# ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA EN GRADO NOVENO DE LA RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES FUNDAMENTADAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.

YUDIT JIMENA CHAVES RIVERA
ISABEL CRISTINA ORTEGA BOTINA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2006

# ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA EN GRADO NOVENO DE LA RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES FUNDAMENTADAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.

YUDIT JIMENA CHAVES RIVERA
ISABEL CRISTINA ORTEGA BOTINA

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciadas en Matemáticas.

Directora
Mg. Claudia Patricia Gómez

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2006

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, marzo de 2006.

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por ser el principal motor a lo largo de nuestra carrera.

A la profesora Claudia Gómez por su incondicional apoyo y brindarnos todos sus acertados consejos.

A Edwin Pacheco por dedicarnos todo su tiempo, esfuerzo y dedicación en todo este proceso. Además por ser un verdadero amigo.

A todos los profesores y compañeras de carrera que nos acompañaron en el Seminario de Validación, gracias a sus aportes se pudo enriquecer nuestro trabajo.

A todas aquellas personas que de una u otra forma ayudaron a la realización de este trabajo.

A mis padres, Guillermo e Isabel, por confiar en mí y darme la oportunidad de ser profesional.
A mis hermanos, Lizzeth, Angélica y Giovanny, por ser mi apoyo en todo momento.
En general, a toda mi familia, Ortega Botina por ser el apoyo más grande en todo el transcurso de mi carrera.
A mi Puh, por aparecer en mi vida y ser la persona especial que me ayudó a llevar mis momentos difíciles más llevaderos y por estar siempre conmigo.
A mi Forest, por brindarme momentos alegres en todo este tiempo.
Isabel Cristina Ortega Botina.

A mis padres, Leoncio y Nelly, por estar siempre conmigo brindándome su cariño y apoyo en todas mis decisiones.
A mis hermanos, Edwin, Leydi y Danny, por no dejarme sola nunca y para ellos también es mi triunfo.
A mis sobrinos, Jose Luis, Sofia y Valentina, por ser personitas que me día a día me llenan de alegrías.
A toda mi familia, Rivera Erazo, por acompañarme en todo el proceso de formación profesional.
Yudit Jimena Chaves Rivera .

DEDICATORIA

A nuestra profe Claudia.

A mi padres, Guillermo e Isabel.
A mis hermanos, Marce, Molis y Peque.
A mi querido Puh.
Isabel Cristina Ortega Botina.

A mis padres, Leoncio y Nelly .
A mis hermanos, Leydi, Danny y Edwin.
A mis sobrinos, Jose Luis, Sofía y Valentina.
Yudit Jimena Chaves Rivera.

CONTENIDO

RESUMEN

A continuación se proponen unas Estrategias Metodológicas alternas para la enseñanza en grado noveno de la Resolución de los Sistemas de ecuaciones Lineales , las cuales se fundamentan en las comprensión de la Historia de dihos sitemas y en la Resolución de Problemas. De acuerdo al estudio de la historia, las estrategias se orientan según los siguientes parámetros

• Situaciones de la vida cotidiana.

• Aproximaciones sucesivas.

• Procesos particulares - procesos generales.

Así mismo, las mencionadas estrategias se llevan a cabo de manera dinámica y recreativa, para ello se proponen unas guías para el docente y actividades para los estudiantes, empleando recursos didácticos y algunos asistentes matemáticos.

La propuesta se validó con un colectivo de expertos docentes de Matemáticas y fue evaluada de manera positiva siendo viable para su desrrollo en el aula escolar.

ABSTRACT

Next they intended some alternating Methodological Strategies for teaching in grade ninth about the Resolution of Lineal Equations wich are based in the understanding of the history of this Systems and in the Resolution of Problems. According to the study of de history, the strategies are guides acording to the following parameters.

- Situations of daily life.

- Successive approaches.

- Particular processes - General processes.

Lifewise, the mentioned strategies are carried out in a dynamic and recreational way, for that, they intend at someguides for the educational ones and activities for the students using didactic recurs and some mathematical assistants.

The propodal was validated with a community of educational experts of Mathematics and it was evaluated in a positive way being viable for its development in the school classroom.

# PRESENTACIÓN

Nuestro trabajo se realiza a partir de la revisión bibliográfica de textos, artículos e informes que contienen la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales en toda su formalización, la cual realizado el respectivo análisis consideramos que se han presentado con la mayor rigidez y descontextualización posible, lo cual creemos motiva a que el estudiante recurra a procesos mecánicos y repetitivos al aplicar los diferentes Métodos de Resolución para los Sistemas de Ecuaciones Lineales, en donde el problema original, creemos, podría ser el excesivo manejo simbólico lo que conlleva a la "no comprensión del concepto de variable y sus diferentes significados".

A partir de lo anterior nace la motivación por crear Estrategias Metodológicas alternativas para la enseñanza de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, los cuales tienen como fundamento principal la compresión de la historia de dichos Sistemas puesto que permite conocer como las ideas han cambiado y evolucionado con el tiempo llegando al proceso final de generalización, es decir a los Métodos de Resolución para dichos Sistemas.

Es preciso aclarar que lo que se busca no es recrear la Historia misma de los Sistemas ni mucho menos los problemas propios de cada época sino más bien recolectar y recrear los principales factores que comprenden dicha Historia para poder así ser reutilizados; dichos componentes que rescatamos son

- Situaciones de la Vida Cotidiana.

- Procesos particulares - Procesos Generales.

- Aproximaciones Sucesivas.

Así pues, las Estrategias Metodológicas que proponemos son expuestas mediante el desarrollo de una serie de actividades para el estudiante las cuales comprenden tanto la construcción de los Sistemas como sus diferentes componentes, como de los distintos Métodos de Resolución de dichos Sistemas; así como también guías base de las actividades para el docente. Dichas actividades van acorde con lo estipulado en el Ministerio de Educación Nacional bajo los estandares y Lineamientos Curriculares para el grado Noveno de la Educación Básica Secundaria.

Finalmente nuestro propósito general es proponer Estrategias Metodológicas alternas, enfocadas desde la comprensión de la Historia misma de dichos Sitemas, llevados a través de un elemento muy importante como la puesta de la realidad por medio de Situaciones Problemáticas de manera dinámica y recreativa.

# INTRODUCCIÓN

Una de las actividades en el área educativa de gran importancia, exigencia y responsabilidad son las estrategias empleadas en la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas, las cuales deben estar en constante renovación.

Actualmente se reconoce la importancia y necesidad de revisar las estrategias metodológicas utilizas en el aula con el fin de proponer estrategias alternativas innovadoras que son conocidas pero poco usadas y explotadas. En cuanto a nuestro propósito general, acerca de la resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, es proponer estrategias metodológicas alternas, enfocadas desde la comprensión de la Historia misma de dichos sistemas, llevados a través desde unos de sus principales elementos como es la puesta de la realidad por medio de situaciones problemáticas; para luego realizar un análisis colectivo con expertos de cuyas opiniones enriquecen aún más dichas estrategias.

La investigación en Educación Matemática, hace referencia, a una búsqueda disciplinada en torno a la problemática de la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas, abierta a las posibles refutaciones y a la crítica. Aunque los propósitos de la investigación en Educación Matemática son variados, siempre estarán vinculados, implícita o explícitamente,a algún paradigma de investigación en Educación, que por sus objetivos se caracterizan en

- Empírico - Analítico: cuyos objetivos básicos son explicar, predecir y controlar los elementos involucrados en la actividad educativa.

- Interpretativo: su objetivo es comprender los significados que la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática tienen para aquellos que están involucrados en tales actividades.

- Crítico: su objetivo es mejorar la práctica educativa e involucrar a los participantes de dicha práctica en la producción de esa mejora.

Siendo éste último, el enfoque a utilizar en nuestro trabajo porque ayuda a transformar la realidad desde una dinámica propia de los individuos implicados en ella, es decir hacemos partícipes en nuestro trabajo a los docentes expertos en la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con el fin de obtener sus criticas y aportes que sirven como validación para el mismo. De esta manera nos aproximamos al Método Delphi el cual es un programa cuidadosamente elaborado que sigue una serie de interrogantes individuales a través de cuestionarios de los cuales se obtiene la información que constituirá la retroalimentación para los cuestionarios siguientes (Helmer y Resher 1959) y que se caracteriza por estructurar el proceso de comunicación grupal al tratar con problemas complejos con expertos en la materia.

Además en los últimos años se observa preocupación en los docentes por mejorar los contenidos programáticos, así como de la metodología en la enseñanza de las Matemáticas, con el ánimo de que los estudiantes se apropien cada vez más de los conceptos y tener una mayor proyección, ejecución y aplicabilidad, no solamente en el tiempo presencial del estudiante en el colegio sino en su propia vida y de esta manera los conceptos no se queden para el estudiante en un "limbo" de nombres sin significado alguno. A raíz de lo anterior, se inicia una intensa búsqueda por encontrar, indagar y explorar nuevas estrategias metodológicas útiles para desarrollar el pensamiento del campo de interés de este trabajo y de su comunicación, con el objetivo único de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas a partir de los aportes de los participantes en dicho proceso. Fijamos nuestro estudio hacia la resolución de los sistemas ecuaciones lineales, por ser un fundamento básico para el desarrollo del Pensamiento Variacional, en el cual los estudiantes tienen dificultad al no lograr una comprensión significativa del concepto de variable. Al analizar las estrategias metodológicas que hoy en día existen para el tratamiento y la resolución de ecuaciones lineales, observamos que este tema nos permite llegar a una primera aproximación hacia la modelación de situaciones Matemáticas como las de la vida cotidiana, pero es aquí, en este paso hacia la abstracción, donde al estudiante se le genera una serie de distorsiones y confusiones, puesto que les es muy difícil considerar o manejar situaciones desconocidas y por ende no le encuentran significación alguna más que la aplicación y el cálculo reiterativo de fórmulas. Entonces podemos vislumbrar falencias que deben ser reconsideradas para que nos ayuden a visualizar el por qué los estudiantes acuden a los mecanismos operacionales repetitivos, muchas veces sin sentido ni aplicación alguna, lo cual conlleva a dejar de lado la comprensión y el significado de la variación, además la utilización de un texto guía en donde el formalismo prima genera aún más estancamientos en el significado de las ecuaciones y sus métodos de resolución.

Lo anterior, nos motiva a explorar nuevas estrategias o quizá replantear otras, hablamos de enfocarnos según la historia, ya que de esta manera se favorecen los procesos de asimilación al entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado según su evolución y la situación que se encuentra actualmente, así como lo menciona en la obra Tendencias Innovadoras en Educación Matemática Miguel de Guzmán: "Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir y la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado,..."este autor señala además, en la misma obra, que la historia de las Matemáticas es una herramienta que en el campo de la Educación Matemática nos ayuda hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas, a enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes además de señalar los problemas abiertos con cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.

Por tanto, pretendemos además de que este enfoque tome un rol mucho más atractivo e interesante, llegue a ser una herramienta útil para una nueva estrategia metodológica, con un toque de dinamismo y realismo que proporcione ventajas al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales para estudiantes de noveno grado en el nivel básico de Secundaria.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dado que hoy en día algunas de las estrategias metodológicas para el tratamiento de la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, en general, han llevado a que los estudiantes recurran a los procesos mecánicos por la falta de comprensión de la variable misma, lo cual conduce a que haya más estancamientos y errores al momento de manipular las expresiones algebraicas, por no tener claro los conceptos; éste hecho, en parte, al empleo de estrategias inefectivas como al desconocimiento de la evolución histórica de los mismos.De acuerdo a la opinión de varios autores, situaciones como la anterior, se deben en parte a diversa causas, como los son el empleo de estrategias instruccionales inadecuadas (Gabaldon 1987), muchas veces los docentes no tienen en cuenta los conocimientos previos de sus estudiantes (Peñalosa 1986) y un conjunto de factores como lo son lo relacionado con el currículo, el docente, el empleo inadecuado de las situaciones problemáticas en el aula, entre otras.

La complejidad de esta problemática lleva a la necesidad de plantear alternativas que contribuyen a mejorar los procesos de enseñanza - aprendizaje, en tal sentido se diseñan herramientas orientadas a facilitar la enseñanza de la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Por tanto es importante involucrar a los docentes y expertos en la materia para que a partir de su experiencia se puedan orientar las estrategias metodológicas alternativas de las cuales pretendemos ocuparnos en vía de mejorar esta problemática.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se asume el siguiente problema:¿Es posible crear Estrategias Metodológicas fundamentadas en la historia y en recursos didácticos y recreativos que contribuyan a la aprehensión, de los procesos algebraicos para la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales?

# 2. MARCO TEÓRICO

El pensamiento matemático se ha desarrollado conjuntamente con la humanidad y en su construcción han participado grandes hombres; los resultados dados a conocer son el fruto último de una variedad de trabajos construidos con el pasar del tiempo, olvidando que esta ciencia nace de una actividad netamente humana que deja como consecuencia un gran edificio teórico. Pensando de esta manera podemos contemplar entonces a la Matemática desde dos perspectivas como actividad científica y como una empresa educativa[1] , siendo esta última una guía fundamental para nuestra investigación. Por esta razón distinguimos dos facetas: la Matemática vinculada a la actividad de enseñar y la Matemática asociada a la tarea de aprender; así concebimos a la Educación Matemática como un proceso de inmersión en las formas características de proceder del ambiente matemático con una profunda influencia en la manera de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

La Educación Matemática en un principio pretende construir explicaciones teóricas y coherentes que permitan entender el fenómeno educativo en lo general y al mismo tiempo ayudar a resolver satisfactoriamente situaciones problemáticas particulares teniendo en cuenta al estudiante como su objeto de aprendizaje para construir con él un significado propio de estas explicaciones teóricas que en un momento dado serán utilizados de manera adecuada en su formación y en su vida profesional.

## 2.1 REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

2.1.1 Crisis de la Educación Matemática en Colombia. En el sistema educativo actual consideramos la escuela como su unidad básica, la cual esta frente al reto de una transformación educativa que busca de manera exigente el replanteamiento de su antiguo funcionamiento, en miras de una educación que responda de manera concreta a la formación del ciudadano para la Colombia del siglo XXI. Al tratar de responder a ese ideal para la formación del ciudadano es como en el sistema educativo se produce la transformación denominada "Revolución educativa" para dejar de lado las secuelas encontradas en el pasado, entre ellas podemos mencionar la gran crisis de los 60 y 70 en donde la Matemática en ese entonces era conocida como "Matemática Moderna" cuya principal característica fue el formalismo en el énfasis de las estructuras abstractas, la profundización en el rigor lógico y en donde éste no se alcanzaba fácilmente. A raíz de los diferentes estancamientos producidos en esta área del conocimiento se promulga el decreto 1710 en 1963 que establecía los programas para primaria diseñados con el estilo de objetivos generales y objetivos específicos conductuales propios de la

[1]Waldegg Guillermina. Educación Matemática. www.uv.mx/iie/colección/N_29/ la_educación _matemática.htm

época; pero muy pronto se empezó a percibir que muchos de los cambios que se había pretendido introducir no habían resultado muy acertados. Como consecuencia de lo anterior en los años 70 y 80 se realizan diversos debates en los que se contraponían matemáticos calificados, maestros y padres de familia con diferentes concepciones acerca del aprendizaje de los niños y tal fue la dificultad encontrada que en el país se decía que a los niños les estaba dando "Conjuntivitis" ya que aprendían palabras raras, hacían operaciones con conjuntos y difícilmente realizaban operaciones elementales.

A partir del año 1975 en la administración de López Michelsen se inició en el país el llamado "Mejoramiento Cualitativo de la Educación", en el cual se proponían estrategias para mejorar la calidad de la educación, pretendiendo en la Renovación Curricular superar las limitaciones al seleccionar los aspectos positivos que tenía el enfoque conceptual de la nueva Matemática, pero sin llegar a enseñar lógica y conjuntos ofreciendo criterios teóricos que permitan la toma de decisiones; de esta manera se tomaría un enfoque como sistemas y más no como conjuntos, llamado "Enfoque de Sistemas" el cual se acerca a las regiones de la Matemática como los números, la geometría, las medidas, datos estadísticos, la misma lógica y conjuntos pero con una perspectiva sistemática. En particular el enfoque de sistemas se adoptó para el área de Matemáticas, en la Renovación Curricular en la Ley General de Educación, ley 115 de 1994 en los artículos 21 y 22.

Los lineamientos curriculares toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, uno de los cuales es la socialización de un diálogo acerca del enfoque de sistemas y el papel que juega su conocimiento en la didáctica. El enfoque de estos sistemas está orientado a la conceptualización, la comprensión, el desarrollo de competencias, al tratamiento de conflictos y al tratamiento de la cultura para concebir una vida sana entre otros.

Desde una perspectiva de descentralización educativa y ejercicio de la autonomía podemos inferir la diferencia entre el currículo nacional que ofrecía el Ministerio de Educación Nacional hace cuatro años y los lineamientos curriculares actuales, los cuales buscan incrementar la formación de quienes hacen currículo y de quienes asesoran a las instituciones educativas para que lleven a cabo sus procesos curriculares dentro del Proyecto Educativo Institucional. Uno de los ejes centrales del currículo de Matemáticas es la resolución de problemas, por ende debe ser objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. De esta manera la resolución de problemas no será un tópico aparte del currículo, por el contrario, éste deberá proporcionar un contexto donde los conceptos y herramientas sean aprendidos cubriendo en su totalidad al currículo.

La Educación Matemática logra una orientación cada vez más efectiva cuando se trabaja de manera compartida, ejemplo de esto, es el Comité Interamericano de Educación Matemática, la Comisión Internacional de Educación Matemática y las demás asociaciones y organismos desde hace más de tres décadas llevan a cabo un trabajo continuado para preguntar: ¿Qué hay que enseñar y aprender en Educación Matemática, tanto en la educación básica como en la media y superior?.

El interés por la evaluación de los resultados en la Educación Matemática internacionalmente ha tomado gran auge desde los primeros niveles de educación formal como es el caso de las pruebas TIMMS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias en 1995), las cuales se vienen realizando desde 1964 llamadas las FIMS y en 1980 las SIMS; estas pruebas se comienzan a realizar a partir de que "en todos los países del mundo, las Matemáticas y las Ciencias son una parte importante del currículo escolar consideradas así como materias esenciales para la formación de los jóvenes"[2]. En estas pruebas se pretendía medir el rendimiento en Matemáticas para cada sistema, en alumnos de 13 años y estudiantes de último curso de secundaria, para quienes las Matemáticas fuesen una parte importante para su programa académico; de ellas se dedujo que los puntajes para Colombia en 1995 fueron de un 66% del puntaje de Corea en el mismo año y un 77% del de Nueva Zelanda, indicando que la distancia con los países más desarrollados: no sólo se mide por la diferencia en el número de años de educación si no también por lo que se aprende como resultado de ir a la escuela.

Los documentos publicados sobre las TIMMS contienen información valiosa para nuestro país, en relación con el currículo y con los factores que favorecen o dificultan los logros de los estudiantes. Se encuentran evidencias de que el currículo propuesto oficialmente es diferente del que se desarrolla efectivamente en el aula y del que es aprendido por los estudiantes. Al respecto conviene señalar que el TIMMS considera el currículo como una variable central y lo estudia en tres niveles el propuesto, el desarrollado y el logrado. Tal vez nunca había contado el país con una información similar en la cual hay estudios nacionales que simultáneamente con estudios internacionales pueden orientar el currículo de Matemáticas de la educación formal.

Consideramos que para lograr un verdadero cambio en la educación debemos ser conscientes desde donde parten sus falencias y ¿Cómo llegamos a este conocimiento?, a través de replantearnos y por supuesto por medio de nuestras propias valoraciones. Es por esto que en la década de los 90 en el sistema de evaluación de la calidad de la educación del Ministerio de Educación Nacional se realizaron de manera muestral las primeras pruebas con miras a responder satisfactoriamente a la pregunta ¿Qué calidad de educación tenemos? Esta nueva etapa de trabajo en el campo de la educación básica ha dado como resultado la aplicación de las pruebas conocidas en el país como SABER, buscando obtener, interpretar e informar de manera confiable el análisis pertinente de la educación, constituyéndose en un avance para la toma de decisiones en las diferentes instancias educativas, para la reorientación de políticas que contribuyan al mejoramiento de la calidad de la educación.

[2]Panoramica histórica, www.ince.mec.es/timss/ci/hist.htm

De manera específica, las pruebas Saber de Matemáticas se concentran en evaluar el uso que el estudiante hace de las matemáticas para comprender como utilizar, aplicar, comunicar conceptos y procedimientos matemáticos. Además estas pruebas no solamente nos ayudan a tener una visión general de los logros obtenidos por los estudiantes sino sirven como referente para valorar las propuestas de trabajo empleadas actualmente en el aula para la planeación, diseño e implementación de "propuestas de innovación"[3] a partir de las dificultades encontradas en dichas pruebas. Desafortunadamente los resultados obtenidos no han sido los esperados, así por ejemplo quedó demostrado en los años 1997 al 1999 en donde las pruebas Saber mostraron que en promedio uno de cada diez niños es capaz de resolver problemas que requieran mayor nivel de análisis, igualmente las pruebas realizadas en los años 2002 al 2003, se ven esfuerzos por mejorar en Matemáticas aunque no lo suficiente. Esto se debe en parte a que muchas veces el estudiante conoce lo básico de las Matemáticas, pero la deficiencia radica en no saberlo aplicar para resolver problemas y la mayor dificultad se presenta cuando los problemas tienen un nivel más complejo, en los cuales el lenguaje algebraico y la abstracción juegan un papel importante. Las pruebas Saber del 2004 se llamaron pruebas de contraste porque las anteriores dejaron algunos sin sabores en sus resultados, pero éstas confirmaron la deficiencia en la resolución de problemas complejos denominados del nivel, aunque beneficiaron la resolución de problemas para el grado 5, del nivel B, especialmente en el departamento de Nariño.

Observamos, entonces, que este tipo de evaluaciones tiene gran importancia para la Educación Matemática ya que se pueden tomar decisiones necesarias, de acuerdo a los resultados obtenidos y pertinentes para aprender de la experiencia, así poder orientar el currículo y nuevas estrategias pedagógicas más efectivas y precisas.

2.1.2 Pensamiento Variacional. En los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional se entablecen

- Cinco Sistemas conceptuales.
- Cinco tipos de Pensamiento.
- Cinco procesos generales.

Entre los cinco tipos de Pensamiento Matemático está el Pensamiento Variacional. El término "Pensamiento Variacional", se ha implementado con el fin de profundizar más a fondo el aprendizaje y manejo de las funciones como modelo de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, involucrando para ello, aspectos como la interpretación, la modelación de la igualdad y la ecuación, entre otros.

[3]Ministerio de Educación Nacional. Una mirada a los fundamentos e instrumentos de Matemáticas 2002-2003

De esta manera se pretende abandonar el enfoque rígido de los sistemas y superar la enseñanza de los contenidos matemáticos "fragmentados y compartimentalizados" que han gobernado por mucho tiempo la actividad matemática escolar. El énfasis que se quiere hacer con la introducción de esta manera de ver el currículo es la ubicación en el " dominio de un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre en sustrato de ellas" [4]. Así, la visión sobre la variación se amplía por medio de las cantidades y las magnitudes.

Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos núcleos conceptuales matemáticos que involucran a la variación, tales como

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.

- La función como dependencia y modelos de función.

- Las magnitudes.

- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.

- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

La variación en la vida práctica se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en donde la cantidad varía promoviendo en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático. Luego en el desarrollo del pensamiento variacional sus estructuras conceptuales evolucionan con el tiempo, en donde el aprendizaje madura progresivamente y además la aparición de nuevas situaciones exige replanteamientos para lograr una mayor aproximación a las conceptualizaciones propias de las Matemáticas.

En el currículo de Matemáticas el Pensamiento Variacional puede ser iniciado de manera temprana. La organización de la variación en tablas inicia en los estudiantes el desarrollo de éste pensamiento, además se constituye en una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que se comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores, igualmente, beneficia a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas, para

[4]Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Matemáticas. Lineamientos curriculares. Colombia, 1988. Pág 72

descubrir la variación o el cambio. Posteriormente las tablas, se pueden usar para la graficación de Situaciones Problemáticas de tipo concreto lo cual ayuda para que sea más significativa la identificación de la variable independiente y dependiente. Otras formas para desarrollar el Pensamiento Variacional pueden ser, la solución de tareas que utilicen procesos aritméticos que ayuden a la comprensión de la variable y las fórmulas. Así mismo la aproximación numérica y la estimación deben ser usadas en la solución de Situaciones Problemática referidas a fenómenos de cambio o de la vida práctica, éstas podrían ser el escenario propicio para establecer de manera formal el sentido y significado de la variación. Las Situaciones Problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o de fórmulas, como lo señala Demana (1990) "La exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra" [5].

En los estándares para Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, en la propuesta curricular para los grados 6° a 9°, se propone para este nuevo siglo centrar esfuerzos pedagógicos y didácticos en el "Pensamiento Variacional" y no dedicarse totalmente en el sistema algebraico y analítico como hasta ahora se lo ha tratado, puesto que tan sólo explota en el estudiante los procesos mecánicos, operacionales y formales; a pesar de que estas herramientas sean necesarias nunca exploran dicho pensamiento en su totalidad, debido a que no les ayuda a despertar su forma de pensar de manera variacional.

De acuerdo con lo anterior, podemos afirmar que el Ministerio de Educación refleja en los estándares, la necesidad de que el estudiante identifique primero, todas aquellos conceptos relacionados con la variación; además los estándares indican que debe realizarse mayor énfasis en el "uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados" [6] ; por ejemplo, el estudiante debe estar en la capacidad de identificar las relaciones que existen entre las ecuaciones lineales y los diferentes métodos para resolverlas; así el estudiante estará en la capacidad de modelar situaciones de la vida diaria a través de las variables, de ahí la importancia de desarrollar con mayor profundidad dicho Pensamiento.

Los estándares a considerar para los grados 8° y 9° son

1. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

2. Construir expresiones algebraicas equivalentes a un a expresión algebraica dada.

[5] Ministerio de Educación Nacional, Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Colombia, 1998. Pág. 73-74

[6] Ibídem. Pág 33

3. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

4. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

5. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

6. Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

7. Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.

8. Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.

Los estándares descritos tienen en cuenta tres aspectos que deben estar presentes en la actividad matemática como procesos o procedimientos generales que articulan dicha actividad. Bajo el nombre de procedimientos nos estamos refiriendo a los conocimientos en cuanto a actuaciones, a las destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, resaltando en el alumno la capacidad de enfocar y resolver las propias actuaciones de manera cada vez más hábil e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud. Que las podemos sintetizar bajo

- Planteamiento y resolución de problemas.

- Razonamiento Matemático (formulación, argumentación, demostración).

- Comunicación Matemática: consolidación de la manera de pensar (coherente, clara, precisa).

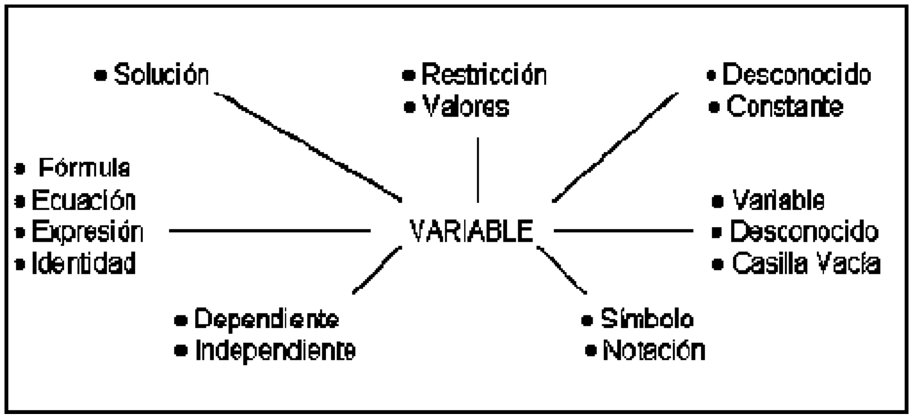
## 2.2 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una vez analizado el Pensamiento Variacional se puede observar que ante todo se trata de abordar todas aquellas concepciones relacionadas con la variación y el cambio; un primer acercamiento para lograrlo es a través de la "comprensión de la variable y sus diferentes significados" [7], lo que se pretende es la significación conceptual de las letras en una expresión algebraica que permita identificar e interpretar las letras como variables, lo cual beneficia al estudiante en el momento de resolver situaciones que involucran la letra como variable y así mismo ayuda al desarrollo de su pensamiento. Además de la manipulación de las letras por parte del estudiante, permite conducirlos hacia la generalización, es decir el grado más alto de la abstracción; situación que genera muchas dificultades en la mayoría de ellos, y que debemos tener presente para el desarrollo de

[7] Ibídem. Pág 33.

este trabajo.

2.2.1 Significados y concepciones de la variable. Con frecuencia y especialmente en el lenguaje común se utilizan diversas palabras como sinónimos para referirse a la variable. Por ejemplo es usual hacer referencia a ideas como incógnita, desconocido, constante variable entre muchas otras, las cuales dan lugar a diversas interpretaciones. El siguiente diagrama muestra un conjunto de palabras que con frecuencia son usadas para hacer referencia a la variable.




Se presentan algunos comentarios relacionados con las diferentes formas de considerar a la variable que surgen de la ilustración anterior. En cada caso se usa como símbolo, la letra $x$ ó la letra $y$.

• Solución: Las variables son usadas para obtener soluciones a problemas que han sido expresados en términos algebraicos. La tendencia de relacionar la letra $x$ con la solución persiste aún cuando ésta ha sido utilizada únicamente para expresar la generalidad.

• Fórmula, ecuación, expresión, identidad: Estas palabras se aplican en los contextos en los cuales la letra $x$ es con frecuencia usada como variable.

• Dependiente e Independiente: Estas palabras son adjetivos que describen usos particulares de la letra $x$ ; sus usos tienen origen en la práctica de especificar una función de la forma "$y$ = expresión en $x$"; que involucra por lo tanto la noción de dependencia e independencia, las cuales asumen un conocimiento existente de lo que la variable representa o de los valores que ésta puede tomar.

• Desconocido y constante: Estas palabras al igual que la palabra variable describen formas de pensar sobre una letra que representa un número. Veamos algunas contradicciones sobre ello

- La palabra constante implica que el número representado es fijo, pero cuando la ecuación se está solucionando no hay la percepción de que la solución cambie, inclusive en el caso de que el valor desconocido esté representado por lo que llamamos una variable. Y muchas veces tenemos la concepción de una variable como algo no constante.

- También existe la percepción de que la letra $x$ es conocida porque le damos un nombre y al hacerlo podemos manipularla poniéndola en diferentes expresiones.

Observemos que a medida que tratamos de limitar el alcance o rango de variabilidad, ésta puede acumular propiedades y atributos como cuando solucionamos ecuaciones. Entonces, surgen confusiones tanto en el aspecto psicológico como en el aspecto semántico, por las palabras "constante", "conocido" y "desconocido", nombres con los cuales se debe procurar no tratar del todo.

• Símbolo, notación: Existe confusión entre lo que es un símbolo y lo que éste representa, aún más, cuando al estudiante mismo debe representar en notación una expresión específica; si dicha expresión contiene una variable puede verse como un objeto particular o como un objeto que representa toda una clase o rango de posibilidades. Aquí los conceptos de especialización y generalización surgen una vez más, y a los estudiantes les resulta más fácil identificarlos cuando las expresiones ya están dadas y se les dificulta un poco cuando son ellos quiénes tienen que expresarlas o construirlas.

• Variable, desconocido, casilla vacía: La palabra "variable" involucra asociación con cambio, pero ese cambio es potencial. La palabra "desconocido" entra aquí en un intento de capturar ese sentido del cambio potencial, es decir, hacer entender que a pesar de que la variable puede tomar muchos valores buscamos uno de manera específica. Otra vez los términos "conocido" y "desconocido" producen todo tipo de confusión como se mencionó anteriormente. Con las palabras casilla vacía, se está hablando de una casilla o cualquier otro símbolo que ocupa el lugar de un valor desconocido, algunas veces las personas usan la imagen con el uso de cajas o cuadrados para representar las variables antes de que se usen las palabras o símbolos.

• Restricción y valores: Cuando se tiende ha hablar de la letra $x$ como conocida, limitamos sus valores a uno en particular que nosotros conocemos, que usualmente es la solución de una ecuación, es decir estamos buscando o esperando siempre una respuesta definida y simple a las preguntas propuestas.

