RESOLUCIÓN DE ECUACIONES SEGÚN EL LIBRO II DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

MILTON NORBERTO DELGADO BENAVIDES
JESÚS HOSMANDER HIDALGO RENGIFO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2006

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES SEGÚN EL LIBRO II DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

MILTON NORBERTO DELGADO BENAVIDES
JESÚS HOSMANDER HIDALGO RENGIFO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

MG. OSCAR FERNANDO SOTO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2006

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre del 2006.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

ADVERTENCIAS

El proyecto tratara en sus apartes, el libro “Elementos” de Euclides, por Los Elementos de Euclides, sin querer con esto desvirtuar, ni desconfigurar su Titulo, es decir que por motivos de comodidad sintáctica, utilizaremos esta expresión; además se utilizara una convención moderna mediante los símbolos □, ■ ; que significan demostración y queda demostrado (q.e.e.d) respectivamente.

Los conocimientos elementales de geometría se expondrán en forma intuitiva y concreta con razonamientos sencillos, acompañados de ejemplos prácticos. Se prescinde en ellos casi por completo de demostraciones teóricas, que se sustituyen por construcciones de figuras, explicaciones adecuadas de las verdades fundamentales referentes a la geometría, y aplicaciones numéricas o gráficas que contribuyen a dar idea de los principios no demostrados.

El proyecto se distingue por la tendencia a dar mas importancia al raciocinio y a las demostraciones lógicas de verdades geométricas presentadas en forma de proposiciones o de problemas, porque se destina a dicentes y docentes que manejen conceptos básicos en geometría, para así; poder entender y resolver las situaciones relativas al libro II de los Elementos, y que necesitan una rigurosa disciplina mental, que sirva de base para estudios mas elevados.

En las demostraciones de las proposiciones, se sigue generalmente el método sintético, que consiste en pasar de una verdad conocida, llamada Hipótesis, hasta llegar a la que se quiere demostrar, que se denomina tesis o conclusión.

Es esa serie de ideas, importa mucho conocer claramente y tener presentes las definiciones de los términos empleados y de las nociones de que se trata, además de sustituir mentadamente esas definiciones a los conceptos definidos.

En la resolución de los ejemplos, problemas, entre otros, el procedimiento más indicado consiste en examinar atentamente las relaciones que hay entre los datos y las incógnitas, en torno a la proposición y por medio de otro u otros problemas, llegar hasta uno cuya solución sea conocida. Este método llamado analítico, es el más indicado, tanto para la resolución de los ejemplos, como para la demostración de las proposiciones. Además, en nuestro proyecto se encuentra el método algebraico que consiste en resolver los problemas valiéndose del cálculo con valores numéricos o literales; para ello, se ligan, por medio de ecuaciones, los elementos desconocidos con los datos del problema, se resuelven dichas ecuaciones enmarcadas en cada proposición y las figuras planteadas están en continua relación con su solución.

RESUMEN

Los elementos son sin duda la obra más famosa de Euclides constituye tanto una historia matemática de la época precedente como el desarrollo lógico de una teoría. No contamos con manuscritos del propio Euclides, y sus escritos han tenido que ser reconstruidos a partir de las numerosas recensiones, comentarios y notas de otros autores.

El componente más sobresaliente del libro II en el cual se centra nuestro trabajo es el relativo al álgebra geométrica, donde todas las cantidades están representadas geométricamente, evitando así un problema de la asignación de valores numéricos de aquella época. Los números se ven sustituidos por segmentos de recta; el producto de dos números se convierte en el area de un rectángulo; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números es la prolongación de un segmento; la resta en recortar un segmento; la división de un producto por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este ultimo y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado. La suma y resta de productos se remplaza por la suma y resta de rectángulos; la extracción de una raíz cuadrada, por la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un rectángulo dado. Este material se utiliza para la solución de algunos tipos de ecuaciones, expresados con números positivos.

ABSTRACT

The elements are without a doubt the most famous work in Euclid's it constitutes a mathematical history of the precedent time so much as the logical development of a theory. We don't have manuscripts of the own Euclid's, and their writings have had to be reconstructed starting from the numerous recession's, comments and other authors' notes.

The most excellent component in the book II in which our work is centred are the relative to the geometric algebra, where all the quantities are represented geometrically, avoiding this way a problem of the assignment of numeric values of that time. The numbers are substituted by straight line segments; the product of two numbers becomes the area of a rectangle; the product of three numbers is a volume; the sum of two numbers is the continuation of a segment; the subtraction in clipping a segment; the division of a product for a third number is carried out finding a rectangle that has as side to this I finish and whose area is similar to the given product, being then the other side the looked for quotient. The sum and subtraction of products you reemphasis for the sum and subtraction of rectangles; the extraction of a square root, for the construction of a square whose area is similar to that of a given rectangle. This material is used for the solution of some types of equations, expressed with positive numbers.

INTRODUCCIÒN

El siguiente trabajo enmarca su interés en la resolución de ecuaciones dentro de un marco histórico Euclidiano, partiendo del contexto geométrico que sirvió como base en la antigüedad, con el fin de que puedan ser utilizados también hoy como contexto para la formulación de algoritmos geométricos en la resolución de ecuaciones.

Los conceptos y algoritmos geométricos permiten satisfacer diversas necesidades como:

- Reconocer las matemáticas como parte de la cultura humana que evoluciona con ella, preparando así el terreno para llegar a la organización de los conceptos matemáticos que tienen actualmente.

- Permite reconocer la importancia del lenguaje simbólico, las técnicas, y las insuficiencias y ambigüedades de cada formalismo.

- Contribuye a construir y profundizar los conceptos matemáticos que se han elegido por la diversidad presentada por las distintas épocas; además, se puede crear conciencia en los estudiantes sobre la idea de que las matemáticas evolucionan y que no son una ciencia hecha y estática.

En este trabajo se sustentará el tipo de resolución de ecuaciones que se extraen de los Elementos de Euclides con su ambigüedad semántica y su riqueza de significados, en relación a la evolución de los métodos y de las estrategias de resolución de ecuaciones; apoyados en transformaciones de áreas y álgebra geométrica griega. Se establecen las equivalencias geométricas de diferentes identidades algebraicas, entre otros.

En este trabajo se abordará en primer lugar, una breve descripción histórica del camino recorrido por la Geometría y en especial se centrará en el libro II de los Elementos de Euclides, que nos fundamentará y permitirá tener una visión panorámica del álgebra utilizada por los griegos. Además, se tratará de analizar el carácter abstracto de las proposiciones de los Elementos de Euclides. Y a través de ejemplos, se mostrará cómo se deducen las propiedades de las proposiciones del Libro II de Euclides con sus figuras y las relaciones de tipo algebraico y geométrico que se dan entre ellas.

Se estudian estas proposiciones en la forma de Euclides, su demostración y aplicación en la solución de las ecuaciones cuadráticas resaltando su valor didáctico. Se presenta además la solución de algunas de las ecuaciones cuadráticas, con la aplicación de algoritmos en su resolución.

Se presentan dos Anexos, uno de los cuales permite visualizar las construcciones de las proposiciones que hacen relación al concepto de igualdad de segmentos, áreas,… descritas en el libro I y II de los Elementos de Euclides en Cabri Geométre (Anexo A); el otro hace énfasis en el uso y metodología concebido por los Árabes, en la resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando el álgebra geométrica (Anexo B).

1. JUSTIFICACIÓN

Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios (métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar algunas de sus propiedades. En el libro II de Los Elementos de Euclides (300 a. De C.), hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos. Nuestra álgebra simbólica los podría resolver rápidamente, pero el álgebra geométrica resulta importante en la escuela por su valor didáctico, debido a que en sus procedimientos, se involucra la aplicación de áreas y esta situación es más significativa para los estudiantes que una simple transposición simbólica.

La historia de la matemática ha sido estudiada por la didáctica de la matemática bajo distintos puntos de vista: desde informaciones históricas que sirven para motivar un nuevo tema, hasta la construcción de secuencias didácticas inspiradas en la progresión histórica seguida en el desarrollo de algunas teorías. En cualquier caso, la historia nos ofrece diferentes situaciones las cuales pueden ser la base de actividades didácticas en el aula e incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje del estudiante.

El álgebra se caracteriza por sus métodos que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones, está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico.

En las últimas décadas, el álgebra ha cobrado gran importancia. Sus aplicaciones se han multiplicado debido a problemas tecnológicos, al análisis y también a la física que ha podido expresar, cómo cuestiones fundamentales de mecánica cuántica por medio de expresiones algebraicas; por esto, nuestra investigación centra su estudio en una mínima parte del inmenso mundo euclideano, ya que indiscutiblemente, la Geometría, es la ciencia más antigua con que el hombre haya llegado a tratar. En este sentido, estudiosos de las civilizaciones antiguas opinan que el hombre llegó a concebir figuras geométricas y realizó cálculos y medidas antes de utilizar propiamente la escritura. Las ideas intuitivas poco a poco fueron transformándose en abstractas. Una mirada a nuestro alrededor basta para encontrarnos con cuerpos que sugieren formas geométricas; es así que un libro, una caja de fósforos, un edificio, son vistas imperfectas de un paralelepípedo; una lata y una tiza sugieren un cilindro; un balón de fútbol a una esfera; un cucurucho de helado a un cono; luego abrir horizontes que tengan relación con la geometría euclídeana es importante, ya que representa la base de la geometría.

Del análisis de estos hechos suscita el deseo de crear artificialmente otros nuevos, para someterlos también a estudio y comparación. A partir de estas consideraciones, intentaremos en este trabajo alcanzar algunas ideas que faciliten el estudio del tipo de ecuaciones que se extraen de cada proposición del libro II de Euclides.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Explicitar algoritmos de carácter geométrico para resolver Ecuaciones que aparecen propuestas en el libro II de los Elementos de Euclides

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar el conocimiento histórico anterior y posterior a Euclides; como camino direccionador en el objetivo a conseguir.

- Resolver diferentes tipos de ecuaciones a partir de las proposiciones del libro II de los Elementos de Euclides.

- Transponer cada una de las proposiciones del libro II de Euclides, a lenguaje moderno, incorporando sus demostraciones

- Diseñar una técnica didáctica[1] en la solución de ecuaciones, para efectuar su construcción geométrica utilizando Cabri Geométre II.

---

[1] Con relación al concepto de técnica, ésta es considerada como un procedimiento didáctico que se presta a ayudar a realizar una parte del aprendizaje que se persigue con la estrategia. Mientras que la estrategia abarca aspectos más generales del curso o de un proceso de formación completo, la técnica se enfoca a la orientación del aprendizaje en áreas delimitadas del curso. Dicho de otra manera, la técnica didáctica es el recurso particular de que se vale el docente para llevar a efecto los propósitos planeados desde la estrategia.

Las técnicas son, en general, procedimientos que buscan obtener eficazmente, a través de una secuencia determinada de pasos o comportamientos, uno o varios productos precisos. Las técnicas determinan de manera ordenada la forma de llevar a cabo un proceso, sus pasos definen claramente cómo ha de ser guiado el curso de las acciones para conseguir los objetivos propuestos.

3. CONTEXTO HISTÓRICO

La matemática constituye uno de los elementos de comunicación, expresión y comprensión más poderoso que ha descubierto el hombre. Uno de los propósitos de la educación matemática es estudiar cómo la persona aprende y razona matemáticamente en contextos sociales y culturales diferentes, puesto que toda comunidad desarrolla prácticas y reglas matemáticas con su propia lógica para entender, interpretar y transformar la naturaleza. La relación del hombre con la naturaleza es la que impulsa el desarrollo matemático y es el hombre mismo, quien en esa relación construye las nociones matemáticas que le van a ser de utilidad a él y a su sociedad. Estos saberes matemáticos son transmitidos de generación en generación, ya sea por medio escrito o vía oral; pasan a ser parte de la tradición cultural de un pueblo, que es un mundo donde habitan las matemáticas, un mundo externo al hombre, pero dependiente de él. Desde un punto de vista general constituye un aporte a la Historia y a la Didáctica de las Matemáticas, lo siguiente.

3.1. EL MILAGRO GRIEGO

De todo lo que precede se deduce que un cuerpo considerable de conocimientos sistematizados fue muy anterior a la ciencia griega. Esto ayuda a explicar el llamado milagro de la civilización griega. Nadie puede leer la Iliada y la Odisea, primicias de la civilización griega, sin preguntarse qué fue lo que hizo posible tales obras maestras, pues no aparecen relámpagos en un cielo sin nubes. Todo glorioso comienzo enlaza con la culminación de otra brillante época anterior. Parece claro que los griegos tomaron una gran cantidad de observaciones y teorías no clarificadas de los egipcios y de los pueblos de Mesopotamia. Tiene dificultades describir la transmisión de conocimientos desde Egipto hasta Grecia, debido a que la llegada de la edad de hierro a principios del primer milenio estuvo acompañada de acontecimientos revolucionarios muy destructivos, que nos han privado de documentos y nos han impedido, hasta ahora, descifrar muchos textos minoicos y micénicos.

La laguna documental entre las edades de oro de las ciencias egipcia y griega no ha ocultado que muchos de los conocimientos griegos fueron tomados de fuentes orientales. Los ritos de incubación griegos derivan de modelos egipcios. Las comprobaciones del origen babilónico de gran parte de la astronomía griega han permitido averiguar que no fue Hiparco el primero en descubrir la precesión de los equinoccios sino el astrólogo babilónico Kidinnu, alrededor del año 343 antes de Cristo.

Las influencias egipcia y babilónica son patentes en la aritmética griega. La utilización de suma de fracciones de numerador uno y el uso de un símbolo especial para 2/3 se debe a la imitación de los egipcios. El manejo de las fracciones sexagesimales viene de los babilónicos. Pitágoras y Platón, por ejemplo, estuvieron en Oriente, de donde con seguridad sustrajeron varios conocimientos.

Los griegos son desde el siglo VI a. J.C. hasta el predominio romano, el pueblo más importante del mundo civilizado. Su presencia en la cuenca mediterránea les hizo asimilar los hallazgos precedentes. Las maravillas que desarrollaron en esos casi cinco siglos conforman lo que, esencialmente, conocemos como el espíritu occidental. Sus matemáticas, como las de sus predecesores, son inicialmente de carácter práctico, pero el genio griego elevó la matemática al rango de disciplina teórica, pasando de trabajar con objetos sensibles a entes matemáticos, abstractos, ideales, perfectos y eternos, existentes fuera del espacio y del tiempo e independientes de sus representaciones, hechas por el hombre después de captarlos con su pensamiento. La relación entre los entes matemáticos y sus representaciones es la misma que entre las ideas y sus concreciones en palabras, siempre imágenes imperfectas de las ideas. Por ello en las representaciones de la recta, el triángulo o el círculo siempre encontraremos irregularidades. Más tarde, Platón iría mucho más lejos con su conocida teoría de las ideas, cuyo carácter general trasciende la matemática.

En consecuencia, de relaciones particulares entre objetos sensibles se pasa a relaciones generales entre conceptos teóricos, cuya validez universal se establece mediante la demostración, que junto a la organización deductiva de los conocimientos y a la necesidad de admitir sin demostración la certeza de algunos enunciados, que los llamaban postulados. Los postulados eran la base desde donde la razón obtenía el resto de proposiciones y teoremas, siguiendo las leyes del pensamiento y probando la veracidad de cada enunciado deducido.

Estos cambios radicales en la actitud de matemáticos y filósofos suponen una nueva forma de pensar, que es el aporte más importante de la matemática griega y el comienzo de una tradición expositiva matemática que llega hasta nuestros días, llamada forma hipotético deductiva de razonamiento, y que distingue a la Matemática griega de todo lo que la ha precedido.

El teorema de Pitágoras, por citar sólo un ejemplo, era conocido más de mil años antes de Pitágoras, pero su establecimiento riguroso mediante una prueba de carácter general es un producto genuino de esta nueva forma de pensamiento.

Recogiendo sistematizadamente los resultados conocidos, expuestos con esta nueva forma de proceder, e incorporando algunos nuevos, Euclides (325 – 265 a.C.), bibliotecario de Alejandría, escribió la obra “Los Elementos” alrededor del año 300 antes de Cristo.

3.1.1. Los Elementos de Euclides. Los Elementos son un texto valioso de geometría, pero lo que hace que sea una obra admirable es la antigüedad que tiene. Por eso es conveniente explicar por qué se puede asegurar de que el texto que ahora se atribuye a Euclides coincide con lo que un matemático del siglo III a. de C. escribió. Infortunadamente los libros en la época de Euclides se solían escribir en unas láminas obtenidas a partir de las hojas de los pápiros. Ese material aguanta bien en climas calurosos y secos, pero en climas fríos o húmedos se descompone con rapidez. Por eso se puede asegurar que los Elementos fueron copiados y recopilados frecuentemente hasta que en el siglo II de nuestra era se comenzó a escribir en pergamino que es un material más duradero. La copia completa más antigua que se conserva de esta obra fue escrita en el año 888. Hay algunos fragmentos anteriores, incluso un trozo de cerámica del año 225 a. d C. que contiene algunos textos que pueden ser de los Elementos.

Si se ha podido llegar a conocer qué partes son originales y cuales fueron incorporadas en la Antigüedad en esos manuscritos es porque han sobrevivido bastantes versiones de orígenes diferentes y, comparándolas, se pueden descubrir los añadidos. La mayor parte de los ejemplares antiguos que se conservan son copias de una versión de los Elementos que realizo Teón de Alejandría (s. IV). Este matemático reconoce en otros escritos que su versión de los Elementos contiene explicaciones y cambios añadidos por él. Desde comienzos del siglo XIX se sabe que un manuscrito que se encuentra en la biblioteca del Vaticano no tiene esos cambios y es más fiel al texto de Euclides que las de origen “teonino”, aunque esa copia fue escrita en el siglo X. Su texto está completo y ha ejercido una gran influencia en las últimas ediciones de los Elementos. Se conservan también otras versiones de los Elementos que proceden de las traducciones al árabe que se hicieron en los siglos IX y X. Partiendo de estos textos árabes se ha podido saber algo sobre los cambios que introdujeron en sus copias de los Elementos otros sabios griegos, como Herón. Pero, las versiones traducidas al árabe no son fieles porque algunas incorporan cambios importantes para hacerlas más pedagógicas y sencillas y otras, más que traducciones, son comentarios de los Elementos.

