptos del cálculo.

En nuestra propuesta de esta secuencia didáctica bajo el EOS se hace hincapié en que los sistemas matemáticos permiten afinar y complejizar los esquemas mentales del estudiante para un desarrollo y desenvolvimiento apropiado en las situaciones de su diario vivir y en el manejo de las nociones de infinito asociadas a objetos matemáticos para su conocimiento sea vinculado a ser socializado y aceptado por sus pares académicos y la comunidad matemática.

Estas propuestas de trabajo escolar en matemáticas están encaminadas hacia la concepción de sistemas matemáticos y conocimiento de los universos numéricos dados desde la lógica y lo conjuntista, se dan particularidades a los sistemas analíticos y a sus representaciones, y aunque se daban pocos indicios en trabajos expuestos anteriormente en torno a la diversidad de representaciones que tiene cada uno de los objetos matemáticos asociados a las nociones de infinito trabajados en la escuela, en donde se daba mucha prioridad a los algoritmos y las operaciones asociadas al cálculo infinitesimal, noción de limite y demás, al tratar de acercarnos hacia las nociones de infinito los pensamientos se yuxtaponen y damos un gran salto hacia lo que es la modelación y la actualización del infinito, sin saturar al estudiante con algoritmos y procedimientos mecánicos, sino que trate de resolver tareas acudiendo a todas las herramientas y representaciones posibles gestionadas desde su experiencia cotidiana sus saberes matemáticos desarrollados en el aula y los de su entorno.

REFERENCIAS

Alfaro, C. & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática, 3*(4), 83-98.

Agudelo, N. & Escobar, D. (2016). *Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito actual en estudiantes de grado décimo, un medio de aporte al desarrollo del pensamiento crítico en la escuela.* (Tesis de Pregrado), Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Anacona M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *REVISTA EMA* 2003, *8*(1), *30-46*

Aznar, M.A., Moler, E. & Pesa, M. (2017) Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico.

Belmonte, L. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito. Universidad de Salamanca. 12-418

Buitrago, I. D., Gaviria, C. & Márquez, C. (2014). Algunos conceptos matemáticos asociados al infinito. *Ing. USMed, 5*(2). 96-99.

Crespo C. (2001). El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Universidad de Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. *MESCUD, 746*(4)

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla M., Fandiño M., Piatti A., Rodríguez B., Garzón P., Romero J. & Sbaragli S. *El "sentido del infinito". MESCUD Bogotá*

De la Fuente A., Armenteros M., Font V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Revista Bolema. Rio Claro (SP), 26*(42B), 667-690.

Diaz, J. (2016). *Algunos apuntes sobre la noción de infinito en los referentes curriculares para el área de matemáticas de Colombia en el ciclo décimo-undécimo.* 5-7

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *PME* (23) 3-26.

Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D, Hecklein, M., & Henzenn, N. (2012). El límite infinito: una situación didáctica. *Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral*. 13-15

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. For the Learning of Mathematics, (3)2, pp. 9-19.

Fuentes S. (2011). El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Fuentes S. & Villabona D. (2016). *Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE*

Garbin, S., y Azcárate C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias 20*(1), 87-113.

Godino D., Batanero C., Font V., (2009). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. 2-17.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Gordillo, W & Araya, D. (2017). Algunos conflictos semióticos asociados a la noción de límite. *Actas CLAME.,30*, 534-541.

Jato S. (2012). El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad de Cantabria, España

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A., & Turner, L. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research, 1*(2), 112-133.

Kaput, (2011). Computer algebra systems for the 21st century: new kind of dynamic representación. *Congreso Internacional tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas.*1-16

Lestón P. (2007). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares. (Tesis de Doctorado) IPN, México

López C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. Ciencia y Tecnología, 14, 277-298.

Medrano, I. & Pino-Fan, L. (2016). Estadios de la comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *Redimat.* 5(3), 286-288.

Mena-Lorca A., Mena-Lorca J., Montoya D., Morales A., Parraguez M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18* (3), 329-358.

Montes M. & Carrillo J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. *Bolema*, 31(57), 114-134.

Molinero, M. (2003). Análisis de tablas de contingencia de más de 2 variables cualitativas. *ASEH*, 1-9.

Montoro, V., Scheuer N., & Pérez E. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, 28(3), 145-174.

Ortiz, R. J. (1994). El concepto de infinito. *Boletín Asociación matemática venezolana*, *1*(2), 59-60.

Palmer A. (2001). Acerca del Libro de arena de Jorge Luis Borges. *REVISTA SUMA*, 36*, 85-92.*

Rojas Álvarez Carlos Javier. (2003). *Una propuesta para los estándares del límite matemático.* Universidad del Norte.

Socas, M. (1997): “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori, Barcelona.

Vega J. (2013). Taller: Concepciones en torno al infinito actual: Análisis mediado por el software Cabri-Geometre. *I CEMACYC*. 1-11

Waldegg G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1*(1), 107-122.