De la misma forma, Kücheman (1989, Págs. 28 - 31), clasifica en seis categorías el significado de las letras que pueden tener en una expresión algebraica y que son importantes para entender las diferentes concepciones que tienen los estudiantes; estas categorías son:

• Letra evaludada: A la letra se le asigna un valor numérico específico desde el inicio del proceso. Por ejemplo:¿Cuánto vale a en la expresión $a+3=5$? La letra a tiene un valor específico y aunque inicialmente es desconocido se lo puede evaluar fácilmente.

• Letra ignorada o no usada: A las letras presentes en una expresión se las deja de lado y se trabaja prioritariamente con los números antes que con ellas. Por ejemplo:¿Qué valores hacen cierta la expresión $x + y = 15$? El estudiante ignora las letras y responde a la pregunta sin utilizarlas.

• Letra como objeto: La letra es considerada como un nombre para un objeto o como el objeto mismo, es decir se sustituye el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real. Por ejemplo:Cuando se presenta la situación "se compran $m$ manzanas y cada una cuesta \$400", entonces $400m$ representa para la mayoría de estudiantes 400 manzanas porque interpretan la letra como objeto en esta última expresión.

• Letra como incógnita: La letra es vista como un número desconocido pero específico. Por ejemplo:¿ En cuáles casos se verifica la igualdad $L + M + P = L + N + P$? Los estudiantes responden que nunca pues $N$ y $M$ son distintas.

• Letra como número generalizado: La letra se ve como representante de un conjunto de valores más que como un valor específico y se le reconoce las propiedades del conjunto al cual pertenecen los valores representados. Por ejemplo:¿Qué se puede decir de $C$, si se sabe que $C + D = 10$ y $C$ es menor que $D$? Los estudiantes responden que $C$ debe ser menor que 5.

• Letra como variable: La letra representa un rango de valores que varían, dependiendo funcionalmente de otros. El concepto de variable implica claramente el concepto de la incógnita y sus posibles valores. Por ejemplo: Se sabe que $a = b + 3$, ¿Qué le pasa a $a$ si $b$ se aumenta en 2? Los estudiantes responden que $a$ es siempre 3 más que $b$.

Luego, en el momento que se pretende enseñar alguna noción específica tras la manipulación con las letras y se encuentran dificultades en los estudiantes para su comprensión, antes que cuestionarnos como maestros debemos preguntar aquellos procesos cognitivos de nuestros estudiantes para establecer estrategias pedagógicas adecuadas.

2.2.2 Resolución de Problemas y Situaciones Problémicas. La Matemática es la única temática estudiada en todos los países de mundo y en todos los niveles educativos, por esta razón es considerada como el pilar básico de la enseñanza en todos ellos. Una de las causas fundamentales de esa presencia universal es que las Matemáticas constituyen un idioma "poderoso, conciso y sin ambigüedades"[8]. Este idioma pretende ser aprendido por nuestros estudiantes, hasta conseguir que lo "hablen", en general por medio de la contemplación de cómo lo hacen los otros (sus profesores) y su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios). La utilización de un idioma

[8]W.H. Cockroft. Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft. 1985

requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo y desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de Resolución de Problemas; las cuales permiten, mientras más se familiarice ganar confianza en el uso de las Matemáticas, puesto que ayuda además del desarrollo de mentes "inquisitivas" y perseverantes, a la capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Actualmente, diferentes investigaciones han demostrado que el enfoque de Resolución de Problemas contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, pues los problemas se conciben como situaciones en las que los estudiantes identifican, seleccionan y usan estrategias pertinentes y adecuadas para obtener soluciones válidas en el contexto matemático, así, estas distintas acciones que posibilitan los problemas se consideran como una aproximación del quehacer Matemático. Cabe anotar que los problemas siempre han ocupado un lugar en el currículo de Matemáticas, mostrado éste desde las diferentes propuestas curriculares recientes, en donde se afirma que la Resolución de Problemas debe ser eje central del currículo y como tal debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad Matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, sino más bien, deberá "*pernearlo*" en su totalidad y proveer un contexto natural en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidas.

Las investigaciones que han reconocido la Resolución de Problemas como una actividad muy importante para aprender Matemáticas, propone considerar en el currículo escolar de Matemáticas aspectos como los siguientes

• Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las Matemáticas.

• Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.

• Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.

• Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.

• Adquisición de confianza en el uso significativo de las Matemáticas (NCTM, 1989: 71).

"Mediante la Resolución de Problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que los rodea. Por esto se crean alrededor de este enfoque diversas concepciones tales como

• El párrafo 243 del informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la "Resolución de Problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria".

• En el libro de Hofsdadter, Godel, Escher, y Bach, se dice que "las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas, a partir de la Resolución de Problemas, siempre y cuando estos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino más bien como un proceso en el que el alumno estimas, hace conjeturas y sugiere explicaciones".

• Santaló (1985), gran Matemático español y además muy interesado en su didáctica señala que "enseñar Matemáticas debe ser equivalente a enseñar Resolución de Problemas. Estudiar Matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".

• En una conferencia pronunciada en 1968, George Polya decía: "Está bien justificado que todos los textos de Matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la Educación Matemática".

• Miguel de Guzmán (1984) comenta que"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las Matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamientos adecuados para la Resolución de Problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos ahí herméticamente emparedados?. A la Resolución de Problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las Matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra la vida propia de las Matemáticas"[9].

A pesar de no ser sencillo, y parezca poco importante, es interesante antes de embarcarnos al contenido de la temática de la Resolución de Problemas, delimitar ciertos contextos para lograr un entendimiento general. Se inicia de esta manera un acercamiento al conocimiento y al entendimiento de lo que es un "Problema", puesto que la palabra "Problema" se usa en contextos diferentes y con matices diversos.

Las definiciones de los diccionarios generales no aportan mucha claridad. Nos acercan más al sentido de qué es Problema la expresión de "problema de letra", que los alumnos emplean con frecuencia: son aquellos que hacen referencia a contextos ajenos de las Matemáticas propiamente dichas, los que llevan dentro una cierta "historia", que se puede contar y no "los que abren las ventanas del aula y hacen un puente (aunque sea

[9]Martín, Escudero Jesús. Resolución de Problemas. En: platea.pntic.mec.es/~jescuder/prob_int.htm

frágil) entre las Matemáticas y la vida diaria". Pero no es el único aspecto a destacar, hay que caracterizar los "Problemas" por oposición a los ejercicios, en los cuales se puede deducir con rapidez si se sabe resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo que se puede conocer o ignorar; pero una vez identificado, se aplica y basta. Justamente, la "proliferación" de ejercicios en clases de Matemáticas ha producido un arraigo en los estudiantes un síndrome generalizado, en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado, acabando sus especulaciones. En los Problemas no es evidente el camino a seguir, incluso pueden haber varios, los cuales no son enseñados previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de Matemáticas, hay que relacionar saberes procedentes de caminos diferentes, hay que poner a prueba relaciones nuevas.

Por tanto, un "Problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverlo es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverlo, una tarea en la que estemos dispuestos a dedicarle todo nuestro tiempo y esfuerzo. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelto nos proporcione una sensación considerable de placer e incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, en los avances que vamos realizando, encontramos una componente placentera.

Las características fundamentales de lo que se entiende por Problema está descrito anteriormente, es conveniente añadir comentarios adicionales sobre los mismos

• Los algoritmos que se suelen aplicar en clase, o que aparecen en los libros de texto, resuelven grupos enteros de Problemas. Lo que pasa es que si no situamos previamente los problemas a los que responden, estamos dando la respuesta antes de que exista la pregunta. Y en ese contexto no es difícil de adivinar el poco interés con que se recibe la misma.

• Las situaciones existen en la realidad. Los problemas los alumbramos nosotros. Pasan a este estatus cuando los asumimos como reto personal y decidimos en consecuencia dedicarle tiempo y esfuerzos para resolverlos.

• La resolución de un Problema añade algo a lo que ya conocíamos, nos proporciona relaciones nuevas entre lo que sabíamos o nos aporta otros puntos de vista de situaciones ya conocidas. Suponen el aporte de la chispa de creatividad, aquella que aparece de cuando en cuando, y que logra, por utilizar la expresión de Koestler (11983), que dos y dos sean cinco.

Cabe resaltar la fuerte componente de compromiso personal en los problemas, y la importancia que tienen en la manera en la que se nos presentan para que los asumamos como tales. Todo ello es de particular interés en la enseñanza, porque de cómo se plantee la cuestión, el contexto en el que se sitúe y de la "Tecnología" expositiva utilizada, depende en un porcentaje muy importante, el que un problema pase a ser considerado como tal por nuestros estudiantes.

Ahora bien otro aspecto a considerar es la de la Resolución de los Problemas, puesto que cuando hablamos de Problemas de inmediato pensamos en como resolverlos puesto que no es sólo el llegar a la respuesta, lo cual es importante, si no que para llegar a ella se requieren de diversos procesos que se cruzan constantemente como la comprensión, el planteamiento y elección de estrategias y la verificación. Rico (1990) al respecto señala: "Resolver problemas no se reduce a utilizar a la Matemática conocida, requiere de una gran dosis de creatividad y de reelaboración de hechos, conceptos y de relaciones, en el sentido más real del término, RESOLUCION DE PROBLEMAS es crear y CONSTRUIR Matemática. Memorizar y repetir todas las reglas deductivas que operan en un sistema formal fuertemente estructurado constituye aveces una derivación del comportamiento real del matemático. Confundir los procesos de producción y elaboración del conocimiento matemático con sus resultados cristalizados es un error frecuente en nuestra enseñanza, por ello, la Resolución de Problemas constituye no sólo una buena estrategia metodológica sino que supone una forma de aproximación real al trabajo en Matemáticas"[10].

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de Resolver Problemas en el desarrollo de las Matemáticas ha originado propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las investigaciones de Polya y Alan Schoenfeld.

Para Polya "resolver un Problema es encontrar un camino alguno, encontrar la forma, de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de la forma inmediata, utilizando los medios adecuados"[11] Polya describió los siguientes cuatro pasos para resolver Problemas

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el estudiante se pueda hacer, o de

[10] Grupo de Evaluación de la Educación Básica y Media 2003, ¿Cómo es la Evaluación en Matemáticas?. ICFES, Pág. 7. En http://200.14.205.40:8080 /portalicfes/home_2/rec/arc_3616.pdf

[11] Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Lineamientos Curriculares, pág 75.

aspectos que debe considerar para avanzar en la relación del problema, para utilizar el razonamiento heurístico, el cual se considera como las estrategias para avanzar en problemas desconocidos y no usuales. Aunque los matemáticos reconocen en los trabajos de Polya actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, también plantean que las estrategias de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el estudiante.

Alan Schoenfeld reconoce las estrategias discutidas por Polya, pero afirma que los estudiantes no las usan. Su trabajo juega de igual manera un papel importante en las actividades relacionadas con la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas y se fundamenta en las siguientes ideas

• A los estudiantes se les debe proporcionar en el salón de clases condiciones similares que experimentan los matemáticos en el proceso de desarrollo matemático. Schoenfeld afirma que los estudiantes necesitan aprender Matemáticas en un salón de clases que represente un microcosmo de la cultura Matemática, es decir, clases en donde los valores de las Matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejadas en la práctica cotidiana.

• Para entender la forma como los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente para proponer actividades que puedan ayudarlos, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar que en el proceso de Resolver Problemas influyen los siguientes factores

- El dominio del conocimiento: Son los recursos matemáticos que pueden ser utilizados como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

- Estrategias Cognoscitivas: Incluyen métodos heurísticos como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar un diagrama, el uso del material manipulable, el ensayo del error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.

- Estrategias Metacognitivas: Hacen referencia a las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones como planear, evaluar y decidir.

- El sistema de creencias: Hace referencia a la visión que se tenga de las Matemáticas y de sí mismos. Las creencias determinan la manera como se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo que se dedica, entre otras.

Por otro lado, se considera que el trabajo orientado por este enfoque, facilita que el estudiante construya significados sobre y desde la Matemática en la medida que la usa y la pueda relacionar con su vida cotidiana; además promueve el desarrollo de procesos cognitivos de "Orden Superior", los cuales son necesarios en una formación autónoma. Por eso se considera que la Matemática escolar, pensada desde la formulación y resolución de problemas puede contribuir a la consecución de los fines de la Educación en Colombia, al desarrollar un pensamiento crítico, reflexivo y analítico, necesarios para crear disciplina y habilidades de trabajo, promover el desarrollo de la autonomía, facilitar los procesos de participación y cultivar el pensamiento científico. Así, el enfoque de formulación y Resolución de Problemas se preocupa tanto del conocimiento matemático como de los procesos que intervienen en la construcción de su pensamiento al igual que permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático tales como

• Desarrollar habilidades para comunicarse matemáticamente: Expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.

• Provocar procesos de investigación en el pensamiento matemático: La manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares), la formulación de conjeturas, la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella), la argumentación (explicar el porque, estructurar argumentos para sustentar la generalización, explorar nuevos caminos), entre otros.

• Investigar la comprensión de conceptos de procesos matemáticos a través de: Reconocimiento de ejemplos y contraejemplos, uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representación, identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos, verificación de resultados, de un proceso, justificación de pasos de un proceso, reconocimiento de pasos correctos e incorrectos, generación de nuevos procesos, entre otros.

• Investigar estrategias diversas, explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas Matemáticas.

Es preciso aclarar que los trabajos de Resolución de Problemas se consideran desde dos perspectivas. Una es la Solución de problemas como una interacción con Situaciones Problemáticas o como estrategia didáctica. Otra es la capacidad de Resolución de Problemas como objetivo general del aula ó sea como logro fundamental de toda la Educación Básica y Media. Son dos perspectivas que no se pueden confundir. Pero ¿Qué son las Situaciones Problemáticas?

2.2.3 Situaciones Problemáticas. Las situaciones científicas y las situaciones cotidianas están más o menos alejadas del contexto Matemático dependiendo de los puntos de vista o enfoques bajo los cuales se examinen. Pero si la educación debe prepararnos para enfrentarnos a la realidad, en algún momento del proceso aprendizaje se hace necesario establecer un nexo entre ambos niveles. Este nexo entre el mundo conceptual científico y el entorno de cada día se puede establecer en la escuela mediante la manipulación de situaciones de la realidad, a partir de las cuales el estudiante pueda lograr, mediante los procesos de abstracción y generalización, un acercamiento a los conocimientos científicos. Luego ante cualquier situación que se presenta en la vida diaria pueden ocurrir dos cosas: que se conozca el mecanismo para solucionarla o que no se sepa qué hacer. En el primer caso aplicaremos los pasos necesarios para resolver la situación haciendo uso de nuestra memoria. En el segundo, tendremos que buscar la solución mediante muchas más destrezas intelectuales: análisis, síntesis, memoria, búsqueda y clasificación de la información, entre otras. Este planteamiento, núcleo central de varios autores (Garret, Gil, Furió, Porlán, etc.) supone que diferentes personas están en uno u otro caso según su experiencia. También que la resolución que adopte cada uno será diferente y los caminos serán múltiples. En el aula de clases pasa exactamente lo mismo; la reacción de un estudiante ante una situación planteada por el profesor depende de qué conoce previamente del mecanismo de resolución. En ciertas situaciones, el estudiantes tiene ya respuestas satisfactorias de acuerdo algún modelo de solución, presentado anteriormente por el profesor en clase como "solución - tipo". Caso en el cual estudiante debe reconocer la situación, plantearla y resolverla mediante la "solución - tipo" conocida, entrando a lo que se denomina ejercicio.

En una forma más avanzada tenemos situaciones que en sus diversas formas se denominan como problemas de lápiz y papel, experiencias de laboratorio incluso situaciones más abiertas como pequeñas investigaciones frente a trabajos prácticos (tanto documentales como experimentales) de mayor alcance. Una apertura todavía mayor nos lleva al problema abierto; se diferencian unos de otros en el mayor o menor grado de reproducción controlada de la realidad y en el sentido que toma la situación de aprendizaje desde los conceptos científicos del mundo real o viceversa.

Cuando se plantea una Situación Problemática hay un aspecto que se muestra como punto de partida: enunciado, la descripción del fenómeno sobre el que se pretende trabajar; aparentemente el tipo de situaciones que se pueden plantear y la forma de hacerlo es muy limitada lo que lleva a cierta uniformidad en la presentación escrita de ejercicios, problemas y prácticas.

Pero esta presentación tiene detrás muchas intenciones que diferencian las distintas formas de hacer este tipo de "tarea docente". La resolución depende del "Modelo didáctico" por el que se opte, surgiendo las diferentes concepciones de la ciencia, de la escuela y del mundo real que asumir los profesores. Es decir aparecen diversas formas de ver una misma situación.

Los modelos didácticos descritos por diferentes autores se agrupan bajo las siguientes denominaciones

a. Tradicional, "de siempre", transmisor, transmisor - receptor.

b.Técnico, cientificista, tecnocrático, tecnológico, eficaz, tecnicista, transmisor estructurado.

c. Artesano, humanista, activista, practicista, artista.

d. Descubridor, de descubrimiento, investigativo.

e. Constructivista, de elaboración, crítico, elaborador, reflexivo, investigador en el aula.

En una primera aproximación se señalan las siguientes concepciones que sobre Situaciones Problemáticas se tiene de cada uno de los modelos

• Transmisor: Dificultad teórica que se resuelve utilizando uno o varios algoritmos.

• Tecnológico: Dificultad teórica, o práctica que se resuelve utilizando algoritmos o experiencias de laboratorio.

• Artesano: Dificultad que se resuelve aplicando estrategias no formalizadas, espontáneas o "caseras".

• Descubridor: Dificultad que se resuelve de forma múltiple, de acuerdo a las variables y diseño establecidas por el alumno.

• Constructor: Dificultad que se resuelve de forma múltiple, de acuerdo a las variedades y diseño establecidos por el alumno.

De esta manera el acercamiento de los estudiantes por medio de las Situaciones Problemáticas con la vida diaria, con las Matemáticas y otras ciencias a través de este medio conlleva al aprendizaje activo, a la inmersión de las Matemáticas en la cultura, al desarrollo de procesos de pensamiento y contribuye significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las Matemáticas.

Con respecto al contexto, tradicionalmente los estudiantes aprenden Matemáticas formales y abstractas descontextualizadas, por ello es de gran importancia que los profesores planteen a los estudiantes Situaciones Problemáticas contextualizadas, es decir, tratar situaciones lo más cercanas a la vida diaria o al futuro mundo del trabajo. Decir "Hallar un número tal que el triple de su mayor disminuido en el doble de su antecesor, da diez como resultado", es un problema fuera de contexto y que al estudiante le es difícil de imaginar y que poco o ningún interés puede generarle; en cambio plantear "Para cercar un terreno rectangular con tres vueltas de 1530 mtrs. Determinar la superficie del terreno, si se sabe que el largo mide el doble que el ancho", es una Situación Problemática quizás más compleja que la anterior, pero que esta en "contexto" o sea que el estudiante pueda imaginarla en la realidad y ser de interés. Así se evita que el estudiante aplique conocimientos memorísticos al momento de resolver problemas descontextualizados, que con frecuencia son problemas denominados de "aplicación" dejados para el final de una unidad o para el final del programa los cuales por falta de tiempo se suelen omitir.

Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser consideradas solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarce en el momento que tiene lugar el aprendizaje. Desde luego el contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, es decir no solo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en el desarrollo del descubrimiento o reinvención de las Matemáticas. Esta visión exige que se cree Situaciones Problemáticas en las que los estudiantes puedan explorar, plantear preguntas, y reflexionar sobre modelos; por esta razón en los últimos años van abriendo paso a planteamientos que integran estas diferentes situaciones de aprendizaje. Con ellas esta surgiendo una nueva metodología, la enseñanza mediante la resolución de Situaciones Problemáticas, poco formalizada aún, pero de gran potencial didáctico.

Para culminar cabe mencionar las diferentes concepciones acerca de las Situaciones Problemáticas de algunos pensadores tales como Miguel de Guzmán quien plantea que "la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en lo absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces"[12] Este mismo autor considera que lo más importante a tratar es que el estudiante

- Manipule los objetos matemáticos.

- Active su propia capacidad mental.

- Reflexione sobre su proceso de pensamiento con el propósito de mejorarlo conscientemente.

- Realice transferencias de estas actividades a otros aspectos del trabajo mental.

- Se prepare para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana.

- Esté preparado para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

[12]Miguel de Guzmán, Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Editorial Popular, Madrid, 1993. Pág 111.

De igual manera, él menciona las siguientes razones para tratar las situaciones problemáticas como contexto

• Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros estudiantes: les brindamos la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.

• Porque el mundo evoluciona muy rápidamente: la capacidad de adaptación a los cambios de la ciencia y de la cultura que no deben ser indiferentes.

• Porque el trabajo se puede hacer atractivo, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.

• Porque el trabajo realizado de esta forma tiene un valor universal y no se limita sólamente al mundo de las Matemáticas.

• Porque es aplicable a todas las edades.

Y para lograrlo la forma más adecuada de presentar un tema matemático basado en la Situaciones Problemáticas debe proceder más o menos del siguiente modo:"propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...) - manipulación autómata por los estudiantes - familiarización con la situación y sus dificultades - elaboración de estrategias posibles - ensayos diversos por los estudiantes - herramientas elaboradas a lo largo de la historia contenidos motivados) - elección de estrategias - ataque y resolución de los problemas - recorrido crítico (reflexión sobre el proceso) - afianzamiento formalizado (si conviene) - generalización - nuevos problemas - posibles trasferencias de resultados, de métodos, de ideas..."[13]

Igualmente investigadores holandeses del instituto Freudenthal plantean las siguientes razones

• Se puede ver la importancia de distintos tópicos de las Matemáticas a través de diversos ejemplos, que emplean las Matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.

• Los estudiantes aprenden a usar Matemáticas en la sociedad y a descubrir que ellas3 son relevantes para su educación y profesión posteriores. Puesto que es importante que todos los estudiantes las aprendan como parte de su educación básica y que sepan porque las aprenden. A través del contexto desarrollarán una actitud crítica y flexible ante el uso de las Matemáticas en problemas que deberán afrontar en la vida real.

• Se acercan los estudiantes a la historia tanto de las Matemáticas como de las demás disciplinas y aumenta su interés por ésta.

[13]De Guzmán, Miguel. Tendencias innovadoras en Educación Matemática, Pág. 9, En www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm

• Despiertan la creatividad de los estudiantes y los impulsa a emplear estrategias informales y de sentido común. Una vez el estudiante se enfrenta ante un problema en un contexto adecuado desarrolla la capacidad de analizarlo y organizar la información; las estrategias intuitivas que emplea pueden constituir un buen punto de partida para llegar hacia la formalización, es decir buscar un sentido.

• Existe un buen contexto que puede actuar como mediador entre el problema concreto y las Matemáticas abstractas. En el proceso de resolución, el problema se transforma en un modelo de la situación a un modelo para todos los problemas que se le parecen desde el punto de vista matemático.

De todos modos, podemos afirmar que quien está plenamente "imbuído" en ese espíritu de la resolución de Situaciones Problemáticas se enfrenta al trabajo de transmitir adecuadamente los contenidos de su programa. De ahí la importancia de trazar líneas de trabajo cuyo propósito sea el de conseguir una buena y eficaz preparación sobre éste tema.

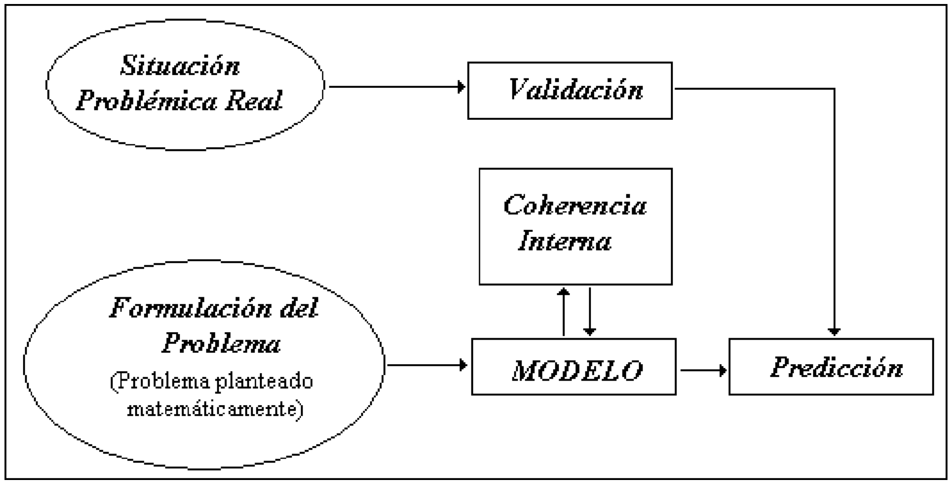
2.2.4 La Modelación: Descripción de la realidad a través de las matemáticas.Nuestra sociedad ha experimentado cambios, pasando de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información, por esta razón las Matemáticas escolares también han sufrido transformaciones si se pretende que los estudiantes de hoy sean ciudadanos realizados y productivos en el siglo que viene.

Cuando se habla de actividad Matemática en la escuela se destaca que el alumno aprende Matemáticas "haciendo Matemáticas". Lo que se supone esencial es la resolución de problemas de la vida diaria, lo cual implica que se integre en el currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.

La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las Matemáticas en la Modelación.

En la construcción de modelos sus elementos básicos son presentados en la siguiente figura,

**Elementos básicos de la construcción de modelos**




Propuesta por Hans Freudenthal, quien considera que el núcleo básico del currículo de Matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización.

Una Situación Problemática real es el punto de partida de la Modelación, la cual debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a las condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se pueda manejar en el aula) que contiene las características esenciales de la situación original y por otra parte permite una aproximación con medios Matemáticos.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente, deben ser trasladados a las matemáticas, es decir, debe ser matematizado y por ende resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta de ciertos objetos matemáticos como "los elementos básicos" de la situación original o del problema formulado, y sus relaciones.

En la Resolución de Problemas su proceso continúa mediante el trabajo de sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos y resultados matemáticos conocidos, al igual que desarrollar otros nuevos. Dichos resultados tienen que ser válidos, es decir, se tienen que trasladar nuevamente al mundo real para poder ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera, el que resuelve el problema también valida el modelo y observa si se justifica usarlo no.

En cuanto a la modelación y la matematización algunos autores las consideran equivalentes. Aunque, se puede considerar la matematización como el proceso desde el problema enunciado matemáticamente hasta las matemáticas y la modelación a la construcción de modelos como el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático.

Algunos pensadores como Treffers y Gofree describen la modelación como "una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas"[14]
Estos mismos autores proponen que "para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente", pueden ayudar algunas actividades como las siguientes

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas.
- Descubrir regularidades.
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Cuando el problema haya sido transferido a un problema matemático, éste problema puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas, para lo cual se puede realizar actividades como las siguientes

- Representar una relación en una fórmula.
- Probar o demostrar regularidades.
- Definir y ajustar modelos.
- Utilizar diferentes modelos.
- Combinar e integrar modelos.
- Formular un concepto matemático nuevo.

[14]Jan de Lange, Mathematics Insight and Meaning. Utrecht, OW & OC. Netherlands. Pág 43

• Generalizar (el nivel más alto para la modelación).

En el aprendizaje de las Matemática la modelación es un proceso muy importante, que permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los estudiantes necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles.

La mayoría de las definiciones dadas en los libros son el resultado de un proceso de modelación que si se omite obliga a los estudiantes ha aprendérselas de memoria, porque no ha formado el modelo mental en el cual esa definición tiene sentido.

En la historia de las matemáticas escolares se ve que la primera modelación de los niños es la del infinito, cuando ven que al contar y contar nunca acaban, y así se arman un modelo de que los números son infinitos, hecho que podrán formalizar posteriormente. En cualquier problema, cuando uno cree que el estudiante no pueda pasar de la historia de la ecuación, lo que faltó fue un proceso de modelación de los hechos relatados en la historia. El estudio de las funciones en la educación básica secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio; es importante que los estudiantes se sensibilicen ante los patrones que se encuentran a diario en diversas situaciones, a descubrirlas y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones. Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas se está privando al estudiante de la experiencia de la modelación para llegar a esos sistemas simbólicos.

En una situación problemática compleja de la vida diaria, en las que usualmente tienen excesos de información, muchas veces falta la que realmente es importante, que sin el proceso de modelación adecuado el estudiante no está capacitado para resolver.

Finalmente se tienen en cuenta que en los procesos de modelación se relacionan con el nivel del lenguaje de los niños, en ocasiones el lenguaje facilita o retarda la comprensión de la realidad; además, la heterogeneidad de los grupos conduce a que haya diferentes clases de modelos según su desarrollo.

2.2.5 Influencia de la Historia en la Educación Matemática. El conocer y constatar el desarrollo prodigioso de la Matemática nos lleva a tomar conciencia del dinamismo de su Historia, como lo afirma Henri Poincaré:

*"Si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia"*[15].

[15] *Morris Klein, Pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días I. Alianza Editorial. Madrid, 1992. Pág 13*

El conocimiento de la Historia proporciona, entonces, una visión dinámica de la evolución de la Matemática, nos enseña que muchas veces se han necesitado décadas, e incluso cientos de años de esfuerzos antes de conseguir algún progreso de importancia, y en ocasiones fueron logrados tras los conflictos del proceso creativo y las múltiples frustraciones que tuvieron que superar para llegar a construir una estructura importante. De la misma manera estas estructuras fueron concebidos tras fuertes discusiones y bajo concepciones ideológicas diferentes, al igual, han acumulado un enorme conjunto de hechos permitiendo atestiguar que todo el trabajo en torno a ellos se sustenta en la práctica vinculada a procesos reales del mundo y de una sociedad existente, por ejemplo, el surgimiento de la geometría estuvo fuertemente vinculado a las crecientes de los ríos y a la construcción de las pirámides de los egipcios, al igual que la trigonometría está unida a los trabajos de construcción de canales para la irrigación fluvial de los pueblos de la región mesopotámica.

El conocimiento de la evolución de la Matemática, de la biografía de sus creadores más importantes, el momento histórico en el que sea desarrollan, los diferentes tropiezos en el desarrollo de los conceptos junto con sus aciertos y desaciertos nos hacen conscientes del carácter histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento, así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología y las diversas ciencias han ejercido unas a otras; dejando a un lado las preconcepciones de ver a la matemática como algo complejo, endiosada, inaccesible y totalmente aislada de otras ciencias y nos muestran en su totalidad su aspecto interdisciplinar.

Al retomar los orígenes del desarrollo de las ideas se las puede encontrar en toda su sencillez y originalidad, todavía con ese sentido de aventura la cual ha sido desarraigada en los textos y que difícilmente se puede trasladar al aula escolar; en parte porque en la escuela se ha adoptado a la Matemática como una sistematización de teorías que exige siempre brindar el carácter reflejo de su actualización moderna, lo cual es un error; ya que si por el contrario en la escuela se brinda un enfoque totalmente diferente al utilizado actualmente podría proporcionar una visión verdaderamente humana de la Matemática. Como dice muy acertadamente O. Toepliz: "Con respecto a todos los temas básicos del cálculo infinitesimal... teorema del valor medio, serie de Taylor,... nunca se suscita la cuestión ¿Por qué así precisamente? o ¿Cómo se llegó a ello? Y sin embargo, todas estas cuestiones han tenido que ser en algún tiempo objetivos de una intensa búsqueda, respuestas a preguntas candentes... Si volviéramos a los orígenes de estas ideas perderían esa apariencia de muerte y de hechos disecados y volverían a tomar una vida fresca y pujante"[16]. Si se tiene esta visión dinámica en el trabajo educativo se podrían obtener grandes resultados como tener conciencia de las dificultades que en trabajo surgieron al igual que el conocimiento de los tortuosos caminos que llevaron a la invención de numerosas teorías y así llevarlos hacia el futuro.

[16] Miguel de Guzmán. Sobre la importancia del conocimiento de la historia de la Matemática. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza. Págs 31-46.