Desde la aparición de la imprenta es más fácil seguir la transmisión de los Elementos. La primera edición impresa la publicó E. Ratdolt en Venecia en 1482. No es muy exacta porque procede de la versión latina medieval de Campano. El mejor texto impreso fue durante varios siglos el del humanista italiano F. Commandino de Urbino que fue publicado en 1572. Actualmente la versión mejor considerada es la que se encuentra en la recopilación Euclidis Opera Omnia (1883-1916) de J. L. Heiberg y H. Menge. En esa obra se comparan las versiones antiguas que han llegado hasta nosotros y se tienen en cuenta los fragmentos de pápiros antiguos para dar una versión critica en la que se discuten las variaciones que aparecen en los textos antiguos y se explica por qué se aceptan o rechazan. De todo lo anterior se puede estar razonablemente seguro de que la versión que se considera conforme con el texto original es muy parecida a la obra que escribió Euclides.

Sobre el autor, Euclides, se sabe menos que sobre los Elementos. La información que se tiene sobre su vida coincide, a grandes rasgos, con lo que el filosofo neoplatónico Proclo de Licia (s. V a. D.) dice sobre el en su libro Comentarios a los Elementos de Euclides: “En la composición de sus Elementos, Euclides coordinó muchos trabajos de Eudoxo, perfeccionó los de Teeteto y demostró irrefutablemente los que sus predecesores habrían presentado de una manera difusa. Vivió bajo Ptolomeo I porque Arquímedes, posterior a este, lo menciona. Se dice que Ptolomeo le preguntó un día si no habría un camino más corto que el de la Enseñanza de los Elementos para aprender Geometría, y le respondió “En Geometría no hay ningún camino especial para los reyes.” Euclides es, por tanto, más moderno que los discípulos de Platón y más antiguo que Arquímedes y Eratóstenes, pues que estos últimos fueron contemporáneos, como dice Eratóstenes en alguna parte y era partidario de la filosofía de Platón, por lo cual expuso como resultado de su Enseñanza de los Elementos la construcción de las figuras platónicas.” La anécdota no parece fiable. Al parecer Estobaeo cuenta una historia similar con Menecmo y Alejandro el Grande como protagonistas. Tampoco parece muy segura la pertenencia de Euclides a la escuela platónica (Proclo si que era un ferviente partidario de Platón). Sin embargo, el resto de la información parece plausible y coincide con los datos que se pueden deducir de los escritos de otros autores de la Antigüedad y de la comparación de la obra de Euclides con la de otros matemáticos, como Apolonio, Arquímedes o Autólico, y con la de filósofos como Aristóteles. Faltaría por discutir si ese texto lo escribió Euclides o si se trata de una recopilación de obras anteriores. Se sabe que en esa época otros matemáticos griegos, como Hipócrates de Quíos, León o Teudio de Magnesia escribieron otros libros sobre los Elementos de la geometría. Parece evidente que el texto de Euclides era el más completo o más útil, que el de esos tratados pues ha continuado siendo reproducido hasta nuestros días, mientras que los escritos de esos otros autores han desaparecido. Pero, también se cree que la mayoría de los resultados que se presentan en los Elementos se conocían con anterioridad, aunque la forma de presentarlos sea de Euclides.

Se considera que los orígenes de los distintos libros son los siguientes: Los libros I, III y VI se cree que son el resultado de una elaboración hecha por Euclides partiendo del contenido de tratados de geometría anteriores. Los libros II, VII, VIII y IX se piensa que provienen de las doctrinas de los pitagóricos. El libro IV tiene su origen en la escuela pitagórica, pero está completado con algunos descubrimientos de Teeteto y de otros matemáticos.

En cuanto al libro V se piensa que esa forma de definir la igualdad de razones entre magnitudes la propuso Eudoxo, pero que Euclides, partiendo de dicha definición, ideó el resto del libro. El libro X se cree que proviene de los escritos de Teeteto. Al libro XI no se le suele dar un origen preciso. En el se nota influencia de Platón y Aristóteles, pero la mayor parte debe ser una reelaboración de unos Elementos de geometría anteriores. En el libro XII el método de exhausión, que resulta fundamental en su desarrollo, se considera que fue descubierto por Eudoxo. Del libro XIII se dice que proviene de Teeteto y que fue mejorado por Aristeo. Además en el texto hay muchas cuestiones que se cree que fueron descubiertas por Euclides. Los comentaristas antiguos le atribuyen el famoso quinto postulado, la demostración del teorema de Pitágoras que aparece en los Elementos y la generalización de ese teorema que aparece en la proposición VI.31, entre otras partes.

Lo que es magistral en Los Elementos es el método. Desarrollan toda la geometría y la aritmética elemental partiendo de cinco “postulados” y estableciendo teoremas y proposiciones sólo a partir de los postulados y de los resultados ya demostrados mediante las reglas del razonamiento deductivo.

3.1.1.1. Álgebra geométrica. El Libro II de los Elementos es uno de los más cortos, con sólo 2 definiciones 14 proposiciones (2 problemas y 12 teoremas), ninguna de las cuales juega ningún papel en los libros de texto modernos; sin embargo, en la época de Euclides este libro tenía una gran importancia. Esta aguda diferencia respecto a la utilidad del libro II entre la antigüedad y modernidad es fácil de explicar: hoy se tiene un álgebra simbólica y una trigonometría que han reemplazado a sus equivalentes geométricos griegos; mientras que ahora se representa las magnitudes por letras que se sobrentiende son números conocidos o desconocidos, con las cuales operamos las reglas algorítmicas del álgebra. Los griegos tenían el Libro II de los Elementos que es un álgebra geométrica que servia para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica. No hay ninguna duda de que el álgebra moderna facilita enormemente la manipulación de relaciones entre magnitudes, pero no es menos cierto que un geómetra griego versado en los 14 proposiciones del libro II de Euclides, era mucho más hábil llevando estas proposiciones a la practica, que un geómetra experto de hoy; el álgebra geométrica no era una herramienta ideal, pero estaba muy lejos de ser ineficaz. El álgebra geométrica, al contrario del álgebra simbólica era mas ligada a las necesidades, ya que su evidencia visual para un griego ha debido ser mucho mas viva de lo que nunca pueda llegar a ser su contrapartida algebraica moderna; así el Libro II de los Elementos de Euclides es un álgebra geométrica que de manera similar pero con diferente método (geométrico) resolvían problemas visibles, que nuestra álgebra simbólica actual. Hay que recordar que para los antiguos griegos su fuerte era la geometría, de modo que era natural que los problemas algebraicos se presentaran desde esa visión.

El material más notable del libro II es el relativo al álgebra[2] geométrica. Los griegos no reconocían la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, ángulos y volúmenes. En el libro II todas las cantidades están representadas geométricamente, evitando así el problema de la asignación de valores numéricos. Los números se ven sustituidos por segmentos de recta; el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se traduce en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en recortar de un segmento la longitud del segundo; la división de un numero por otro se indica por la razón entre los segmentos que los representan, de acuerdo con los principios introducidos posteriormente en los libros V y VI. La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este último y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado. La construcción utiliza la teoría de aplicación de áreas mencionada en la proposición 44 del libro I. La suma y resta de productos se reemplaza por suma y resta de rectángulos; la extracción de una raíz cuadrada, por la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un rectángulo dado.

3.2. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

El desarrollo del simbolismo algebraico fue muy lento y dificultoso; en ausencia de un lenguaje adecuado y de ciertos conocimientos sobre los conjuntos numéricos, ¿cómo se representaban los distintos tipos de ecuaciones?, ¿qué algoritmos de resolución utilizaban los pueblos antiguos, orientales y medievales?, ¿cómo influyeron los conocimientos aritméticos y geométricos en el desarrollo de las técnicas resolutivas?, Aquí describimos algunos:

[2] El término álgebra viene del titulo de la obra al-jebr wál-muqabalah, del matemático árabe Mahommed ibn Musa Al-Khowarizmi. La obra fue traducida al latín y en su versión latinizada, se llamó aljeber, que se convirtió en álgebra. La palabra jebr se refiere a la operación de pasar al otro lado del igual un término de una ecuación y la palabra muqabalah se refiere a la simplificación de términos iguales

3.2.1. Ecuaciones con una incógnita[3]

3.2.1.1. La regula falsa o falsa posición. Un método de resolución de ecuaciones que se encuentra en antiguos libros egipcios y chinos, es el de la Regula falsa o falsa posición. El método consiste en proponer una solución tentativa inicial y corregirla de acuerdo con los resultados para resolver la ecuación. Por ejemplo:

$$x+\frac{x}{7}=19$$

Se toma como primera aproximación $x=7$. (Y esto es ¡el más burdo de los tanteos!) Sustituimos x por 7 en la ecuación, y se obtiene al evaluar en la parte izquierda de la ecuación 8 y no 19, se introduce entonces, un factor de corrección, que relacione a 19 y 8, este es:

$$\frac{19}{8}$$

Se multiplica este factor por la primera aproximación y se obtiene

$$\frac{19}{8}\times 7=\frac{133}{8}$$

Que es la solución correcta de la ecuación.

El procedimiento está basado en el siguiente argumento: Sea la ecuación $a\cdot x=b$, Supóngase que la ecuación tiene una solución tentativa x_0 y la reemplazamos en ella se obtiene.

$$a\cdot x_0=b_0$$

Luego:

$$x_1=\frac{b}{b_0}\times x_0$$

Si es una solución de la ecuación original, puesto que:

$$a\cdot\left(\frac{b}{b_0}\times x_0\right)=b$$

3.2.1.2. El método axiomático. Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede llevar a la forma $a\cdot x+b=0$ donde a y b son constantes, a diferente de 0, y x es la incógnita, mediante un número finito de pasos, aplicando reiteradamente las propiedades algebraicas.

---

[3] Es común llamar *variables a las incógnitas*, pero es conveniente aclarar que una incógnita en una ecuación representa a uno o varios elementos del conjunto de números que se consideran, que al ser reemplazado en la ecuación hace de ella una igualdad, pero este valor *no es variable.*

Si se parte de $a \cdot x + b = 0$ y se suma $(-b)$ a ambos lados de la igualdad, (propiedades de uniformidad), se obtiene:

$$(a \cdot x + b) + (-b) = 0 + (-b)$$

Por consiguiente $a \cdot x = -b$. Ahora, multiplíquese a ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{a}$, y se obtiene,

$$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot (-b)$$

Luego;

$$1 \cdot x = \frac{-b}{a}$$

Es decir:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Por la manera en que se obtuvo, esta es la única solución para la ecuación planteada, y se puede afirmar que: las ecuaciones de primer grado tienen a lo más una solución.

3.2.2. Ecuación con dos incógnitas

3.2.2.1. El método gráfico. Si se encuentra una solución se puede construir otras soluciones usando los coeficientes de la ecuación; se muestra ahora un método que permite encontrar todas las soluciones conociendo dos de ellas. La idea surge de representar las soluciones de ecuaciones con dos incógnitas como coordenadas de un par de rectas que se cortan en un punto.

Dibújese un par de rectas en un plano, formando un ángulo[4] α, con un punto de intersección O, llamado origen y que representa el numero 0, se elige un punto en cada una de las rectas, y se denominan A y B respectivamente, los segmentos determinados OA y OB representan la unidad de medida; y los puntos A y B representan el numero 1 en cada recta; luego, a partir del segmento unidad, se construyen, con regla y compás, los segmentos que determinan los puntos, de cada recta, representantes de los números naturales, racionales y algunos irracionales (números construibles). Aunque no se tienes mecanismos para encontrar los puntos de la recta que representan a los demás números algebraicos y los trascendentes, se considera que a cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real y viceversa, estableciendo de esta forma una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta.

Si en una recta se dibuja los valores de x y en la otra los de y, una solución de la ecuación $a \cdot x + b \cdot y = c$ se representa con una pareja de números reales (x_0, y_0) que en el plano corresponde a la intersección de las rectas paralelas a cada una de las rectas

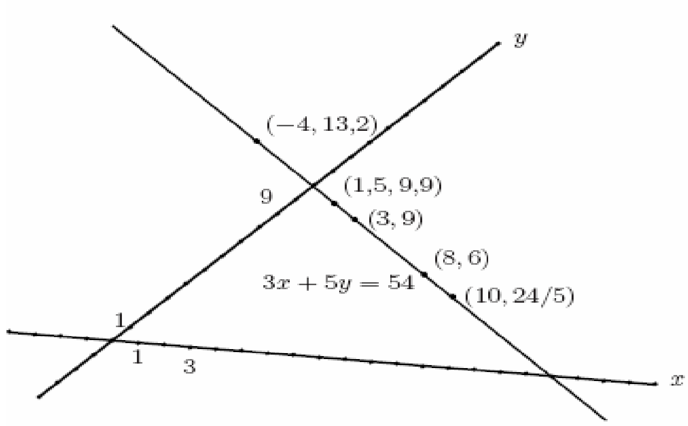
[4] Generalmente, se escoge un ángulo recto, pero esta condición no es necesaria.

dadas trazadas desde los puntos (x_0, y_0). En el este caso, algunas soluciones de la ecuación $3 \cdot x + 5 \cdot y = 54$ están dadas por los puntos:

$$(3,9),(8,6),\left(10,\frac{24}{5}\right),\left(15,\frac{9}{5}\right),(1{,}5,9{,}9),(6{,}5,6{,}9),(-4{,}13{,}2),(-9{,}16{,}2)$$

Que se representa por la siguiente figura:

Figura 1. Ejemplo método gráfico



Obsérvese que todos los puntos resultan colineales; de hecho, si se toman todos los puntos que solucionan la ecuación, uno por cada número real x, La gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es, entonces, una recta.

Si se traza una gráfica de una ecuación de la forma $y = m \cdot x + b$, se observa que el corte de la grafica de la ecuación con el eje y es b, pues $x = 0$. Así, la gráfica de la ecuación $3 \cdot x + 5 \cdot y = 54$ corta al eje y en $\frac{54}{5}$ y, en consecuencia, el punto $\left(0,\frac{54}{5}\right)$ también es una solución de dicha ecuación.

3.2.2.2. El método axiomático. Para resolver, se aplica los mismos métodos de las ecuaciones con una incógnita, para llevarla a la forma: $y = \frac{c - a \cdot x}{b}$ suponiendo que x se comporta como un número real. El resultado que se obtiene es, que para cada valor que elijamos para x dentro de los números reales, se obtiene un valor para y, también dentro de los números reales, puesto que todas las operaciones que se hacen están definidas.

3.2.3. Ecuaciones de segundo grado. Gran parte del poder simplificador del álgebra, reside en la manipulación de símbolos, que la hace muy eficiente, sin embargo hay un gran valor pedagógico en las consideraciones históricas de su desarrollo, que hacen atractivas las presentaciones y en algunos argumentos geométricos, que dan significado a las ecuaciones y conducen a su solución, en particular en las de segundo grado.

Debido a que los números negativos aparecieron y se formalizaron relativamente tarde en la historia y a que los métodos para plantear y resolver las ecuaciones en términos geométricos incluyen longitudes, áreas y volúmenes, y estas son cantidades positivas, debemos formular los problemas y las ecuaciones, como se hizo históricamente, de manera que en ellas solo aparezcan números positivos.

Una ecuación de la forma $x^2 = b \cdot x$ tiene como única solución $x = b$ pues, geométricamente, cero no es una solución aceptable.

Una ecuación de la forma $x^2 = c$ es el equivalente al problema de hallar la raíz cuadrada de un número y para ello ya se han desarrollado diversos métodos.

3.2.3.1. El método del tanteo. Consiste naturalmente en proponer, a la topa tolondra, una primera solución tentativa, se eleva al cuadrado y si el resultado es menor que el valor de c, se intenta de nuevo con un valor mayor, hasta que se logre; si el resultado es mayor se iría en la dirección contraria. Se puede mejorar un poco si se hace consideraciones sobre algunas cifras; por ejemplo, si c es un numero natural, y su cifra de las unidades es 1, la cifra de las unidades de la raíz, no puede ser 2, ni 5, sino 9 o 1, etc. Este proceso puede ser demorado, e innegablemente primitivo, pero funciona.

3.2.3.2. El método de Herón. Heron de Alejandría en el siglo I, propuso una manera de aproximar la raíz positiva de un número c, por ejemplo, en el caso $x^2 = 2$, supone como raíz, $x = \frac{3}{2}$, y para calcular una nueva aproximación, usa la regla:

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$$

Repitiendo el procedimiento[5] se obtiene $\frac{577}{408} aprox \sqrt{2}$

3.2.3.3. El método de Euclides. Como consecuencia de la crisis provocada por el colapso de la aritmética pitagórica, la matemática griega dedicó sus mejores esfuerzos a la geometría, aunque con ella expresaron argumentos que son equivalentes a algunos enunciados algebraicos y permiten resolver ecuaciones.

El equivalente geométrico para hallar la raíz cuadrada de un número c aparece en la proposición 13 del libro VI de los Elementos de Euclides, en términos de construir una media proporcional entre dos rectas dadas, cuya construcción se puede resumir como sigue:

1. Constrúyase $\overline{AB}$ con $\overline{AB} = c$

[5] Estas aproximaciones y cálculos repetidos se denominan iteraciones. Métodos similares fueron desarrollados por los matemáticos chinos Liu Hui (en el siglo III) y Chu Shih-Chieh (en el siglo XIII), fueron redescubiertos en Europa hacia 1800 por el matemático inglés W. G. Horner. También habría sido usado por el matemático árabe Yamschid al-Kaschi.

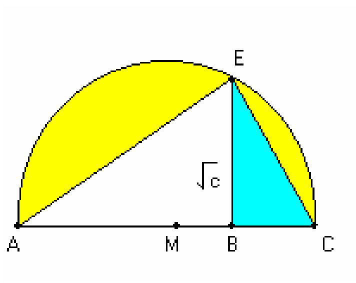
2. Prolónguese $\overline{AB}$ desde B a C tal que $\overline{BC}=1$.

3. Biséctese $\overline{AC}$ en M.

4. Con centro en M y radio $\overline{AM}$ constrúyase un semicírculo.

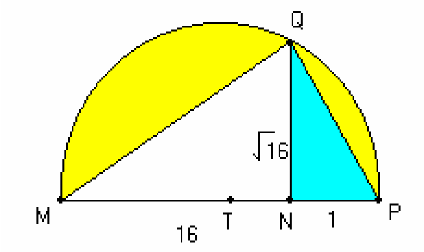
5. Levántese una perpendicular a $\overline{AC}$ en B. Llamar E al punto en que la perpendicular interseca el semicírculo, entonces $\overline{BE}=\sqrt{c}$.

Figura 2. Raíz cuadrada de un número



Ejemplo: Para hallar la raíz cuadrada de 16 Euclides procedía de la siguiente manera, constrúyase un segmento $MN=16$, prolónguese MN desde N hasta P, tal que $NP=1$, bisecar MP en T con centro en T y radio MT, constrúyase un semicírculo; Trácese una perpendicular a MP en N, llámese Q al punto en que la perpendicular intersecta el semicírculo, entonces el segmento $NQ=\sqrt{16}=4$.

Figura 3. Raíz cuadrada de 16



Las ecuaciones de la forma; $x^2+c=b\cdot x$ fueron resueltas, de varias maneras; destacamos aquí, una forma aritmética asumida por los babilonios y una geométrica, usada por los griegos.

3.2.3.4. El método Babilónico. Los Babilonios alrededor de 1700 A.C., resolvieron problemas como el de hallar dos números, dados su suma y su producto; o formulado en forma geométrica, dados el área y el semiperímetro de un rectángulo, encontrar sus lados.

En general si dos números x e y, tienen una suma b y un producto c, entonces $y=b-x$ Y como $x\cdot y=c$ tenemos que $b\cdot x-x^2=c$.

Como los babilonios no concebían los números negativos, las ecuaciones también se escribían solamente con términos positivos, o sea que en lugar de la anterior, consideraban la ecuación equivalente: $x^2 + c = b \cdot x$ En particular, si la suma de dos números es 20 y el producto es 96 ¿Cuales son esos números? Un ejemplo de cómo lo abordaban los babilonios lo es suponiendo que $x = 10$ e $y = 10$, puesto que la suma debe ser igual a 20, esta suposición es razonable, pero no correcta porque no satisface la segunda condición; para acomodarla, restaban el producto verdadero, 96, del producto obtenido:

$$100 - 96 = 4$$

Tomaban la raíz cuadrada de 4, $\sqrt{4} = 2$, el resultado lo sumaban con el valor supuesto de x y lo restaban del valor supuesto de y, obteniendo nuevas aproximaciones $x = 10 + 2$ e $y = 10 - 2$ y con esto llegaban a la respuesta correcta: $x = 12$ e $y = 8$. Por supuesto, no usaban los símbolos que hemos usado, ni resolvían casos generales, sino solo ejemplos concretos, la mayoría de ellos intentaba ilustrar un método general, que en forma de un algoritmo retórico queda:

1. Divídase la suma $S = x + y$ en la mitad.

2. Elévese al cuadrado el resultado de la parte 1.

3. Réstese el producto $A = x \cdot y$ del resultado de la parte 2.

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$$

4. Tómese la raíz cuadrada del resultado de la parte 3.

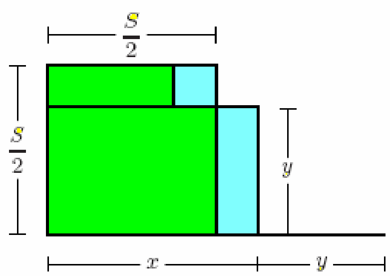
$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

5. Súmese el resultado de la parte 4 al resultado de la parte 1.

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A} + \frac{S}{2}$$

Una justificación geométrica para este procedimiento se obtiene de lo siguiente

Figura 4. Método babilónico



Un cuadrado de lado $\left(\frac{S}{2}\right)$, tiene el semipérımetro deseado $S = x + y$. El valor $\left(\frac{S}{2}\right)^2$, excede el área deseada $x \cdot y = A$, en $z^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$, que es el área del cuadrado de lado z.

La restante figura, sombreada, puede ser reconstruida como un rectángulo, cuyas Dimensiones son:

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

$$y = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

Y una justificación algebraica se obtiene llamando: $S = x + y$ e $x \cdot y = A$, con $x = \frac{S}{2} + z$, y $y = \frac{S}{2} - z$, donde z es una cantidad por determinar; para ello, se sustituye estos valores en la ecuación $x \cdot y = A$, se obtiene: $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - z^2 = A$, por lo tanto $z^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$, es decir que: $z = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$. Y solo se considera el valor positivo de la raíz, que en la época era la única que tenia significado.

De esta manera:

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

$$y = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

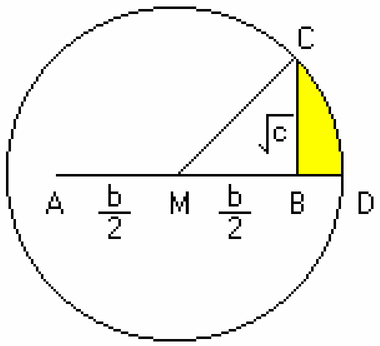
3.2.3.5. El método griego. Los griegos, y posteriormente los árabes, emplearon un método geométrico para resolver estas ecuaciones, fundamentado en algunas de las proposiciones de los Elementos.

En los Elementos de Euclides, se encuentran algunos resultados fundamentales para álgebra moderna tratados desde el punto de vista geométrico, por ejemplo la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

En el álgebra geométrica el método conocido como aplicación de áreas, se usa para la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = b \cdot x + c$. Aplicar un área a un segmento de longitud *b* consiste en levantar segmentos perpendiculares, de una longitud dada, sobre este segmento hasta completar un rectángulo. Para este caso la ecuación $x^2 = b \cdot x + c$, el proceso se describe así:

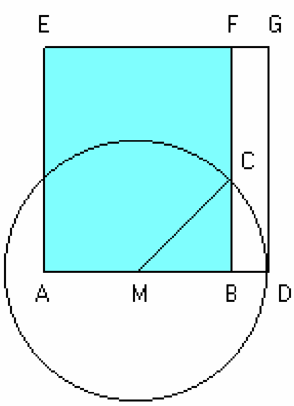
Constrúyase el segmento $\overline{AB}$ con $\overline{AB} = b$, Levántese una perpendicular $\overline{CB}$ a $\overline{AB}$ con $\overline{CB} = \sqrt{c}$, luego biséctese $\overline{AB}$ en M. Con centro en M y radio MC, constrúyase el círculo. Llámese D al punto donde el círculo encuentra la prolongación de $\overline{AB}$ a través de B. Luego $x = \overline{AD}$. Asi;

Figura 5. Método griego

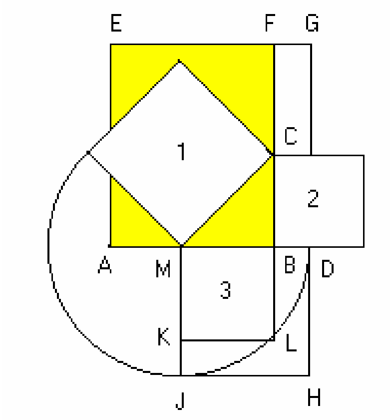


Geométricamente el segmento AD es la solución de la ecuación $x^2 = b \cdot x + c$, por consiguiente el término $b \cdot x$ en la ecuación $x^2 = b \cdot x + c$ representa el área de un rectángulo.

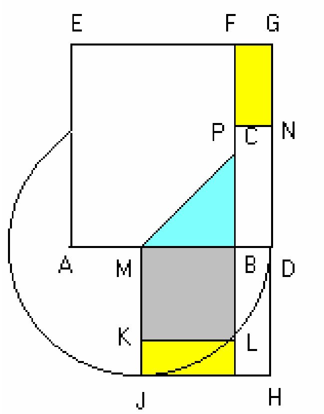
Sobre un segmento de línea b, se aplica un area a b, levantando perpendiculares de longitud x sobre este; el área aplicada es, entonces, $b \cdot x$. Se debe mostrar que este rectángulo con otro rectángulo con área c, forman un cuadrado de lado x, con área x^2. $\overline{AB}$ Tiene la longitud dada b y AD tiene la longitud construida x. Si se levantan perpendiculares AE y DG ambas de longitud x, para hacer un cuadrado $ADGE$ de área x^2, puesto que el rectángulo $ABFE$ tiene área $b \cdot x$, se necesita demostrar que el rectángulo $BDGE$ tiene área c.



Por ser radios de la misma circunferencia, $MD = MC$; por lo tanto, un cuadrado sobre $MD, MDHJ$, tiene la misma área que el cuadrado sobre MC, el cuadrado1.



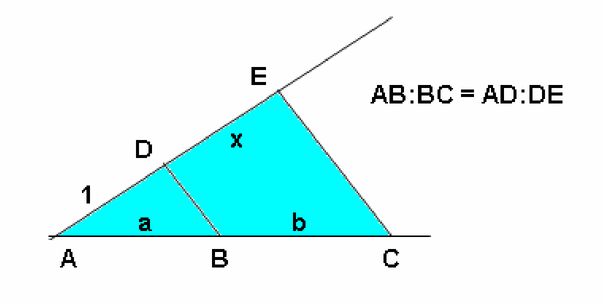
Por el teorema de Pitágoras, la suma de las áreas de los cuadrados 3 ($MKLB$) y 2 es igual al área del cuadrado 1, que, a la vez, es igual al área de $MJHD$. Por lo tanto, sustrayendo el cuadrado $MKLB$ del cuadrado $MJHD$, la pieza restante, el polígono $BLKJHD$, tiene la misma área del cuadrado 2, que es igual a c.



Así, el rectángulo $BQHD$ es igual al rectángulo $PBDN$ y el rectángulo $KJQL$ es igual al rectángulo $PNGF$, con lo cual el rectángulo $BDGF$ tiene, en verdad, area igual a c, como se quería demostrar.

La proposición 12 del Libro VI de los Elementos consiste en calcular el cuarto proporcional de tres segmentos dados.

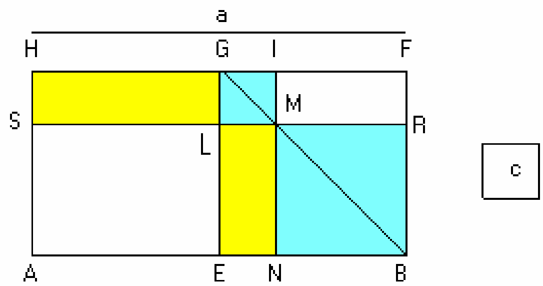
Figura 6. Método de euclides



La aplicación de esta propiedad permite resolver "geométricamente" ecuaciones del tipo $a \cdot x = b$ con coeficientes positivos, considerando como segmentos: $AB = a, BC = b, AD = 1, DE = x$. A partir de las proposiciones 28 y 29 del Libro VI se pueden resolver "geométricamente" las ecuaciones de segundo grado que admiten al menos una raíz positiva[6]. Así por ejemplo, la ecuación $a \cdot x - x^2 = b^2$ corresponde al problema geométrico: "Sobre un segmento dado a construir un rectángulo (de altura x), que exceda al cuadrado de la altura (x^2) en un área equivalente a un cuadrado dado (b^2)".

Para resolverlo se procede en este modo: sea a el segmento dado y C el cuadrado de área b^2;

Figura 7. Proposición VI-28



1) Se determina el punto medio del segmento $a = AB$, sea E; sobre EB se construye el cuadrado $EBFG$ y se completa el cuadrado $AEGH$. El área del cuadrado $AEGH$ debe ser mayor o igual que b^2, de lo contrario el problema no tiene solución.

2) Si el área del cuadrado $AEGH$ es b^2, entonces $x = AH$ y el problema está resuelto.

3) Si el área del cuadrado $AEGH$ es mayor que b^2, se construye el cuadrado $LMIG$ de área igual a la diferencia de estas áreas. Por la proposición 26 del Libro VI, los cuadrados $LMIG$ y $NBRM$ tienen una diagonal sobre la recta GB y de este modo se completa la figura.

4) El área de la figura $LEBFIM$ es igual a b^2 por construcción; fácilmente se demuestra que las áreas del rectángulo $ANMS$ y de la figura $LEBFIM$ son iguales y de aquí se deduce que $x = SA$.

---

[6] **Proposición 28**: Dados un paralelogramo y un polígono, construir sobre una recta (por segmento) otro paralelogramo que supere a un tercer paralelogramo semejante al paralelogramo dado, en un área igual a la del polígono dado. Es necesario que el área del polígono dado no sea mayor que la correspondiente al paralelogramo construido sobre la mitad de la recta dada y semejante al paralelogramo dado. Este teorema es el equivalente "geométrico" de la resolución de la ecuación de segundo grado: ax - (b/c) x^2 = S donde a es la recta dada, S es el área del polígono dado, b y c son los lados del paralelogramo dado. La segunda parte: S < a^2c/4b es la restricción necesaria para que las raíces de la ecuación sean reales. **Proposición 29**: Dados un paralelogramo y un polígono, construir sobre una recta otro paralelogramo tal que su área sumada a la de un tercer paralelogramo semejante al paralelogramo dado sea igual al área del polígono dado. En términos algebraicos este teorema corresponde a la ecuación: ax+(b/c)x^2= S con a, b, c, e S números positivos dados. S no está sujeta a ninguna restricción (solamente debe ser positiva) porque la ecuación admite siempre una solución real. Libro los Elementos.

3.2.3.6. El método árabe (Anexo B). Los árabes resolvían las ecuaciones de segundo grado considerando separadamente cinco casos distintos, de manera que los coeficientes fueran siempre positivos. Este modo de proceder era similar al de Diofanto, pero representa un paso atrás respecto al álgebra hindú que consideraba la "forma general" de la ecuación de segundo grado, porque admitían los coeficientes negativos. Los árabes utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural para describir todas las operaciones algebraicas. Por ejemplo, al-Khowârismî[7] presentó una ecuación de segundo grado de este modo: Un cuadrado y diez de sus raíces son iguales a nueve y treinta (por treinta y nueve) dirhems, es decir tú sumas diez raíces a un cuadrado y la suma es igual a nueve y treinta.

Este enunciado, traducido al lenguaje simbólico del álgebra, corresponde a la ecuación: $x^2 + 10 \cdot x = 39$. Al-Khowârizmî obtuvo la solución completando el cuadrado.

Tabla 1. Comparación notaciones

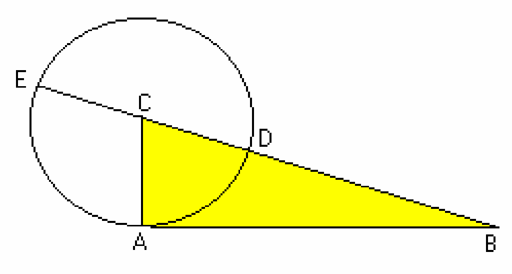
NOTACION DE AL-KHOWARISMI	NOTACION ALGEBRAICA MODERNA
Se considera la mitad del número de raíces, en este caso cinco, después multiplicado por si mismo, el resultado es cinco y veinte. (por veinticinco)	$\left(\frac{b}{2}\right)$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Se suma este número a nueve y treinta (por treinta y nueve) que da sesenta y cuatro.	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Se calcula la raíz cuadrada, es decir, ocho; del resultado.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Se resta la mitad del numero de raíces, es decir, cinco; quedan tres.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \left(\frac{b}{2}\right)$
Esta es la raíz.	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \left(\frac{b}{2}\right)$

[7] **Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî** ("780-850") escribió un tratado de aritmética llamado: *Algorithmi de numero indorum*. El vocablo *"Algoritmo"* proviene precisamente de la alteración del nombre *al- Khowârizmî* atribuido a Mohammed. Este término, después de haber sufrido numerosas variaciones tanto de significado como de denominación, comenzó a utilizarse para designar un constante procedimiento de cálculo Al-Khowârizmî escribió también un libro de álgebra: *Al-jabr w'al muqâbala* y en este título indicó precisamente las dos operaciones fundamentales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. El vocablo *al-jabr* significa "restablecer", es decir, restablecer el equilibrio entre los miembros de una ecuación mediante la transposición de términos y la palabra *al muqâbala* significa "simplificación", esto es, el agrupar los términos semejantes. La palabra *al-jabr* se transformó en *algebrista* en España, se convirtió en *algebrae* traducida en latín y por último, fue abreviada en *álgebra* para indicar el nombre de la disciplina.

3.2.3.7. El método de Descartes. En el siglo XVII en su libro La Géometrie[8] , René Descartes (1595-1650) describió un método geométrico para la construcción de la solución de la ecuación cuadrática $x^2 = b \cdot x + c^2$; donde, de nuevo, muestra solamente las raíces positivas. La construcción es como sigue:

Constrúyase $\overline{AB}$ con $\overline{AB} = c$. Levántese una perpendicular, $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$ con $\overline{AC} = b$. Constrúyase un circulo con centro en C y radio $\overline{AC}$. Constrúyase una línea entre B y C que interseque el círculo en E y en D. La solución es $x = BE$.