Una vez, comprendida la importancia del conocimiento de la Historia de las Matemáticas, se podrá comprender el valor del conocimiento histórico, el cual no consiste solamente en tener una serie de historietas o anécdotas curiosas con el fin de entretener a los estudiantes, cuando se hace un alto en el camino, por el contrario es una herramienta que nos ayuda a entender y comprender una noción o idea de la manera mas adecuada en cuanto a la metodología de su enseñanza, debido a que conocemos sus dificultades y la ilación de sus ideas en toda su originalidad, así como lo menciona en la obra Tendencias Innovadoras en Educación Matemática (1992) Miguel de Guzmán

> *"Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir y la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado,..."*

este autor señala además, en la misma obra, que la historia de las Matemáticas es una herramienta que en el campo de la Educación Matemática nos ayuda a

• Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas.

• Enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...

• Señalar los problemas abiertos con cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente,...

• Apuntar las conexiones históricas de la Matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

• Comprender mejor las dificultades del hombre genérico de la humanidad, en la elaboración de las ideas Matemáticas.

• Entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía Matemática.

• Es un saber que nos sirve como guía para su propia pedagogía.

De la misma manera Fauvel (1991) indica las siguientes razones para utilizar la historia en el aula escolar

1. Ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje.

2. Muestra el aspecto humano de las Matemáticas.

3. Cambia en los alumnos la percepción de las Matematicas.

4. Ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural.

5. Provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinario con otros maestros.

6. El desarrollo histórico ayuda a ordenar la presentación de los tópicos en el currículo.

7. Indica cómo los conceptos fueron desarrollándose, ayudando esto a su comprensión.

8. Los alumnos sienten bienestar al realizar esto, y no hacerlo únicamente con unos problemas.

En este mismo sentido Alberto Campos menciona con respecto al trabajo del docente

> *"... Es inconcebible que un Matemático se conforme con lo que aprende de una ciencia ya hecha y formalizada, sin tener en cuenta la evolución de las ideas que condujo a sus creadores desde sus primeros tanteos hasta la elegante presentación actual. El recuerdo de dicha evolución es por cierto altamente provechoso para el investigador y para enriquecer el material de motivación del futuro docente"*[17].

Por lo tanto, el docente al utilizar la historia encuentra en ella una herramienta útil para lograr que el estudiante alcance el aprendizaje deseado y a través de él le permita descubrir el principio de los conceptos, métodos que aprenderán en el aula, buscando despertar y motivar el interés del estudiante hacia el estudio de esta ciencia. Al igual que esta herramienta proporciona una guía para tener en cuenta las diferentes ideas o pensamientos, los problemas de los que han surgido, da luces para entender las razones que han conducido al hombre para apropiarse de ellos.

Para finalizar, podemos concluir que la historia puesta al servicio de la enseñanza de la matemática se convierte en una herramienta didáctica que favorece los procesos de asimilación, lo que se refleja en la correcta utilización de los principios didácticos de la enseñanza, ya que este enfoque permite observar como las distintas ideas evolucionan y cambian con el paso del tiempo, bien impulsadas por el propio desarrollo teórico ó bien por sus aplicaciones a nuevos problemas. Respecto a ello Thomás Cooper afirma

---

[17]Campos, Alberto. *Sugerencias para la programación en la carrera de Matemáticas puras.* Ponencia en V Coloquio Colombiano de Matemáticas, Medellín, 1975

*"La Historia de un arte o de una ciencia es una introducción inherente a su estudio, ya que proporciona una óptica clara y concisa de la manera en que han tenido lugar las innovaciones, constituye una garantía contra los errores futuros gracias al testimonio de los errores de los grandes sabios del pasado, y rinde un homenaje de estima y reconocimiento a los que hicieron a la humanidad beneficiaria de sus descubrimientos"*[18].

2.2.5.1 Historia de los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Estudiar la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, desde el punto de vista de su desarrollo histórico, es interesante y además formativo porque observamos que no construye de entrada una concepción matemática completa, puesto que los conceptos son construidos parcialmente y se pueden ir perfeccionando y en este largo proceso obtener una maduración.

Al analizar el surgimiento de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en las distintas civilizaciones podemos resaltar las múltiples dificultades que tuvieron para lograr la genialidad de sus razonamientos y lo tardío de éste paso para la humanidad.

Para conocer y destacar el trabajo sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales junto con su proceso de evolución simbólica, haremos un recorrido por las diferentes civilizaciones.

De los Hindúes se resaltan los primeros documentos matemáticos (siglo III d.c.) los cuales pertenecieron a los *Sulvasutras*. En estos documentos aparecen todos los conocimientos necesarios para construir los templos, por ejemplo, mencionamos el siguiente problema:

> *"hallar el lado de un rectángulo conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado"*

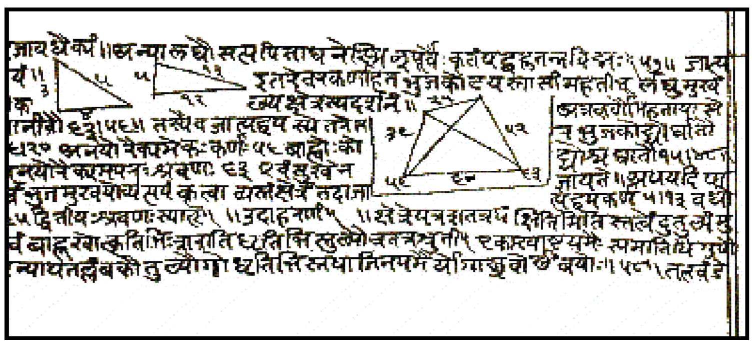
En nuestra notación actual sería: $Ax = S$, donde $A$ es el lado conocido del rectángulo, $x$ es el lado desconocido y $S$ es el área del cuadrado dado. Está ecuación era resuelta por el "Método de la Falsa Posición", el cual consistía en dar un primer valor a la incógnita y se comprueba si es correcto, si no lo es, mediante proporciones se busca la respuesta correcta, de manera similar como lo hacían los Egipcios, de está manera los matemáticos hindúes, utilizaban el álgebra para resolver problemas habituales y del comercio. Los descubrimientos en este campo se deben más a azares en su práctica que a un planteamiento profundo de las Matemáticas, pero con el perfeccionamiento del sistema posicional en base diez, llegaron a abordar de una forma más clara y sencilla a diferencia de otros pueblos.

De la primitiva álgebra hindú se rescata que los primeros algebristas expertos parecían encontrar las ecuaciones indeterminadas (Diofánticas) mucho más fáciles que las

[18]Jean-Paul Collette. La Historia de las Matemáticas I. Alianza Editorial. Madrid, 1992. Pág 3

ecuaciones determinadas del álgebra elemental; entre ellos se destacan Brahmagupta (siglo VII) quien fue aparentemente el primero que dio una solución general de la ecuación Diofántica lineal, la cual en notación moderna es: $ax + by = c$ con $a$, $b$ y $c$ enteros. Para que ésta ecuación tenga soluciones enteras, el máximo común divisor de $a$ y $b$ debe dividir a $c$, entonces, las soluciones de las ecuaciones vienen dadas por $x = p+mb$, $y = q-ma$ donde $m$ es un entero arbitrario y $p, q$ una solución particular. De esta misma forma escribimos hoy el conjunto de soluciones de un sistema determinado. Además *Brahmagupta* expresa ya de forma sincopada como resolver ecuaciones lineales; expresa la incógnita por la abreviatura *"yă"*, abreviatura de "*yăvattăvat*", que significa "tanto como", y las operaciones con la primera sílaba de las palabras.

Imagen escrito Matemático Hindú



En cuanto a los sistemas de ecuaciones también aparecen en los documentos indios, no obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones, como las descritas anteriormente.

Los Babilonios (el mayor número de documentos corresponde al período 600 a.c. a 300 d.c.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizá por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado. Enunciaban y resolvían los problemas algebraicos sin notación simbólica que hoy conocemos, aunque a menudo aparecen términos geométricos para designar a las incógnitas, como longitud (*us*), anchura (*sag*), área (*aša*), entre otros, sin que tuvieran relación con problemas de medida, recordemos que los babilonios utilizaban símbolos estilizados, escritura cuneiforme, y representaban los números en base 10 y base 60, cuyos escritos eran grabados en tablillas de arcilla como se muestra en la figura.

Imagen tablilla de Arcilla Babilónica

Un ejemplo tomado de una de estas tablillas babilonias plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos

$$\frac{1}{4}\ anchura + longitud = 7\ manos$$
$$longitud + anchura = 10\ manos.$$

La solución se halla en primer lugar reemplazando cada “mano” por 5 “dedos”, así:

$$\frac{1}{4}\ anchura + longitud = 35\ dedos$$

$$longitud + anchura = 50\ dedos.$$

y observando a continuación que una *anchura* de 20 *dedos* y una *Longitud* de 30 *dedos* satisfacen las dos ecuaciones. A partir de está comprobación se calcula la solución, no obstante, por un método alternativo equivalente al de eliminación por medio de una combinación lineal, expresando todas las dimensiones en términos de *manos*, y llamando $x$ e $y$ respectivamente a la *longitud* y a la *anchura*, las ecuaciones se convierten en:

$$y + 4x = 28$$

$$x + y = 10$$

Luego restando la segunda de la primera nos obtenemos

$$3x = 18$$

es decir $x = 6$ *manos* ó 30 *dedos* e $y = 20$ *dedos*.

En otro problema que aparece en un texto de la época nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones lineales simultaneas con dos incógnitas, llamadas respectivamente "El primer anillo de plata" y "El segundo anillo de plata", si llamamos $x$ e $y$ estas dos incógnitas, las dos ecuaciones en notación actual son

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1 \,, \quad \frac{6x}{7} = \frac{10y}{11}$$

y la solución viene expresada, lacónicamente por medio de la regla:

$$\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \,, \quad \frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}$$

Se considera también que algunos problemas resueltos por los babilonios vienen casi siempre expresados en términos geométricos considerando el semi-perímetro $x + y$ y el área $x * y$ de un rectángulo. Especialmente, parece que los métodos babilónicos tuvieron su origen en la observación de algunos resultados obtenidos (tal vez) por el método conocido de ensañar y fallar. De todas maneras, es bastante claro por los problemas que propusieron y por su discusión de las soluciones de que desarrollaron, que emplearon, el método siguiente, aunque no lo expresaban en términos generales con letras que representan las constantes sino a través de ejemplos numéricos particulares, generalizables en el sentido que se podrían seguir los mismos pasos con otros números. En la notación moderna corresponde a

$$x + y = a \quad \text{y} \quad x * y = b$$

se consideran

$$x = \frac{a}{2} + z \quad \text{y} \quad y = \frac{a}{2} - z$$

dos números cuya suma es evidentemente $a$. Luego, si se sustituye estos dos valores en la ecuación $x * y = b$ se obtiene:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b$$

de donde

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = b$$

de ahí se sigue que

$$z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

o sea

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Nota: La raíz negativa nunca fue considerada. Es evidente de aquí que

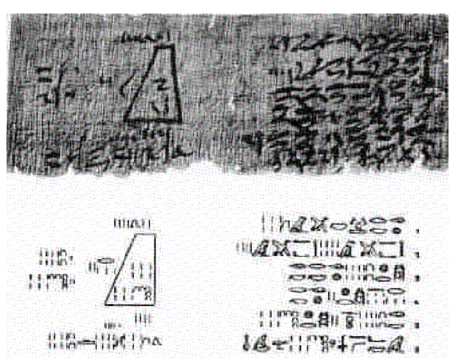
$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$y = a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

El avance logrado por los babilonios fue tal, que llegaron a plantear sistemas de diez ecuaciones con diez incógnitas en problemas de astronomía que resolvían combinando las ecuaciones.

Los Egipcios por su parte nos dejaron en sus papiros multitud de problemas matemáticos resueltos. El álgebra egipcia, en este aspecto se centro casi exclusivamente en la resolución de ecuaciones lineales y su desarrollo fue notablemente inferior a la babilónica, la mayoría de los problemas que se conservan en los papiros Rhind y de Moscú están relacionadas con cuestiones cotidianas (como se muestran en las figuras). La solución a las ecuaciones lineales viene dada por la aplicación del método "Regula Falsí" o de "La Falsa Posición". En cuanto al simbolismo, utilizaban para la suma $\Lambda$, para la resta $\Lambda$ , para la raíz cuadrada $\Gamma$ y a la incógnita la llamaban *aha* o *montón*.

Imagen del Papiro de Moscú



"En el papiro Rhind, copiado por el escriba Ahmes en 1650 a.c. que parece que proviene de otro documento del Imperio Medio (2000 - 1800 a.c.) el llamado "problema 24" dice: " Aha el total y su séptima parte hacen 19", en nuestra notación sería resolver la ecuación : $x + \frac{x}{7} = 19$"

Imagen del Papiro de Rhind

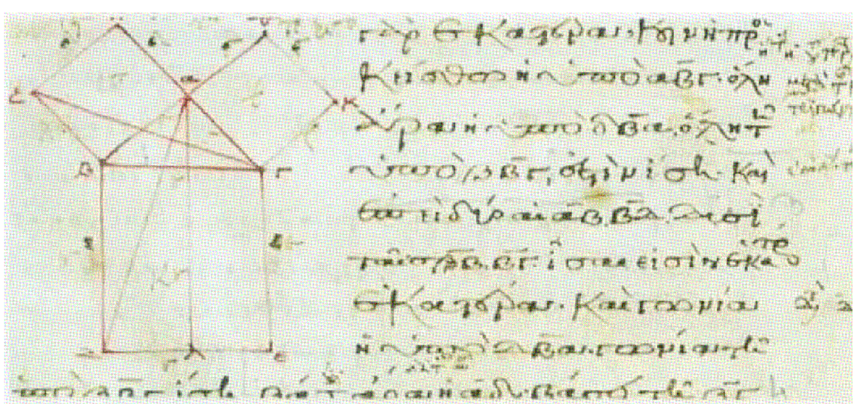
Utilizando el método “Regúla Falsi” *Ahmes* considera como primer valor de la incógnita el 7, y obtiene como valor de la ecuación el 8, que no es correcto. Entonces, como la proporción entre 8 y 19 ha de ser igual que entre 7 y la solución (la validez de esto está asegurada por la linealidad de la expresión) y como:

$$8\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19 \quad \text{en realidad expresan } \frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

habrá que multiplicar $7\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ para saber el valor de aha;Ahmes halla la respuesta correcta $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ y “comprueba” su resultado mostrando que si a $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ le suma uno un séptimo de él mismo, es decir, $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, se obtiene efectivamente 19. Aquí nos encontramos con otra etapa significativa en el desarrollo de la matemática, ya que una comprobación puede considerarse como un caso muy simple de demostración, en cierto sentido.

Los Griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones pero utilizando métodos geométricos.

Imagen de los Elementos de Euclides



“Thymáridas” ( 400 a.c. ) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas, conocida con el nombre de la “*Flor de*

*Thymáridas*" encontrado en un manuscrito del siglo I d.c. por el matemático griego Jamblico el cual expresa que tenemos $n$ incógnitas:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

A las cuales le sumamos una más $x$. Las siguientes sumas son conocidas (dadas)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= S \\ x + x_1 &= a_1 \\ x + x_2 &= a_2 \\ \cdots\cdots& \\ x + x_n &= a_n \end{aligned}$$

Jamblico da una solución general al sistema que es equivalente a la fórmula

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n) - S}{n-1}$$

está solución puede encontrarse usando un correcto "Método de Diofanto que requiere que se tome $x = s$ y que se observe que las demás incógnitas, son $a_1 - s, a_2 - s, \cdots, a_n - s$ de donde la suma esta dada por

$$(a_1 + \cdots + a_n) - (n-1)s$$

Diofanto por su parte también resuelve problemas en los que aparecen sistemas de ecuaciones, pero se transforman en una ecuación lineal. En un cierto problema se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado perfecto; éste es un ejemplo típico de problema de análisis diofántico, en el que solo se admiten como soluciones aceptables números racionales. Para resolver este problema, Diofanto no llama a los números buscados $x$ e $y$, sino $x$ y $2x+1$. De manera al añadir el segundo al cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a $x$. Ahora bien, se exige además que $(2x+1)^2 + x$ también sea un cuadrado perfecto, y aquí Diofanto no se preocupa por buscar las infinitas respuestas posibles, si no que se contenta con elegir un caso de un cuadrado perfecto, concretamente en este ejemplo el número $(2x-2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x+1)^2 + x$ resulta una ecuación lineal en $x$, de la que se obtiene $x = \dfrac{3}{13}$.

Aquí podemos ver un tipo de planteamiento en Diofanto que se aproxima un poco a lo que podríamos llamar un "Método": siempre que dos números tengan que satisfacer dos condiciones, se deben elegir dichos números indeterminados de tal manera que una de las dos condiciones se verifique automáticamente, y a continuación se les impone la única, segunda condición para determinarlos. Es decir, que Diofanto, en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultaneas con dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que sólo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso. De está manera una de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diofanto es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces muy ingeniosos.

Los Chinos también se interesaron por la resolución de ecuaciones, lo demuestra su libro "*Chui - Chang Suan -Shu*" ( siglo III a.d.c.), los nueve capítulos nos recuerdan también la matemática Egipcia, por su uso del "Método de la Falsa Posición", pero lo cierto es que la invención de este procedimiento lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental. De igual manera empleaban los cuadros mágicos como ordenaciones singulares de números, y además se encuentran en ellos un esbozo del método matricial para la Resolución de Sistemas de Ecuaciones.

Específicamente en el libro VII llamado "Exceso - Defecto" se plantean y resuelven problemas que conducen a ecuaciones lineales y sus sistemas, y se elabora el método de su resoluciones, que coincide con el método de las dos sustituciones erróneas. Los problemas, también en este caso se presentan en orden creciente de dificultad. El método tampoco está formulado en forma precisa y tienen muchas variedades de carácter particular, por ejemplo: En el problema N°18 se afirma que

> "*Nueve lingotes de oro pesan tanto como 11 Lingotes de Plata. Si se intercambian los lingotes de uno en uno, entonces el peso de oro y la plata se diferencian en 13 lan (16 lan son iguales a un tzin)*"

El problema de la determinación de los pesos de los lingotes se reduce a la solución del sistema de ecuaciones, lo que en notación moderna corresponde a

$$9x = 11y \ , \quad 8x + y + 13 = 10y + x$$

la cual se resuelve con la ayuda de la regla de dos situaciones erróneas. Precisamente se toma $x_1 = 3\, tzin$ y $x_2 = 2\, tzin$. Entonces $y_1 = \frac{25}{11}\, tzin$, $y_2 = \frac{17}{11}\, tzin$. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación (en la cual todos los miembros están trasladados en un solo lado, supongamos que al izquierdo) da respectivamente el defecto: $z_1 = \frac{-49}{11 \times 16}\, tzin$ y el exceso $z_2 = \frac{15}{11 \times 16}\, tzin$. El verdadero valor de $x$ se encuentra por la regla

$$x = \frac{x_1 z_1 - x_2 z_2}{z_2 - z_1} = \frac{215}{64}\, tzin$$

Por lo tanto

$$y = \frac{9}{11} x = \frac{153}{64}\, tzin$$

El perfeccionamiento hecho al 7 libro consiste en la regla de Resolución de Sistema de Ecuaciones Lineales y su generalización a sistemas con mayor número de incógnitas expuesta en la regla "*Fan - Chen*", a lo que está dedicado todo el libro 8. Los problemas de este libro conducen a un sistema de 5 ecuaciones lineales con raíces positivas. Para todos los Sistemas se establece un algoritmo único de cálculo de las raíces en el mencionado "Fan - Chen" que consiste en lo siguiente

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales (ecuaciones lineales)

$$\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = & b_n \end{array}$$

En correspondencia con el método chino de escritura (de derecha a izquierda por columnas de arriba hacia abajo a) se forma la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

está matriz se transforma de tal modo de que todos los números a la izquierda y arriba de la diagonal principal de los coeficientes sean cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} \\ 0 & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a'_{nn} & \cdots & a'_{2n} & a_{1n} \\ b'_n & \cdots & b'_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

La transformación conduce a la vía usual para la teoría de los determinantes, pero para esto se opera solo con las columnas; las columnas y filas de las matrices aquí aún no gozan de iguales derechos. La matriz transformada con los ceros corresponde a un sistema escalonado de ecuaciones

$$\begin{array}{rrrr} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{22}x_2+ & \cdots + & a'_{2n}x_n = b'_2 \\ & & & \cdots\cdots \\ & & & a'_{nn}x_n = b'_n \end{array}$$

De donde sucesivamente se determina las raíces del sistema de ecuaciones. En los procesos de transformación de la matriz del sistema, los científicos chinos, introdujeron los números negativos. Para su adición y sustracción fue introducida una regla especial "Cheng-Fu", la cual puede traducirse como regla "Mas-Menos".

De Manera similar los Chinos emplearon los cuadros mágicos como ordenaciones singulares de números, por ejemplo el cuadrado

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

el cual fue comunicado a los hombres por una tortuga del río Lo, según la leyenda, en los días del emperador Yii, famoso ingeniero hidráulico. El interés por este tipo de modelos es sin duda lo que llevó al autor de los "*Nueve Capítulos*" a resolver el sistema de ecuaciones lineales, un ejemplo de ello es el problema que se encuentra en el capítulo No.8, el cual dice

> "*El producto de 3 haces de mieses de calidad superior, 2 haces de mieses de calidad media y 1 haz de mieses de calidad inferior es 39 tou.*
> *El producto de 2 haces de mieses de calidad superior, 3 haces de mieses de calidad media y 1 haz de mieses de calidad inferior es 34 tou.*
> *El producto de 1 haces de mieses de calidad superior, 2 haces de mieses de calidad media y 3 haz de mieses de calidad inferior es 26 tou.*
> *¿Cuánto produce cada haz inferior, media e inferior?*"

Lo que en notación moderna corresponde a

$$\begin{array}{cccc} 3x & +2y & +z & =39 \\ 2x & +3y & +z & =34 \\ x & +2y & +3z & =26 \end{array}$$

mediante operaciones sobre las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Se utiliza procesos de eliminación que comúnmente conocemos, iniciando por la columna del medio, se reduce a la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

donde esta se deduce el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccc} 3x & +2y & +z & =39 \\ & 5y & +z & =34 \\ & & 36z & =26 \end{array}$$

Luego la respuesta es: "*1 haz de calidad superior produce* $9\frac{1}{4}$ *tou, 1 haz de calidad media* $4\frac{1}{4}$ *tou, 1 haz de calidad inferior* $2\frac{3}{4}$ *tou*".
De esta manera observamos que los Chinos tenían en mente un método sistemático y general, que sabían explicar su algoritmo en términos generales y de forma concisa.

La civilización Arabe, tras finalizar sus conquistas les llevaron a recogerla herencia cultural de la antigua Grecia, Persia y Babilonia, y posteriormente la Indú, y a estudiarla, haciendo las primeras traducciones de los autores griegos. Con su intuición y su sentido de la magia llegaron al arte del cálculo más elevado "el algoritmo y el álgebra con toda su simbología".

Quizá la primera aportación realmente importante a la Historia de las Matemáticas por parte de esta civilización se produce en el 800 con la obra de "*Abu Ja'far Mohammed Ibn Musa*" llamado "*Al-Khowarizmi*", debido a su región de origen, de donde proviene el término algoritmo. El texto *Hisab al- jabr w'al-muqabala* fue la más famosa e importante de todas sus obras; es el título de esta obra el que nos ha legado la palabra *Álgebra*. La traducción de *Rosen* de las palabras de *Al-Khowarizmi* describiendo los fines de su libro dan cuenta de que el sabio pretendía enseñar

> "*aquello que es fácil y más útil en aritmética, tal que los hombres lo requieran constantemente en casos de herencia, llegados, particiones, juicios y comercio, y en todos sus tratos con los demás, o cuando se trata de la mensura de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos, y otros objetos de varias clases de tipos...*"

Al analizar las anteriores líneas podemos percibir que Al-Khowarizmi procuraba que el libro fuese eminentemente práctico, y que la introducción del álgebra apuntaba a la resolución de problemas concretos que eran, parte de la vida cotidiana en el Imperio Islámico de entonces. En este libro Al-Khowarizmi investigó y escribió acerca de los números, del cálculo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Una vez estudiados los diferentes métodos para la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales en las diferentes civilizaciones antiguas, detallaremos a continuación cual ha sido el avance, del tema en cuestión, desde la Edad Media.

En la Edad Media, hacia el siglo XII un matemático Chino *Chu Shih-Chieh* escribe dos obras de gran importancia para el álgebra, en donde se ocupa de la resolución de los sistemas de ecuaciones y de ecuaciones individuales elevadas hasta la décima potencia. El método, llamado por él "fan fa", es el equivalente al método de Horner, que consiste en resolver ecuaciones por aproximación, haciendo transformaciones sucesivas de la ecuación se obtienen aproximaciones a menudo decimales de las raíces. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^2 + 252x - 5290 = 0$$

se obtiene por aproximación $x = 19$; es decir, tiene una raíz entre 19 y 20, entonces hace la transformación $y = x - 19$ se obtiene una nueva ecuación

$$y^2 + 290y - 143 = 0$$

de donde $y(y+290) = 143$, es decir $y = \dfrac{143}{(y+290)}$, con una raíz entre 0 y 1; estimando el denominador $y = 1$, que garantiza una nueva aproximación por defecto, el valor aproximado de la raíz es $y = \dfrac{143}{1+290}$. Por lo tanto, el valor buscado de $x$ es $19 + \dfrac{143}{291}$. A principios del siglo XIII Leonardo de Pisa, llamado también *Fibonacci*, escribía su "Liber Abaci" tomando como referencia la obra de *Al-Khowarizmi*. Con él extendió el uso de la numeración árabe, solo conocido hasta entonces en los monasterios, así como los métodos de cálculo hindúes con enteros y fraccionarios, raíces cuadradas y cúbicas. Resolvió ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer y segundo grado. En "*Flos*" que data de 1225, nos encontramos con problemas determinados que nos recuerdan a Euclides, los árabes y a los Chinos. Su notación es retórica, utilizaba las palabras "*res*" y "*radix*" para la incógnita, "*census*" y "*cubus*" para su cuadrado y cubo respectivamente.

El autor del *Trattato d'Algebra* (obra del siglo XIV, anónima) resolvió sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación del " método de la doble falsa posición". Así por ejemplo, utilizando la notación moderna, el problema 387 se puede traducir en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que el autor transformó mediante sustituciones sucesivas en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del tipo

$$7y = 13x + 4 \tag{1}$$

$$4y = 2x + 176 \tag{2}$$

que resolvió de éste modo

1. Adoptó la falsa posición tomando $y_1 = 40$ y en la ecuación (1), calculó $x_1 = 21 + \dfrac{3}{13}$.

2. Sustituyó estos dos valores en la ecuación (2) obteniendo 160 en el primer miembro y $218 + \dfrac{6}{13}$ en el segundo miembro. Como los dos miembros deben ser iguales, la diferencia es $d_1 = 58 + \dfrac{6}{13}$.

3. Igualmente adoptando la falsa posición $y_2 = 80$, calculó

$$x_2 = 42\frac{10}{13} \; ed_2 = -\left(58 + \frac{6}{13}\right)$$

4. Aplicó la fórmula de interpolación lineal y obtuvo

$$y = \frac{80(58 + 6/13) + 40(58 + 6/13)}{58 + \frac{6}{13} + 58 + \frac{6}{13}} = 60$$

5. Sustituyendo $y = 60$ en la ecuación (1) encontró $x = 32$.

El Renacimiento, se caracterizó especialmente por el desarrollo del álgebra, como una continuación de la tradición medieval. En la obra de *Chuquet:* "*Le Triparty en la Science des nombres*" (1484), se encuentran las bases del futuro lenguaje Matemático, establece ya una notación y unas reglas operacionales con símbolos que permitían un tratamiento puramente algebraico de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones.

Surgen escuelas Matemáticas en distintos países Europeos, sobre todo e Italia, Francia, Alemania e Inglaterra, y en sus trabajos comienza a aparecer los signos actuales: $+, -, x, <, >, (\ ), \sqrt{\ }$, y también el signo $=$, el cual se debe a *Recorde* quien afirmaba "*Nada hay tan igual como las líneas paralelas*". Pero fue Vieta, directamente inspirado en la obra de Diofanto, el primero en introducir las letras sistemáticamente como coeficientes generales en expresiones algebraicas, aunque sólo para números positivos. Utilizaba las vocales para representar magnitudes no conocidas y las consonantes para las conocidas. De esta forma se plantea por primera vez la diferencia entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita. A pesar de todo, su álgebra sigue siendo básicamente sincopada más que simbólica, ya que todavía utilizaba muchas palabras y abreviaturas. Vieta separó claramente la aritmética, que trata de números, del álgebra, a la que consideró como un método para el estudio de tipos de formas de ecuaciones generales.

Más tarde, Descartes (siglo XVII) ve en el álgebra un poderoso método de guía de razonamiento con cantidades desconocidas y abstractas, que ha de preceder a las demás ramas de las Matemáticas. Buscó un álgebra independiente y sistemática, sin un significado concreto, como una técnica de cálculo. Es decir, el álgebra sería una ciencia de las magnitudes muy general que se podría aplicar a las otras ciencias, en particular a la geometría. Su álgebra Simbólica es prácticamente la que se utiliza actualmente. Ya utilizaba las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes y las últimas para las incógnitas o variables.

En cuanto a la teoría de ecuaciones en el siglo XVIII, el tema central seguía siendo la solución de ecuaciones polinómicas de cualquier grado, particularmente en cuanto a "'métodos de Resolución de los Sistemas de Ecuaciones, hemos de remontarnos a 1693, cuando Leibniz relata en unas cartas dirigidas a"L'Hopital" como utiliza un conjunto sistemático de índices para los coeficientes con dos incógnitas, de la siguiente forma

$$\begin{array}{llll} 10 & +11x & +12y & =0 \\ 20 & +21x & +22y & =0 \\ 30 & +31x & +32y & =0 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{llll} 1_0 & +1_1x & +1_2y & =0 \\ 2_0 & +2_1x & +2_2y & =0 \\ 3_0 & +3_1x & +3_2y & =0 \end{array}$$

que actualmente sería: $\begin{array}{llll} a_1 & +b_1x & +c_1y & =0 \\ a_2 & +b_2x & +c_22y & =0 \\ a_3 & +b_3x & +c_3y & =0 \end{array}$

Al eliminar las incógnitas obtuvo una relación entre los coeficientes. Si el sistema es compatible, entonces

$$1_02_13_2 + 1_12_23_0 + 1_22_03_1 = 1_22_13_0 + 1_12_03_2 + 1_02_23_1$$

lo que con nuestra terminología sería

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sus contribuciones en materia de notación demuestran la gran importancia que tenía para él la elección de un lenguaje adecuado a cada situación Para Leibniz "*el tener un simbolismo adecuado ayuda a facilitar los procesos de pensamiento*", además de poder comunicarlos mejor. Pero Leibniz abandonó pronto estas contribuciones al álgebra, de tal forma que casi medio siglo después la solución de sistemas lineales de dos, tres y cuatro incógnitas por el " Método de Determinantes" fue descubierta por Maclaurin (en 1729). Su regla es la que usamos hoy día y fue Cramer quién la publicó en 1750, intentando dar respuesta al problema de determinar la ecuación cónica pasando por cinco puntos dados. El determinante del sistema que resultaba era la suma de productos con un solo elemento de cada fila y columna, afectados por el signo + si el número de cambios de los elementos a partir de un orden dado si era par, y por − en caso contrario. Por ejemplo, la solución de $y$ en el sistema

$$\begin{cases} ax + by & = c \\ dx + ey & = f \end{cases}$$

viene dado como $y = \dfrac{af - dc}{ae - db}$ y la solución para $z$ en el sistema

$$\begin{array}{llll} ax & +by & +cz & = m \\ dx & +dy & +fz & = n \\ gx & +hy & +kz & = p \end{array}$$

viene expresada por:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

Maclaurin explica también como se puede escribir análogamente la solución para un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, "*anteponiendo signos opuestos a aquellos términos en los que entran los productos de dos coeficiente opuestos*".

Es interesante destacar como Bezout describe el " Método de Eliminación Algebraica", método que también fue investigado por Newton y Euler, en cuando busca una condición necesaria para que dos ecuaciones polinómicas de grado $n$ tengan solución

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_0 &= 0 \\ g(x) &= b_n x^n + \cdots + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

se multiplica $f$ por $b_n$ y $g$ por $a_n$, luego procede a restar las expresiones. A continuación, se multiplica $f$ por $b_n x + b_{n-1}$ y $g$ por $a_n x + a_{n-1}$, y se realiza la resta. Después, se multiplica $f$ por $b_n x^2 + b - n - 1x + a_{n-2}$ y $g$ por $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$; repitiendo el proceso se obtienen $n$ ecuaciones lineales homogéneas de incógnitas $x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^0$, cuyo resultante es el determinante de los coeficientes de las incógnitas, y nos permiten deducir las condiciones de la resolubilidad de las ecuaciones originales. También generalizó el método para ecuaciones de distinto grado.