Figura 8. Método de Descartes



Para justificar la construcción, se usa el teorema de Pitágoras. Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, entonces:

$$\left(\overline{CB}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2$$

O en términos de x, b, c

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

Lo que se simplifica en $x^2 - b \cdot x = c^2$, es decir: $x^2 = b \cdot x + c^2$, también $y = DB$, es la solución de la ecuación cuadrática $y^2 + b \cdot y = c^2$, con el mismo argumento.

8 DESCARTES, R., La Geometrie, Espasa, 1947, p. p. 56-59.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES SEGÚN EL LIBRO II DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Figura 9. Euclides

4.1. EL MARCO DE LOS ELEMENTOS[9] DE EUCLIDES

Los Elementos son sin duda la obra más famosa de Euclides[10]. Pese al escaso conocimiento que poseemos del período clásico, cabe señalar las principales fuentes del material contenido en ellos: aparte de los discípulos de Platón con quienes estudió Euclides, y a quienes debe mucho, sin duda, Proclo afirma que introdujo en sus Elementos muchos de los teoremas de Eudoxo, perfeccionó teoremas de Teeteto y proporcionó demostraciones irrefutables de muchos resultados insuficientemente demostrados por sus predecesores.

A Euclides se debe la elección del sistema de axiomas, la ordenación de los teoremas y la tersura y rigor de las demostraciones, muchas de ellas suyas, aceptadas con el rigor de las epocas posteriores a la publicacion. Su forma de presentar éstas, sin embargo, había sido ya empleada por Autólico y seguramente por otros de sus predecesores. Independientemente de la cuestión de cuánto haya de original en sus Elementos y cuánto pudo haber recogido de textos anteriores u otras fuentes, Euclides fue sin duda un gran matemático. Proclo señala que los Elementos eran muy apreciados en Grecia, e indica como prueba el gran número de comentarios a que habían dado lugar; entre los más importantes cabe citar los de Herón (c.100 a.C.-c.100 d. C.), Porfirio (siglo III) y Pappus (finales del mismo siglo). Presumiblemente su calidad les permitió reemplazar a los libros

---

[9] El tıtulo “Elementos” resume bien el contenido de la obra. La palabra “Elemento” (στοιξεια) tenıa dos significados en Grecia, como explicaba Proclo de Licia (siglo V): “El Elemento se compone de dos modos, como dice Menecmo, porque lo que construye es el elemento de lo construido. También se dice, además, que elemento es lo mas sencillo en que se resuelve lo complejo, siendo elementos las cosas mas primitivas que se establecen para un resultado”

[10] Aunque de la vida de Euclides se conoce poco, se considera muy probable que pasara en Atenas sus años de instrucción, hasta aceptar la invitación de Ptolomeo para que enseñara en Alejandría. Durante más de treinta años enseñó Euclides en la Universidad Ptolemaica de Alejandría, construyendo, entre otros muy notables trabajos, sus famosos Elementos de Geometría. La doctrina enseñada por Euclides produjo excelentes discípulos, como Arquímedes y Apolonio. La historia ha recogido de Euclides la imagen de un hombre de estudios genial, modesto y escrupulosamente honrado, siempre dispuesto a reconocer el trabajo intelectual de otros, amable y paciente.

que sobre el mismo asunto se cree que escribieron Hipócrates de Chíos y los platónicos León y Teudio. No contamos con manuscritos del propio Euclides, y sus escritos han tenido que ser reconstruidos a partir de las numerosas recensiones, comentarios y notas de otros autores. Todas las ediciones en lengua inglesa y latín de los Elementos se han realizado a partir de manuscritos griegos; la recesión de Teón de Alejandría (fines del siglo IV), copias de ésta, versiones escritas de las lecciones de Teón, y un manuscrito griego del siglo X que Frangois Peyrard (1760-1822) halló en la Biblioteca Vaticana, y que es una copia de una edición de Euclides anterior a la de Teón. Los historiadores J. L. Hiberg y Thomas L. Heath han utilizado principalmente este manuscrito en su estudio sobre Euclides, comparándolo, claro está, con los restantes manuscritos y comentarios disponibles. También existen versiones y comentarios árabes, basados al parecer en manuscritos por Euclides; pero estas versiones árabes son en cualquier caso inferiores a los manuscritos griegos. Al apoyarse en tantas fuentes, la reconstrucción de los Elementos deja margen para la duda sobre algunas cuestiones. En particular, no sabemos con qué propósito fueron escritos; hay quienes los consideran un tratado para matemáticos formados, y quienes piensan que se trata de un texto para estudiantes. Proclo parece inclinarse por esta última opción.

4.1.1. Definiciones y Axiomas de los Elementos. Los Elementos constan de trece libros. En algunas ediciones se han incluido otros dos, debido probablemente a otros autores. El libro I comienza con las definiciones de los conceptos que se utilizarán en la primera parte de la obra. Se presentará aquí sólo las más importantes:

- Definiciones:

1. Un punto es lo que no tiene partes

2. Una línea es una longitud sin anchura.

3. Los extremos de una línea son puntos.

Esta definición establece que una línea siempre tiene longitud finita; en los Elementos no aparecen líneas que se extiendan hasta el infinito.

4. Una línea recta es aquella que yace por igual sobre sus puntos.

De acuerdo con la definición 3, la línea recta de Euclides es nuestro segmento.

5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.

6. Los extremos de una superficie son líneas. (acotadas)

7. Una superficie plana es la que yace por igual sobre sus líneas rectas.

15. Un círculo es una figura plana rodeada por una línea tal que todas las rectas que inciden sobre ella desde cierto punto interior a la figura son iguales entre sí.

16. Ese punto se llama centro del círculo.

17. Un diámetro del círculo es cualquier recta que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia (no definida explícitamente) del círculo. Tal recta divide en dos partes iguales al círculo.

23. Rectas paralelas son aquellas que, estando en el mismo plano, no se encuentran cuando se prolonga indefinidamente en ambas direcciones.

Estas definiciones preliminares vienen cargadas de conceptos no definidos y no convienen por tanto a ningún propósito lógico. Puede que Euclides no se apercibiera de que los conceptos iniciales deben quedar sin definición, lo que le habría llevado a explicar ingenuamente su significado en términos de conceptos físicos. Algunos comentaristas afirman que, aun siendo consciente de que las definiciones no eran lógicamente útiles, quiso explicar lo que sus términos representaban intuitivamente, de manera que sus lectores quedaran convencidos de que los axiomas y postulados eran aplicables a esos conceptos.

A continuación presenta cinco postulados y cinco nociones comunes (a las que Proclo llama axiomas). Asume la distinción ya indicada por Aristóteles de que las nociones comunes son verdades aplicables a cualquier ciencia, mientras que los postulados se aplican solamente a la geometría. Como en su momento, Aristóteles decía que no se precisa la certeza de que los postulados sean verdaderos, y que su veracidad se contrastaría al confrontar con la realidad los resultados de ellos deducidos. Proclo incluso habla del carácter hipotético de toda matemática, que solo deduce lo que se sigue de las suposiciones iniciales, sean estas verdaderas o no. Cabe pensar que Euclides compartiera el punto de vista de Aristóteles con respecto a la veracidad de los postulados. No obstante, en el desarrollo ulterior de las matemáticas, al menos hasta el advenimiento de las geometrías no euclideas, tanto los postulados como las nociones comunes fueron aceptados como verdades incuestionables.

- Postulados

1.- Trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.

2.- Prolongar continuamente en línea recta una recta dada.

3.- Trazar un circulo con cualquier centro y distancia (radio).

4.- Todos los ángulos rectos son iguales.

5.- Que si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontraran por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

- Nociones Comunes

1.- Cosas que sean iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2.- Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales.
3.- Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales.
4.- Cosas que encajen cada una en la otra son iguales entre si.
5.- El todo es mayor que la parte.

Euclides no supone ingenuamente que los conceptos definidos existan o sean consistentes; como había señalado Aristóteles, se puede definir algo cuyas propiedades sean incompatibles. Los tres primeros postulados son los que declaran la posibilidad de construir rectas y círculos, son asertos de existencia para esas entidades. A lo largo del libro I, Euclides prueba, construyéndolas, la existencia de las restantes, exceptuando el plano. Presupone que la recta del postulado 1 es única; esta suposición esta implícita en la proposición 4 del libro I, aunque habría sido mejor explicitarla. Del mismo modo, supone que la prolongación del postulado 2 es única, explícitamente en la proposición 1 del libro XI, e inconscientemente desde el mismo comienzo del libro I.

El postulado V se debe al propio Euclides; es una muestra de su genio haber reconocido su necesidad. Muchos griegos objetaron este postulado, considerándolo falto de evidencia, en comparación con los anteriores. Los intentos de probarlo a partir de los restantes axiomas y postulados, que comenzaron según Proclo en vida misma de Euclides, fracasaron.

En cuanto a las nociones comunes, hay diferentes opiniones sobre cuales aparecían realmente en el escrito original de Euclides. La cuarta, que constituye la base de las pruebas mediante superposición (congruencia) es de carácter geométrico, y debería ser un postulado. Euclides la utiliza en las proposiciones 4 y 8 del libro I.

4.1.2. Organización y metodología de los Elementos. El texto de los *Elementos*, en las versiones que se ajustan mejor al texto original, Tiene las siguientes partes:

Tabla 2. Organización de los Elementos

LIBRO	DEFINICIONES	PROPOSICIONES	PORISMAS	LEMAS	POSTULADOS	NOCIONES COMUNES
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	33	3	0	0	0
VII	22	39	1	0	0	0
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	4	11	0	0
XI	28	39	1	1	0	0
XII	0	18	2	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0
TOTAL	130	465	19	17	5	5

Es decir, se divide en trece capítulos, llamados “libros”, que se diferencian entre sı por su contenido. Los seis primeros estudian la geometría del plano. Los tres siguientes tratan de la teoría de números. El libro décimo es sobre los inconmensurables, o irracionales y los tres últimos son sobre la geometría del espacio.

Cada libro está dividido en apartados que pueden ser de seis tipos diferentes:

4.1.2.1. Definiciones. Una definición es una frase que sirve para introducir un concepto matemático. En ella, normalmente, se define la nueva noción relacionando unos términos más generales ya definidos.

4.1.2.2. Postulados y Nociones Comunes. Los postulados y los axiomas o nociones comunes son dos series de propiedades de los objetos matemáticos que se acepta sin discusión. No se diferencian mucho entre sí y en el texto no se explica por qué una afirmación se considera axioma y no postulado, lo que tampoco debe extrañar porque Euclides enuncia y justifica, pero no explica nada.

Las nociones comunes, o axiomas, son afirmaciones generales, válidas en todas las ciencias, cuya evidencia las hace generalmente aceptables.

4.1.2.3. Proposiciones. Las proposiciones son las aserciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas y postulados y las propiedades que se suponen en las definiciones. Pueden ser de dos tipos: teoremas y problemas. Las que indican propiedades de los entes matemáticos se suelen llamar teoremas. Las que explican como se construyen esos objetos se llaman problemas. En muchas versiones de Los Elementos se diferencian claramente los dos tipos de proposiciones; pero se cree que Euclides no lo hacía. La única diferencia que tienen los teoremas y los problemas en las versiones más antiguas consiste en que los teoremas acaban con la frase “como queríamos demostrar” y los problemas con “como queríamos hacer”.

4.1.2.4. Porismas o Corolarios. En Los Elementos un porisma es una conclusión interesante que se deduce de una proposición demostrada, pero que no es necesaria para el desarrollo posterior del libro. En algunas versiones se les llama corolarios.

4.1.2.5. Lemas. Los lemas son teoremas que se suponen ciertos al demostrar una proposición, pero que una vez probada ésta se deben demostrar a su vez. Es decir, son afirmaciones que si se justificaran por completo cuando se emplean en una demostración harían perder al lector el hilo del razonamiento general. Por eso se declaran como algo sabido en la proposición en la que se utiliza, pero luego se enuncian como lemas y se demuestran. Los lemas sólo aparecen en los últimos libros, que son los que tienen las demostraciones más largas.

4.2. EL CONCEPTO DE ÁREA EN EUCLIDES

Los Elementos son reconocidos como una de las obras que ha ejercido mas influencia en el desarrollo de las matemáticas en diferentes épocas; de hecho, durante 22 siglos se constituyó en la base de las matemáticas, en el modelo de un sistema formal para las mismas, por lo cual es justificable que sea uno de los libros mas editado e impreso en el mundo. Euclides, su autor, un matemático alejandrino de finales del siglo IV a.C., es reconocido por su habilidad expositiva y pedagógica; en particular, los Elementos, bien pueden considerarse como un libro de texto para iniciar a los aprendices en el estudio de la geometría y, en general, de todas las matemáticas elementales conocidas en esa época (aritmética, geometría y álgebra), descritas y organizadas lógicamente, de manera que cada proposición pudiera ser justificada con base en unos postulados, definiciones y proposiciones demostradas previamente.

En el libro primero, se establecen 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes, las cuales son el punto de partida para el desarrollo de toda la obra.

Las 48 proposiciones que componen el primer libro abarcan construcciones y propiedades de las figuras planas rectilíneas y el concepto de congruencia, o igualdad, entre ellas. El concepto de área se aborda por primera vez en la proposición 34, sin que haya explícitamente alguna definición o se recurra a números y formulas para expresarla; Euclides establece, de manera implícita, cuestiones relativas al área de figuras planas, en términos de magnitudes y proporciones que, en ultimas, aportan las condiciones básicas del concepto; esto se evidencia, particularmente, en la proposición 35 del libro I, debido a la ampliación de la idea de igualdad de figuras planas.

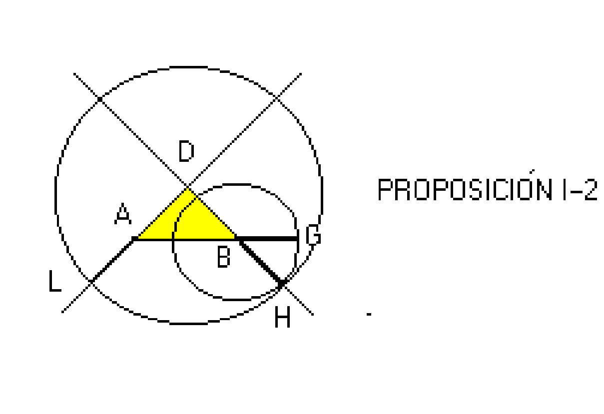
La primera idea de igualdad aparece en la noción común 7, la cual establece: Las cosas congruentes entre sı, son iguales entre sı, entendida esta congruencia en el sentido de encajar, ajustar o coincidir. Tradicionalmente, esto se interpreta como un principio de superposición que luego es usado en la proposición I-4: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales; básicamente, si una cosa puede trasladarse para coincidir con otra, entonces son iguales.

Es evidente que Euclides no era muy partidario del uso de este principio, pues solo lo uso en esta proposición, el primer criterio de congruencia de triángulos[11]. Tiene sentido este rechazo, tal vez por que no esta muy claro que significa sobreponer un triangulo en otro, podría interpretarse como mover el triangulo para colocarlo encima de otro, y el movimiento, aunque fuera sin deformación, no estaba considerado en la geometría ya que esta estudiaba los objetos inmóviles a diferencia de la astronomía que admitía y estudiaba el movimiento de los objetos.

En la proposición I-2 (Anexo A), construir en un punto dado un segmento igual a otro dado, al igual que en la I-4, pareciera que hay movimiento de un segmento, pero lo que se hace es una construcción con regla y compás:

[11] Criterio Lado-Angulo-Lado

Figura 10. I-2

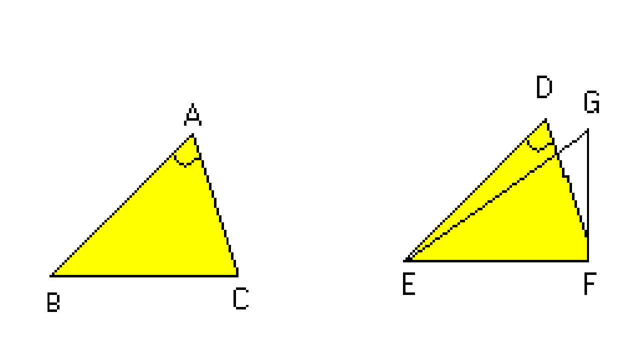


Sea BG el segmento dado y A, el punto dado. Se construye sobre el segmento el triangulo equilátero ADB (Proposición I-1), se prolongan los lados DA y DB (Postulado 2) y se trazan las circunferencias con centro en B y radio BG y con centro en D y radio DH (Postulado 3). Entonces, el segmento BG es igual al segmento BH, el segmento DL es igual al segmento DH y el segmento DA es igual al segmento DB, de donde el segmento BH resulta ser igual al segmento AL (Noción común 3) y, por lo tanto, GB es igual a AL (Noción común 1). Así, se construye un segmento igual a BG en el punto A.

Otras proposiciones relacionadas con la igualdad de figuras en términos de congruencia, recurren a la proposición I-4, y a otras que se van demostrando. Los enunciados son:

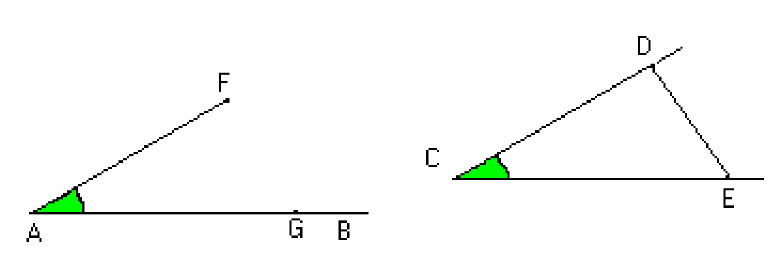
I-8 (Anexo A): Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a los lados del otro e iguales las bases, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales.

Figura 11. I-8



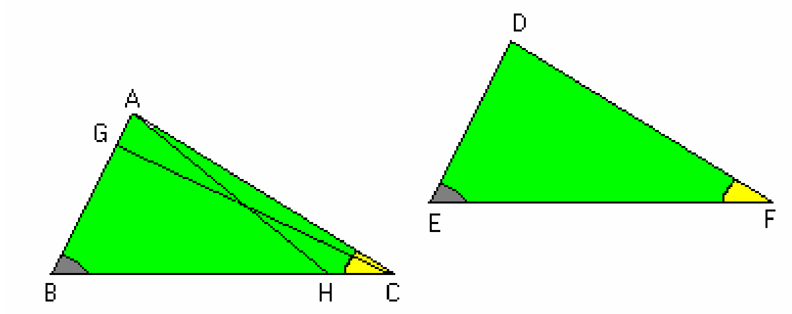
I-23 (Anexo A): Sobre una recta dada y en uno de sus puntos construir un ángulo rectilíneo igual a otro rectilíneo dado.

Figura 12. I-23



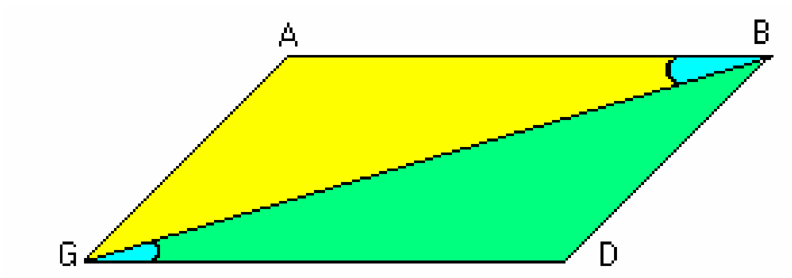
I-26 (Anexo A): Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado iguales, ya sea este lado el situado entre los ángulos iguales o el subtendido por uno de los ángulos iguales, tendrán iguales los otros dos lados y el tercer ángulo.

Figura 13. I-26



La proposición I-34 (Anexo A), Los lados y los ángulos opuestos de regiones paralelogramicas son iguales entre sí y la diagonal divide en dos regiones iguales, inicia el estudio de área de figuras rectilíneas (sin hacer mención explicita de la palabra área), es una primera comparación entre triángulos y paralelogramos, basada en la congruencia de los dos triángulos, como se ve en la demostración de la última parte del enunciado:

Figura 14. I-34



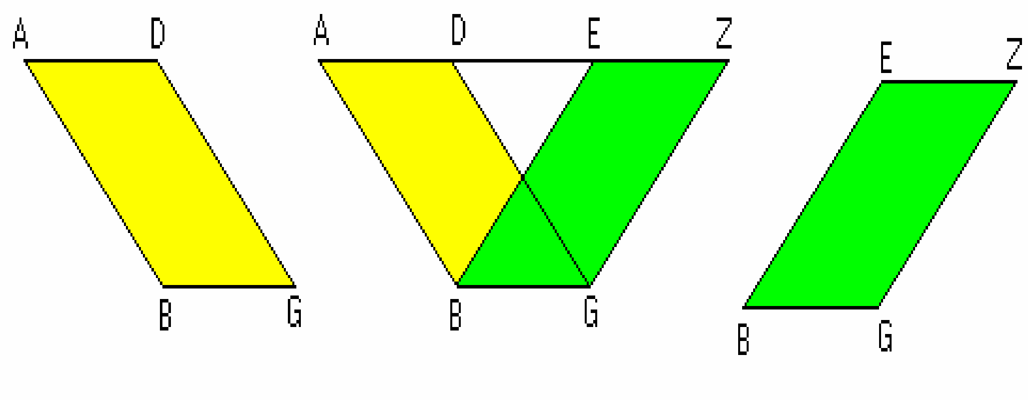
Se dice también que la diagonal divide en dos regiones iguales a una región paralelogramica porque siendo AB igual a GD y BG común, los dos segmentos A y BG serán iguales a los dos GB y DG y el ángulo ABG igual al BGD. Por tanto, la base AG será igual a la BD y el triángulo ABG igual al BGD.

∎

4.2.1. Igualdad de figuras planas rectilíneas en términos de áreas. Hasta aquí la igualdad solo esta contemplada en el sentido de congruencia, aplicando segmentos, ángulos y triángulos; sin embargo, sin hacer alguna referencia a algún cambio en el significado del termino igual; en la proposición I-35, Euclides introduce por primera vez una idea de igualdad entre figuras rectilíneas, sin necesidad de que estas tengan la misma forma, una igualdad referida al área de las figuras[12].

La proposición I-35 (Anexo A) establece que Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales.

Figura 15. I-35



Para demostrarla, Euclides considera los paralelogramos $ABGD$ y $EBGZ$, sobre la misma base BG y entre las mismas paralelas AZ y BG. Por ser paralelogramos, los segmentos AD y BG son iguales y, de manera análoga, los segmentos EZ y BG, y los segmentos AB y DG (Proposición I-34), por lo cual AD y EZ son iguales (Noción común 1). Sumando el segmento común DE, los segmentos AE y DZ resultan ser iguales (Noción común 2).

Por otra parte, por ser paralelos los segmentos AB y DG (Proposición I-33), los ángulos ZDG y EAB son iguales (Proposición I-29), con lo cual el triangulo EAB es igual al triangulo DZG (Proposición I-4).

---

[12] Legendre introdujo el termino equivalente para expresar este sentido mas amplio de la igualdad, restringiendo el termino igual solo para las figuras congruentes (Heath, 1956). De hecho, algunas traducciones de los Elementos, como la de Vera (1970), utilizan la palabra equivalente en estas proposiciones, en lugar de la palabra igual, usada en las proporciones de congruencia. Nosotros no haremos esta distinción.

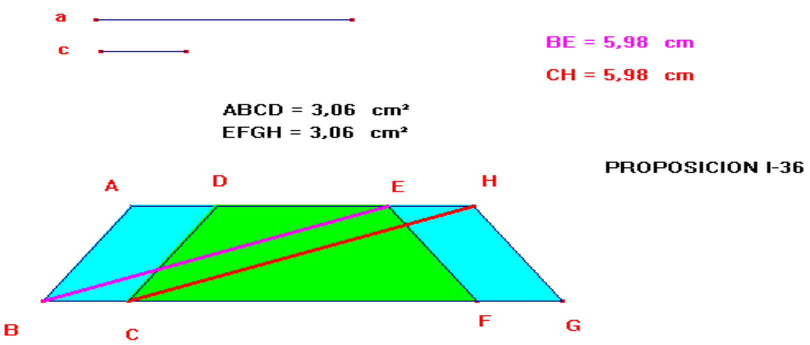
Réstese el triángulo común DHE, resultan iguales los trapecios $ABHD$ y $EHGZ$ (Noción común 3) y, sumando a estos últimos el triangulo común BHG, se concluye que los paralelogramos $ABGD$ y $EBGZ$ son iguales (Noción común 2).

Se observa, en la demostración de esta proposición, que Euclides trata a las figuras como magnitudes; es decir, que implícitamente señala que el área es una magnitud, pues suma y resta áreas iguales y utiliza las nociones comunes para garantizar la igualdad de las nuevas áreas que se obtienen de estos procedimientos, que antes habían sido usadas para las longitudes, el área es la segunda magnitud que aparece en los Elementos. Incluso, en el desarrollo de la demostración para establecer la igualdad de paralelogramos, usa como argumento la igualdad entre dos trapecios, evidentemente no congruentes.

De manera similar se observa en las siguientes tres proposiciones, de las cuales solo presentamos el enunciado y el dibujo de la construcción:

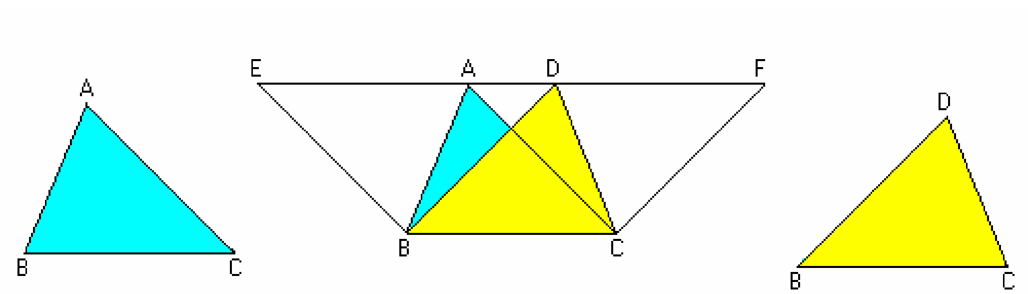
I-36 (Anexo A): Los paralelogramos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales

Figura 16. I-36



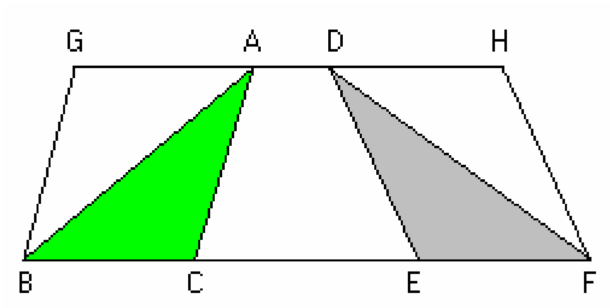
I-37 (Anexo A): Los triángulos colocados sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales

Figura 17. I-37



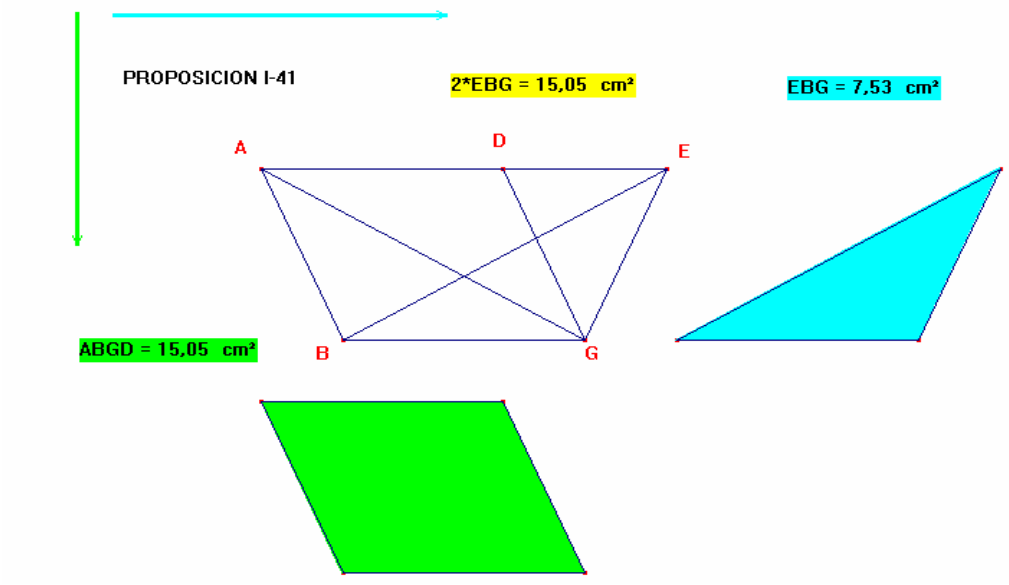
I-38 (Anexo A): Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales

Figura 18. I-38



De lo anterior, se concluye que el área de un paralelogramo y de un triangulo dependen de la base y de la altura, pues todos los triángulos, o paralelogramos, que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas tienen la misma área. Una idea un poco mas elaborada aparece en la proposición I-41 (Anexo A): Si un paralelogramo tiene la misma base que un triangulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triangulo, es decir que Euclides afirma, sin recurrir a fórmulas, que área del triangulo es la mitad del área de un paralelogramo de igual base y altura. Obsérvese la construcción:

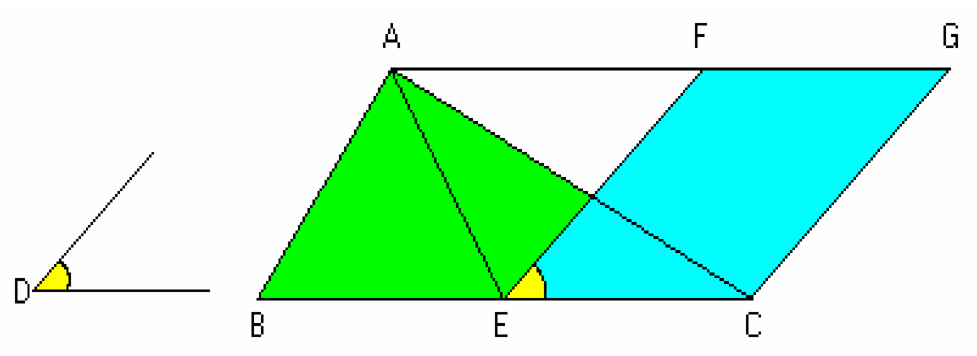
Figura 19. I-41



Considérese el triangulo EBG con base BG igual a la del paralelogramo $ABGD$ y colocados entre las mismas paralelas AE y BG. Trácese la recta AG y entonces, los triángulos ABG y EBG son iguales (proposición I-37); además, El paralelogramo $ABGD$ es doble del triangulo ABG (Proposición I-34), luego, el paralelogramo $ABGD$ es el doble del triangulo EBG.

4.2.2. Construcción de paralelogramos iguales a otras figuras planas rectilíneas. Con la proposición I-42 (Anexo A), Construir, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triangulo dado, Euclides muestra una nueva perspectiva en su estudio sobre áreas de figuras rectilíneas, denominada aplicación de áreas. Antes de esta proposición, presenta varias situaciones en las cuales triángulos y paralelogramos tienen áreas iguales y el resultado de que un triangulo tiene la mitad del área de un paralelogramo; pero ahora, el interés esta en construir figuras que tengan la misma área que una figura dada. La construcción y demostración elaborada por Euclides para esta proposición es como sigue:

Figura 20. I-42



Sea el triangulo ABC y el ángulo D. Construya el punto medio E del segmento BC (Proposición I-10), trácese el segmento AE y constrúyase el ángulo CEF igual al ángulo dado D (Proposición I-23). Trácese la recta paralela a BC en el punto A y la recta paralela a EF en el punto C (Proposición I-31), la intersección de estas será G.

Los triángulos ABE y AEC son iguales (Proposición I-38); luego, el triangulo ABC es el doble del triangulo AEC y como el paralelogramo $EFGC$ (Proposición I-33) es también el doble del triangulo AEC (Proposición I-41), dicho paralelogramo, construido con un ángulo igual a D, es igual al triangulo dado (Noción común 1).

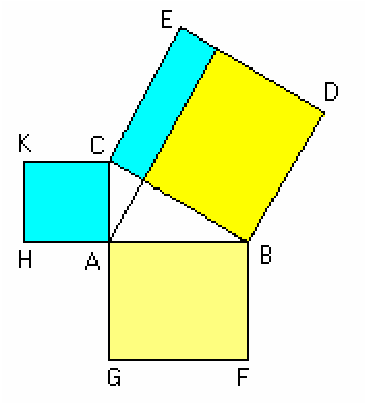
∎

Con la proposición 45, se extiende el procedimiento a cualquier figura; esto es, cualquier figura rectilínea puede transformarse en un paralelogramo*:* Construir, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.

Así, el área de una figura rectilínea se reduce al área de un paralelogramo, lo cual apunta, como se vera mas adelante, a la posibilidad de cuadrar una figura cualquiera y con esto, reducir sustancialmente el problema de determinar el área de una figura. La estrategia para demostrar esta proposición es dividir la figura dada en triángulos y usar la proposición I-42, las veces que sea necesario, con la condición adicional de un segmento, pues se debe construir cada paralelogramo con un lado común al primer paralelogramo ya construido. Este artificio es posible gracias a la proposición I-44: Aplicar en un segmento dado y en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triangulo dado.

4.2.3. Descomposición de figuras rectilíneas planas en otras figuras rectilíneas planas. En las proposiciones I-45 y I-47, aparece una nueva idea, la posibilidad de expresar un área como suma de otras. El Teorema de Pitágoras (Proposición I-47 (Anexo A)) es tal vez el ejemplo más conocido de este planteamiento sobre el área: En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman ese ángulo recto.

Figura 21. I-47



Este nuevo elemento sobre el estudio del área, se hace más evidente en el libro II de los Elementos, usualmente catalogado como Álgebra Geométrica, debido a que las 14 proposiciones que allí se incluyen son análogas a expresiones algebraicas que permiten la factorización de polinomios y la solución de ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, los principios expuestos también hacen referencia implícita a la posibilidad de transformar un área en la suma de otras; en particular, el área de rectángulos como suma de otros rectángulos[13].

Ejemplos de esta precisión son las proposiciones: II-1, II-2, II-4, II-6 (Anexo A), las cuales precisan de manera eficaz lo que para Euclides es área.