Finalmente, los últimos registros sobre la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se encuentran hacia 1880 donde se formula la Teoría de los Sistemas de ecuaciones Lineales generales sobre $\mathbb{R}$ $y$ $\mathbb{C}$, se estudian los valores propios de las matrices cuadradas y la reducción de las mismas en forma canónica, y los sistemas hipercomplejos ó algebraicos.

A partir del anterior recorrido histórico sobre los distintos procedimientos empleados para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se puede observar que en las primeras civilizaciones se recurre a un lenguaje algebraico retórico, lo cual conllevó, en cierta forma, a que los métodos utilizados en la resolución de los mencionados sistemas, se caracterizaran por la particularidad de sus procesos y soluciones, es decir, dependía mucho de cada sistema en particular, para emplear un método de solución específico, y aunque los Chinos intentaron utilizar procedimientos generales, sus procesos muestran un alto grado de complejidad e ingenio al momento de aplicarlos. A pesar de lo anterior el manejo de estos métodos tan sólo se aproximan y se manejan como mecanismos aritméticos: transposición de términos, eliminación de términos,necesarios para obtener la solución deseada. Además de los métodos de eliminación y sustitución se manejó a través de todas las civilizaciones e incluso con un manejo más formal en Edad Media el “ Método de la Falsa Posición” que contiene en esencia procesos de aproximación para encontrar la solución de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones.

Con la implementación desde el Renacimiento de un lenguaje algebraico simbólico florecen los métodos generalizados de manera formal, para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

En resumen, después de analizar la evolución y surgimiento de los diferentes métodos para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se puede decir que para estudiarlos debemos tener en cuenta

1. El conocimiento previo en cuanto al manejo aritmético sólido, es decir lo que puedo hacer para saber hasta donde se puede llegar; enmarcado de esta manera en el campo de las restricciones, así como lo observamos en las antiguas civilizaciones en cuanto a sus sistemas de numeración, procesos aritméticos específicos, lenguaje algebraico empleado,

entre otros.

2. Emplear situaciones de la vida cotidiana que puedan ser estudiados a través de los sistemas de ecuaciones.

3. Para la solución de los sistemas de ecuaciones, una alternativa es comenzar por las soluciones aproximadas, dependiendo de las condiciones de cada sistema en particular.

4. Introducir procesos de solución que nos conduzcan poco a poco en la búsqueda de métodos generales, pero se tiene en cuenta que la generalización fue un paso extenso y tardío para la Humanidad.

2.2.6 Necesidad de recrear e innovar en Educación Matemática. En busca del cambio social, retomamos y volvemos desde donde se adquiere el aprendizaje como lo es la enseñanza, actividad que por mucho tiempo ha sido tarea difícil, por esta razón es sumamente compleja. Esta a su vez, ha sufrido a través del tiempo un sin número de experimentaciones de diversos métodos y procedimientos pero siempre con el propósito firme de obtener una enseñanza efectiva en el aprendizaje.

Analizando en nuestro país los resultados no muy prometedores en la calidad de Educación que tenemos, es como se genera una búsqueda de nuevas estrategias partiendo desde el punto que no resulta fácil obtener resultados óptimos en un breve período de tiempo. Así nace un nuevo plan para la búsqueda de mejores resultados, el Plan Decenal de Educación el cual consiste "En que el niño no sea más el que se arriesgue a perder o ganar el año, si no el adulto, padre, maestro, gobernante el que asume el riesgo de ganar o perder la década"[19], de esta manera su función es la de hacer cumplir los mandatos constitucionales y legales sobre la prestación del servicio educativo. De ahí la necesidad de dotar al país de este nuevo plan educativo porque se fundamenta en la comprensión de la educación como fuente principal del saber.

Se adquiere, entonces, un compromiso por parte de los sistemas institucionales y los educadores, para tratar de buscar innovaciones en la enseñanza, más específicamente en la enseñanza de las Matemáticas sin tratar de ir hacia el formalismo de esta ciencia, sino por el contrario conducirla hacia la búsqueda de la calidad y la creatividad, objetivos para la formación matemática de nuevas generaciones. Es así como se deben aportar nuevos métodos de enseñanza enfocados hacia la participación de los estudiantes y en donde el rol del maestro sea de orientador y facilitador del aprendizaje; además, éste último, debe hacer ciencia en su labor para volverse un investigador constante que le permita diseñar estrategias innovadoras y trate de hacer conciencia de que la Matemática es un elemento fundamental e indispensable de la cultura de nuestra sociedad que se puede construir y hacer desde el hogar mismo de los estudiantes junto

[19]Decreto No 1719, 3 de Octubre de 1995. Ministerio de Educación Nacional. Artículo 72

con su entorno social y educativo.

Para comprender los procesos educativos y poder incidir en su transformación se deben provocar cambios realmente duraderos, determinados a resolver los diferentes problemas pero involucrando soluciones creativas, como puede ser el uso de nuevas tecnologías, pero no desde el punto de vista de la utilización de aparatos si no a la utilización de los "esquemas de intervención en el proceso de enseñanza-aprendizaje", puesto que "La tecnología es más que ciencia aplicada porque tienen sus propios procedimientos de investigación y porque toda rama de la tecnología contiene un cúmulo de reglas empíricas descubierta antes que los conocimientos las absorbieran"[20]. Por ejemplo para el estudio del álgebra, el uso de estas nuevas herramientas ayuda a los estudiantes a comparar, transformar, visualizar y manipular expresiones algebraicas y funcionales combinando diversas representaciones tradicionales. El trabajar con dichos instrumentos de manera adecuada, permite que el estudiante interactúe con problemas más reales, mejorando de esta manera su capacidad de abstracción y llevando las experiencias personales a un nivel más íntimo y analítico. No es, simplemente, el manejo simbólico sino las aproximaciones exploratorias que muestran todos aquellos cambios que puede sufrir la variable, situación muy difícil de conseguir con los materiales de escritorio tradicionales como papel y lápiz. Se concluye que la introducción de nuevas tecnologías en el aula escolar produce un cambio de una aproximación deductiva algebraica por una aproximación inductiva y empírica.

Ahora bien para el desarrollo de nuestro trabajo consideramos adecuado utilizar los métodos de enseñanza en sus múltiples relaciones y variaciones, como también aquellas estrategias alternas, hablamos de enfocarnos según la Historia de las Matemáticas, ya que es importante conocer a fondo el contexto histórico que enmarca los conceptos que vamos a tratar; además de conocer los problemas de los que han surgido y entender las razones por las cuales se interesaron por ellos, para tomar sólo los elementos realmente significativos, pues la idea no es trasladar toda la evolución histórica al aula escolar, ni de utilizar los mismos problemas, de los cuales surgió el conocimiento propios de cada época, enmarcados dentro de una ideología y cultura específica, entonces, se quiere partir de nuestra realidad y abordar Situaciones Problemáticas en las cuales tenga lugar la gestación de las ideas con las que queremos ocuparnos; sin esperar que los estudiantes descubran en corto tiempo lo que la humanidad elaboró a lo largo de varios siglos de trabajo intenso. Igualmente, las estrategias metodológicas a implementar van acorde a lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional, tanto en los estándares como en los lineamientos curriculares para Matemáticas.

[20]Mario Bunge. Metodología de la investigación. Mc Graw Hill. Colombia, 1996

# 3.OBJETIVOS

## 3.1 OBJETIVO GENERAL

Proponer estrategias metodológicas para resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, que utilice la historia y evolución del tema para el desarrollo del mismo.

## 3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Indagar, completar y sistematizar la formación de las primeras nociones que dieron paso a la solución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Plantear estrategias didácticas basadas en métodos gráficos y en la resolución de problemas para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

Formular estrategias metodológicas que faciliten la enseñanza de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales utilizando algunos asistentes matemáticos.

Realizar un proceso de análisis colectivo con expertos, docentes de Matemáticas del grado noveno, como un elemento que influirá en la validación de las estrategias; además de enriquecerlas a partir de sus críticas.

# 4. PROPUESTA METODOLÓGICA

A continuación exponemos la propuesta metodológica, que como se mencionó anteriormente, se fundamente en la comprensión del desarrollo histórico de la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, así como en la corriente metodológica la cual busca que la adquisición del conocimiento se realice de manera dinámica y recreativa, pensamiento expresado particularmente por Miguel de Guzmán

"El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria".

Las actividades descritas a continuación tienen como finalidad última la construcción y solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas, la propuesta metodológica se lleva a cabo a través de guías y actividades dirigidas tanto al docente como al estudiante, respectivamente. Su estructura para cada caso es la siguiente.

⧫ Al docente: Con la presentación de una Guía General la cual contiene

• PROPÓSITO: Construir y solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas mediante estrategias metodológicas fundamentadas en su historia y apoyadas con recursos didácticos.

• ESTÁNDAR

- Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

- Identificar diferentes métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. (Hay muchos caminos para llegar a una misma meta).

• LOGRO: Comprender el concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales y aplicar sus diferentes métodos de resolución tanto Analíticos como Algebraicos.

• INDICADORES DE LOGRO

- Forma Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a partir de

- Situaciones Problemáticas.

- Representaciones gráficas.

- Manipulación de Objetos.

- Aplica métodos Analíticos ó Algebraicos para solucionar

- Situaciones Problemáticas.

- Representaciones gráficas.

- Situaciones experimentales que representan Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- METODOLOGÍA

\- Fase 1: Presentación y explicación del material de trabajo correspondiente a cada clase.

\- Organización del grupo en colectivos de trabajo.

\- Fase 2: Entrega a cada colectivo de trabajo el material a emplear en las distintas actividades.

ACTIVIDAD 1. Ecuaciones Lineales con dos variables.

\- Guía 1.1: La entrada: fotocopias.

\- Guía 1.2: 58: fotocopias.

\- Guía 1.3: Cómo hacerlo? : fotocopias.

\- Guía 1.4: El gran Mago: fotocopias

\- Guía 1.5: Las abejas: fotocopias y fichas numéricas.

\- Guía 1.6: Diofanto de Alejandría: fotocopias

ACTIVIDAD 2 Formando Sistemas de Ecuaciones Lineales.

\- Guía 2.1: El trato: fotocopias

\- Guía 2.2: Formando Sistemas ( 3 actividades) : fotocopias

\- Guía 2.3: Atrevido o Certero? : fotocopias

ACTIVIDAD 3. Método Gráfico.

\- Guía 3.1: Secretos del agua: fotocopias, calculadora T - I 92 PLUS.

\- Guía 3.2: Quien gana y Quien Pierde: fotocopias.

\- Guía 3.3: Viajes: fotocopias, calculadora T - I 92 PLUS.

ACTIVIDAD 4. Método de Sustitución.

- Guía 4.1: Frutitas: fotocopias

- Guía 4.2: Juego de Colores. : fotocopias.

- Guía 4.3: Rueda Algebraica: fotocopias

- Guía 4.4: Cuadrado Mágico.

ACTIVIDAD 5. Método de Igualación.

- Guía 5.1: Balanzas Numéricas: fotocopias

- Guía 5.2: Balanzas Algebraicas: fotocopias

- Guía 5.3: Dominó Algebraico: fotocopias y las fichas de dominó.

ACTIVIDAD 6. Método de Eliminación.

- Guía 6.1: Formas y colores: fotocopias, fichas de colores y tableros.

- Guía 6.2: Modestos, Sencillos y Recatados: fotocopias.

- Fase 3: Una vez entregado el material con su respectiva explicación el colectivo de trabajo: lee, comprende, analiza, discute, deduce y resuelve la actividad propuesta.

- Fase 4: Socialización y recolección del material de trabajo.

• CONCEPTOS PREVIOS

- Resolución de Problemas.

- Transposición de términos y el manejo de las operaciones algebraicas.

- Traducción del lenguaje retórico al lenguaje simbólico.

- Representación gráfica de la ecuación lineal.

• CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Comprensión del concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas y su solución por medio de la aplicación de métodos tanto algebraicos como analíticos.

- Identifica como solución del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas las coordenadas del punto de intersección de las dos restas que representa cada una de las ecuaciones.

- ACTIVIDAD DEL DOCENTE

El docente en cada una de las actividades toma un rol activo además de ser orientador y el que formaliza el conocimiento al finalizar las actividades propuestas.

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

- El estudiante toma un rol dinámico y activo en cada actividad.

- Interés y respeto tanto de su trabajo como el de sus compañeros.

- En el desarrollo de las actividades el estudiante: lee, comprende, analiza, discute, deduce y diligencia la respectiva guía.

- RECURSOS

- Fotocopias

- Jeringa

- Tubos de ensayo.

- Agua

- Hojas milimetradas.

- Materiales de escritorio.

- Material didáctico

- Calculadora T - I 92 PLUS.

- Dominó Algebraico.

- Fichas de colores y tableros.

• TIEMPO

El tiempo a emplear en el desarrollo de todas las actividades será de 32 horas.

• EVALUACIÓN

Las actividades se evalúan mediante el desarrollo de situaciones problemáticas y juegos de destreza e ingenio, en los cuales se tiene en cuenta la participación, el interés, el manejo adecuado de los recursos y el correcto desarrollo de las guías de trabajo. Además de la aplicación de la guía - evaluación al final de cada actividad.

♦ Al Estudiante: Mediante la aplicación de Guías de trabajo que comprenden tanto la construcción de los sistemas con sus diferentes componentes, como de los distintos métodos de Resolución para Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Estas actividades se fundamentan de acuerdo a los siguientes aspectos

1. Aspecto Histórico

El análisis hecho sobre el surgimiento y evolución de la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales sirve como referente teórico para conocer las dificultades e ilación de las ideas en toda su originalidad; una vez conocido está evolución histórica acerca del tema es como podemos tomar tres parámetros fundamentales que orientan el desarrollo de las actividades y que además tuvieron mayor relevancia en todo el curso de la historia; dichas parámetros son

- Situaciones de la Vida Cotidiana.
- Procesos Particulares - Procesos Generales
- Aproximaciones sucesivas.

2. Aspecto Curricular

Para llevar a cabo la validación de nuestra propuesta se realizó un seminario con docentes del área de Matemáticas con el fin de recolectar, a partir de su experiencia, sus críticas constructivas para enriquecer nuestro trabajo. Este seminaro se llevó a cabo con la particìpación de 15 docentes, en las instalaciones de la Universidad de Nariño, los cuales una vez realizada la presentación de la propuesta la consideran como una excelente alternativa al igual que una buena estrategia didáctica y recreativa para la enseñanza de la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales puesto que presenta alternativas nuevas de enseñanza con enfoques poco utilizados en la actualidad como lo es el histórico. A su vez valoran la oportunidad que la Universidad de Nariño brinda al abrir sus puertas y proporcionar espacios para dar a conocer diferentes propuestas nuevas que contribuyen a la enseñanza de las Matemáticas y de manera similar poder contribuir a sus mejoras.

De esta manera a partir de las conclusiones que se obtienen de éste Seminario se realizan las modificaciones pertinentes para el trabajo, los cuales se encuentran anexadas directamente en cada una de las actividades que se creyó conveniente modificar.

A continuación presentamos las actividades dirigidas al estudiantes, las cuales componen la Estrategia Metodológica propuesta.

## 4.1 ACTIVIDADES

### 4.1.1 Actividad 1. Construcción y Aplicación del Concepto de Ecuación Lineal a través de Situaciones Problemáticas

• PROPÓSITO: Introducir por medio de una situación problemática y aproximaciones sucesivas la Ecuación Lineal.

• ESTÁNDAR: Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

• LOGRO: Construir el concepto de Ecuación Lineal con dos variables a partir de la comprensión de una situación problemática.

• INDICADORES DE LOGRO

- Genera a partir de una situación problemática variedad de posibles soluciones por medio de aproximaciones sucesivas que conllevan a la respuesta.

- Modela diversas situaciones de cambio a través de Ecuaciones Lineales y expresarlas inicialmente en palabras y luego simbólicamente.

- Encuentra a partir de reglas particulares una regla general que unifique un mismo proceso.

- Aplica en situaciones problemáticas el concepto de Ecuación Lineal.

• METODOLOGÍA

- Fase 1:Presentación del taller y conformación de grupos de trabajo.

- Fase 2: Entrega de las guías al estudiante y el material didáctico

- Actividad 1.1: guía de trabajo.

- Actividad 1.2: guía de trabajo.

- Actividad 1.3: guía de trabajo.

- Actividad 1.4: guía de trabajo.

- Actividad 1.5: láminas, guía de trabajo, fichas numeradas del 1 al 30.

- Actividad 1.6: guía de trabajo.

- Fase 3: Lectura, comprensión, manipulación de los materiales, desarrollo y deducciones respectivas a cada guía de trabajo.

- Fase 4: Socialización y recolección del material.

• CONCEPTOS PREVIOS

- Transposición de términos en una ecuación dada.

- Identificar las variables que intervienen en una situación dada.

- Resolución de Problemas.

• CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Comprensión de la Ecuación Lineal como una igualdad de cantidades conocidas y desconocidas.

- Relaciona mediante expresiones algebraicas las magnitudes físicas.

- A partir de soluciones particulares lograr generalizarlas en una sola expresión.

• ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- El docente orienta, facilita y formaliza el conocimiento de manera precisa.

- El docente toma un rol activo (Actividad 1.4) dentro de la clase.

- El docente aclara las dudas que se generen y corrige los posibles errores.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

En la actividad 1.3, el docente aclara las distintas respuestas correspondientes a cada letra del numeral 3

3. Para ti, cual de las siguientes expresiones sintetiza las posibilidades de repartir las boletas entre mi amigo y yo. Socializa tu respuesta.

a. $x + x = 9$ , $x =$ Número de boletas

b. $2b + 7b = 9b$ , $b =$ boletas

c. Número de boletas para mí + Número de boletas para mi amigo = 9

ACLARACIONES

a.) No puede ser ésta la respuesta ya que la $x$ designa una sola característica (Número de Boletas) y lo que se busca es diferenciar dicha característica entre las dos personas.

b.) Esta expresión es verdadera pero en ella se utiliza la letra como un objeto más que como una expresión algebraica.

c.) Esta expresión retórica permite sintetizar el proceso que desde un inicio se realiza mentalmente con valores específicos. Además permite establecer la relación entre el número de boletas y cada persona.

Una vez hecha la comprensión respectiva el docente puede llegar a la utilización del lenguaje simbólico en consenso con sus estudiantes para lograr una generalización al emplear $x$ e $y$ ; así la expresión para esta situación es

$$x + y = 9 \text{ , donde } x = \text{Número de boletas para mí.}$$
$$y = \text{Número de boletas para mi amigo.}$$

Esta última ecuación recibe el nombre de Ecuación Lineal o Ecuación Indeterminada ya que los valores que podemos tomar para $x$ o para $y$ son infinitos y que a su vez estos valores satisfacen la ecuación original.

Si tenemos

- $x + y = k$, $k =$ constante, entonces obtenemos un número de soluciones enteras positivas limitadas.

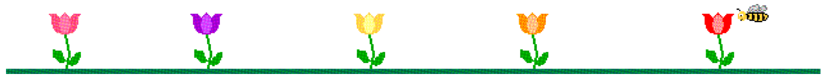
- $x - y = k$, $k =$ constante, entonces obtenemos un número de soluciones ilimitadas.

En la actividad 1.4, el docente juega un poco a ser mago, adivinando a los estudiantes el mes y la edad de cada uno de ellos. Al finalizar la actividad el profesor debe guiar al estudiante para que escriba cada uno de los pasos que se utilizaron en el juego en una sola expresión algebraica así

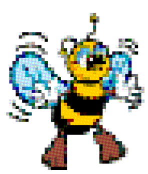
$$[2x+5]*50+y = Suma\ conocida$$
$$100x+250+y = Suma\ conocida$$
$$100x+y = S-250$$

donde $x =$ número que le corresponde al mes de nacimiento y $y =$ edad

Luego antes de iniciar la actividad 1.5 el docente apoyado en láminas o carteleras realiza una breve exposición a manera de cuento sobre la vida de las abejas, así

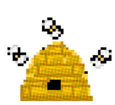


**LAS ABEJAS:**
**INSECTOS QUE HACEN LA VIDA MAS DULCE**



En el antiguo Egipto se creía que cuando el dios del Sol lloraba, sus lágrimas se transformaban en abejas al tocar el suelo. Estos insectos tenían, por tanto, un origen divino para los egipcios.

Su zumbido nos anuncia la llegada de la primavera y su imagen está estrechamente ligada a la organización. Y es que la vida en una colmena se parece mucho a la de una empresa en la que cada individuo tiene una clara función que cumplir. Estos insectos producen además toneladas de miel y cera al año, un gran beneficio al equilibrio medio ambiental a través de su función polinizadora.

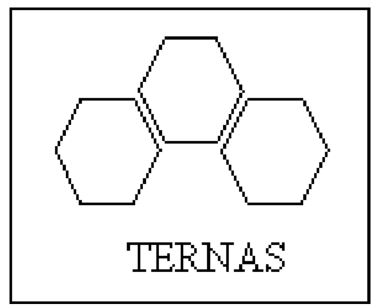


La colmena es una maravilla de la arquitectura, usada como palacio de vivienda y para fabricar y almacenar miel.

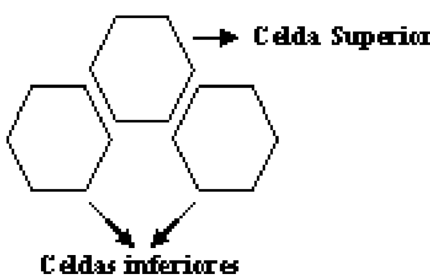
Está formada por miles de celdas hexagonales, pero ¿Te has preguntado alguna vez por qué las abejas construyen sus panales con la característica de la forma hexagonal?, bien es simple, como sabes, cada celda acogerá una larva; el empaquetamiento hexagonal de celdas es la forma más efectiva de agrupar tantas celdas como sea posible en un espacio limitado, dejando el mínimo espacio vacío.

Además para nuestra sorpresa las abejas fabrican cada celda con forma cilíndrica, como un tubo, pero debido a la compresión de cada una contra sus seis vecinas más cercanas las celdas se vuelvan hexagonales. ¡Interesante verdad!

Ahora que sabemos más sobre las abejas y conocemos su trabajo, podemos tomar ternas de su panal de esta manera $\longrightarrow$

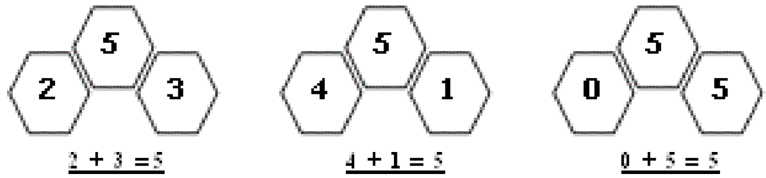



Y les asignaremos la siguiente propiedad:

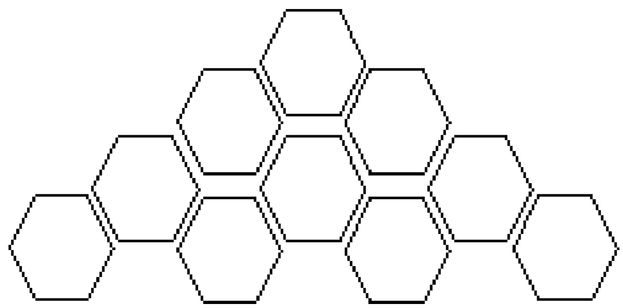



a superior hay un número base que la suma de dos números que debes

Así te indicamos un ejemplo




Puedes de esta manera escoger los números que mejor te parezcan...¡Fácil no! Pero que tal si se complica al tomar más celdas del panal así como lo indica la figura.



Pero ahora los números que encuentres no pueden repetirse en todo el panal y además debes llenarlo con unas fichas que están numeradas desde el 1 hasta el 30 para que no haya confusiones.

Inmediatamente después de la explicación se hace entrega de la respectiva guía y las fichas necesarias para jugar a llenar la colmena.

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

El estudiante

- Lee la respectiva guía de trabajo.

- Pregunta, analiza, deduce.

- Manipula los materiales.

- Aplica los conocimientos aprendidos.

- Discute.

- Desarrolla y diligencia la respectiva guía.

## ACTIVIDAD 1

PROFESOR:______________________________________ GRADO: 9

TEMA: Ecuación Lineal

INDICADORES DE LOGRO:

- Genera a partir de una situación problemática variedad de posibles soluciones por medio de aproximaciones sucesivas que conllevan a la respuesta buscada.
- Modela diversas situaciones de cambio a través de Ecuaciones Lineales y expresarlas inicialmente en palabras y luego simbólicamente.

## LA FERIA

El pasado Miércoles me encontraba aburrido en mi casa, hacía la tarea de Matemáticas, hasta que llegó mi amigo y decidimos ir a la "Ciudad de Hierro" que estaba próxima a irse. Lo curioso fueron todas las situaciones que nos pasaron, te contaré algunas de ellas:



Al momento de entrar a la "Ciudad de Hierro", compramos nueve boletas para subir a las atracciones mecánicas. Nos sorprendimos al ver cuantos juegos había y más aún que había muchas maneras de repartirnos nuestras boletas para disfrutar al máximo todos los juegos.

1. Tú que crees! Escribe todas las maneras posibles que tuvimos para repartirnos las boletas entre mi amigo y yo para poder subir a las atracciones mecánicas.

2. Espero que tengas en cuenta todas las posibilidades para repartirnos las boletas entre mi amigo y yo, para que completes el siguiente cuadro.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de boletas par mí | | | | | | | | |
| Número de boletas para mi amigo | | | | | | | | |

3. Para ti, cual de las siguientes expresiones sintetiza las posibilidades de repartir las boletas entre mi amigo y yo. Socializa tu respuesta.

a. $x + x = 9$, donde $x$ es el número de boletas.

b. $2b + 7b = 9b$, donde $b$ es el número de boletas.

c. Número de boletas para mí+ Número de boletas para mi amigo $= 9$


PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: Ecuación Lineal

INDICADORES DE LOGRO

• Genera a partir de una situación problemática variedad de posibles soluciones por medio de aproximaciones sucesivas que conllevan a la respuesta buscada.

• Encuentra a partir de reglas particulares una regla general que unifique un mismo proceso.

> "No hay rama de la matemática , por lo abstracta que sea , que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real."LOBACHENSKI


De todas formas al final disfrutamos el mismo número de juegos y compartimos la última boleta en los carros chocones. Descansamos un poco y llegamos a un lugar llamado "Pincha el muñeco".

En este juego había 10 muñequitos que se debían tumbar con pelotas de ping-pong. El dueño del lugar nos dijo:

- Tienen ustedes dos tiros como quiera, lo único que los números de los dos muñecos que voltee deben sumar 58, ni más ni menos, y entonces ganará un fantástico premio. Por cada muñeco que logre voltear pagaras \$1.000 y por cada tiro que no aciertes pagaras \$500. Claro que pueden hacerlo desde tan cerca o lejos como lo deseen.


Observa

1. ¿Cuáles de los muñecos se debieron voltear para hacer exactamente 58? Escribe todos los posibles tiros que encuentres.

2. ¿Cuántas parejas encontraste?

3. ¿Seguro? Que pasa si el número que debes voltear en el primer tiro es mayor que el número del segundo tiro, ahora ¿Cuáles son las parejas? Escríbelas.

4. Pero, que sucede si ocurre todo lo contrario, si el número del primer tiro es menor que el número del segundo tiro, entonces ¿Cuáles son ahora las parejas? Escríbelas.

5. Observa tus respuestas anteriores, ¿Qué sucede en cada caso?.

6. De acuerdo a tus respuestas en los numerales 3 y 4 completa el siguiente cuadro.

| Número del Primer tiro | Número del Segundo tiro |
|---|---|
| | |

¿Ahora cuántas son las parejas?

7. Para finalizar escribe la expresión que debiste utilizar desde el principio para encontrar todas las parejas.

## ACTIVIDAD 1.3

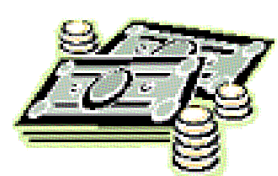
PROFESOR:______________________________________ GRADO: 9

TEMA: Ecuación Lineal

INDICADORES DE LOGRO:

- Genera a partir de una situación problemática variedad de posibles soluciones por medio de aproximaciones sucesivas que conllevan a la respuesta buscada.
- Encuentra a partir de reglas particulares una regla general que unifique un mismo proceso.
- Aplica en situaciones problemáticas el concepto de Ecuación Lineal.

## ¿COMO HACERLO?



Al probar suerte en "Pincha el muñeco" me gané dos fantásticos premios a diferencia de mi amigo que no contó con la misma suerte, el primer tiro lo acertó pero el segundo lo falló, así que decidimos no jugar más y pagar toda la cuenta con un billete de \$10.000,aunque el dueño del lugar sólo tenía para darnos el regreso en monedas de \$500 y billetes de \$1.000. Y como nosotros no queríamos todo el regreso en sólo monedas y en sólo billetes, él resolvió combinar nuestro regreso, así todos quedamos contentos.

Tú que piensas!

1. ¿Cuánto nos gastamos en este juego? Entonces, ¿Cuánto nos dió de regreso el dueño del lugar?

2. El dueño al darnos el regreso observó que había más de una manera para hacerlo. Podrías escribir las diferentes formas que tuvo el señor para dar el regreso en monedas de $500 y billetes de $1.000.

3. Con tus respuestas anteriores puedes completar el siguiente tabla

| Número de billetes de $1.000 | Número de monedas de $500 |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

4. Ahora que expresión empleas para describir la anterior situación. ¿Seguro? Comprueba con los valores de la tabla ¿De qué te estas olvidando? ¿Qué función cumplen estos números?

5. Intenta de nuevo y escribe correctamente la expresión. (Recuerda comprobar)

## ACTIVIDAD 1.4

PROFESOR:______________________________ GRADO: 9

TEMA: *Ecuación Lineal*

INDICADORES DE LOGRO:

- Encuentra a partir de reglas particulares una regla general que unifique un mismo proceso.
- Aplica en situaciones problemáticas el concepto de Ecuación Lineal.

# "EL GRAN MAGO"

Al ir pasando por los juegos de la feria, una multitud de gente nos llamó la atención, en ese preciso instante estaba el gran mago quien le decía a un espectador.
Escoja de la cartilla el número correspondiente a tú mes de nacimiento

- Multiplica por 2.
- Súmale 5.
- Al resultado multiplícalo por 50.
- Súmale tú edad.
- Dime lo que resulta

El espectador contesto:- "Mi numero es: 1.371, entonces el gran mago se concentra y dice:

*Usted, mi querido amigo, nació en Noviembre y tiene exactamente 21 años.*

En ese momento todos se sorprenden y aplauden la hazaña del gran mago al saber que efectivamente lo adivino.
¿Te convence? Repite los mismos pasos con tu mes de nacimiento y edad; pero ahora el gran mago es tú profesor.
¿Cómo consigue el gran mago y tú profesor averiguarlo?


Después de jugar y divertirnos, camino a casa, fuimos pensando en todas aquellas situaciones particulares que vivimos

y descubrimos que las Matemáticas hacen parte de todo que nos rodea y depende de nuestra habilidad y conocimientos para poder leer la realidad desde ellas.


PROFESOR:____________________________ GRADO: 9

TEMA: *Ecuación Lineal*

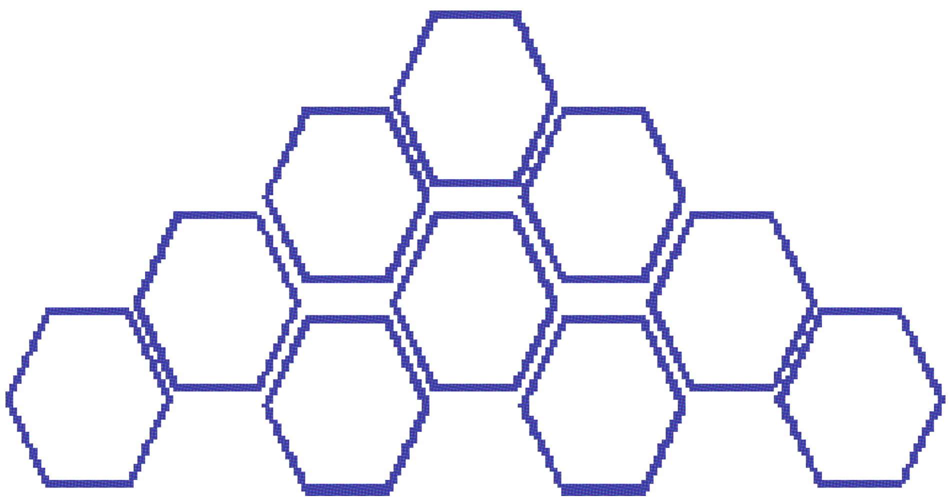
INDICADORES DE LOGRO:

- Encuentra a partir de reglas particulares una regla general que unifique un mismo proceso.
- Aplica en situaciones problemáticas el concepto de Ecuación Lineal.