4.3. CUADRATURAS DE FIGURAS PLANAS RECTILÍNEAS

El significado de la palabra cuadratura esta relacionado con la posibilidad de construir un cuadrado con la misma área de una figura dada. La proposición II-14 (Anexo A), resuelve esta cuestión para una figura rectilínea cualquiera, construyendo un cuadrado igual a un rectángulo; Al parecer la proposición II-14[14] era un fin en sı mismo al que apuntaba Euclides en relación con el área, pues este resultado no se usa en la demostración de otras proposiciones; de cierta manera, el observa que con esta proposición se soluciona el problema del área de las figuras rectilíneas. El problema del área del cırculo requiere otros artificios y este es el siguiente aspecto que sobre el estudio de áreas aparece en los Elementos

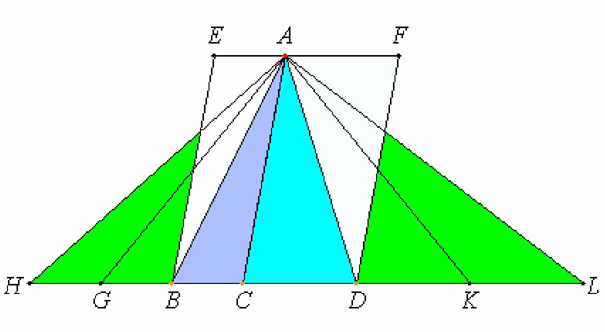
[13] La propuesta de álgebra geométrica se basa en áreas de rectángulos, debido a que la multiplicación de dos segmentos, en Euclides, da como resultado un rectángulo. Esta idea se mantuvo hasta Descartes, quien, basado en la proposición 12 del libro VI de los Elementos, mostró una manera para que el producto de dos segmentos sea un segmento.

[14] Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

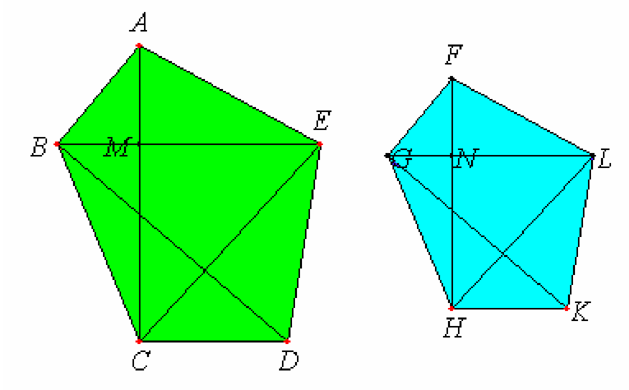
4.4. ÁREAS PROPORCIONALES

En los libros V y VI se expone en detalle la teoría de proporcionalidad, desarrollada por Eudoxo, para magnitudes geométricas. En particular, para el caso del área, las proposiciones 1 y 20 del libro VI, permiten ampliar el espectro de áreas calculables, paso preliminar para el estudio del área del cırculo. Tales proposiciones enuncian lo siguiente:

VI-1: Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sı como sus bases[15]



VI-20 Los polígonos semejantes se dividen en el mismo numero de triángulos semejantes con la misma razón que los totales y son entre sı como las razones duplicadas de los lados homólogos



En esta proposición, Euclides reduce el problema a la semejanza entre triángulos, establecida con las proposiciones VI-5, VI-6, VI-7 y VI-19. La intención no es encontrar el área del polígono, pues este problema ya había sido abordado en los libros I y II, el interés de Euclides esta en comparar áreas de polígonos semejantes, como un primer paso para comparar luego áreas de polígonos semejantes con infinitos lados, como efectivamente se evidencia en la proposición 1 del libro XII, preparatoria de la cuestión del área del cırculo: Los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sı como el cuadrado de los diámetros.

[15] En la demostración de esta proposición se recurre a las proposiciones I-41 y VI-4 y a la definición 5 del libro V, considerada la base de la teoría de proporciones: Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.

Por ultimo, con la proposición XII-2: Los círculos son entre sı como el cuadrado de sus diámetros, Euclides finaliza su estudio sobre áreas de figuras planas, haciendo uso por primera vez del método de exhaucion, hoy denominado de paso al lımite, y varios de los resultados expuestos anteriormente. Véase (Anexo A-documentos PDF Area del Circulo),

Por lo anterior, el concepto de área en Euclides no requiere el uso de números ni de formulas, pero sı enfatiza en el concepto de área como la equivalencia de figuras que tienen igual descomposición en figuras congruentes.

4.5. LIBRO II DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Figura 22. Libro los elementos

El material más notable del libro II es el relativo al álgebra geométrica. Ya se ha visto que los griegos no reconocían la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, ángulos y volúmenes. En el libro II todas las cantidades están representadas geométricamente, evitando así el problema de la asignación de valores numéricos. Los números se ven sustituidos por segmentos de recta; el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números; el producto de tres números es un volumen; la suma de dos números se traduce en la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro, y la resta en recortar de un segmento la longitud del segundo; la división de un numero por otro se indica por la razón entre los segmentos que los representan, de acuerdo con los principios introducidos posteriormente en los libros V y VI.

La división de un producto (un área) por un tercer número se realiza hallando un rectángulo que tenga como lado a este ultimo y cuya área sea igual al producto dado, siendo entonces el otro lado el cociente buscado. La construcción utiliza la teoría de aplicación de áreas mencionada en la proposición 44 del libro I. La suma y resta de productos se reemplaza por suma y resta de rectángulos; la extracción de una raíz cuadrada, por la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un rectángulo dado.

El libro segundo comienza con las definiciones de rectángulo y de “gnomon”[16], que es una especie de L obtenida al quitarle a un rectángulo otro semejante. Las once proposiciones iniciales tratan de relacionar el área de unos cuadrados o rectángulos que tienen por lados unos segmentos dados con la superficie de otros cuadriláteros que tienen por lados

[16] Con respecto a la palabra “gnomon”, probablemente significo al principio, en Babilonia, una varilla vertical cuya sombra marcaba la hora. En la época de Pitágoras significaba una escuadra de carpintero, y esta es la forma del gnomon anterior. También significaba lo que queda de un cuadrado al cortar otro cuadrado mas pequeño de una de sus esquinas, y mas tarde, con Euclides, significo lo que queda de un paralelogramo al cortar otro mas pequeño de una de sus esquinas, siempre que este fuera semejante al primero. Otro significado parece tener un origen astronómico pues indica la posición de una barra vertical descansando sobre un plano horizontal, y utilizada para medidas astronómicas o de tiempo

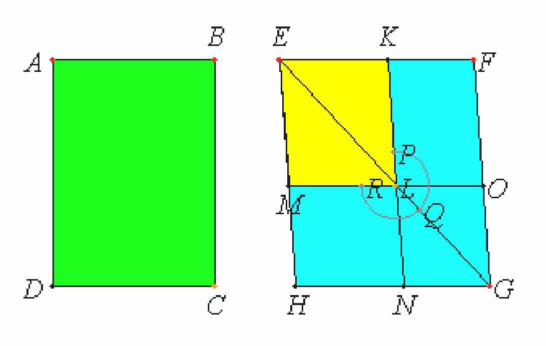
sumas o restas de dichos segmentos. Las proposiciones 12 y 13 equivalen a la propiedad de los lados de un triángulo que ahora se conoce por el "teorema del coseno". En la proposición última se explica la manera de hallar un cuadrado cuya área sea igual a la de una figura rectilínea dada.

4.6. DEFINICIONES (Anexo A)

4.6.1. Definición 1.

De todo paralelogramo rectangular se dice que está comprendido por las dos rectas que comprenden el ángulo recto.

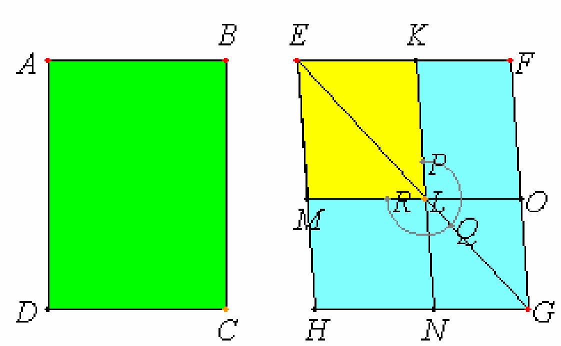
Figura 23. Definición 1



4.6.2. Definición 2.

En toda área de paralelogramo se llama gnomon a uno cualquiera de los paralelogramos situados en torno a su diagonal junto con los dos complementos.

Figura 24. Definición 2

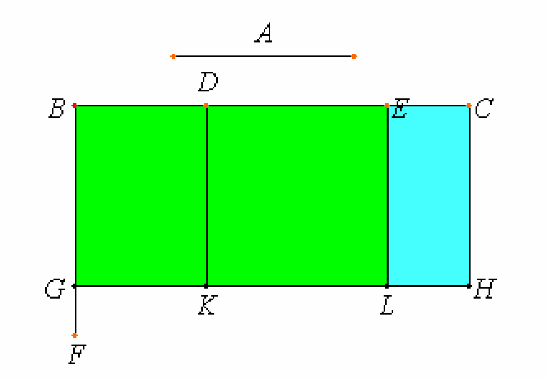


4.7. PROPOSICIONES (Anexo A)

4.7.1. Proposición 1.

Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos

Figura 25. Proposición 1



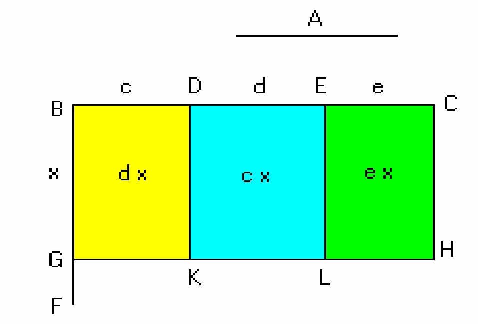
□

Sean las dos rectas A y BC. Divídase al azar la recta BC por los puntos D y E; por el punto B trácese la recta BF perpendicular a la recta BC, y corte a BF en el punto G, de modo que BG sea igual que A; por el punto G trácese la GH paralela a BC; por el punto C la CH paralela a BG; por el punto D la DK paralela a BG y CH, y por el punto E la EL paralela a BG, CH y DK. Puesto que los rectángulos $BDKG, DELK, ECHL$ comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos; son equivalentes al rectángulo comprendido por las rectas BC y BG, donde $BG = A$; de esta manera el rectángulo $BCHG$ es igual a los rectángulos $BDKG$ mas $DELK$ más $ECHL$, se obtiene que el todo es la suma de las partes.

∎

4.7.1.1. Proposición enunciada en nuestro sistema notacional. Si $\overline{BD} = c, \overline{DE} = d, \overline{EC} = e, \overline{BG} = x$, entonces;

$$(\overline{BD})\times(\overline{BG})+(\overline{DE})\times(\overline{BG})+(\overline{EC})\times(\overline{BG})=(\overline{BG})\times[(\overline{BD})+(\overline{DE})+(\overline{EC})]$$



Reemplazando se tiene:

$$cx + dx + ex = (c + d + e)x$$

La cual corresponde a la ley DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN.

4.7.1.2 Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 1. Para resolver la ecuación $(c + d + e)x = b^2$, mediante la aplicación de la proposición 1, equivale a lo siguiente: sobre la recta BC, se determina un segmento $BC=(c+d+e)$, se construye el rectángulo $BCHG$ de área $(c+d+e)x$. Que es igual al área de un cuadrado de lado b, es decir: $(c+d+e)x=b^2$.

Completando ahora la figura con los rectángulos $BDKG$ de área cx, $DELK$ de área dx, y con $ECHL$ de área ex, se deduce; que de el uso de la proposición uno, el rectángulo $BCHG$ de área $(c+d+e)x$ es igual a los rectángulos $BDKG$ de área cx, $DELK$ de área dx, y $ECHL$ de área ex.

En nuestra notación se tiene:

$$(c+d+e)x = cx+dx+ex$$

$$b^2 = cx+dx+ex$$

$$(c+d+e)x = b^2$$

$$x=\frac{b^2}{c+d+e}$$

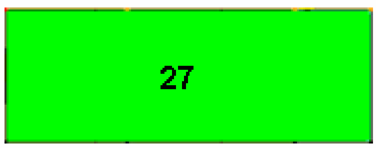
Que permite solucionar la ecuación: $(c+d+e)x=b^2$.

Ejemplo:

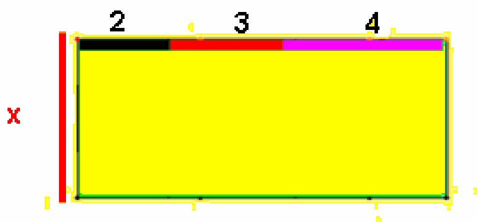
Para solucionar la ecuación $(2+3+4)\cdot x = 27$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 1:

Dibújese un rectángulo de área 27,

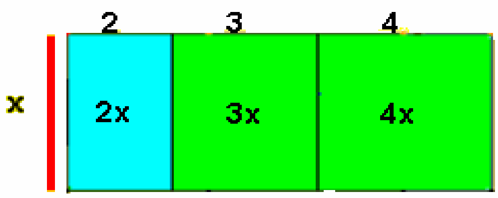
.



Y que un lado del rectángulo sea igual a x y el otro lado $(2+3+4)$, así:



Luego, se construye el área correspondiente a cada área de acuerdo al segmento, así:



Como el “todo es igual a la suma de sus partes” se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(2+3+4)\cdot x = 27 \\
&(2+3+4)\cdot x = 2\cdot x + 3\cdot x + 4\cdot x \\
&27 = 2\cdot x + 3\cdot x + 4\cdot x \\
&3 = x
\end{aligned}
$$

Euclides y los antiguos matemáticos se preocupaban apenas por las relaciones que podían obtener geométricamente. Por ello, los cálculos y las medidas eran efectuados por esclavos.

Un problema simple formulado hace más de 4000 años por los matemáticos egipcios, como el siguiente:

Un número más su doble,
Más su tercera parte,
Todos juntos forman 10
¿Cuál es el número?

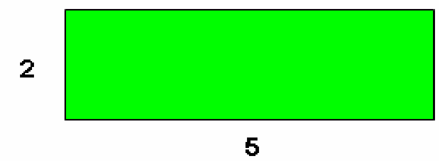
Expresado a través de una ecuación:

$$x + 2\cdot x + \frac{x}{3} = 10$$

En el tiempo de Euclides el Álgebra simbólica estaba todavía muy distante de ser inventada; por consiguiente los matemáticos de la antigüedad usaron las construcciones geométricas para estudiar las ecuaciones.

Se puede visualizar la resolución de esta ecuación a través de un método descrito por Euclides en el libro 2 de Los Elementos, y que pasó para la historia con el nombre de Álgebra Geométrica:

En primer lugar construyó un rectángulo de área 10[17].



Se busca traducir el problema a través de área de ilustraciones planas. La construcción corresponde a la siguiente ecuación:

$$x + 2\cdot x + \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow$$

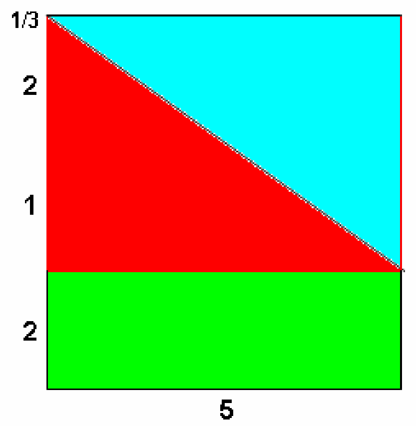
$$\Rightarrow x + 2\cdot x + \frac{x}{3} = 5\cdot 2$$

[17] En lugar del rectángulo anterior, se puede dibujar cualquier otro, con lados de estas medidas: 10 y 1, 4 y 2,5, 1,25 y 8 etc.

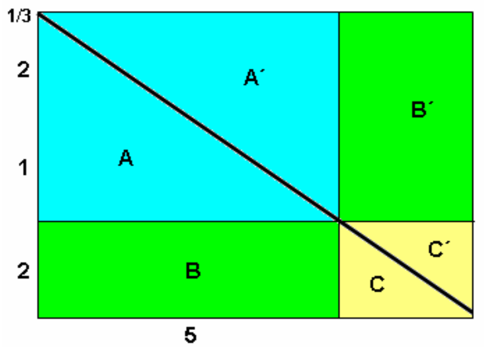
Se anexa a este rectángulo, un nuevo rectángulo de lado 5 y $1+2+\frac{1}{3}$,

Así:

$$x \cdot \left(1+2+\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2$$



Se construye otro rectángulo de igual área del rectángulo de lados 5 y 2. Para eso, se prolonga la diagonal del rectángulo hasta que ella corte la prolongación del lado 5; y se forma otro rectángulo:



Área de A + área de B + área de C = área de A' + área de B' + área de C`

Como área de A = área de A' y área de C = área de C'

Se tiene que área de B = área de B´.

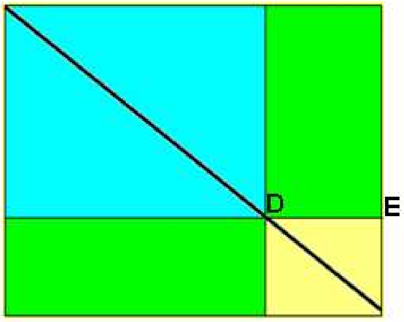
Por tanto:

$$x \cdot \left(1+2+\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2$$

Para los matemáticos de ahora, la respuesta a este problema es un número real.

$$x = \frac{5 \cdot 2}{1+2+\frac{1}{3}} = \ldots = 3$$

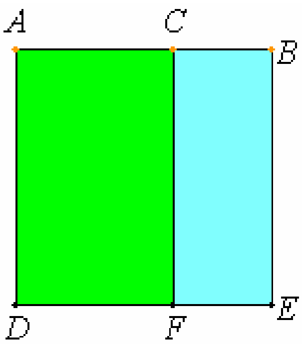
En el álgebra de Euclides significa la construcción de esta figura:



Y la solución de la ecuación es el segmento DE .

4.7.2. Proposición 2. Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y cada uno de los segmentos, es igual al cuadrado de la recta entera.