# ROMPECABEZAS DE NUMEROS

1. Organízate con 4 de tus mejores amigos y prepara tu tablero con sus respectivas fichas.
2. Planea tus mejores estrategias para que en el menor tiempo encuentres los números.
3. Espera los números base que te de tu profesor y JUEGA!

NOTA: Gana el grupo que en menor tiempo encuentre los números.



ANALIZA

1. ¿Cuántas veces tuviste que utilizar la propiedad?
2. Encuentra la expresión algebraica que generalice la propiedad utilizada en cada terna.


PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: *Ecuación Lineal*

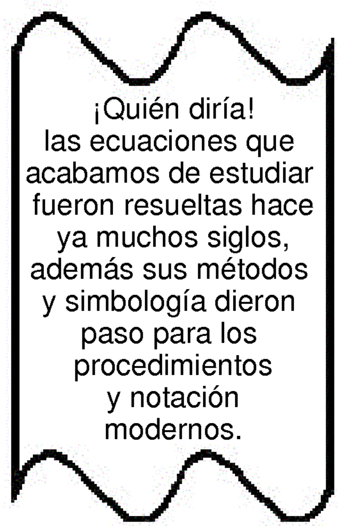
| |
|---|
| INDICADORES DE LOGRO: |
| • Aplica en situaciones problemáticas el concepto de Ecuación Lineal. |

EVALUACIÓN FINAL

**DIOFANTO DE ALEJANDRÍA**

Diofanto fue un matemático Griego que floreció en Alejandría alrededor del año 275 a.C. Sin duda fue el más grande algebrista Griego, tanto que para algunos autores es considerado como el "Padre del álgebra" ya que en sus trabajos se observa la utilización de un lenguaje abreviado para algunas expresiones Matemáticas. Su principal obra es la "Aritmética", en la cual se dedicó a la resolución exacta de ecuaciones indeterminadas, así a las ecuaciones conocidas hoy como $x+y=k$ se las llama "Ecuaciones Diofánticas". Su afición por estas ecuaciones fue tanta que según una antigua leyenda, en su tumba puede leerse el siguiente Epitafio:

"¡Caminante¡ Aquí yace los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡Oh Maravilla! la duración de su vida. Dios le permitió ser niño durante la sexta parte de su vida, Había transcurrido además una doceava parte de su vida cuando sus mejillas se cubrieron de barba, A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril, Pasaron, además, cinco años y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, Este hijo aunque amado apasionadamente, entregó su cuerpo y hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena, habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte."




Ahora nosotros seremos los caminantes y vamos a descubrir la edad de Diofanto.

1. Identifiquemos los principales sucesos en la vida de Diofanto en el siguiente cuadro.

| EXPRESION LITERAL | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
| --- | --- |
| ¡Caminante¡ Aquí yace los restos de Diofanto.Los números pueden mostrar ¡Oh Maravilla! la duración de su vida. | |
| Dios le permitió ser niño durante la sexta parte de su vida | |
| Había transcurrido además una doceava parte de su vida cuando sus mejillas se cubrieron de barba | |
| A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril | |
| Pasaron, además, cinco años y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito | |
| Este hijo aunque amado apasionadamente, entregó su cuerpo y hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. | |
| Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena, habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. | |
| EDAD DE DIOFANTO | |

2. Resuelve la anterior ecuación lineal para conocer la edad que llegó a alcanzar Diofanto.

- RECURSOS

- Fotocopias

- Material didáctico:

- láminas

- fichas numeradas del 1 al 30.

- Tablero en hojas tamaño carta.

• TIEMPO

El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 6 horas.

• EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación

- Las guías diligenciadas.

- La observación no estructurada recogida en el proceso.

- La manipulación adecuada de los materiales respectivos.

- Aplicación de la Actividad 1.6.

4.1.2 ACTIVIDAD 2. Formando Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas.

• PROPÓSITO: Formar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a partir de situaciones problemáticas.

• LOGRO

- Comprender el concepto de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas y su solución.

- Utilizar métodos informales (ensayo-error, aproximaciones) para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

• INDICADORES DE LOGRO

- Traduce una situación problemática a un lenguaje algebraico.

- Plantea los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- Identifica todas las posibles soluciones para los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- Construye y soluciona el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- METODOLOGÍA

- FASE 1: Presentación del taller y conformación de grupos de trabajo.

- FASE 2: Entrega de las guías al estudiante.

- Actividad 2.1: guía de trabajo.

- Actividad 2.2: guía de trabajo.

- Actividad 2.3: guía de trabajo.
- FASE 3: Lectura, comprensión, manipulación de los materiales, desarrollo y deducciones respectivas a cada guía de trabajo.

- FASE 4: Socialización y recolección del material.

- CONCEPTOS PREVIOS

- Construcción de expresiones algebraicas a partir de expresiones retóricas.

- Generalización de expresiones particulares.

- Resolución de Problemas.

- CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Comprensión del concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales como el conjunto de ecuaciones Lineales que no se pueden resolver de manera aislada y cuya solución para cada incógnita es la misma para ellas.

- ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- Orienta las diferentes actividades.

- Incentiva el trabajo en colectivos.

- Corrige los posibles errores.

- Aclara las dudas que se generen.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

Al finalizar la actividad 2.1 el docente interviene diciendo:

- Analicemos las ecuaciones que resultaron de la situación anterior

$$2x - 32 = y$$
$$2y - 32 = 0$$

estas ecuaciones tienen de particular que el valor de $y$ es el mismo para las dos, además para llegar a la solución se tienen en cuenta las dos ecuaciones. Luego estas ecuaciones de relacionan entre sí.

A partir de este ejemplo podemos llamar a este conjunto de ecuaciones como SISTEMAS DE ECUACIONES porque interactúan a veces; en algunas situaciones pueden darse dos o más condiciones que deben cumplirse en forma simultánea. Traducido, en el lenguaje de las Matemáticas: "que si se tienen dos o más ecuaciones no se pueden resolver en forma aislada, sino solidaria una con otra." Es decir que la solución (o soluciones) de una de las ecuaciones es la misma que la de la otra y para llegar a ella (o ellas) se deben combinar algebraicamente de manera apropiada estas ecuaciones.

Al finalizar todas las actividades y solucionar los Sistemas de Ecuaciones Lineales por aproximaciones, el docente informa que dichos sistemas podemos resolverlos mediante Métodos Analíticos y Métodos Algebraicos.

Aunque los Métodos Analíticos son poco utilizados debido a la dificultad de encontrar el punto de intersección de las dos rectas que generan el sistema, por ello se hace necesario utilizar los Métodos Algebraicos el cual consiste en obtener siempre de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita.

Los Métodos mencionados se amplían con el desarrollo de las guías próximas.

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

El estudiante lee, analiza, discute, pregunta y diligencia la respectiva guía de trabajo.

GUIAS DE TRABAJO

# ACTIVIDAD 2.1

PROFESOR:________________________________ GRADO: 9

TEMA: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

INDICADORES DE LOGRO:

- Traduce una situación problemática a un lenguaje algebraico.


Un campesino se dirigía a comprar un cerdito e iba muy triste por que el dinero que llevaba no le alcanzaba. Al entrar a un puente se encontró nada más ni nada menos que *¡al diablo!* Que le dijo:

"Conozco tu preocupación y voy a proponerte un trato. Si lo aceptas, cuando hayas cruzado el puente tendrás en tu bolsa el doble de dinero que el que tenías al empezar. No cuentes el dinero pues sería desconfianza de tu parte. Sólo debes contar 32 monedas para echarlas al río; yo sabré encontrarlas y éstas serán mi paga."

El campesino ingenuo, aceptó el trato y apenas cruzando el puente comprobó lleno de alegría que su bolsa pesaba mucho más que antes de cruzar el puente y feliz echó las 32 monedas al agua. Se le ocurrió que podría volver a cruzar el puente y que así cada vez tendría más dinero; entonces, de nuevo pasó, duplicó el dinero de su bolsa y pagó las 32 monedas, pero quedó completamente desolado porque comprobó que se había quedado sin dinero.

¿Cuántas monedas, entonces llevaba el ingenuo campesino antes de cruzar el puente por primera vez?

1. Ayúdate con el siguiente cuadro. Pero primero identifica que $x$ es el número de monedas que llevaba el campesino.

| Veces que cruzó el puente | Identifico variables | Duplico dinero | Recompensa | Expresión algebraica |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

2. Bueno nos quedan entonces dos expresiones, las cuales son:

   - ____________________ (1)
   - ____________________ (2)

   Pero observa que la segunda me ayuda para encontrar la solución en la primera, entonces es fácil, ahora puedes decir cuántas monedas llevaba el campesino antes de cruzar el puente.

## ACTIVIDAD 2.2

PROFESOR:________________________________ GRADO: 9

TEMA: *Sistemas de Ecuaciones Lineales.*

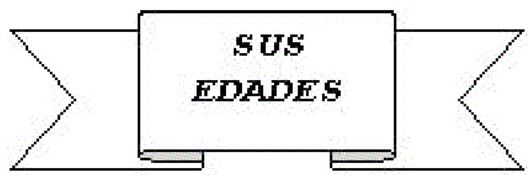
INDICADORES DE LOGRO

• Plantea los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
• Identifica todas las posibles soluciones para los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

"Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del calculo algebraico."EULER

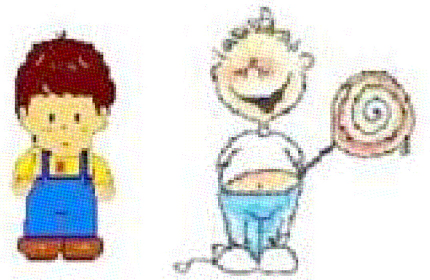
De acuerdo a las condiciones dadas forma los respectivos Sistemas de Ecuaciones Lineales que describan la situación planteada.

**ACTIVIDAD 2.2.1**

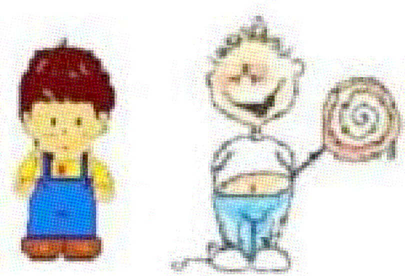



- Ellos son Andrés y Fercho y sus edades suman diez años, encontremos sus edades respectivas, las cuales pueden ser:

| | EDAD DE ANDRES | | EDAD DE FERCHO | |
|---|---|---|---|---|
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |
| • | ________ | + | ________ | = 10 |



- Ahora en esta misma pareja de niños la diferencia entre sus edades es de dos años. Sabiendo que Andrés es mayor que Fercho sus edades pueden ser:



| | EDAD DE ANDRES | | EDAD DE FERCHO | |
|---|---|---|---|---|
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |
| • | ________ | - | ________ | = 2 |

| Edad de Andrés | | Edad de Fercho | | | Edad de Andrés | | Edad de Fercho | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ____________ | + | ____________ | = 10 | | ____________ | - | ____________ | = 2 |

- Forma de manera numérica el *"Sistema de Ecuaciones"*

| Edad de Andrés | Edad de Fercho | | Años |
|---|---|---|---|
| | | | |

- Ahora, escribe de manera general el *"Sistema de Ecuaciones"*

| Edad de Andrés | Edad de Fercho | | Años |
|---|---|---|---|
| | | | |

**ACTIVIDAD 2.2.2**


Probando suerte, Camila y Darío decidieron entrar al casino "Ocasin". Cambiaron un total de 11 fichas para los dos. Cuando terminaron de jugar en la Ruleta se dieron cuenta que quedaron con igual número de fichas, por que Camila perdió dos fichas y Darío ganó una ficha. Luego ¿Con cuántas fichas partió jugando cada uno?

1. Cuáles serían las diferentes posibilidades para la cantidad de fichas que le corresponden a cada uno?

| CANTIDAD DE FICHAS DE CAMILA | CANTIDAD DE FICHAS DE DARÍO |
|---|---|
| | |

2. Cuáles de las anteriores posibilidades cumplirán la condición

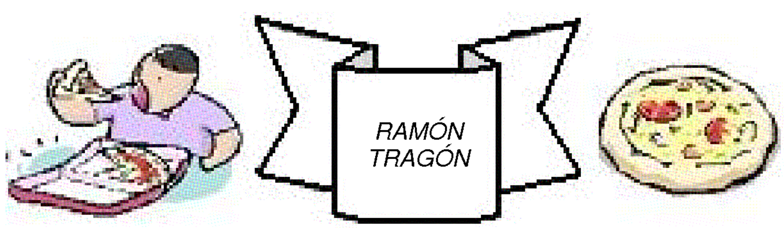
"Si Camila pierde dos fichas y Darío gana una ficha, entonces quedan con el mismo número de fichas".

Escribe todas las posibilidades.

3. Del punto 1 y 2 deduce cuántas fichas tenía Camila y cuántas fichas tenía Darío. Forma la respuesta como un Sistema de Ecuaciones.

4. El Sistema anterior escríbelo de manera general.

**ACTIVIDAD 2.2.3**




En un día de aquellos en los que te gusta salir de la rutina, decidimos mi novio y yo competir a comer la mayor porción de pizza, entonces compramos una pizza de seis porciones, pero mi novio Ramón es un tragón tanto que si hubiera comido solo la quinta parte de lo que comió hubiéramos comido por igual y así nadie hubiera perdido. Adivina entonces cuanto comió Ramón y de paso cuanto comí yo.

1. Encuentra la pareja de números que cumplan las dos condiciones mencionadas

• Una pizza para los dos repartida en seis porciones.
• Si Ramón hubiese comido tan solo la quinta parte de lo que comió entonces hubieran comido por igual.

2. Forma de manera numérica y general el "Sistema de Ecuaciones" que describa la

situación de "RAMÓN TRAGÓN"


PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

INDICADORES DE LOGRO:

- Plantea los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Construye y soluciona el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.


"Por presumir de certero, un tirador atrevido se encontró
comprometido con el relato que os refiero:
-Y fue, que ante una caseta, de la feria del lugar, presumió
de no fallar,ni un tiro con la escopeta -,
y el feriante alzando el gallo:- mil pesos ofreció pagarle,
por cada acierto y cobrarle a tres mil por cada fallo -
Dieciséis veces tiró, el tirador afamado, al fin dijo
despechado, por los tiros que falló:
- "Mala escopeta fue el cebo y la causa de mi afrenta, pero
ajustada la cuenta, ni me debes ni te debo".

"Y todo el que este relato siguió podría decir fácilmente cuántos tiros acertó?" -

1. Para ti, cuáles son las variables?

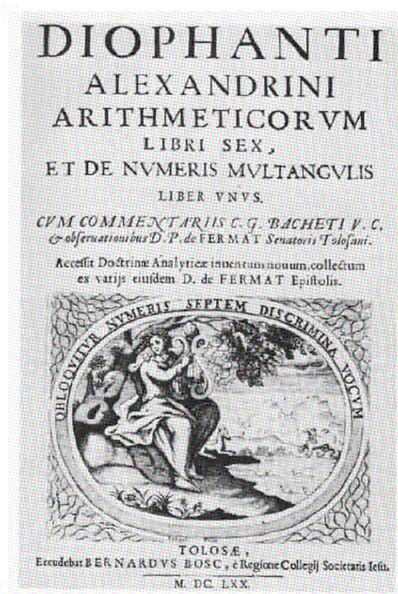
2. Completa el siguiente cuadro:

| | EXPRESIÓN RETORICA | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
|---|---|---|
| a. | Mil pesos ofreció pagarle por cada acierto... | |
| b. | Cobrarle a tres mil por fallo..... | |
| c. | Dieciséis veces tiró, el tirador afamado (entre fallos y acierto) | |
| d. | Pero ajustada la cuenta ni me debes ni te debo.( Ayúdate de la expresión a y b) | |

3. Según el cuadro anterior forma el sistema de ecuaciones resultante:

4. Ahora sí, intenta decir cuántos tiros acertó el tirador atrevido y claro, cuántos tiros falló.

Nota Histórica:
Recuerdas a Diofanto, este personaje también resolvió Sistemas de Ecuaciones Lineales de tal manera que se aproximó un poco a lo que se podría llamar un "Método". Siempre que dos números tengan que satisfacer dos condiciones; dichos números se deben elegir de tal forma que una de las condiciones se verifique automáticamente y a continuación se le impone la única segunda condición para determinarlas.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

- RECURSOS

- fotocopias respectivas a cada actividad.

• TIEMPO

El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 4 horas.

• EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación:

- Las guías diligenciadas. - La observación no estructurada recogida en el proceso. - Aplicación de la Actividad 2.3.

4.1.3 ACTIVIDAD 3. Método Analítico de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales: Método Gráfico.

• PROPÓSITO Solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas por el Método Gráfico apoyado con la calculadora T - I 92 PLUS.

• ESTÁNDAR: Identificar diferentes métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. (Hay muchos caminos para llegar a una misma meta.

• LOGRO: Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas por medio de Métodos Analíticos como lo es el Método Gráfico.

• INDICADORES DE LOGRO

- Planea, diseña, elabora y adopta los instrumentos, para la ejecución de actividades experimentales ( Actividad 3.1 y 3.2)
- Representa de manera gráfica un Sistema de Ecuaciones.
- Interpreta el significado de la intersección de dos rectas como solución al Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Aplica el Método Gráfico para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

• METODOLOGÍA

- FASE 1: Presentación del taller y conformación de grupos de trabajo.

- FASE 2: Entrega de las guías al estudiante y el material didáctico:

- Actividad 3.1: guía de trabajo, calculadora T-I 92 PLUS
- Actividad 3.2: guía de trabajo, calculadora T-I 92 PLUS
- Actividad 3.3: guía de trabajo.

- FASE 3: Lectura, comprensión, manipulación de los materiales, desarrollo y deducciones respectivas a cada guía de trabajo.
- FASE 4: Socialización y recolección del material.

• CONCEPTOS PREVIOS

- Conocimiento de las funciones de la T - I 92 PLus.
- Identificación de una línea recta como la representación gráfica de las soluciones de una Ecuación Lineal.
- Ubicación en el plano cartesiano de las magnitudes físicas estudiadas en clase.
- Dada una línea recta encontrar su respectiva ecuación y viceversa (pendiente).
- Construcción de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Tabulación de datos.
- Resolución de Problemas.

• CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Comprensión del Método Gráfico como un Método Analítico para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Identifica como solución del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas las coordenadas del punto de intersección de las dos restas que representa cada una de las ecuaciones.

• ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- Orienta las diferentes actividades.
- Corrige los posibles errores.
- Aclara las dudas que se generen.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

Al finalizar las Actividades 3.1 y 3.2 el docente aclara:

En cada uno de los experimentos anteriores se puede observar que al momento de graficar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas obtenemos dos líneas rectas. Además su intersección o par ordenado es la solución de dicho sistema.

Por lo tanto la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas representa las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas que representan las ecuaciones; luego *"resolver gráficamente un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas consiste en hallar el punto de intersección de las dos rectas."*

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

El estudiante

- Lee la respectiva guía de trabajo.
- Pregunta, analiza, deduce.
- Manipula los materiales.
- Aplica los conocimientos aprendidos.
- Discute.
- Desarrolla y diligencia la respectiva guía.

GUÍAS DE TRABAJO


PROFESOR:______________________________ GRADO: 9

TEMA:Método Gráfico

INDICADORES DE LOGRO

- Planea, diseña, elabora y adopta los instrumentos, para la ejecución de actividades experimentales.
- Representa de manera gráfica un Sistema de Ecuaciones.
- Interpreta el significado de la intersección de dos rectas como solución al Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

> "Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad".ALBERT EINSTEIN

# SECRETOS DEL AGUA

Un padre dice a su hijo:"El agua tiene muchos secretos, te invito a que descubramos uno de ellos...".

"Tomemos primero un tubo de ensayo vacío y luego agregamos cantidades iguales de agua sucesivamente hasta llenarlo y luego vaciamos otra vez el agua, tan sólo dejamos 2 mm y otra vez llenamos cantidades iguales de agua de manera sucesiva. Paso a Paso describe lo que observas..."

CON EL TUBO DE ENSAYO VACIO...

1. Llenar 1.5 mm de agua en el tubo vacío mediante la ayuda de la jeringa hasta que se llene el tubo. (Siempre de manera sucesiva).

2. Cada vez que adiciones agua al tubo completa la siguiente tabla de valores; la primera fila se completa con la cantidad de agua que se va llenando el tubo y en la segunda fila se escribe las veces que se llena de agua con la jeringa.

3. Con los datos que obtienes en la tabla realiza sobre papel milimetrado la gráfica respectiva sobre un plano cartesiano en el que relaciones las dos condiciones:Cantidad de agua y Número de veces.

TABLA 1.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de agua | | | | | | | | |
| No. de veces | | | | | | | | |

EL TUBO DE ENSAYO CON AGUA...

1. Para iniciar se deja en el tubo 2mm de agua. Luego se adiciona con la jeringa de manera secuencial 0.5mm.

2. Repite los pasos que realizaste anteriormente y completa la siguiente tabla.

3. Con los datos que obtienes en la tabla realiza sobre papel milimetrado la gráfica respectiva sobre un plano cartesiano en el que relaciones las dos condiciones:Cantidad

de agua y Número de veces.

TABLA 2.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de agua | | | | | | | | |
| No. de veces | | | | | | | | |

• Unifica tus dos gáficas anteriores sobre un mismo plano cartesiano y papel milimetrado con las mismas condiciones

Para verificar aún más tus trazos utiliza una herramienta tecnológica como lo es la calculadora T-I 92 PLUS, y simula los pasos anteriores siguiendo detenidamente las sugerencias propuestas

TRABAJO CON LA CALCULADORA T-I 92 PLUS

1. Introducimos los datos obtenidos en la tabla (1) del tubo de ensayo vacío, así

| | |
|---|---|
| • Escoger | MODE / FUNCTION |
| • Escoger tecla de aplicaciones: | APPS |
| • Elegir editor de datos o matrices: | 6: DATA/MATRIZ EDITOR |
| • Crear tabla nueva: | 3: NEW |
| • Dar nombre al archivo que almacena la información. | AGUA 1 (Nombre arbitrario) |

2. Llenar la tabla que aparece en la pantalla

Recorriendo a la Calculadora Gráfica, mediante el proceso de Regresión Lineal, es posible “descubrir” la relación entre las dos variables mediante su representación algebraica, así:
Partiendo de la pantalla de edición de tablas, se selecciona

| | | |
|---|---|---|
| F5 CÁLCULO | | |
| TIPO DE CÁLCULO | 5: LinReg | REGRESIÓN LINEAL |
| $X$ | C1 | VALORES DE $X$ |
| $Y$ | C2 | VALORES DE $Y$ |
| Store RegEQ | $Y_1(X)$ | FUNCIÓN QUE ALMACENA LA RELACIÓN ENTRE $X$ E $Y$ |

Al confirmar con ENTER, se obtiene la expresión que relaciona las dos variables:

$Y = A.X + B = \longrightarrow$ REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA.

Al realizar la Regresión, en forma automática en el editor de funciones ($\blacklozenge$ $Y =$), se activa y almacena la función

$$Y_1 = k_1 X + C_1 (1)$$

3. Mediante la opción ($\blacklozenge$ $GRAPH$) se visualiza nuevamente la gráfica.Y ahora, si deseamos visualizar la grafica en el Plano cartesiano lo realizamos de la siguiente manera

- Escoger F2 Zoom
- Seleccionar Función 6

4. Ahora introducimos los datos de la tabla (2) del tubo de ensayo con agua, igual que el numeral 1, 2, 3 y 4. Al final obtenemos la representación algebraica:
$Y_2 = k_2 X + C_2$ e introducimos la ecuación (1) para visualizar las gráficas en un solo plano.

CONCLUSIONES

1. Observa la gráfica anterior ¿Qué sucede?

2. Cuáles son las coordenadas de este punto de intersección? Qué significa éste punto de acuerdo las condiciones del problema?.

## ACTIVIDAD 3.2

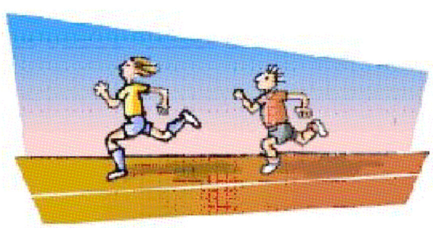
PROFESOR:____________________________________ GRADO: 9

TEMA: Método Gráfico

INDICADORES DE LOGRO:

- Representa de manera gráfica un Sistema de Ecuaciones.
- Interpreta el significado de la intersección de dos rectas como solución al Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Aplica el Método Gráfico para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.


Martín Carreras era un atleta consagrado, y su amigo Mario Maletas, no era un atleta aunque le encantaba este deporte. Un día decidieron competir en unacarrera de 100 m. Mario apuesta que él ganará aunque Martín



decide darle una ventaja de 10 m, Mario acepta y piensa que si corre a una velocidad de 6 metros por segundo le ganará a Martín que corre siempre a una velocidad de 8 metros por segundo.

Tú que crees! Quién ganará Martín o Mario que lleva una ventaja de 10 m?

COMPRUÉBALO!!

1. Siendo Martín un atleta profesional, habrá algún momento que logre alcanzar a Mario. Si fuera cierto a qué distancia y a qué tiempo sería?

2. Para responder la anterior pregunta encuentra las ecuaciones que expresan distancia en función del tiempo para los dos amigos.

- para Mario:____________________ (1)
- para Martín:____________________ (2)

RECUERDA
$V = d / t$

• Ayúdate de dos tablas una para Martín y otra para Mario, en ellas tomas diferentes tiempos para calcular sus respectivas distancias (apoyados en las ecuaciones [1] y [2]).

Expresión algebraica para Martín:

(1.)______________________________

| TIEMPO ( sg) | DISTANCIA (m) |
|---|---|
| | |
| | |

Expresión algebraica para Mario:

(2.)______________________________

| TIEMPO ( sg) | DISTANCIA (m) |
|---|---|
| | |
| | |

• Con los datos de las dos tablas realizamos sobre el papel milimetrado y en un mismo plano cartesiano las respectivas gráficas que relacionan la distancia recorrida respecto al tiempo empleado.

• De acuerdo a la anterior gráfica que significa el punto de intersección y cuáles son sus coordenadas?

Ahora las ecuaciones (1) y (2) las formamos como un Sistema de ecuaciones y según el punto anterior podemos responder la pregunta (1.)

• Verificamos la respuesta en las ecuaciones (1) y (2).

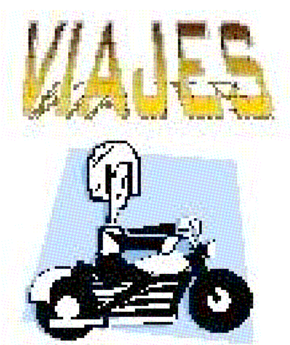
# ACTIVIDAD 3.3

PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: Método Gráfico

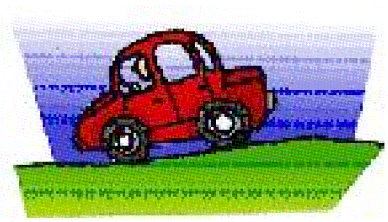
INDICADORES DE LOGRO:

- Planea, diseña, elabora y adopta los instrumentos, para la ejecución de actividades experimentales.
- Representa de manera gráfica un Sistema de Ecuaciones.
- Interpreta el significado de la intersección de dos rectas como solución al Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Aplica el Método Gráfico para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.




"De Bella Vista salimos de paseo a Girardot, viajamos a 80 km/h. Cuando llevábamos de recorrido 160 kms, nos llamó mi tío desde Bella Vista para decirnos que en ese preciso instante él también salía para Girardot.

Si mi tío viaja en su moto a 120 km/h, será que nos alcanza? A qué distancia y a qué hora de viaje?"'



Vamos a simular con la ayuda de la calculadora el recorrido del carro y de la moto así

1. Definimos primero un número $t$ que representará el tiempo en horas y con base a él se calculan las distancias recorridas por el carro y la moto, las cuales son

- para el carro:__________________ (1)
- para la moto: __________________ (2)

RECUERDA:
*$V = d / t$,*
*donde*
*V: Velocidad,*
*d: distancia,*
*t:tiempo*

Pero como hay restricciones por el tamaño de la pantalla y teniendo en cuenta que las medidas se hacen en centímetros, haremos un ajuste de escala para representar distancias.

Por ejemplo 1 km equivale a 0,002 cm, entonces las distancias serán

- para el carro:__________________ (1)
- para la moto: __________________ (2)

TRABAJO CON LA CALCULADORA T-I 92 PLUS

- Escoger tecla de aplicaciones: APPS
- Elegir editor de datos: y = Editor

-En la Calculadora se encuentran definidas las ecuaciones en función de $x$, es así como debes sustituir la variable $t$ por $x$ y de esta manera escribes las ecuaciones resultantes así

para el carro:__________________ (1)

para la moto: __________________ (2)

• Aparecen en la pantalla las ecuaciones de la forma

$$y_1(x) = \underline{\hspace{5cm}}$$
$$y_2(x) = \underline{\hspace{5cm}}$$

• Escoger con cursor dos de las funciones.

• Escribe tus ecuaciones

$y_1(x)$ : ______________________ (Carro)
$y_2(x)$: ______________________ (Moto)
. . . . . . . . . . . . . . . .

• Elegir teclas para visualizar la grafica: (♦ *GRAPH*)
• Elegir tecla para visualizar mejor la imagen: F2 Opción 2

CONCLUSIONES

1. De acuerdo a la gráfica obtenida encuentra el punto de intersección; qué significan estas coordenadas? Escríbelas.

• Utiliza la Calculadora para encontrar el punto de intersección exacto, de la siguiente manera

- Elegir función: F5:Math Opción 5
- Señalar primera línea: 1 Curva?
- Señalar segunda línea: 2 Curva?
- Seleccionar punto de corte: Lower.
- Seleccionar área señalada: Upper.

2. Ahora ya puedes responder, a qué hora de viaje y a qué distancia se encuentran el carro y la moto?

3. Comprueba esta respuesta en las ecuaciones (1) y (2) arriba descritas.

• RECURSOS

Actividad 3.1

- Calculadora graficadora T- I 92 PLUS.
- Tubos de ensayo.
- Jeringas

- Agua
- Fotocopias.

Actividad 3.2:
- Fotocopias.
- Calculadora graficadora T- I 92 PLUS.

Actividad 3.3:
- Fotocopias.
- Regla
- Papel milimetrado y/o cuadriculado.

• TIEMPO

El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 4 horas.

• EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación

- Las guías diligenciadas.
- La observación no estructurada recogida en el proceso.
- La manipulación adecuada de la calculadora y los materiales respectivos.
- Aplicación de la Actividad 3.3.

4.1.4 Actividad 4: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por el Método de Sustitución a través de Recursos Didácticos.

• PROPÓSITO: Utilizar el Método Algebraico de Sustitución para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas apoyados en recursos didácticos.

• ESTÁNDAR: Identificar diferentes métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. (Hay muchos caminos para llegar a una misma meta).

• LOGRO: Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas utilizando el Método de Sustitución.

• INDICADORES DE LOGRO

- Interpreto representaciones gráficas y las sintetizo por medio de sustituciones para expresarlas en Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Aplica el Método de Sustitución para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

• METODOLOGÍA

- FASE 1: Conformación de grupos de trabajo y presentación del taller correspondiente a la sesión de trabajo.

- FASE 2: Entrega de las guías al estudiante y el material didáctico

- Actividad 4.1: guía de trabajo.
- Actividad 4.2: guía de trabajo.
- Actividad 4.3: guía de trabajo.
- Actividad 4.4: guía de trabajo

- FASE 3: El grupo de trabajo: analiza, desarrolla y concluye respectivo a cada guía correspondiente (Actividad 4.1 y Actividad 4.2.). Además juega y concursa por sus habilidades al aplicar el Método de Sustitución de manera reiterativa (Actividad 4.3)

- FASE 4: Premiación, socialización y recolección del material.

• CONCEPTOS PREVIOS

- Identificación de un sistema de Ecuaciones Lineales.
- Transposición de términos.
- Operaciones fundamentales del álgebra (adición, sustracción, multiplicación y división).
- Utilización apropiada del lenguaje simbólico.
- Resolución de Problemas.

• CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Interpretación de representaciones gráficas como Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.
- Utilización de procesos de sustitución no formales de manera consecutiva para encontrar valores desconocidos.
- Comprensión y manejo del Método de Sustitución para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

• ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- El docente contribuye en el desarrollo de las guías como orientador del conocimiento y él clarifica cualquier clase de duda.
- En la actividad 4.3 El docente participa en el juego como coordinador del mismo.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

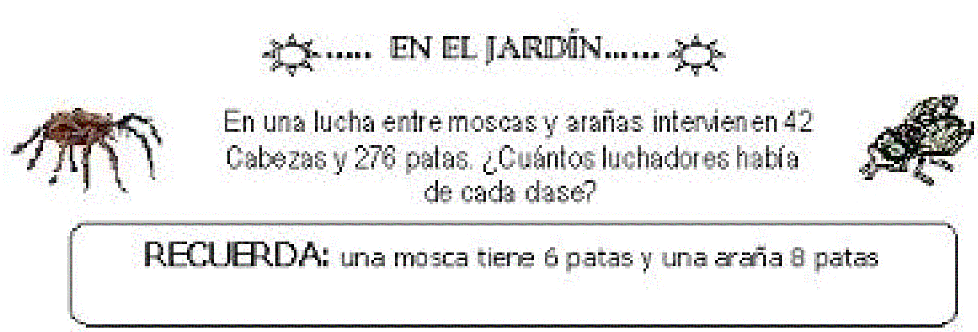
Al finalizar la actividad 4.2 el docente recopila todo lo elaborado en la actividad al decir que observen que en cada uno de los pasos se fué sustituyendo valores conocidos en expresiones que requerían de su valor y así de manera consecutiva hasta encontrar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el cual se realizan procesos algebraicos para encontrar finalmente los valores resultantes de dicho sistema.

De esta manera hemos encontrado un Método Algebraico para resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales llamado MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Este Método consiste en despejar cualquiera de las variables de una de las ecuaciones del sistema y reemplazar ó sustituir la expresión encontrada en la siguiente ecuación, luego se resuelve la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones. Por último se comprueba las soluciones.

EJEMPLOS




COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

- Datos:

$$x = \text{Número de moscas}$$
$$y = \text{Número de arañas}$$

- Pregunta: ¿Cuántas moscas y arañas hay?

PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

- En la lucha intervienen 42 cabezas

$$x: \text{Número de moscas}$$
$$y: \text{Número de arañas}$$

$$x + y = 42 \quad (1)$$

- En la lucha intervienen 276 patas

$$6x: \text{La mosca tiene 6 patas}$$
$$8y: \text{La araña tiene 8 patas}$$

$$6x + 8y = 276 \ (2)$$

Al unir las ecuaciones (1) y (2) formamos el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas:

$$x + y = 42 \ (1)$$
$$6x + 8y = 276 \ (2)$$

Para resolverlo empleamos es Método de sustitución. Escogemos de cualquiera de las ecuaciones una variable, preferiblemente de coeficiente 1 y la despejamos así:
De (1) $x + y = 42$ obtenemos $y = 42 - x$

Ahora sustituimos el valor de $y$ en la segunda ecuación y desarrollamos procesos algebraicos para conocer el valor de $x$

$$\begin{aligned} \text{Se tiene} \ \ y &= 42 - x \\ \text{Ecuación(2)} \ \ 6x + 8y &= 276 \\ \text{Sustituimos} \ \ 6x + 8(42 - x) &= 276 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 336 - 8x &= 276 \\ 6x - 8x &= 276 - 336 \\ -2x &= -60 \\ x &= \frac{-60}{-2} \\ x &= 30 \ Moscas \end{aligned}$$

Conocido el valor de $x = 30$ se sustituye en las ecuaciones (1) ó (2) (generalmente en la ecuación más sencilla)
Ecuación (1)

$$x + y = 42$$

$$\begin{aligned} 30 + y &= 42 \\ y &= 42 - 30 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

RESPUESTA: En la lucha intervinieron 12 Arañas y 30 Moscas.

VERIFICACIÓN: $x = 30$ y $y = 12$

- ECUACIÓN 1:

$$\begin{aligned} x + y &= 42 \\ 30 + 12 &= 42 \\ 42 &= 42 \end{aligned}$$

- ECUACIÓN 2:

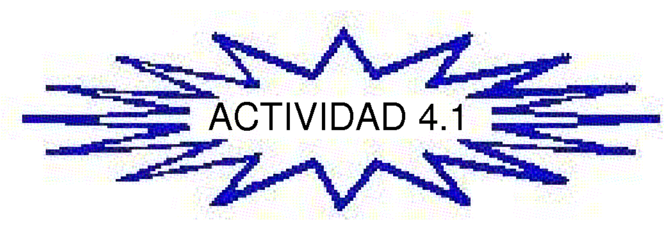
$$6x + 8y = 276$$

$$\begin{aligned} 6(30) + 8(12) &= 276 \\ 180 + 96 &= 276 \\ 276 &= 276 \end{aligned}$$

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

El estudiante analiza, interpreta y utiliza representaciones gráficas como Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas, además demuestra sus capacidades y habilidades al manejar el Dominó algebraico y aplicar el Método aprendido.

GUIAS DE TRABAJO




PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

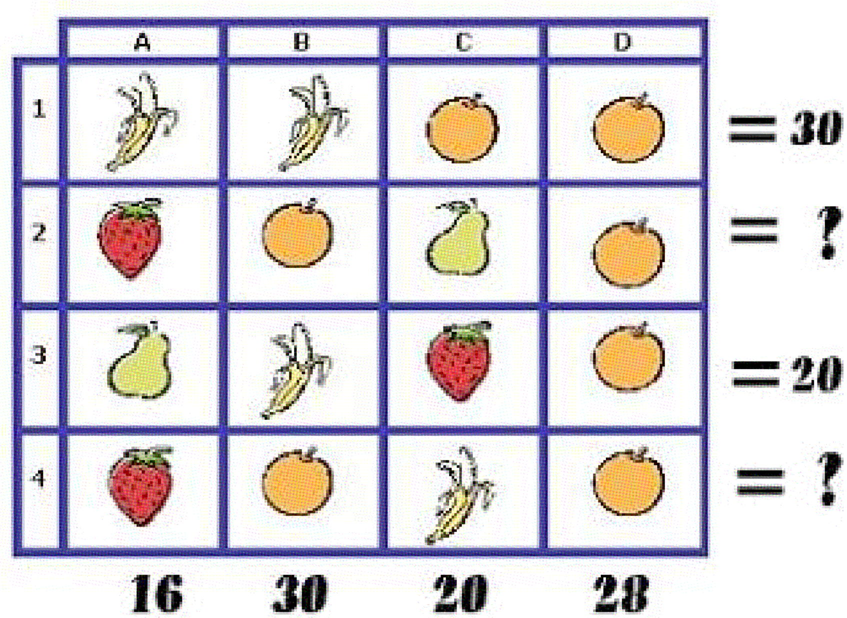
TEMA:Método de Sustitución

INDICADORES DE LOGRO:

- Interpreto representaciones gráficas y las sintetizo por medio de sustituciones para expresarlas en Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

Reseña: Este sencillo juego de ingenio, apareció durante muchos años en los periódicos del Reino Unido. Dicen que Einstein lo resolvió muy rápido...

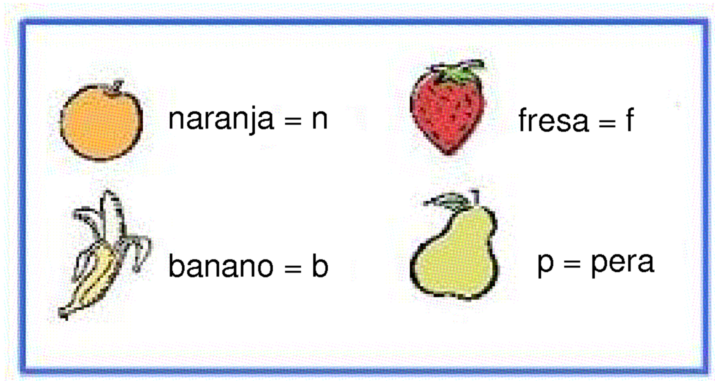
Probemos entonces tu rapidez, mira atentamente el cuadro y encuentra el valor de las dos filas restantes:



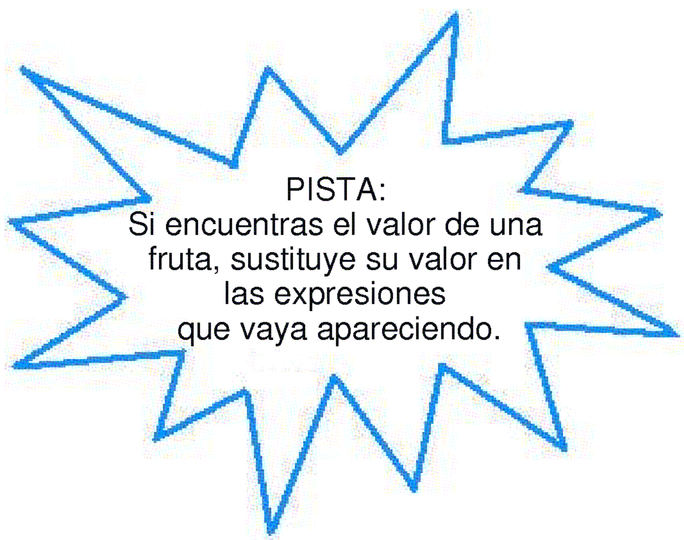

PASOS A SEGUIR

1. Ten en cuenta la letra que le corresponde a cada columna y el número que le corresponde a cada fila, esto te ayudara.

2. Empieza encontrando el valor de cada fruta y entonces hallaras el valor de cada fila, para ello identifiquemos cada fruta con una letra, puede ser la inicial de su nombre así:




3. Sintetiza la información completando el siguiente cuadro:



| FILA O COLUMNA | FRUTAS | EXPRESIÓN ALGEBRAICA | VALOR DE CADA FRUTA |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

4. En los dos últimas filas te quedaron ciertas expresiones algebraicas? Escríbelas.

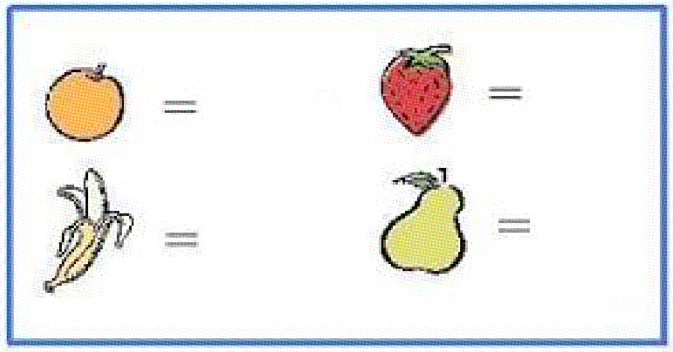
5. Elige una de las expresiones y despeja una de las variables, la que tú quieras

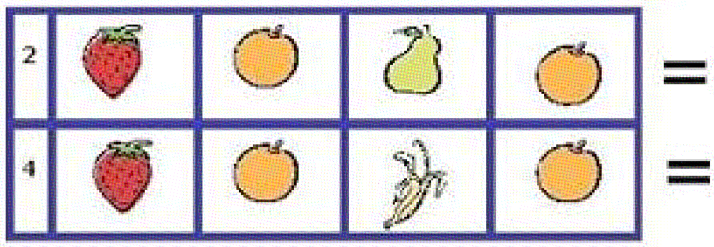
RECUERDA: $x + 3y = 4$

$x = 4 - 3y$ Despejamos el valor de $x$

6. En la expresión que no haz utilizado del punto (4) sustituye el valor que despejaste del punto anterior y realiza las operaciones algebraicas. De esta manera encontrarás el valor de las frutas para completar el cuadro del punto (3).

7. Escribe cuál es el valor de cada fruta y por último completa el valor de las filas.






## ACTIVIDAD 4.2

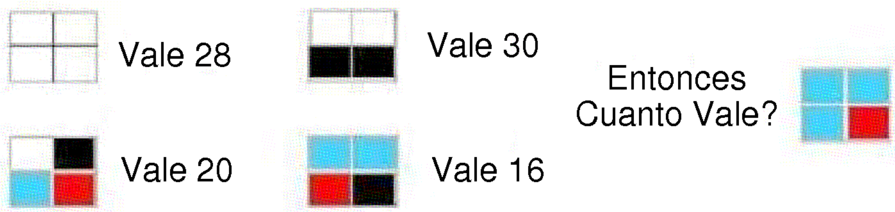
PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA:Método de Sustitución

INDICADORES DE LOGRO:

- Interpreto representaciones gráficas y las sintetizo por medio de sustituciones para expresarlas en Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

# JUEGO DE COLORES




RECUERDA:

1. Utilizar letras que representen cada color (identificación de variables).

2. Los valores que vas encontrando sustitúyelos en las expresiones que requieran de este valor.

3. Escribe el "Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas" resultante y encuentra su solución aplicando el "Método de Sustitución".

4. Ahora sí, ¿Cuál es el valor del último cuadro?

## ACTIVIDAD 4.3

PROFESOR:______________________________ GRADO: 9

TEMA:Método de Sustitución

INDICADORES DE LOGRO:

- Aplica el Método de Sustitución para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

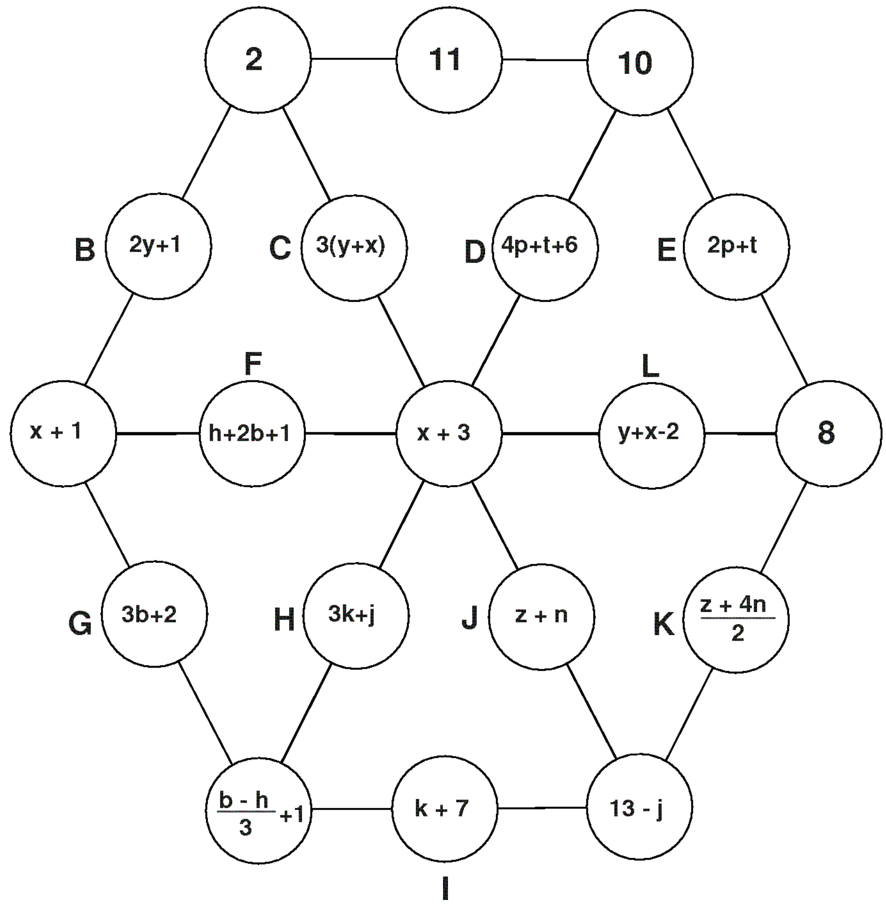
# RUEDA ALGEBRAICA

INSTRUCCIONES

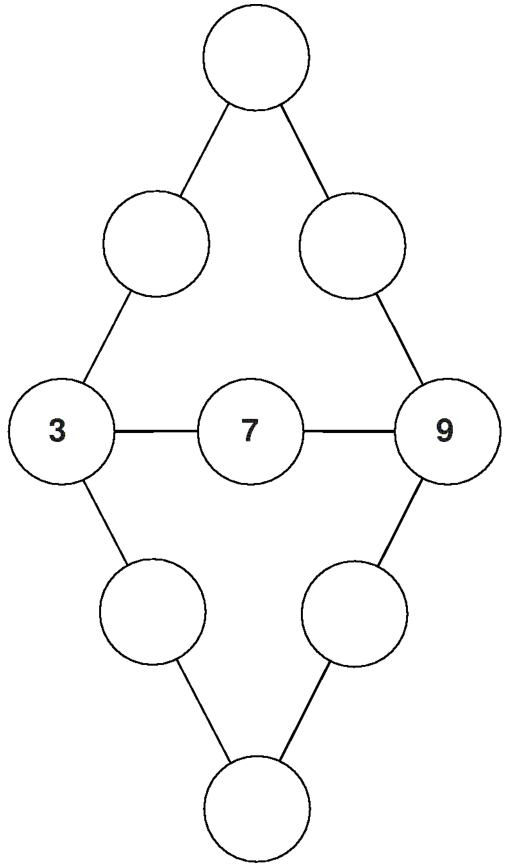
1.Si los tres números sobre cada lado y cada radio de la rueda suman lo mismo, arreglatelas para ir calculando el valor de todas las letras de manera consecutiva.

2. Si tienes que resolver un sistema de ecuaciones aplica el método que acabas de aprender: MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

3. Escribe la rueda numérica correspondiente.




4. Atrévete a formar tu propia parte de la rueda sabiendo que debes formar y resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas.




## ACTIVIDAD 4.4

PROFESOR:________________________________ GRADO: 9

TEMA:Método de Sustitución

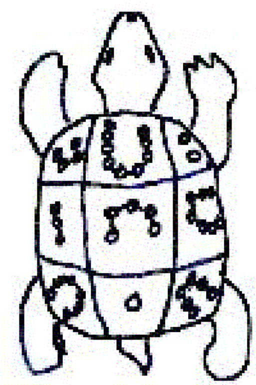
**INDICADORES DE LOGRO:**

- Aplica el Método de Sustitución para solucionar el Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

# HISTORIA DE LOS CUADROS MÁGICOS

Los cuadros mágicos han fascinado no solo a científicos y matemáticos a lo largo de la historia sino también a niños y adultos. Pero...
*¿Que es un Cuadro Mágico?* El cuadro Mágico es el arreglo de una serie de números enteros sobre un cuadro de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales sea la misma, la constante mágica.

En la antigua China ya se conocían los cuadros mágicos desde el III milenio a.d.c, como atestigua el Lo Shu según la leyenda, un cierto día se produjo el desbordamiento de un río, la gente temerosa,intentó hacerle una ofrenda al dios del río Lo (uno de los desbordados) para calmar su ira. Sin embargo, cada vez que lo hacían aparecía una tortuga que rondaba la oferta sin aceptarla, hasta que el emperador Yu, se dio cuenta de las peculiares marcas del caparazón de la tortuga y mandó a copiarlo en una tablilla de barro inmediatamente. Desde entonces se le atribuyen a este cuadrado mágico propiedades mágicas y religiosas ya que de este

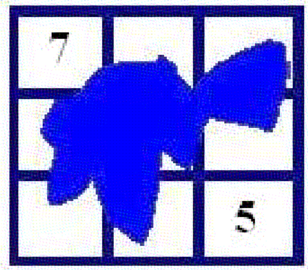


modo pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15) quedando el dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.

Igualmente conocieron combinaciones de está clase los Indios, egipcios, árabes y griegos. A tales cuadrados, las diferentes culturas les han atribuido propiedades astrológicas y divinatorias portentosas grabándose con frecuencia en talismanes.

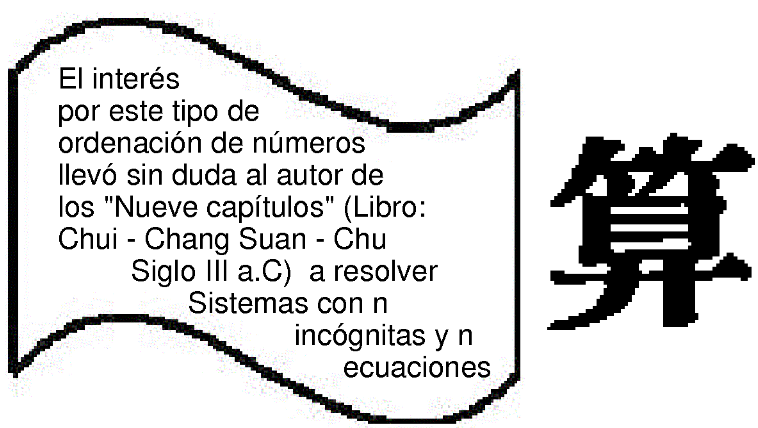
¡PARA COMPLETAR!

1. En el siguiente Cuadro Mágico ha ocurrido una falla de impresión recuerdo que la suma de sus filas, columnas y diagonales es decir la constante mágica es “18”. Encuentra rápidamente los números que van desde el dos hasta el diez.




2. Que sucede si el Cuadro Mágico se convierte en un cuadro algebraico. Ahora entonces para encontrar los números primero debemos encontrar el valor de las variables. Claro está que primero debes resolver algunos sistemas y saber que la constante mágica es de "21".
Con la anterior información puedes ya resolver el siguiente cuadro algebraico:

| | | |
|---|---|---|
| $5x - y - 1$ | $m + 4n$ | $\frac{4x+y}{2} - 1$ |
| $m + 5n$ | $x + y$ | $-p - a$ |
| $2x$ | $\frac{p+a}{3} + 4n$ | $3y$ |




- RECURSOS

- Fotocopias.

- Formato para los gráficos.

• TIEMPO

El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 6 horas.

• EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación

- Las guías diligenciadas.
- Rapidez y fluidez en el momento de aplicar el juego (Actividad 4.4)
- La observación no estructurada recogida en el proceso.
- Actitudes frente al desarrollo de las guías de trabajo. Aplicación de la Actividad 4.4.

4.1.5 Actividad 5: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por el Método de Igualación.

• PROPÓSITO: Deducir y emplear el Método de Igualación como método de resolución para Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas con el apoyo de recursos gráficos.

• ESTÁNDAR: Identificar diferentes métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. (Hay muchos caminos para llegar a una misma meta).

• LOGRO:Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas utilizando el Método de Igualación.

• INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta y entiende de manera numérica el concepto de igualación.

- Abstrae y simboliza a partir de estructuras gráficas un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas para luego ser resuelto utilizando igualaciones sucesivas.

- Solucionar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas aplicando como método de solución el Método de Igualación.

• METODOLOGÍA

- FASE 1: Conformación de grupos de trabajo y explicación de la guía de trabajo a diligenciar.

- FASE 2: Entrega de las guías de trabajo

-Actividad 5.1: guía de trabajo.

- Actividad 5.2: guía de trabajo.

- Actividad 5.3: guía de trabajo.

- FASE 3: El grupo de trabajo: analiza, deduce, concluye y desarrolla la respectiva guía correspondiente a cada sesión.

- FASE 4: Puesta en común de los resultados obtenidos en el desarrollo de la guía de trabajo y recolección del material.

• CONCEPTOS PREVIOS

- Formación de Ecuaciones Lineales a partir de representaciones gráficas.

- Empleo del lenguaje simbólico que generalice un suceso.

- Manejo de las operaciones fundamentales del álgebra (adición, sustracción, multiplicación y división) y su lenguaje simbólico.

- Resolución de Problemas.

• CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Relación de una representación gráfica y su respectiva simbolización.

- A partir de un suceso abstraer el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas el cual es resuelto por el Método de Igualación.

- Comprensión del Método de Igualación como un proceso en el cual se busca despejar la variable deseada en las dos ecuaciones correspondientes y luego se igualan estos respectivos valores.

• ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- El docente orienta el desarrollo de la guía de trabajo e introduce la formalización del tema por medio de la resolución de problemas.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

Al finalizar la actividad 5.2 el docente recopila lo desarrollado en la guía así

Una vez realizado los anteriores procesos podemos ver que por igualación el Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas fue resuelto ya que al iniciar se busca en cada una de las balanzas "igualar" un mismo objeto para luego comparar sus respectivos pesos y así conocer el peso del objeto resultante de está igualación. Una vez obtenidos estos resultados procedemos a sustituirlos en alguna de las ecuaciones originales y así encontrar el valor del objeto inicial.

El método algebraico utilizado se denomina formalmente MÉTODO DE IGUALACIÓN el cual en términos matemáticos consiste en despejar misma incógnita en las dos ecuaciones, se igualan las expresiones resultantes y se resuelve la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones. Por último se comprueba el resultado.
Ejemplo


Juan y Roberto dos amigos, estando en el parque comentan: Juan: -"Si yo te doy una moneda tendremos igual número de monedas"-. Roberto: - "Si, pero si yo te doy una moneda tendrás el doble de monedas que las mías"-.

¿Cuántas monedas tiene cada uno de estos amigos?

- COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

- Datos:

- Monedas de Juan: $x$
- Monedas de Roberto: $y$

- Pregunta: Cuántas monedas tiene cada uno?

PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

- Si Juan le da una moneda a Roberto tendrán igual número de monedas
$x$ - 1: Juan da una moneda

$$\underline{x-1=y+1} \quad (1)$$

$y+1$ : Roberto recibe la moneda. - Si Roberto le da una moneda a Juan, Juan tendrá el doble de monedas que Roberto.

$y-1$ : Roberto da una moneda pero como Juan queda con el doble de monedas, para la igualdad se escribe

$$2(y-1)=x+1$$
$$2y-2=x+1 \ (2)$$

$x+1$ : Juan Recibe la moneda

Al unir las dos expresiones algebraicas (1) y (2) tenemos un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

$$(\ 1\ )\ x-1=y+1$$
$$(\ 2\ )\ 2y-2=x+1$$

Al resolver el Sistema de Ecuaciones Lineales por el Método de Igualación se despeja primero de las dos ecuaciones la misma variable (preferiblemente la incógnita de coeficiente 1). De esta manera la incógnita a despejar en este sistema es la $x$, así

$De(1)\ x-1=y+1$
$x=y+2$

$De(2)\ 2y-2=x+1$
$x=2y-2-1$
$x=2y-3$ Ahora se igualan entre sí las dos expresiones que hemos obtenido de $x$

$$x=x$$
$$y+2=2y-3 \quad \text{Resolvemos esta Ecuación}$$
$$y-2y=-3-2$$
$$-y=-5$$
$$y=5$$

Una vez conocido el valor de $y$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) [Generalmente en la más sencilla]

$$x-1=y+1$$
$$x-1=5+1$$
$$x-1=6$$
$$x=6+1$$
$$x=7$$

RESPUESTA : Juan tiene 7 monedas y Roberto tiene 5 monedas.

VERIFICACIÓN: Si $x = 7$ y $y = 5$

- ECUACIÓN 1

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= y + 1 \\
7 - 1 &= 5 + 1 \\
6 &= 6
\end{aligned}
$$

- ECUACIÓN 2

$$
\begin{aligned}
2y - 2 &= x + 1 \\
2(5) - 2 &= 7 + 1 \\
10 - 2 &= 8 \\
8 &= 8
\end{aligned}
$$

• ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

- El estudiante a partir de la representación de objetos expresa sus acciones mediante el lenguaje matemático utilizando Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- Comprende y aplica el método estudiado en clase en un juego al finalizar las actividades.

GUIAS DE TRABAJO


PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: Método de Igualación

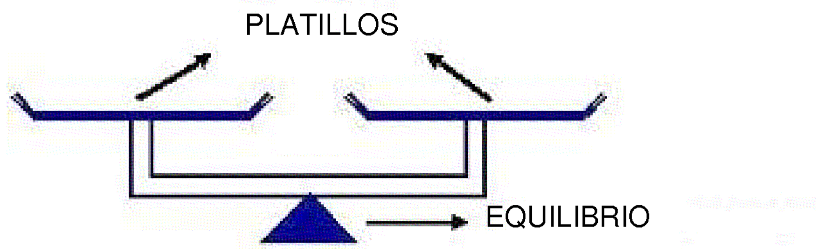
INDICADORES DE LOGRO:

- Interpreta y entiende de manera numérica el concepto de igualación.
- Abstrae y simboliza a partir de estructuras gráficas un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas para luego ser resuelto utilizando igualaciones sucesivas.

# HISTORIA DE LAS BALANZAS

QUÉ ES UNA BALANZA?

La balanza es un instrumento usado para medir la masa de un cuerpo. Sin embargo el uso más frecuente es utilizarlo en la superficie terrestre por lo cual suele referirse a está magnitud.



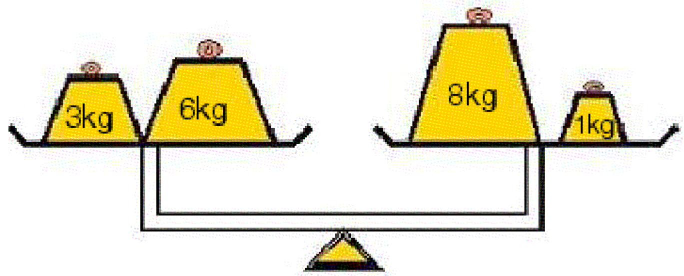

¿SABIAS QUE...?

Las balanzas es uno de los instrumentos más antiguos, probablemente fue creada por los antiguos egipcios y babilonios hacia el año 5000 a.d.C. Estos pueblos la utilizaron inicialmente para pesar polvo de oro para joyería, para el comercio de productos servía más como el trueque por una cantidad pesada de materia que del polvo de dinero. Las primitivas balanzas consistían en un simple trozo de madera dura, que pivotaba en el centro, suspendido en una cuerda, la cual posaba por un agujero y dos platos, que colgaban de los extremos mediante cuerdas también, en uno de los platos se colgaban pesos estándar y en el otro objetos a pesar. Este sistema sigue siendo el principio básico de las balanzas modernas, piensa que aquellos viejos instrumentos eran capaces de pesar con un alto grado de precisión.

A pesar de que se han introducido muchas innovaciones, a las balanzas antiguas, estas siguen siendo fundamentalmente un dispositivo para medir un peso desconocido por comparación con otro conocido.

# EXPRESANDO BALANZAS

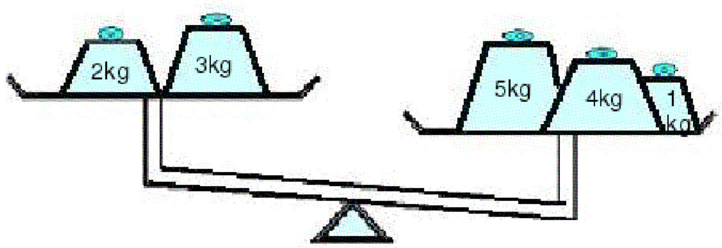
1. Observa la situación que se presenta en la balanza que está equilibrada.



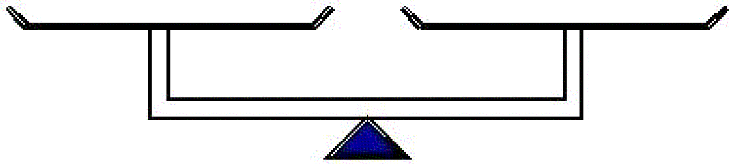

Al expresarlo como igualdad numérica se tiene

$$6Kg + 3Kg = 1Kg + 8Kg$$

2. Ahora consideramos que la balanza no está en equilibrio.




¿Que peso añadirías en platillo para que se equilibre?