Figura 26. Proposición 2



□

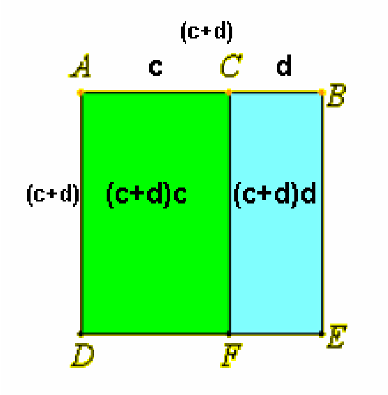
Divídase al azar la recta AB por el punto C, constrúyase el cuadrado $ADEB$ sobre la recta AB, por C trácese la $CF = AB$ paralela a AD y BE, como $AB = DE = AD = BE$ por ser un cuadrado, entonces $AC + CB = AB$ será igual a $DF + FE$; luego $AC = DF$ y $CB = FE$.

Ahora se construye los rectángulos $ADFC$ que esta comprendido por AD y AC ; y el rectángulo $CFEB$ que esta comprendido por CF y CB; luego los rectángulos $ADFC$ que esta comprendido por AD y AC; añadido con el rectángulo $CFEB$ que está comprendido por CF y CB, será equivalente al cuadrado $ADEB$ construido sobre AB, ya que $AC = DF, CB = FE, CF = AB$.

∎

4.7.2.1. Proposición 2, enunciada en nuestro sistema notacional. Como $\left[\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)\times\left(\overline{AC}\right)+\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)\times\left(\overline{CB}\right)\right]=\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2$; entonces:

Si $\overline{AC} = \overline{DF} = c$, $\overline{CB} = \overline{FE} = d$,



Remplazando se tiene:

$$(c+d)\times c + (c+d)\times d = (c+d)^2$$

4.7.2.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 2. Para resolver la ecuación $a \cdot x + b \cdot x = b^2$ la aplicación de la proposición 2, equivale a lo siguiente: sobre la recta AB se determina un segmento $AB = x$, y se construye por una parte un rectángulo $ADFC$ de área $a \cdot x$ y de otra el rectángulo $CFEB$ de área $b \cdot x$, se obtiene un nuevo cuadrado $ADEB$ de área $a \cdot x + b \cdot x$, que es igual al área de un cuadrado de lado b.

Se deduce del uso de la proporción 2 que los rectángulos $ADFC$ mas $CFEB$ es igual al cuadrado $ADEB$, de área x^2.

En nuestra notación se tiene:

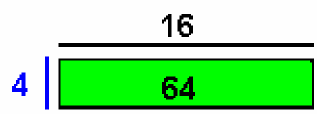
$$a \cdot x + b \cdot x = x^2$$
$$b^2 = x^2$$
$$x = \pm b$$

Que permite solucionar la ecuación $a \cdot x + b \cdot x = b^2$.

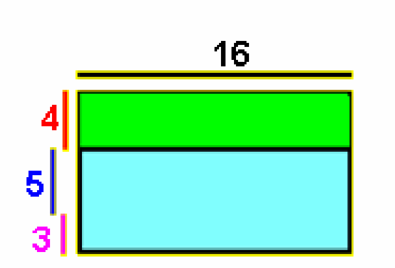
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $5 \cdot x + 3 \cdot x = 64$, se realiza el siguiente procedimiento, utilizando la proposición 2.

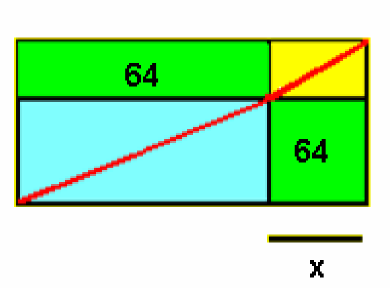
Se construye un rectángulo de área 64, donde se podría utilizar 8x8, 16x4, 32x2,…como lados; así:



Se prolonga el lado 4, con los segmentos de longitud 5 y 3; así:



En el álgebra de Euclides significa la construcción de la figura al trazar la diagonal, que:



La solución de la ecuación es el segmento $x = 8$.

Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 2. Para resolver la ecuación $a \cdot x = b^2$, la aplicación de la proposición 2 equivale a lo siguiente: sobre la recta AB se determina un segmento $AB = x$, y se construye por una parte el rectángulo $ADFC$ de área $a \cdot x$, que es igual al área de un cuadrado de lado b, es decir $a \cdot x = b^2$.

Completando la figura con otro rectángulo $CFEB$ de área $(x - a) \cdot x$, se deduce de la proposición 2, que los rectángulos $ADFC$ de área $a \cdot x$ y $CFEB$ de área $(x - a) \cdot x$, es igual al cuadrado $ADEB$ de área x^2.

En nuestra notación se tiene:

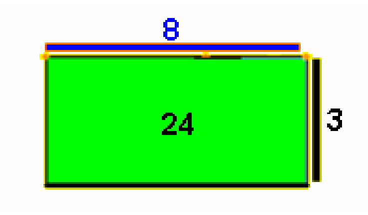
$$a \cdot x + (x - a) \cdot x = x^2$$
$$b^2 + (x - a) \cdot x = x^2$$
$$b^2 + x^2 - a \cdot x = x^2$$
$$a \cdot x = b^2$$
$$x = \frac{b^2}{a}$$

Que permite solucionar la ecuación $a \cdot x = b^2$.

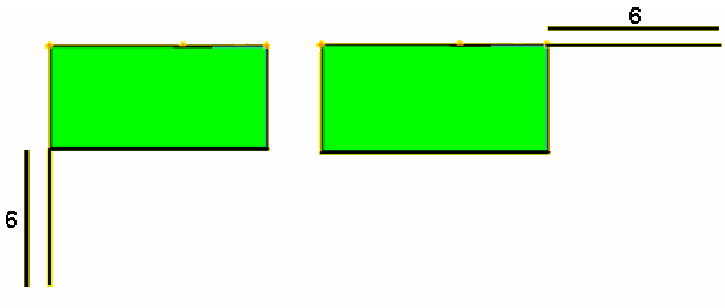
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $6 \cdot x = 24$, se realiza el siguiente procedimiento.

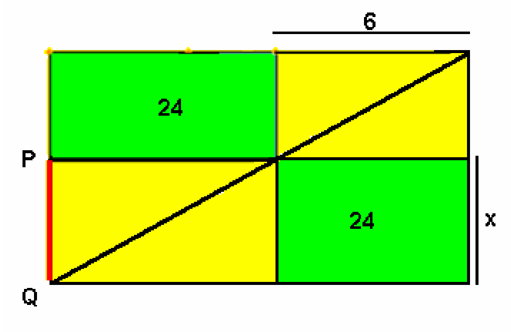
Se construye un rectángulo de área 24, donde podría utilizarse 8x3, 6x4, 24x1,… como lados se tengan, así:



Se agrega un segmento de longitud 6 en cualquier lado, así:



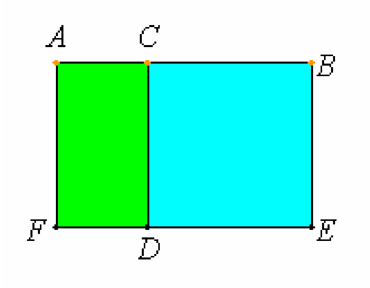
En el álgebra de Euclides significa la construcción de la figura de la derecha al trazar la diagonal, que:



La solución de la ecuación es el segmento $PQ = 4$.

4.7.3. Proposición 3. Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y cada uno de los segmentos, es igual al rectángulo comprendido por los segmentos y el cuadrado del segmento primero.

Figura 27. Proposición 3



□

Divídase al azar la recta AB por el punto C, por el punto C trácese la CD igual a CB perpendicular a AB, por B trácese la $BE = CB$ paralela a CD y por el punto A la AF

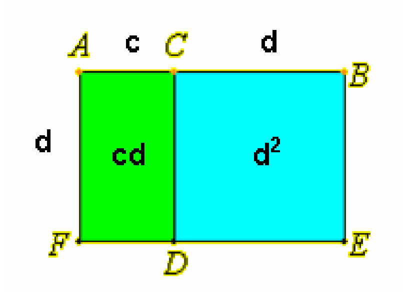
igual a CB paralela a CD y BE; constrúyase el rectángulo $AFEB$ comprendido por las rectas AF y AB.

Como $AB = FE$, entonces $AB = AC + CB$, además FE también será igual a $FC + DE$, luego $AC = FD, CB = DE$. Constrúyase el rectángulo $AFDC$ comprendido por AF y AC, además el cuadrado $CDEB$ sobre CB, luego el rectángulo $AFEB$ comprendido por las rectas AF y FE, es equivalente al rectángulo $AFDC$ comprendido por las rectas AF y FD, añadido al cuadrado $CDEB$ sobre CB, ya que $AF = CB, AC = FD, CB = DE$.

∎

4.7.3.1. Proposición 3, enunciada en nuestro sistema notacional. Si $\overline{AB} = \overline{FE}$, entonces $\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = \left(\overline{FD} + \overline{DE}\right)$, además $\overline{AF} = \overline{CB}$, es decir;
$\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) \times \left(\overline{AF}\right) = \left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{AF}\right) + \left(\overline{CB}\right) \times \left(\overline{AF}\right)$,y como $\overline{AF} = \overline{CB}$ se tiene:
$\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) \times \left(\overline{CB}\right) = \left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{CB}\right) + \left(\overline{CB}\right) \times \left(\overline{CB}\right), \left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) \times \left(\overline{CB}\right) = \left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{CB}\right) + \left(\overline{CB}\right)^2$,

Por consiguiente. Si $\overline{AC} = c, \overline{CB} = d$



Algebraicamente se obtiene $(c + d) \times d = c \cdot d + d^2$

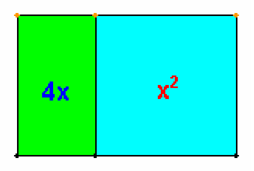
4.7.3.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 3. Para resolver la ecuación $a \cdot x + x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición 3 equivale a lo siguiente, sobre la recta AB, se construye un rectángulo $AFDC$ de área $a \cdot x$, y de otra parte se construye un cuadrado $CDEB$ de lado x, se obtiene $a \cdot x + x^2$, que es igual al área de cuadrado de lado b.

Para encontrar el valor de x, se divide el rectángulo de área $a \cdot x$ en dos rectángulos iguales de áreas $\left(\frac{a}{2}\right) \cdot x$, ubicándolos de manera adyacente a x^2; completando la figura con otro cuadrado de lado $\left(\frac{a}{2}\right)$, se deduce el valor de x.

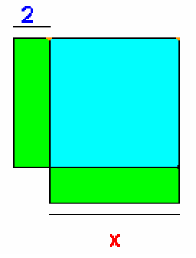
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $4 \cdot x + x^2 = 192$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 3:

Constrúyase un rectángulo de área $4 \cdot x$ y un cuadrado de área x^2.



Divídase el rectángulo $4 \cdot x$, en dos partes de área $2 \cdot x$ y ubíquese de manera adyacente, así:

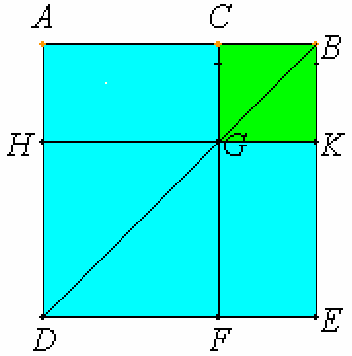


Para encontrar el valor de x, se agrega un cuadrado de lado 2.

De esta manera el área total del cuadrado es $192 + 4 = 196$. Y la longitud del lado esta dada por: $x + 2 = 14$; es decir: $x = 12$.

4.7.4. Proposición 4. Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Figura 28. Proposición 4



□

Divídase al azar la recta AB por C. Constrúyase el cuadrado $ADEB$ sobre AB, trácese la diagonal BD; por el punto C trácese la $CF = AB$ paralela a AD y BE, por el punto de intersección G trácese la $HK = AB$ paralela a AB y DE. Como AB es igual a

$\overline{DE} = \overline{AD} = \overline{BE}$, entonces $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{DF} + \overline{FE} = \overline{DH} + \overline{HA} = \overline{EK} + \overline{KB}$, luego $\overline{AC} = \overline{DF} = \overline{DH} = \overline{EK}$ y $\overline{CB} = \overline{FE} = \overline{HA} = \overline{KB}$, ahora construimos los rectángulos $AHGC$ comprendidos por $\overline{AH}$ y $\overline{HG}$, y el rectángulo $GFEK$ comprendido por $\overline{GF}$ y $\overline{FE}$, luego los rectángulos son equivalentes porque $\overline{CF} = \overline{AB}$ y $\overline{HK} = \overline{AB}$.

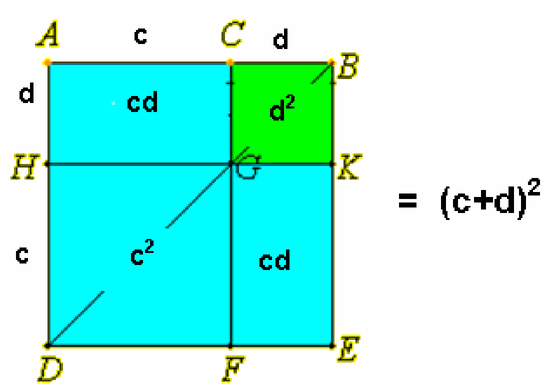
Constrúyase el cuadrado $HDFG$ sobre $\overline{DF}$, pero $\overline{DF} = \overline{AC}$, luego el cuadrado $HDFC$ es igual al cuadrado de $\overline{AC}$, constrúyase ahora el cuadrado $CGKB$ sobre $\overline{CB}$. Entonces el cuadrado $ADEB$ sobre $\overline{AB}$, es equivalente a los rectángulos $AHGC$ comprendidos por $\overline{AH}$ y $\overline{HG}$ más $GFEK$ comprendido por $\overline{GF}$ y $\overline{FE}$, añadidos al cuadrado $HDFG$ sobre $\overline{DF}$, que es igual al cuadrado de $\overline{AC}$, añadido con el cuadrado $CGKB$ sobre $\overline{CB}$, es decir el todo es igual a la suma de las partes.

$\blacksquare$

4.7.4.1. Proposición 4, enunciada en nuestro sistema notacional. Como $\overline{AB} = \overline{DE} = \overline{AD} = \overline{BE}$, entonces: $\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = \left(\overline{DF} + \overline{FE}\right) = \left(\overline{DH} + \overline{HA}\right) = \left(\overline{EK} + \overline{KB}\right)$, luego $\overline{AC} = \overline{DF} = \overline{DH} = \overline{EK}$ y $\overline{CB} = \overline{FE} = \overline{HA} = \overline{KB}$, además $\overline{CF} = \overline{AB}$ y $\overline{HK} = \overline{AB}$, es decir $\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) \times \left(\overline{DH} + \overline{HA}\right) = \left(\overline{DF}\right) \times \left(\overline{DH}\right) + \left[\left(\overline{AH}\right) \times \left(\overline{HG}\right) + \left(\overline{GF}\right) \times \left(\overline{FE}\right)\right] + \left(\overline{CB}\right) \times \left(\overline{FE}\right)$; sustituyendo se tiene:

$$\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) \times \left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = \left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{AC}\right) + \left[\left(\overline{CB}\right) \times \left(\overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{CB}\right)\right] + \left(\overline{CB}\right) \times \left(\overline{CB}\right)$$
$$\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + 2 \cdot \left[\left(\overline{AC}\right) \times \left(\overline{CB}\right)\right] + \left(\overline{CB}\right)^2$$

Si $\overline{AC} = c$ y $\overline{CB} = d$



Es decir: $(c + d)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot d + d^2$

4.7.4.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 4. Para resolver la ecuación $(x + a)^2 = b^2$, la aplicación de la proposición 4 equivale a lo siguiente: sobre la recta AB se determina un segmento $AB = (x + a)$, y se construye un cuadrado $ADEB$ de lado $(x + a)$, que es igual al área de un cuadrado de lado b. Es decir $(x + a)^2 = b^2$.

Completando la figura con otro cuadrado de lado x, $HDFG$ y con los rectángulos de área $a \cdot x$, $AHGC$ y $GFEK$ además de el cuadrado de lado a, $CGKB$, se deduce del uso de la proposición 4, que el cuadrado $ADEB$ de área $(x+a)^2$, es equivalente a la suma del cuadrado de lado x, $HDFG$ y los rectángulos de área $a \cdot x$; $AHGC$ y $GFEK$ añadido con el cuadrado de lado a, $CGKB$.

En nuestra notación se tiene:

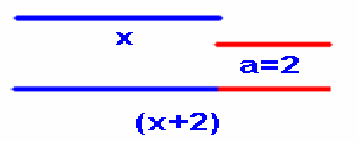
$$
\begin{aligned}
(x+a)^2 &= x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2 \\
b^2 &= x^2 + 2 \cdot a \cdot x + b^2 \\
b^2 &= (x+a)^2 \\
x &= b - a
\end{aligned}
$$

Que permite solucionar la ecuación dada $(x+a)^2 = b^2$.