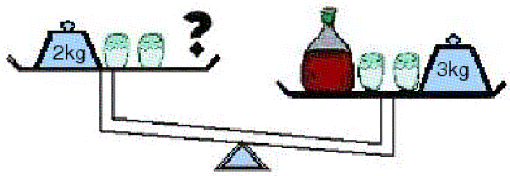


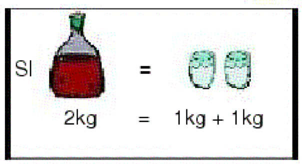
CORRECTO! Cuál sería entonces la igualdad numérica

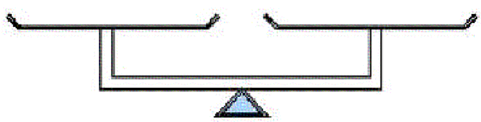
________ +________ = ________ + ________

ACTIVIDAD

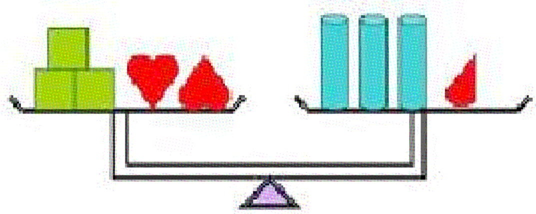
a. Observa ¿Cuántos vasos necesito para equilibrar la balanza?

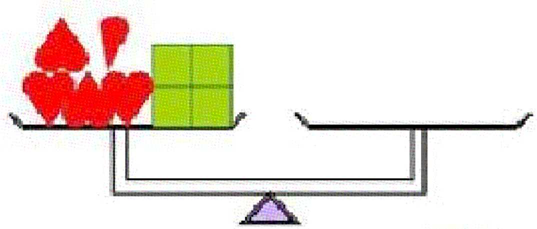


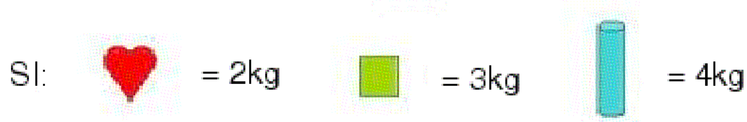



Su igualdad numérica es:______ +______ = ______ + ______ b. ¿Cuántas barras y corazones debes colocar en el platillo vacío para que la balanza esté en equilibrio?








- Escribe la igualdad numérica que representa cada una de las balanzas.

# ACTIVIDAD 5.2

PROFESOR:____________________________________ GRADO: 9

TEMA:Método de Igualación

INDICADORES DE LOGRO:

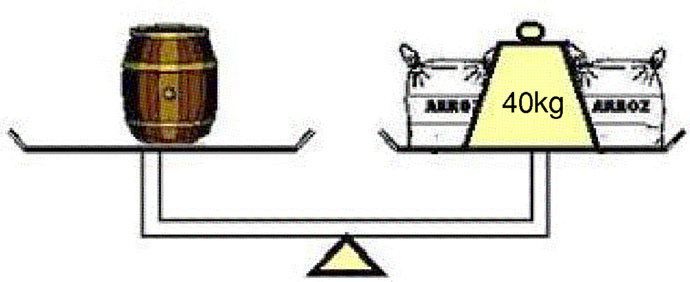
- Interpreto representaciones gráficas y las sintetizo por medio de sustituciones para expresarlas en Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

## BALANZAS ALGEBRAICAS

Si desconocemos el peso de cada uno de los objetos en los platillos, expresemos la igualdad de las balanzas de manera algebraica.

*RECUERDA: La balanza en equilibrio representa una igualdad.*

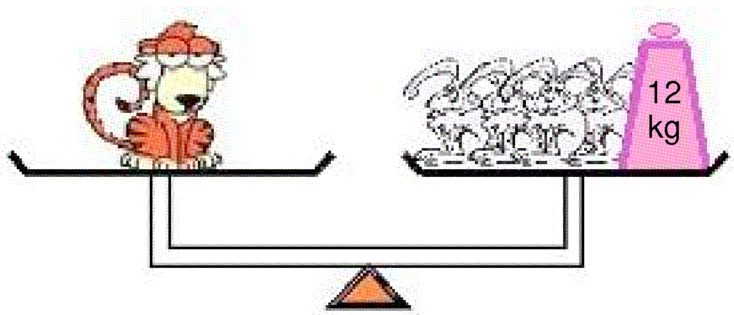
a.



Por ejemplo

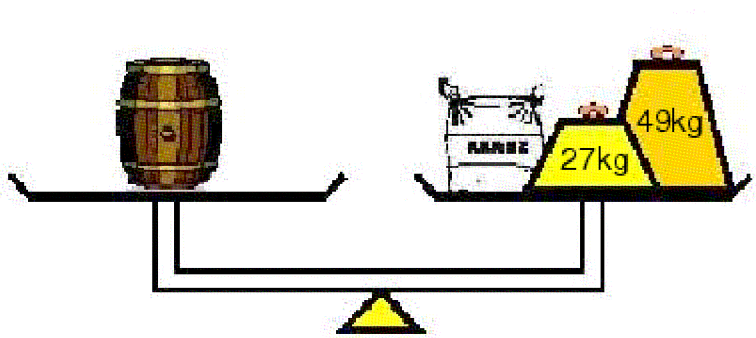
| EXPRESIÓN LITERAL | VARIABLES | IGUALDAD ALGEBRAICA |
|---|---|---|
| Un barril de vino pesa lo mismo que dos paquetes de arroz más 40 Kg. | barril = b<br>paquete de arroz = p | $1b = 2p + 40kg$ |

b.



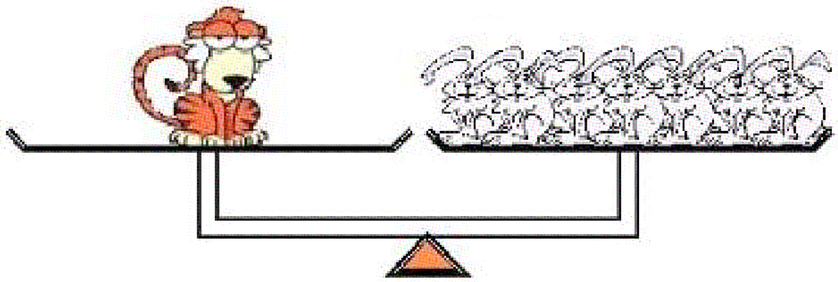

| EXPRESIÓN LITERAL | VARIABLES | IGUALDAD ALGEBRAICA |
|---|---|---|
| | | |

c.




| EXPRESIÓN LITERAL | VARIABLES | IGUALDAD ALGEBRAICA |
|---|---|---|
| | | |

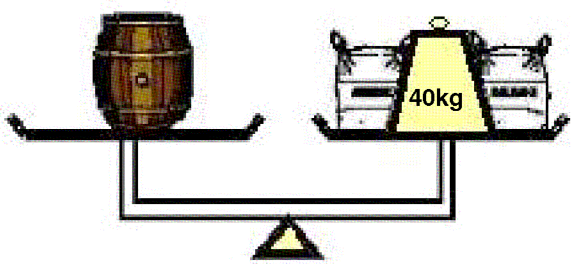
d.

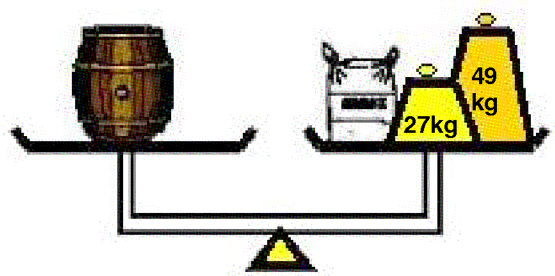


| EXPRESIÓN LITERAL | VARIABLES | IGUALDAD ALGEBRAICA |
|---|---|---|
| | | |

Ahora tú trabajo es averiguar el peso de cada uno de los objetos.

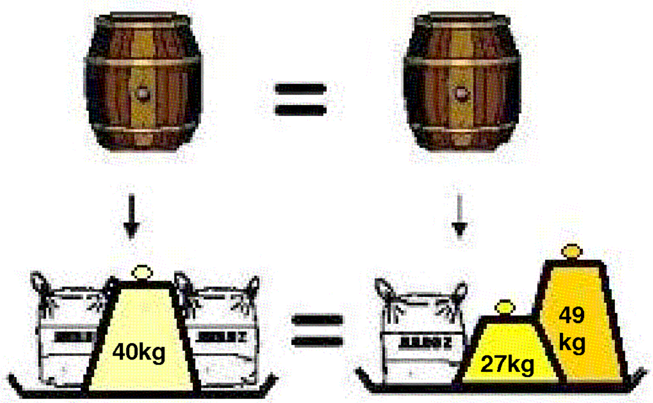
Tomemos las balanzas (a) y (c) porque si te fijas contienen los mismos objetos.




$1b = 2p + 40 \quad (1)$ $\qquad$ $1b = 1p + 76 \quad (2)$

Pero observa, el barril es igual al barril, por tanto las dos expresiones vistas en conjunto representan un Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas porque el valor del barril y el paquete de arroz es el mismo en las dos balanzas. Luego




ENTONCES $\qquad 2p + 40 \qquad = \qquad 1p + 76$

Con esta última expresión podemos encontrar el valor de un paquete de arroz al resolver esta ecuación

$$2p + 40 = 1p + 76$$

Utiliza procesos algebraicos para resolverla

Luego, un paquete de arroz pesa____________ . De esta manera sustituye este valor en alguna de las dos primeras expresiones por ejemplo

| En la primera ecuación | En la segunda ecuación |
|---|---|
| $1b = 2p + 40$ | $1b = 1p + 76$ |

Entonces: $1b =$ Un barril pesa ____________ .
$1p =$ Un paquete de arroz pesa ____________ .

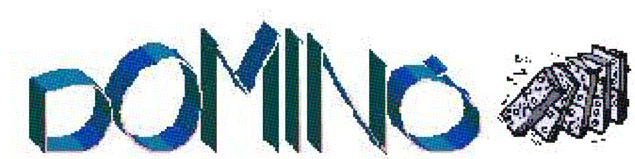
> Repite el mismo proceso para encontrar el peso del tigre y de cada conejo


PROFESOR:____________________________ GRADO: 9

TEMA:Método de Igualación

INDICADORES DE LOGRO:

- Solucionar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas aplicando como método de solución el Método de Igualación.




El dominó es uno de los juegos de mesa más comunes. A primera vista pareciera de no requerir de mayores instrucciones, ni dar cabida a elaboradas estrategias. Sin embargo, se trata de una actividad que necesita de reflexión y concentración, y que para muchos constituye la fuente de interesantes y complicados ejercicios matemáticos.

Probablemente, su nombre en castellano proviene del término francés dominó, que apareció en el siglo XV, el cual se refería a la capucha negra que llevaban los monjes, ya que las fichas de este juego eran negras con puntos blancos. Pero también parece referirse a la aceptación que encontraba en los monasterios y en los conventos, donde, por una confusión, debió recibir el nombre con que hoy conocemos, ya que quienes ganaban la partida pronunciaba la formula dominó gratis, en vez de dominus gratias...

¿De donde provienen los dominós?

El dominó nació en la India, sin duda alguna durante el tercer milenio antes de nuestra era. Según los historiadores las figuras representadas en los dominós se inspiraban en las combinaciones obtenidas en los dados. Sin embargo, otras fuentes históricas indican que las figuras presentes en las fichas de dominó estaban en relación con las estrellas y las constelaciones, y que se contaban hasta 200 y 300 fichas distintas en este juego, en la India, en la China y en Oriente, mientras que hoy en día, no hay más que 32 piezas en Asia y 28 en Occidente.

En efecto, el dominó nació en la India, está presente en toda Asia y sobre todo en la China, pero también tuvo sus días de gloria entre los hebreos y los griegos, antes de llegar a Europa en el siglo $XIV$ como entretenimiento entre nobles y plebeyos para luego en el siglo $XVIII$ convertirse en un juego de mesa que hizo furor entre nosotros y que todavía se practica.

# DOMINÓ

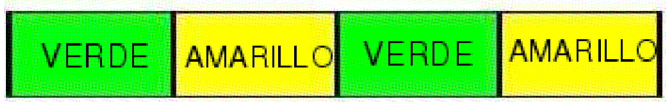
En este juego aparecen 28 fichas de las cuales 14 son Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas y las restantes sus respectivas soluciones. Para jugar debes

1. Escoger a tu mejor amigo y compite contra él.

2. Reparte las fichas de tal forma que te correspondan 7 fichas verdes y 7 fichas amarillas. Claro está que para empezar a primero debes resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales que escogiste.

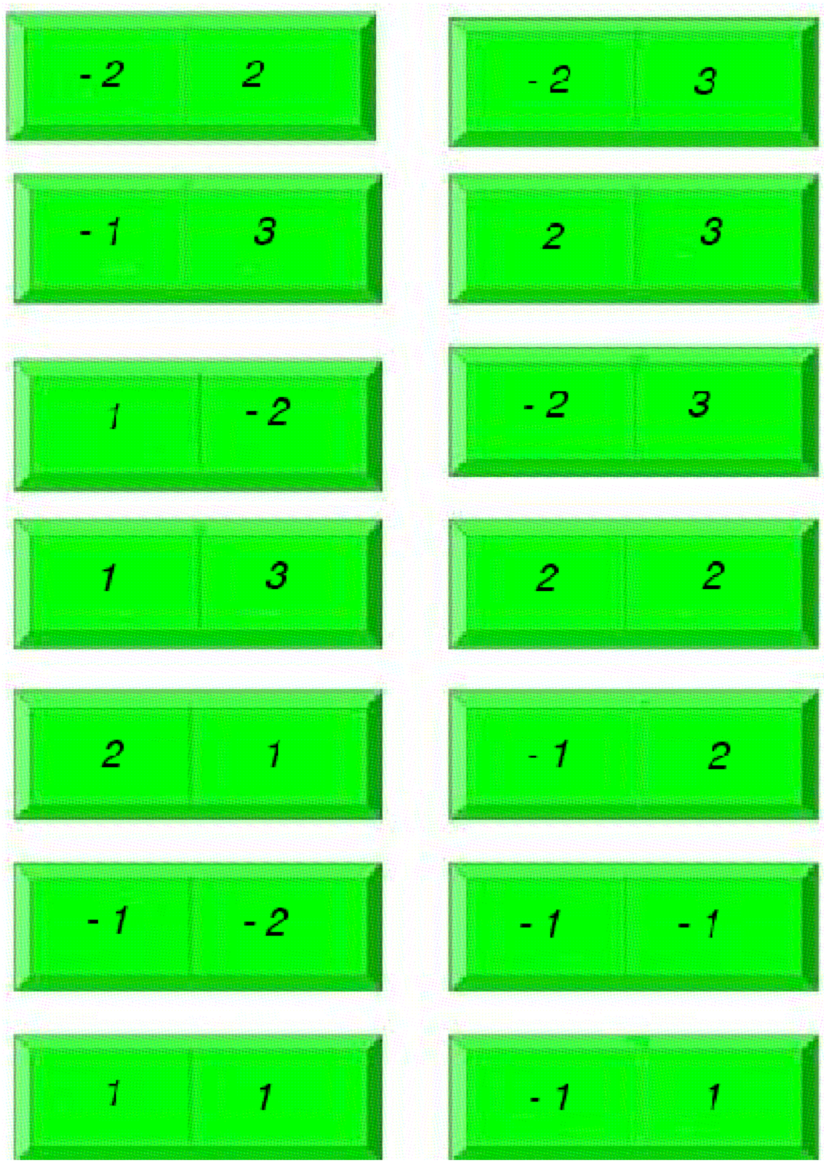
3. Con una moneda te sorteas el primer turno y puedes colocar ya sea una ficha verde ó una amarilla.

4. Ten en cuenta que al colocar las fichas los colores deben quedar intercalados así



5. A JUGAR! GANA QUIEN QUEDA SIN FICHAS...

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{l+3}{3} = m + 1$ | $3m + l$ | $2i - 3j = -5$ | $4i + 7j = 3$ |
| $2c - 5d = -1$ | $c + 9d = 11$ | $3a - 2b = 2$ | $a - 4b = -6$ |
| $6g - 5h = 1$ | $2g - 3 = -1$ | $2e + 5f = -7$ | $e - 3f = 2$ |
| $3k - 2l = 7$ | $5k + l = 3$ | $6m - n = -4$ | $3m - 4n = 5$ |
| $3A - B = -4$ | $A - 2B = 2$ | $4t = z - 11$ | $z - t = 5$ |
| $2 - w = r + 1$ | $r - 3 = w$ | $2x + y = 2$ | $x + y = 0$ |
| $p + q = 2$ | $q = 4 + p$ | $4v - u = 5$ | $u - 2v = -1$ |




• RECURSOS

- Fotocopias.

- 28 Fichas de dominó.

• TIEMPO

- El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 5 horas

• EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación

- Las guías diligenciadas

- Rapidez y fluidez en el momento de aplicar el juego (Actividad 4.4)

- La observación no estructurada recogida en el proceso.

- Destrezas al momento de jugar con el dominó.

- Aplicación de la Actividad 5.3.

4.1.6 ACTIVIDAD 6. Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por el Método de Eliminación a través de recursos didácticos y Situaciones Problematicas.

• PROPÓSITO: Emplear el Método de Eliminación para la resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas por medio de recursos didácticos y situaciones problemática

• ESTÁNDAR: Identificar diferentes métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. (Hay muchos caminos para llegar a una misma meta).

• LOGRO: Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas mediante métodos algebraicos como el Método de Eliminación.

• INDICADORES DE LOGRO

- Deduce a través de la manipulación de objetos las relaciones algebraicas existentes.

- Identifica los procesos de eliminación de una variable de acuerdo a unas condiciones iniciales del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- Reconoce los casos particulares del Método de Eliminación presentes en las situaciones dadas

- Aplica el Método de Eliminación para solucionar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

- METODOLOGÍA

- FASE 1: Presentación y explicación del taller correspondiente a la sesión de trabajo y la conformación de grupos de trabajo.

- FASE 2: Entrega de las guías al estudiante y el material didáctico respectivo

- Actividad 6.1: guía de trabajo, las fichas de colores y los tableros.
- Actividad 6.2: guía de trabajo.

- FASE 3: lectura, comprensión, manipulación de los materiales, desarrollo y deducciones respectivas a cada guía de trabajo.

- FASE 4: Socialización y recolección del material.

- CONCEPTOS PREVIOS

- Transposición de términos en una Ecuación Lineal dada.

- Operaciones fundamentales del álgebra (adición, sustracción, multiplicación y división).

- Traducir de un lenguaje retórico a un lenguaje algebraico.

- Resolución de Problemas.

- CONCEPTOS A DESARROLLAR

- Identificación de los casos particulares que se presentan en la aplicación del Método de Eliminación.

- Entender el Método de Eliminación como estrategia de solución para los Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ACTIVIDAD DEL DOCENTE

- El docente guía y orienta el desarrollo de las actividades, clarifica las dudas y estimula el trabajo de los estudiantes.

EXPOSICIÓN POR PARTE DEL DOCENTE

Al finalizar la actividad 6.1 el docente recopila lo visto en la guía así

Como puedes observar en cada uno de los anteriores procesos siempre realizamos una eliminación de fichas para conocer el valor de una de las variables para luego sustituirlo y encontrar el valor de la variable restante. De esta manera el Método algebraico que es resuelto es el que se conoce con el nombre de "Método de Eliminación" (suma ó resta) el cual consiste en: "buscar que en el Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales u opuestos (signos contrarios); para luego sumar los sistemas ya sea normalmente o con el uso del inverso aditivo de una de las ecuaciones, eliminando de está forma la incógnita utilizada y resolviendo la ecuación que resulta. La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones originales".

Ejemplo 1

Un grupo de amigos va a comer hamburguesas. En el momento de pagar para marcharse se dieron cuenta de que si cada uno da \$3.500 sobra \$4.000 del total mientras que si cada uno da \$3.000 faltan \$2.000 para el total.

Entonces ¿Cuántos amigos fueron a comer? y ¿Cuál fue la cantidad que tenía que pagar en total?

Comprensión del Problema

- Datos

$$x = grupo\ de\ amigos$$
$$y = Cantidad\ total\ a\ pagar$$

- Pregunta: ¿Cuántos amigos fueron a comer? y ¿Cuál es la cantidad total a pagar?

Planteamiento del Problema

| EXPRESIÓN LITERAL | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
|---|---|
| - Si cada uno da de \$3.500 sobra \$4.000 para el total $\longrightarrow$ | $3.500x = y + 4.000$ |

- Si cada uno da de \$3.000 falta \$2.000 para el total $\longrightarrow$ $3000x = y - 2.000$

Resolución del Sistema

1) $3.500x = y + 4.000$

2) $3.000x = y - 2.000$

$\longrightarrow$ La incógnita $y$ tiene el mismo coeficiente

De (1) y (2) dejamos las incógnitas $x$ e $y$ en un mismo lado.

| RECUERDA: La incógnita $y$ pasa con signo contrario |
|---|

$3.500x - y = 4000$

$3.000 - y = -3.000$

$\longrightarrow$ Aquí la incógnita $y$ tiene el mismo signo

Entonces cambiamos a (2) por su inverso aditivo

$$\begin{array}{r} 3.500x - y = -4.000 \\ -3.000x + y = 2.000 \\ \hline 500x = 6.000 \end{array}$$

$$x = \frac{6.000}{500}$$
$$x = 12$$

$\longrightarrow$ Sumamos las ecuaciones para eliminar la $y$ (Ten en cuenta la adición de números Enteros.)

Sustituimos el valor de $x$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 3.000x - y &= -2.000 \\ 3.000(12) &= y - 2.000 \\ 36.000 &= y - 2.000 \\ 36.000 + 2.000 &= y \\ 38.000 &= y \end{aligned}$$

Respuesta: Sabemos que 12 amigos fueron a comer hamburguesas y en total pagaron la suma de \$ 38.000

Verificación: El valor de $x = 12$ y $y = 38.000$

- ECUACIÓN 1

$$\begin{aligned} 3.500x &= y + 4.000 \\ 3.500(12) &= 38.000 + 4.000 \\ 42.000 &= 42.000 \end{aligned}$$

- ECUACIÓN 2

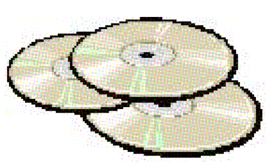
$$\begin{aligned} 3.000x &= y - 2.000 \\ 3.000(12) &= 38.000 - 2.000 \\ 42.000 &= 42.000 \end{aligned}$$

OBSERVA: El Método de Eliminación es muy eficaz cuando trabajamos con coeficientes grandes.

UN NUEVO CASO

Encontramos ahora un nuevo caso diferente a los anteriores en donde los coeficientes de las incógnitas $x$ e $y$ son diferentes entre si. Entonces se hace necesario la búsqueda de un sistema equivalente (que posee iguales soluciones) para su resolución. A continuación presentamos el siguiente ejemplo que representa este nuevo caso.

Ejemplo 2

¿Cuántos CD´S tiene Aníbal y cuántos Bernardo sabiendo que si Bernardo le da a Aníbal 4 CD´S, este tendría el doble de los que le quedan a Bernardo. Y si Bernardo tuviera cuatro veces más de los que tenía y Aníbal el triple de lo que tenía más 4 CD'S que se ganó después, entonces los dos tendrían igual número de CD´S?.

Comprensión del Problema

- Datos

$$x = \text{Número de CD´S de Aníbal}$$
$$y = \text{Número de CD´S de Bernardo}$$

- Pregunta: ¿Cuántos CD'S tiene Aníbal y cuántos Bernardo?

Planteamiento del Sistema

- Bernardo le da a Aníbal 4 CD´S y éste a su vez tiene el doble de los que le quedaba a Bernardo.

$x + 4 \longrightarrow$ No. de CD´S de Aníbal Más cuatro CD'S

$2(y - 4) \longrightarrow$ El doble de los CD´S que le queda a Bernardo

Luego la igualdad es

$$x + 4 = 2(y - 4)$$
$$x + 4 = 2y - 8$$
$$\underline{x - 2y = -12 \ \text{ Ecuación 1}}$$

- Si Bernardo tiene cuatro veces lo que tenía y Aníbal el triple más cuatro entonces tendrían lo mismo

$4y \longrightarrow$ Cuatro veces la cantidad de CD'S de Bernardo

$3x + 4 \longrightarrow$ Triple de CD´S de Aníbal más cuatro CD´S

Luego la igualdad es:

$$3x + 4 = 4y$$
$$\underline{3x - 4y = -4 \ \text{ Ecuación 2}}$$

Al unir las dos ecuaciones (1) y (2) formamos el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas.

$$(1) x - 2y = -12$$
$$(2) 3x - 4y = -4$$

En este Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas observamos que los coeficientes de la incógnita $y$ presenta una estrecha relación el de ser múltiplos entre sí. De esta manera igualamos los coeficientes $2y$ y $4y$ multiplicando la primera ecuación toda por 2 así

$$x - 2y = -12 \ \underline{\textit{Multiplicada por 2}} \quad 2x - 4y = -24(1)'$$

Ahora el sistema equivalente está formado por

$$\begin{array}{c} (1)' \ 2x - 4y = -24 \\ (2) 3x - 4y = -4 \end{array}$$

Al tener las ecuaciones (1) ' y (2) observamos que el coeficiente de $y$ que hemos igualado tienen también iguales signos, entonces sumamos por el inverso aditivo de (1) ' y con ello conseguimos eliminar $y$.

$$\begin{array}{rrl} \text{Tenemos (1) '} & 2x - 4y = -24 & \\ \text{Su inverso aditivo es} & -2x + 4y = 24 & \text{Lo sumamos} \\ \text{Tomamos (2)} & \underline{3x - 4y = -4} & (+) \ \text{ con (2)} \\ & x = 20 & \end{array}$$

Sustituimos el valor de $x$ que hemos encontrado en (1) para encontrar el valor de $y$.

$$\begin{array}{rl} \text{Ecuación (1)} & x - 2y = -12 \\ \text{Sustituimos} & (20) - 2y = -12 \\ & -2y = -12 - 20 \\ & -2y = -32 \\ & y = \frac{-32}{2} \\ & y = 16 \ \text{ CD´S} \end{array}$$

Respuesta: Aníbal tiene 20 CD´S y Bernardo tiene 16 CD´S

Verificación: Si tenemos $x = 20$ CD´S y $y = 16$ CD´S

- ECUACIÓN 1

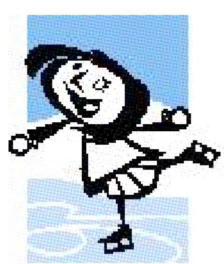
$$\begin{aligned} x - 2y &= -12 \\ 20 - 2(16) &= -12 \\ 20 - 32 &= -12 \\ -12 &= -12 \end{aligned}$$

- ECUACIÓN 2

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= -4 \\
3(20) - 4(16) &= -4 \\
60 - 64 &= -4 \\
-4 &= -4
\end{aligned}
$$

En el Método expuesto podemos ver que el Sistema de Ecuaciones equivalente que se busca como alternativa de resolución está formado a partir de la relación de múltiplos entre si de los coeficientes de una de las incógnitas, en este caso los coeficiente de $y$. Una vez modificada esta ecuación obtenemos su ecuación equivalente que al ser unida con la segunda ecuación se forma el Sistema de Ecuaciones Equivalente, ahora al tener dichos coeficientes iguales buscamos la operación de suma ó resta necesaria para eliminarla; finalmente aplicamos métodos tanto algebraicos como aritméticos para encontrar el valor de la otra incógnita y así obtener la solución del sistema original.

Ejemplo 3

Entre el doble de la edad de Juan y el quintuplo de la edad de su prima Juanita suman 30 años, y al restar el triple de la edad de Juan con el doble de la edad de su prima la diferencia es de 7 años.Dinos tú ¿Quién es mayor mi prima Juanita o yo?

COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

- DATOS

$$
\begin{aligned}
x &= \text{Edad de Juan} \\
y &= \text{Edad de Juanita}
\end{aligned}
$$

- PREGUNTA: ¿Qué edad tiene cada uno?

PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

- El doble de la edad de Juan y el quintuplo de la edad de su prima Juanita suman 30 años

| | |
|---|---|
| $2x \longrightarrow$ | El doble de la edad de Juan |
| $35y \longrightarrow$ | El quintuplo de la edad de Juanita |

Luego obtenemos:

$$2x + 5y = 30 \ (\ 1\ )$$

- Al restar el triple de la edad de Juan con el doble de la edad de su prima la diferencia es de 7 años

| | |
|---|---|
| $3x \longrightarrow$ | El triple de la edad de Juan |
| $2y \longrightarrow$ | Doble de la edad de Juanita |

Luego obtenemos:

$$3x - 2y = 7(2)$$

De ( 1 ) y ( 2 ) formamos el Sistema de Ecuaciones Lineales

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 30 \ (1) \\ 3x - 2y &= 7 \ (2) \end{aligned}$$

En este Sistema de Ecuaciones Lineales los coeficientes que acompañan a las mismas incógnitas no poseen ninguna relación, por lo tanto, según las condiciones del sistema eliminamos la incógnita que se facilite, en este caso la incógnita $y$. Una vez elegida la incógnita a eliminar procedemos a multiplicar los coeficientes de $y$ en (1) Multiplicarlo por toda la ecuación (2) y viceversa así como se indica a continuación

$$\text{Tomamos el sistema} \longrightarrow \begin{aligned} 2x + 5y &= 30 \ \ (\ 1\ ) \\ 3x - 2y &= 7 \ (\ 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ 1\ )\ \ 2x + 5y = 30 \ \underline{\textit{Multiplicada por 2}} \ \ 4x + 10y = 60 \ (\ 1'\ ) \\ (\ 2\ )\ \ 3x - 2y = 7 \ \underline{\textit{Multiplicada por 2}} \ \ 15x - 10y = 35 \ (\ 2\ '\ ) \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma el Sistema de Ecuaciones Lineales equivalentes formado por ( 1' ) y ( 2 ' ), en el que los coeficientes de $y$ son iguales y sus signos contrarios, por tanto la eliminamos

$$\begin{array}{rr} (1') & 4x + 10y = 60 \\ (2') & \underline{15x - 10y = 35} \;\; (+) \\ & 19x = 95 \\ & x = \frac{95}{5} \\ & x = 5 \end{array}$$

El valor de $x = 5$ lo sustituimos en ( 1 )

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 30 \\ 2(5) + 5y &= 30 \\ 10 + 5y &= 30 \\ 5y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{5} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

RESPUESTA: La edad de Juan es 5 años y la edad de su prima Juanita es 4 años. Luego Juan es el mayor.

VERIFICAMOS: El valor de $x = 5$ y $y = 4$.

- Ecuación 1

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 30 \\ 2(5) + 5(4) &= 30 \\ 10 + 20 &= 30 \\ 30 &= 30 \end{aligned}$$

- Ecuación 2

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 3(5) - 2(4) &= 7 \\ 15 - 8 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

- ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

El estudiante lee, analiza, interpreta, pregunta, manipula los materiales didácticos, discute, deduce, aplica los conceptos aprendidos, desarrolla las actividades y diligencia las respectivas guías.

GUIAS DE TRABAJO

## ACTIVIDAD 6.1

PROFESOR:____________________________________ GRADO: 9

TEMA: Método de Eliminación

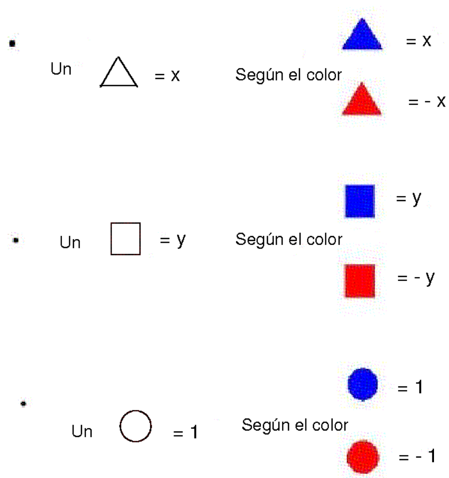
INDICADORES DE LOGRO

- Deduce a través de la manipulación de objetos las relaciones algebraicas existentes.

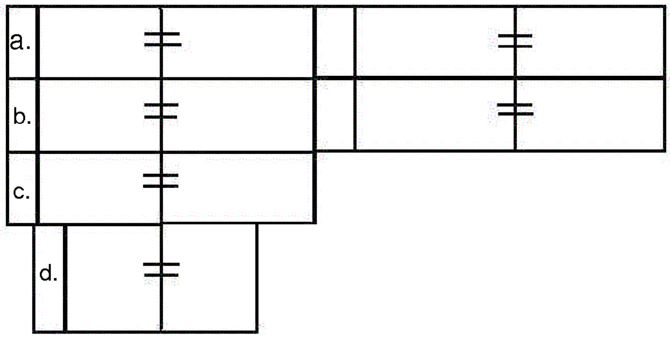
- Identifica los procesos de eliminación de una variable de acuerdo a unas condiciones iniciales del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

> "El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide".JEAN DALEMBERT

MATERIALES:
1. Las fichas equivalen

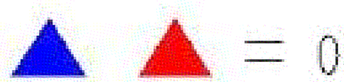


2. Tablero de juego



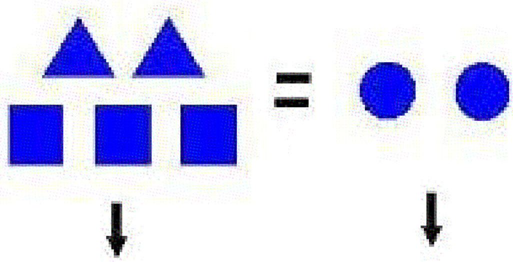

## REGLAS

1. Las fichas de igual forma pero de diferente color equivalen a tener fichas algebraicamente igual a cero por lo tanto son retiradas del tablero.

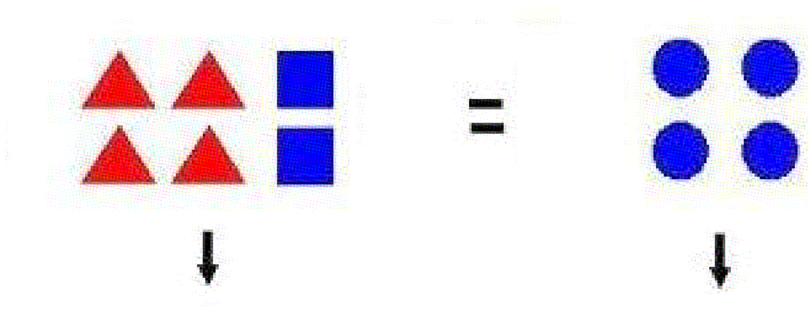



2. Escribe la ecuación Lineal respectiva de manera algebraica según las siguientes figuras

•

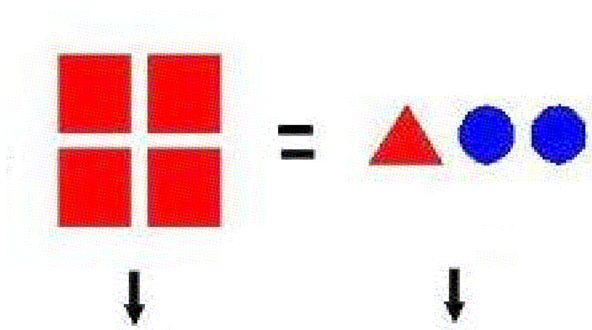


$$\begin{aligned} x+x+y+y+y &= 1+1 \\ 2x+3y &= 2 \end{aligned}$$

- 

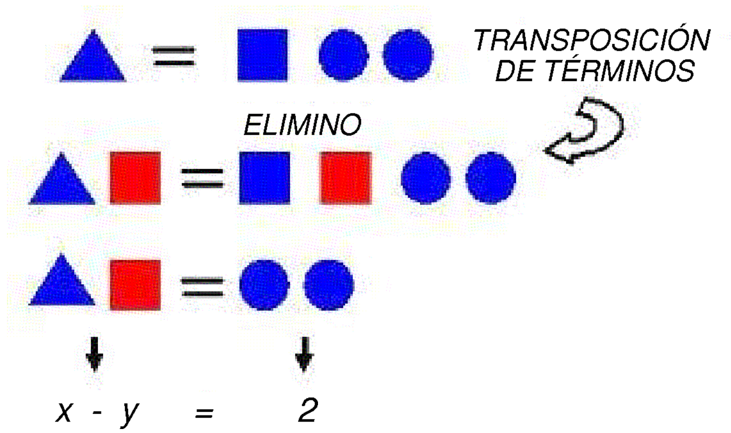
$$\begin{aligned} (-x)+(-x)+(-x)+(-x)+y+y &= 1+1+1+1 \\ -4x+2y &= 4 \end{aligned}$$

- Ahora inténtalo tú!



3. Si las variables se encuentran en columnas distintas y queremos dejarla en una misma columna entonces procedemos a colocar de la variable que deseamos transponer, la misma cantidad de fichas a ambos lados pero de color diferente.

Ejemplo




Retomemos el proceso de manera algebraica

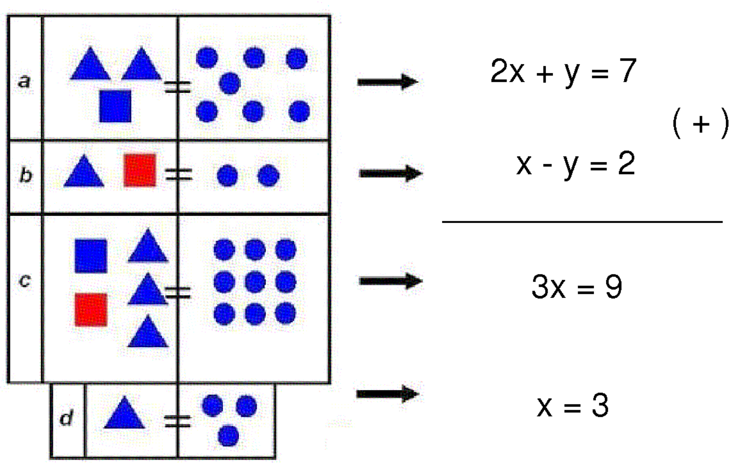
$$x = y + 2$$

$$x - y = y - y + 2 \qquad \text{Eliminamos la } y$$
$$x - y = 2$$

4. En las casillas (a) y (b) del tablero pueden suceder los siguientes casos

i. Tener la misma cantidad de fichas para $y$ o para $x$ y que además sus colores sean contrarios entonces procedemos a unir o agrupar las fichas en la casilla (c); luego se aplica la regla (1) (eliminamos fichas de diferente color). Con las fichas restantes obtengo el valor de cada una de ellas.

Ejemplo 1




Como en la casilla (b) aparece una ficha roja entonces aplicamos la regla mencionada al colocar todas las figuras en la casilla (c) para lograr fichas de color diferente.

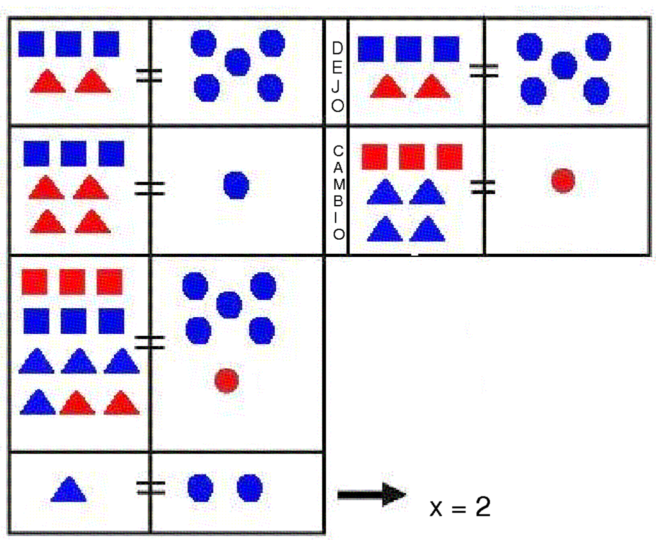
Observemos entonces que a cada triangulo le corresponde 3 círculos y de esta manera el resultado es colocado en la casilla (d).

Pero sólo hemos encontrado el valor de $x$ y nos falta el valor de $y$ que podemos encontrarlo sustituyendo el valor de $x$ en cualquiera de las ecuaciones originales así

| Sustituyendo en la Primera Ecuación | Sustituyendo en la Segunda ecuación |
|---|---|
| $2x + y = 8$ | $x - y = 1$ |
| $2 * (3) + y = 8$ | $(3) - y = 1$ |
| $6 + y = 8$ | $-y = 1 - 3$ |
| $y = 8$ | $-6 - y = -2$ |
| $y = 2$ | $y = 2$ |

ii. Tener la misma cantidad de fichas para $y$ o para $x$ y que además sus colores sean los mismos entonces escogemos cualquiera de las dos casillas y todas sus fichas las cambiamos por fichas de color diferente colocándolas en una nueva casilla, luego procedemos a unir en (c) las fichas de la nueva casilla con las fichas de la casilla que no hemos utilizado. Aplicamos la regla (1) (eliminando fichas de diferente color) con las fichas restantes y obtienes el valor de cada una de las variables.

Ejemplo 2




De manera algebraica tenemos

$$\begin{array}{lrl}
\text{a.)} & 3y - 2x = 5 & \quad (+) \\
\text{b.)} & -3y + 4x = -1 & \\
\hline
 & x = 2 &
\end{array}$$

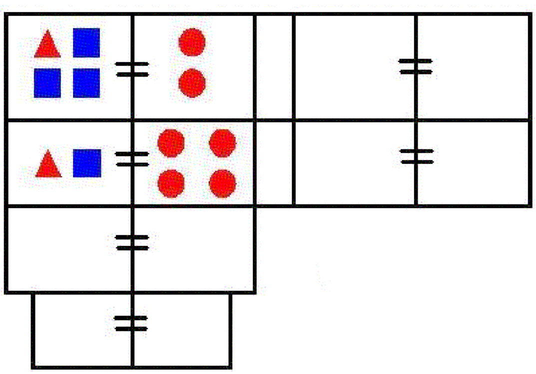
Sustituimos en cualquiera de los enunciados originales el valor encontrado de $x$.

| ECUACIÓN 1 | ECUACIÓN 2 |
|---|---|
| $3y - 2x = 5$ | $3y - 4x = 1$ |
| $3y - 2(2) = 5$ | $3y - 4(2) = 1$ |
| $3y - 4 = 5$ | $3y - 8 = 1$ |
| $3y = 5 + 4$ | $3y = 1 + 8$ |
| $3y = 9$ | $3y = 9$ |
| $y = \dfrac{9}{3}$ | $y = \dfrac{9}{3}$ |
| $y = 3$ | $y = 3$ |

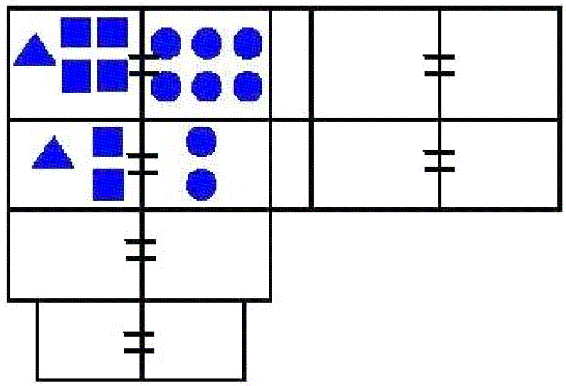
PRACTÍCALO!

- Encuentra el valor de $x$ y el valor de $y$ correspondiente

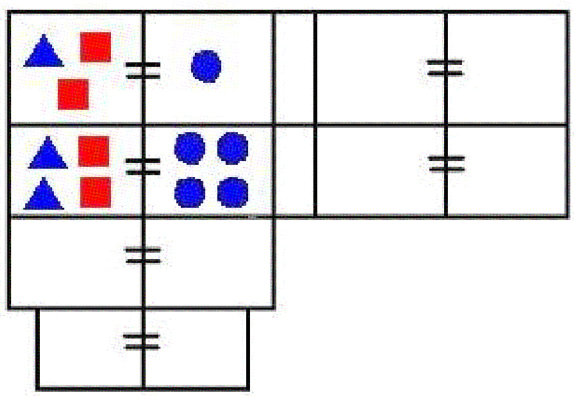
a.



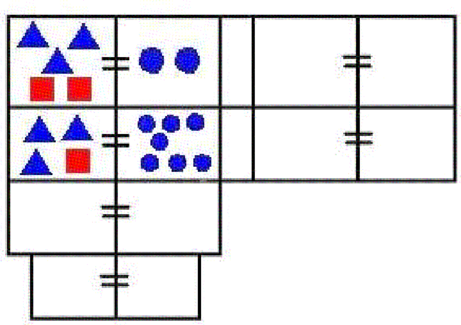
b.



c.



d.



# ACTIVIDAD 6.2

PROFESOR:________________________________________ GRADO: 9

TEMA: Método de Eliminación

INDICADORES DE LOGRO

- Reconoce los casos particulares del Método de Eliminación presentes en las situaciones dadas
- Aplica el Método de Eliminación para solucionar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

Lee con atención y diviértete resolviendo.

## MODESTOS, SENCILLOS Y RECATADOS!.


Un labrador estaba sembrando trigo en un campo cercano a su granja. Lo acompañaba su esposa y sus cuatro hijos. Y en esas estaban, cuando un forastero que pasaba con su carro por el sendero que limitaba con el sembrado, que aún no estaba sembrado porque el sembrador estaba en ello, se bajó del vehículo para preguntar: -Buenos días, felices lugareños, ¿podría decirme si voy bien para llegar al castillo de don Jesús del Castillo del Castillo?.

-Hombre: castillo, lo que se dice castillo... -contestó la mujer, que tenía a su hijo pequeño en brazos

-Sí, sí; se apellida del Castillo del Castillo.

-No, si no lo digo por el apellido; lo digo por el castillo que, la verdad, es más mansión que castillo. Y sí, va usted bien. En cuanto suba esa loma verá usted la casa que busca.

-Muchas gracias, señora. Qué día más espléndido, ¿verdad?

-Sí que lo es. Por cierto, va usted muy elegante, caballero.

-Sí; es que yo soy muy elegante, me gusta siempre ir impecable. Además, soy jugador profesional y voy a jugar una partida de póquer a "El Caballo de Troya", la finca del señor del Castillo del Castillo.

-Vaya, qué casualidad, precisamente nosotros trabajamos las tierras de don Jesús.

-Y yo me trabajaré sus tierras, es decir, que intentaré ganarle todo lo que pueda, porque soy uno de los mejores jugadores de cartas que conozco.

-¿Es usted buen jugador? -preguntó la mujer, dejando al niño en el suelo.

-Ya le he dicho: uno de los mejores que conozco.

-Y modesto, por lo que veo.

Sí, señora: me llamo Modesto Sencillo Recatado, para servirla -dijo el forastero, acompañando a sus palabras con una aparatosa reverencia que causó la rechifla de la prole.

-Muy bien, pues ya que es jugador, juguemos. Mire, ahí mismo, en el corral, tengo conejos y sus jaulas. ¿A que no adivina cuántos conejos y jaulas tengo?

-Bueno, eso no es un juego: es una adivinanza.

-Déjese de pretextos y conteste, señor jugador.

-Bueno, es fácil, pero necesitaría algún dato más.

En ese momento, y cuando la campesina le iba a dar más datos, uno de los niños, con las manos embadurnadas del chocolate que se acaba de comer, se las limpió en el que era el pantalón blanco impecable del forastero, mientras le decía

-Señor; yo sé cuántos conejos y jaulas hay en nuestro corral.

-Calla, niño, que ahora estoy hablando con tu madre. Qué gracioso el niño...

-Responde el forastero, visiblemente molesto al ver la mano del niño impresa en su pantalón.

-Si me da un $1.000, le digo cuantos conejos y jaulas tenemos -insiste el niño, insistiendo también en limpiarse las manos chocolateadas en el pantalón del forastero, cada vez menos impecable.

En ese momento, el sembrador, dejando de sembrar, se acerca al grupo

-Buenos días.

-Buenos días, esforzado sembrador. Aquí estamos, jugando a resolver problemas muy sencillos que yo resolveré fácilmente. Es que soy jugador profesional, y de los buenos, ¿sabe?.

-Ah, pues no, no lo sabía. Pues ya que es tan listo, a ver si sabe usted cómo resolvimos el otro día un problema que nos preocupaba a mi compadre y a mí.- Es que hace dos meses, nos fuimos con mi compadre Endelecio a trabajar unos terrenitos, por allá lejos, él a machetear y yo con el azadón.

-Mira qué bien. ¿Y cuál era el problema?

- Pues que el dueño del terreno es un poco enredador y bromista, en el momento de pagarnos nos dijo que yo ganaba $500 diarios menos que mi compadre, pero que mi compadre trabajó 30 jornadas mientras que yo sólo 24. Al final yo gané $33.000 más que él.

-¿Y...?

-Cómo que ¿Y...?. Pues quedamos preocupados porque él no nos dijo cuánto fue que nos pagó el día, y el compadre estaba furibundo pensando que lo estaban estafando. De pronto para nuestra fortuna, pasó por ahí la maestra del pueblo y nos resolvió el problema en un momento. - Ella sí que es lista, y no como otros - dijo, mirando al forastero.

El forastero empezó a pensar cuánto fue lo que se les pagó por día de trabajo a los dos campesinos, cuando se dio cuenta de que uno de los niños, el de la camiseta de rayas, había cogido su sombrero, que había dejado sobre la cerca junto a la que estaban y lo había tirado a una charca que más que cerca estaba cercana. Y no contento con eso, el niño tiraba piedras contra el sombrero, con ánimos de hundirlo. El forastero iba a acudir en auxilio de su sombrero, cuando sintió que lo sujetaban de los pantalones. Cerró los ojos resignado, imaginando más manchas de chocolate, y cuando los abrió comprobó que se le multiplicaron las manchas en su pantalón, además de haber perdido el sombrero en la charca. Hizo un esfuerzo para controlarse, pero perdió definitivamente los nervios cuando el niño con las manos sucias, insistió:

-Que yo sé cuántos conejos y jaulas tenemos.

-Y a mí qué me importa.

-Y yo también lo sé -dijo el pequeño, que hundió el sombrero.

-Ah, ¿sí? A ver, ¿Cuántos? -preguntó el forastero.

-Pues si mi mamá introduce seis conejos en cada jaula quedan cuatro espacios libres en una jaula, pero si introduce cinco conejos en cada jaula quedan dos conejos por fuera.

-Complicadito, el nene -le dijo el forastero al padre que, sonriente, contestó

-Es que ya sabe, los de pueblo somos muy brutos; no podemos compararnos con ustedes, los de ciudad.

El forastero se limpiaba los pantalones cuando el niño de la camiseta a rayas volvió al ataque:

-Pues en el corral tenemos...

-¡No! No se lo digas. Que este señor es muy listo y lo averiguará el solo.

Pero el forastero, en lo único que estaba pensando era en irse de allí cuanto antes. Y ya iba a ponerse en marcha hacia su carro, cuando el campesino le dijo:

-Pero, Señor usted ha perdido por no adivinar las respuestas a nuestros problemas, ¿No que era un buen jugador?

- Cómo? A parte de todo yo les debo?

- Por su puesto, claro que si logra decirme cuál es la edad de mi mujer y la de su hermano menor Braulio, quedamos a mano y usted queda como un gran jugador.

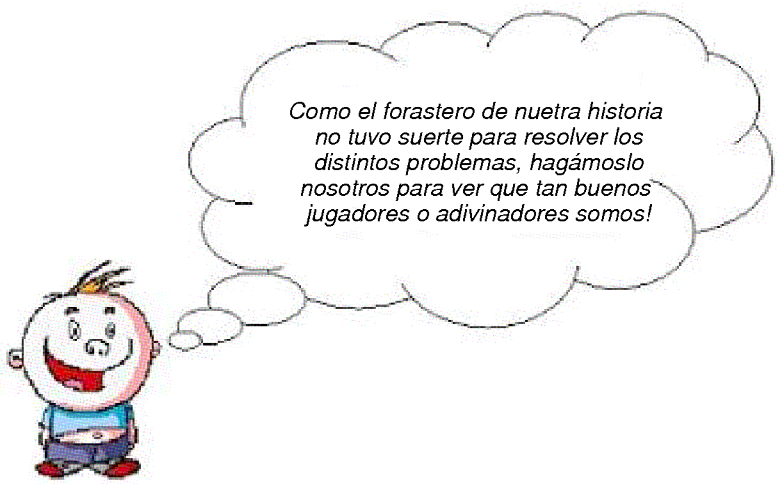
- Está bien! - entre dientes dijo el forastero y pensó - con tal de quitarme esta gente de encima...

- Verá : si cinco veces a la edad mayor se le añade siete veces la edad del menor la suma es 316. Pero si a 9 veces la edad del menor se le resta el cuádruple de la edad del mayor la diferencia es 83. Bueno cuál es la edad de mi mujer y la de su hermano Braulio?

- Que! Qué? Ustedes no dicen adivinanzas sino trabalenguas, tenga, tenga este dinero y Dios me libre de jugar con ustedes...

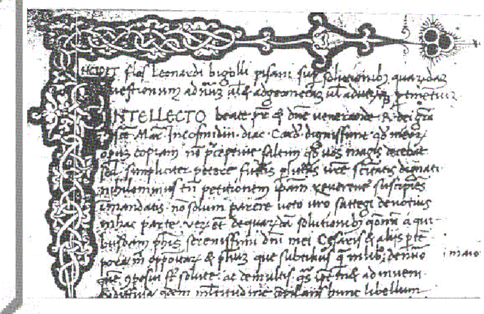
- La familia dando por terminada la provechosa jornada, recogió sus cosas y después de despedirse del abrumado forastero se encaminaron hacia su granja felices por el dinero ganado.

- Mientras que el forastero iba todo triste, sucio y sin sombrero en su carro pensando en los conejos, las jaulas, los jornales diarios, las edades...




RECUERDA ESCRIBIR APARTE LAS DISTINTAS SITUACIONES PLANTEADAS AL FORASTERO Y LUEGO INTENTAS RESOLVERLAS EN EL MENOR TIEMPO POSIBLE!...
SUERTE!...

El Método que acabamos de estudiar fue el más empleado a lo largo de la Historia de las Matemáticas, desde los Babilonios, quiénes lo utilizaron de manera implícita por medio de combinaciones lineales, hasta el Renacimiento donde se generaliza por Etienne Bezout (Matemático 1730 - 1783)



- RECURSOS

- Fotocopias

- ACTIVIDAD 6.1

- Fotocopias.

- Fichas de colores.

- Tableros.

- TIEMPO

El tiempo estipulado para el desarrollo de las guías en clase con su respectivo desarrollo, aclaración, socialización e intervención del docente es de 6 horas.

- EVALUACIÓN

Instrumentos de evaluación

- Las guías diligenciadas.

- La observación no estructurada recogida en el proceso.

- Manipulación de los materiales.

- Aplicación de la Actividad 6.3.

# 5.CONCLUSIONES

La validación de las Estrategias Metodológicas propuestas para nuestro trabajo se llevó a cabo mediante un análisis colectivo con 15 expertos docentes en el área de Matemáticas y con 5 compañeros más, quienes con su conocimiento y experiencia en este campo del saber contribuyeron, a la valoración de las actividades planteadas.

De la experiencia realizada podemos concluir

1. FORMATO

Una vez presentadas las actividades para el estudiante se inició un análisis grupal en cuanto al formato de presentación, el cual corresponde a

- Encabezado.
- Tema.
- Logro.
- Situación a desarrollar.

De acuerdo a la discusión el Logro propuesto describe de manera general el desarrollo de toda la actividad por lo tanto debería ser sustituido por su correspondiente Indicador de Logro ya que describe de manera más específica lo que el estudiante debe alcanzar con el desarrollo de cada una de las actividades que componen la actividad general. Es por esto que en el formato de cada una de las actividades se sustituye el Logro por su respectivo Indicador de Logro.

2. CONTENIDO

El contenido de las actividades presentado al colectivo fue considerado como pertinente puesto que esta acorde por lo estipulado en los programas curriculares propios para el grado noveno. De igual forma el empleo de situaciones problemáticas cautivo su interés ya que según su experiencia el uso de estas situaciones en el aula, beneficia la comunicación Matemática, se facilita el paso de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático. En cuanto a las "situaciones gráficas"(cuadros mágicos, balanzas, entre otros) las denotaron como situaciones llamativas para el estudiante puesto que centran aún más su atención creando motivación por aprender. En el caso de la manipulación de objetos utilizado en la última actividad, todos coinciden en que además de ser una actividad didáctica fue bastante práctica puesto que permite de manera armoniosa el paso de lo concreto a lo abstracto.

En general, los contenidos pueden ser entendidos y desarrollados con facilidad por el estudiante ya que se presentan de manera dinámica y recreativa, además con una correcta orientación por parte del docente ayuda a conseguir con mayor efectividad los logros propuestos.

3. MATERIAL

Los recursos didácticos utilizados para recrear cada una de las actividades fueron evaluadas como un material didáctico propicio para beneficiar el desarrollo de la actividad y como mediador del conocimiento. Principalmente tuvo mayor reconocimiento el material construido para la última actividad ya que recrea y facilita de manera satisfactoria la aplicación del Método de Eliminación. Como sugerencia para este material todos coincidieron, que este recurso debería ser construido por el mismo estudiante, ya que su elaboración permite a que él se adueñe más de dicho material; además, en cuanto a costos se refiere, está a su alcance. De manera específica el manejo de la tecnología para la actividad 3, sugirieron que, la manera y el momento de su presentación dentro de la actividad no era el apropiado ni oportuno ya que según la experiencia de los docentes, primero el estudiante debe tener los conceptos claros para luego así apoyarse en está herramienta. Es por ello que el orden inicial de la actividad será sustituido lo propuesto inicialmente y ahora se desarrolla primero actividades manualmente para luego utilizar la calculadora como aplicación y verificación de lo aprendido.

4. ANÁLISIS FINAL

Como conclusión final podemos deducir que las actividades planteadas para el estudiante se encuentran dirigidas adecuadamente puesto que presentan una alternativa recreativa de enseñanza para la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, según concepto de los expertos.

De manera general consideramos que nuestro propósito con la presentación de las actividades al colectivo de docentes colmó nuestras expectativas puesto que nuestra alternativa de enseñanza fue recibida de la mejor manera, y se puede llevar al aula de clases de acuerdo a sus concepciones como docentes de Matemáticas; así mismo, sus críticas y conclusiones fueron tomadas en cuenta con el fin de realizar las modificaciones a las actividades respectivas.

Para finalizar queremos realizar algunos comentarios finales sobre nuestra experiencia, podemos decir que el trabajo realizado se inició con una búsqueda exahustiva de la evolución histórica de la Resolución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, la cual en sus inicios parecía un tanto complicada por el escaso material bibliográfico,sobre todo el existente en el Departamento de Matemáticas, pero al final con una buena orientación nos documentamos en algunos textos y citas de internet referentes a este tema. Una vez terminado el estudio se continuó con la creación de la propuesta situación que requirió mucha creatividad y apoyo de todo tipo ayudas didácticas como la tecnología y juegos que fuesen pertinentes. Así, el proceso de reorganización, recolección de información y presentación del trabajo, todo en miras de llevar a cabo la validación, fue bastante dispendioso; en éste último proceso,agradecemos el inmenso apoyo que el Departamento de Matemáticas nos brindó en cuanto a la organización del evento se refiere, en especial a la Directora del programa por su esmerada e incondicional colaboración. De de igual forma nos sentimos muy contentas y satisfechas al saber que todo nuestro trabajo fue valorado de manera positiva y que nuestra propuesta significa una alternativa de enseñanza que puede ser llevada al aula de clase, además nos alegra, el hecho el haber concursado con nuestro trabajo de grado en el programa de Investigación de la VIPRI y haber sido uno de los finalistas, lo cual nos compensa el esfuerzo y dedicación que hemos puesto para su construcción y desarrollo.

Adicional, consideramos que el desarrollo de nuestro trabajo nos enriquece para la formación como futuras docentes, ya que nos orienta hacia la importancia de la comprensión de la Historia antes de iniciar un estudio y ocuparse de algún tema matemático, por que es ahí, en donde se vislumbran todas aquellas dificultades que en el proceso de maduración y formalización han tenido, para ser una guía práctica.

Para nosotras es importante hacer conocer al Departamento los comentarios de los docentes asistentes al Seminario de validación, para ellos fue muy grato que la Universidad los llmará nuevamente a discutir sobre su quehacer y a opinar sobre el mismo; e insisten en la falta de contacto del nuestro Programa con los docentes de Matemátemáticas de la región.

# BIBLIOGRAFÍA

ACEVEDO, MYRIAM Y LOSADA, MARY. Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Año.

BALDOR, AURELIO. Álgebra Elemental. Madrid. Editorial Mediterráneo.

BOYER, CARL. Historia de la Matemática. Madrid, 1986. Alianza Editorial.

CARULLA, CRISTINA. Investigación e Innovación en Educación Matemática. En Revista EMA, Volumen 3 Nº 1. Noviembre de 1997. Santa Fe de Bogotá, Colombia. Impreso en Colombia.

CIDE, Centro de investigación y Desarrollo de la Educación. Ecuaciones Lineales. Resolviendo problemas con Ecuaciones Lineales. Ministerio de Educación de Chile. En: http://www.educarchile.cl/eduteca/ecuacioneslineales/

CLUB MENSA. Colección de juegos y problemas de ingenio. Copyright © 1996-2005 Mensa España. En : http://www.mensa.es/juegosmensa/enundif.html
Problemas mensa.

COLLETE, JEAN PAUL. Historia de las Matemáticas. Tomo I. México, 1986. Siglo XXI. Editores.

DE GUZMÁN, MIGUEL. Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Editorial Popular 1993.- Edición HTML Asenjo, Joaquín. En http://www. oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

DUARTE G., JESÚS JUAN Y SÁNCHEZ G., MANUEL. Sistemas Lineales de dos Ecuaciones con dos incógnitas. Aspectos Históricos - Práctica del Curso DMDI 99-00. http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/ historia.html.

E.T. BELL. Historia de las Matemáticas. Fondo de la Cultura Económica. México D.F, 1995. Impreso en México.

ESCUDERO, MARTÍN JESÚS. Resolución de Problemas. En: http://platea.pntic.mec.es/~ jescuder/prob_int.htm.

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES. El Método Delphi. Donostia-San Sebástian. http://www.codesyntax.com/prospectiva/ Metodo_delphi.pdf.

GARCIA, FRANCISCO Y PORLÁN, RAFAEL. El proyecto ires (Investigación y Renovación Escolar). En Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales. Universidad de Barcelona Nº 205, Barcelona, España,2000.

GRUPO DE EVALUACION DE LA EDUCACION BASICA Y MEDIA 2003, ¿Cómo es la Evaluación en Matemáticas?,ICFES, pág. 7. En http:// 200.14.205.40:8080/ portalicfes/home_2/rec/arc_3616.pdf.

KELIN, MORRIS. El pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días. Tomo I. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

LEÓN CORREDOR, OLGA LUCIA Y OTRO. El proyecto de aula en la didáctica de las Matemáticas. Secretaria Municipal de Educación y Cultura Pasto, Corpoeducación, Bogotá D.C., impreso en Colombia, julio del 2004.

LABRAÑA, ANTÓN Y OTROS. Álgebra Lineal, Resolución de Sistemas Lineales. Educación Matemática en Secundaria. Madrid. Editorial Síntesis S.A., 1995.

LÓPEZ, JOSÉ ANTONIO Y MORENO, MARÁ LUISA. Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias. Instituto Nacional de calidad y evaluación INCE. http://www.ince.mec.es/timss/ci/index.htm.

MASON, JOHN Y OTROS. Rutas y Raíces hacia el, Álgebra. Traducción: Agudelo, Cecilia. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja 1999. UPTC, secciones públicas.

MAZ, ALEXANDER. La historia de las Matemáticas en clase: ¿Porqué? Y ¿Para qué?. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://usuarios.lycos.es/amazugr1964/doc/la_historia_de_las_matematicas_en_clase _ porque_paraque-corregido.pdf.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares, Matemáticas. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Colombia, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Resolución Número 2343 de Junio de 1996. Santa Fe de Bogotá D.C. Junio 1996.

RIBNIKOV, K. Historia de las Matemáticas. Editorial Mir. Moscú, 1987.

TORRES, IBÁÑEZ RAÚL Y OTROS . Érase una vez un Problema. DivulgaMat. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas . Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.).En http://www.divulgamat.net/weborriak/Cuentos/index. asp

VILLAREAL, MÓNICA. La investigación en Educación Matemática. Universidad Nacional de Córdoba. Aregentina. En: http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/ Monica%20Ester%20Villarreal%20-%2016.pdf

WELDEGG, GUILLERMINA. Educacion Matemática. En : http://www.uv.mx/ iie/ colección/N _29/ la_educación_matemática.htm.