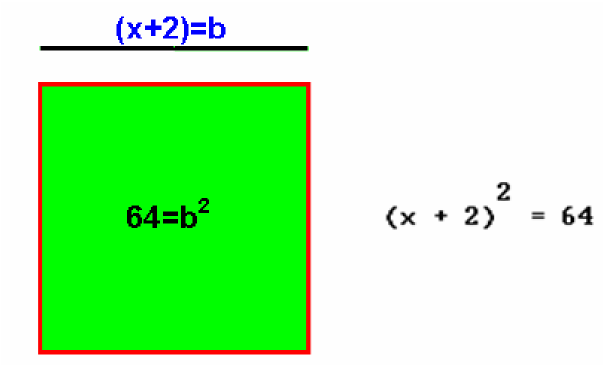
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $(x+2)^2 = 64$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 4

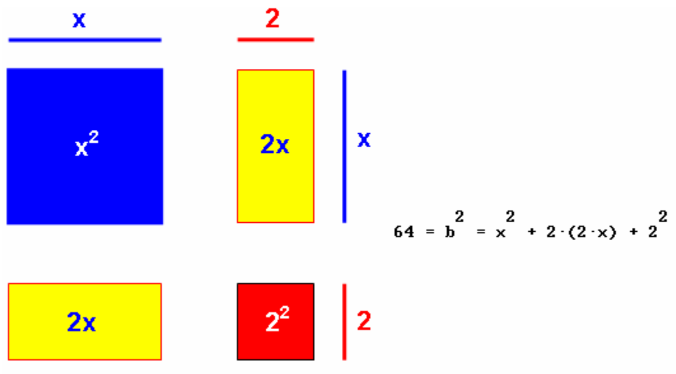
Para solucionar la ecuación aplicando la proposición 4 se construye un segmento x, y otro segmento $a = 2$. Así:



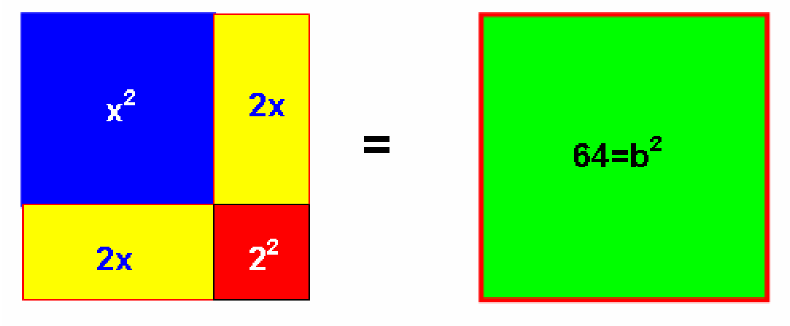
Constrúyase un cuadrado de lado $(x+2)$ que es igual al área de un cuadrado de lado b que en este caso es $b^2 = 64$.



Completando la proposición se tiene, que b^2 es igual a un cuadrado de lado x, más dos rectángulos de área $a \cdot x = 2 \cdot x$, añadidos a un cuadrado de lado $a = 2$, así:



De esta manera el cuadrado de lado b es:



Por consiguiente:

$$64 = b^2 = x^2 + 2\cdot(2\cdot x) + 2^2$$
$$64 = x^2 + 2\cdot(2\cdot x) + 2^2$$
$$64 = (x+2)^2$$
$$8 - 2 = x$$
$$6 = x$$

Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 4. Para resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + a\cdot x = b^2$. La aplicación de la proposición 4 equivale a lo siguiente: sobre la recta AC se determina un segmento $AC = x$; y se construye, por una parte un rectángulo de área $x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$, $AHGC$ y el cuadrado de lado x, $HDFG$, además de otra parte un segmento $CB = a$; luego $AB = (x+a)$ y se construye el rectángulo de área $GFEK$, se obtiene $x^2 + 2\cdot x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$ que es igual al área de un cuadrado de lado b. Es decir: $x^2 + a\cdot x = b^2$

Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado a, $CGKB$, se deduce del uso de la proposición 4 que el cuadrado $ADEB$ de área $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$ que es igual a la suma del cuadrado de lado x, $HDFG$ más los rectángulos, $AHGC$ y $GFEK$ de área $x \cdot \left(\frac{a}{2}\right)$; añadidos al cuadrado de lado a, $CGKB$.

En nuestra notación se tiene:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = x + \frac{a}{2}$$

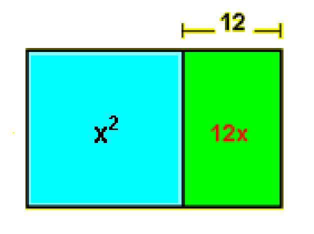
$$x = \sqrt{\left(b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} - \frac{a}{2}$$

Que permite solucionar la ecuación dada $x^2 + a \cdot x = b^2$.

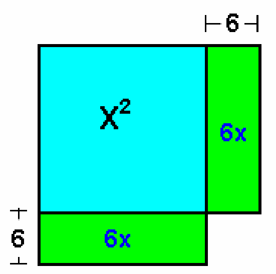
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $x^2 + 12 \cdot x = 364$; se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 4.

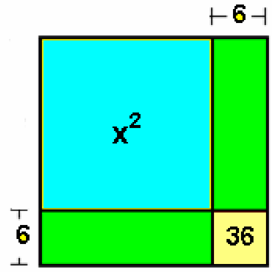
Para la ecuación, se dibuja un cuadrado de lado x y un rectángulo de área $12 \cdot x$, se obtiene un rectángulo de lado $(x + 12)$ y área 364 unidades, de la siguiente manera:



Siguiendo el recorrido de la proposición, se divide el rectángulo de área $12 \cdot x$, en dos rectángulos de área $6 \cdot x$, así:



Complétese el cuadrado agregando un cuadrado de lado 6;

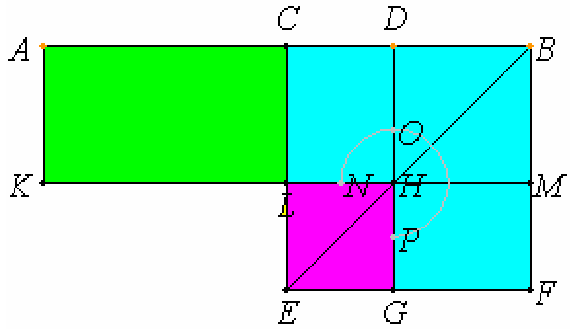


Luego, el área total del cuadrado es: $364 + 36 = 400$ y la longitud del lado esta dada por $x + 6 = 20$

Por lo tanto: $x = 14$

4.7.5. Proposición 5. Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Figura 29. Proposición 5



□

Divídase la recta AB en partes iguales por el punto C y en partes desiguales por el punto D. constrúyase el cuadrado $CEFB$ sobre la recta CB; trácese la diagonal BE; por el punto D la DG paralela a CE y BF, y por el punto de intersección H la KM paralela a las rectas AB y EF, por A la AK paralela a las CL y BM.

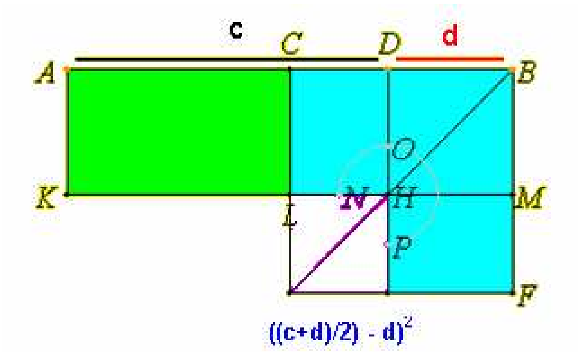
Puesto que los rectángulos $CLHD$ y $HGFM$ son iguales, añádase el cuadrado $DHMB$ sobre DB, entonces el rectángulo $CLMB$, será equivalente al rectángulo $DGFB$; pero el rectángulo $CLMB$ es igual al rectángulo $AKLC$ ya que la recta AC es igual a CB, luego el rectángulo $AKLC$ es igual al $DGFB$; añadimos el rectángulo $CLHD$, entonces el rectángulo $AKHD$ será equivalente al gnomon PON; pero el rectángulo $AKHD$ esta comprendido por las rectas AD y DB, ya que DH es igual a DB; luego el gnomon PON será equivalente al rectángulo $AKHD$; añadimos ahora el cuadrado $LEGH$ que es igual al cuadrado de CD con el gnomon PON, esto será equivalente al rectángulo comprendido por las rectas AD y DB mas el cuadrado de CD; pero el gnomon PON y el cuadrado

$LEGH$ forman el cuadrado $CEFB$, que es el construido sobre CB; luego el rectángulo comprendido por las rectas AD y DB mas el cuadrado de CD, equivale al cuadrado de CB.

∎

4.7.5.1. Proposición 5, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrara una secuencia lógica; para evidenciar su identidad algebraica.

Si $\overline{AD} = c$ y $\overline{DB} = d$,



$$\left(\overline{AC}\right)\times\left(\overline{CB}\right)+\left[\left(\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{2}\right)-\left(\overline{CB}\right)\right]^2=\left[\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{2}\right]^2$$, remplazando se tiene:

$$c\cdot d+\left[\frac{c+d}{2}-d\right]^2=\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

4.7.5.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 5. De otra forma, para resolver la ecuación de segundo grado $a\cdot x - x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, se determina un segmento $AB = a$ y se construye un rectángulo $AKMB$ de área $a\cdot x$. Fijando en este un cuadrado de lado x, $DHMB$, se obtiene un nuevo rectángulo $AKHD$ de área $a\cdot x - x^2$, que es igual al área de un cuadrado de lado *b*. es decir $a\cdot x - x^2 = b^2$.

Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $\left(\frac{a}{2}\right)$, $CEFB$, se deduce, del uso de la Proposición 5 que el cuadrado CEFB de área $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ excede del rectángulo $AKHD$ de área $a\cdot x - x^2$, en el cuadrado $LEGH$ de lado $\left(\frac{a}{2}\right) - x$.

En nuestra notación se tiene:

$$a \cdot x - x^2 + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x\right]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x\right]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x\right]^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

$$x = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

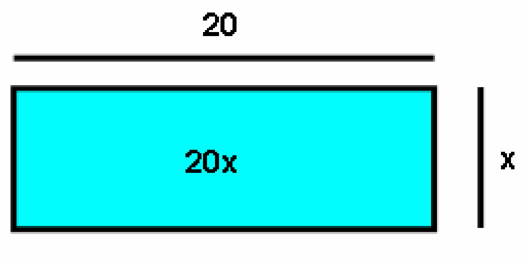
Que permite solucionar la ecuación dada $a \cdot x - x^2 = b^2$.

Ejemplo:

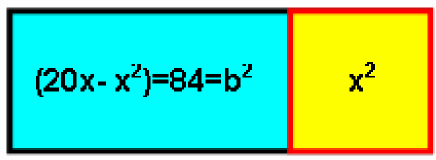
Para solucionar la ecuación $20 \cdot x - x^2 = 84$; se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 5.

A manera de ejemplo en que consiste el método:

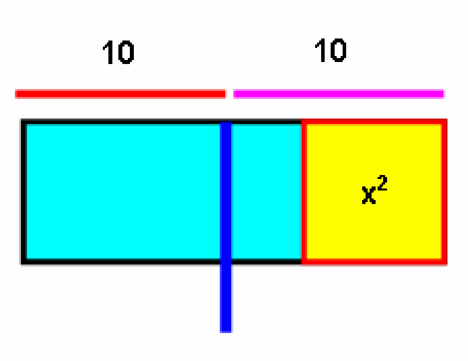
Dibújese el rectángulo de área $20 \cdot x$.



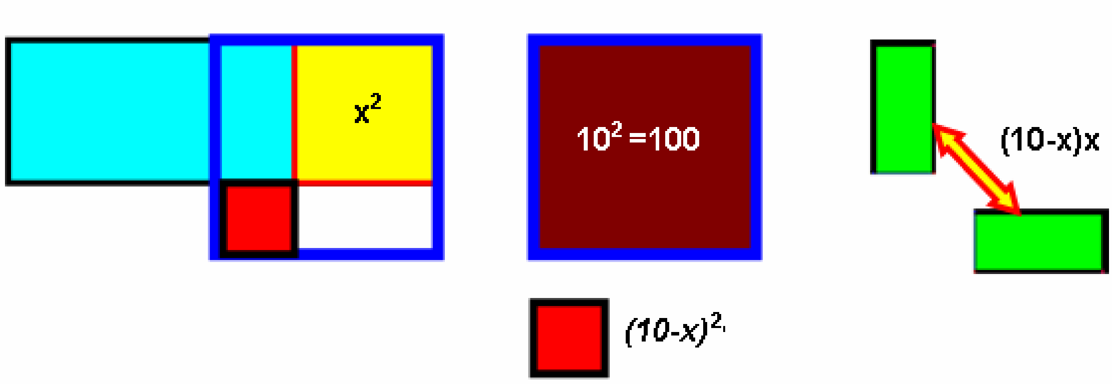
Fíjese en éste un cuadrado de lado x, se obtiene el rectángulo de área $20 \cdot x - x^2$



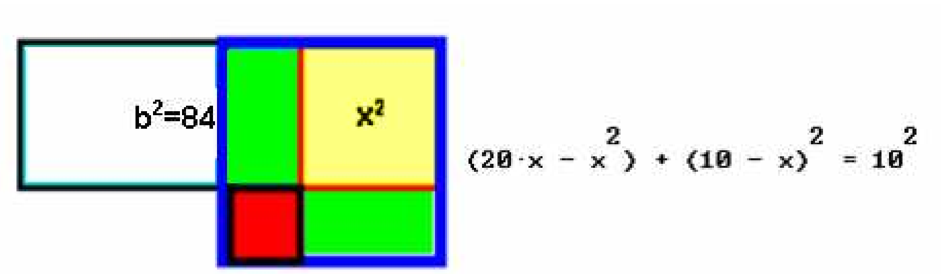
Trácese un segmento que divida en dos partes iguales al rectángulo de área $20 \cdot x$; es decir la mediatriz, se obtiene dos segmentos de 10 unidades.



Se construye el cuadrado de lado 10 unidades, que está compuesto por dos rectángulos de igual área $(10-x)\cdot x$ y dos cuadrados, uno de área x^2 y el otro de área $(10-x)^2$, así:



Súmese el área del cuadrado $(10-x)^2$ con 84; que es el área del rectángulo b^2, se obtiene el área del cuadrado de lado 10.



Lo cual equivale a: $84+(10-x)^2=100$

Donde: $(10-x)^2=16$

En consecuencia; $10-x=4$

$x=6$

Por consiguiente:

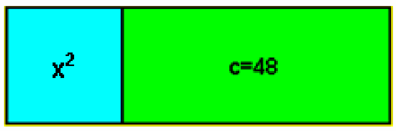
$$20\cdot x - x^2 = 84$$
$$\left(20\cdot x - x^2\right) + (10-x)^2 = 10^2$$
$$84 + (10-x)^2 = 100$$
$$(10-x)^2 = 16$$
$$10 - x = 4$$
$$x = 6$$

Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 5. Para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + c = a\cdot x$, utilizando la proposición 5; A manera de ejemplo, se explicara en que consiste el método.

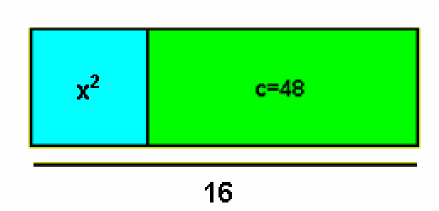
Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 + 48 = 16\cdot x$, utilizando la proposición 5 se tiene:

Dibújese un cuadrado de lado x y un rectángulo de área 48 unidades cuadradas, de tal manera que uno de los lados sea x, como se observa en la figura:

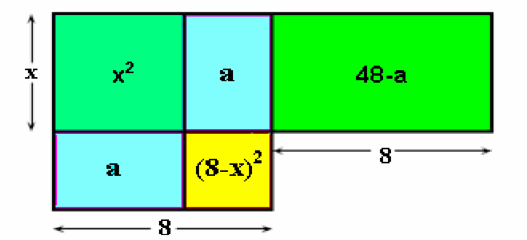


El rectángulo compuesto por $x^2 + 48$ tiene como área $16\cdot x$, como se ve en la ecuación original; por lo tanto, el otro lado del rectángulo tiene como longitud 16 unidades:



Trácese un segmento que divida en dos partes iguales al rectángulo de área $16\cdot x$; es decir, la mediatriz del segmento cuya longitud es 16 unidades. Se obtienen dos casos, que x sea más pequeño o igual a 8 (la mitad del segmento de 16 unidades) o que x sea mayor que 8.

En el primer caso, para encontrar el valor de x, se completa un cuadrado de lado 8 que incluya al cuadrado de lado x, así:



Este cuadrado esta compuesto por dos rectángulos de igual área a y por dos cuadrados, uno de área x^2 y el otro de área $(8-x)^2$, al sumar las áreas de este último con 48 que es el área del rectángulo c, se obtiene el área del cuadrado de lado 8, de tal manera que:

$$\begin{aligned}
&x^2 + a = 48 - a \\
&(x^2 + a) + a = 48 \\
&(8-x)^2 + 48 = 8^2 \\
&x = 4
\end{aligned}$$

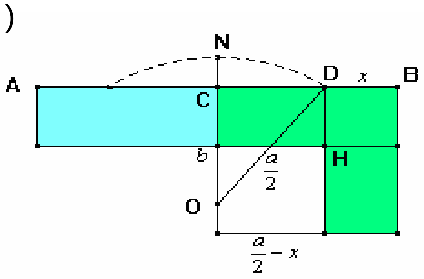
El teorema establece una igualdad de áreas entre el rectángulo $AKHD$ y el gnomon NOP que permite establecer algunas identidades algebraicas; por ejemplo, si $AD = a$ y $DB = b$; el teorema puede leerse como:

$$a \cdot b + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Esta identidad se escribe como $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right) = a \cdot b$, expresión que seguramente utilizaron los Pitagóricos y Platón para encontrar tríadas pitagóricas pues es suficiente hacer que $a = n^2$ y $b = 1$ pensando en que el rectángulo $a \cdot b$ se corresponde con un cuadrado de igual área y con ello se encuentra que $\left(\frac{n^2+1}{2}\right) + \left(\frac{n^2-1}{2}\right) = n^2$ o si $a = 2 \cdot n^2$ y $b = 2$ se encuentra que $(n^2+1)^2 - (n^2-1) = (2 \cdot n)^2$; expresiones que entregan ternas pitagóricas para naturales impares y pares respectivamente.

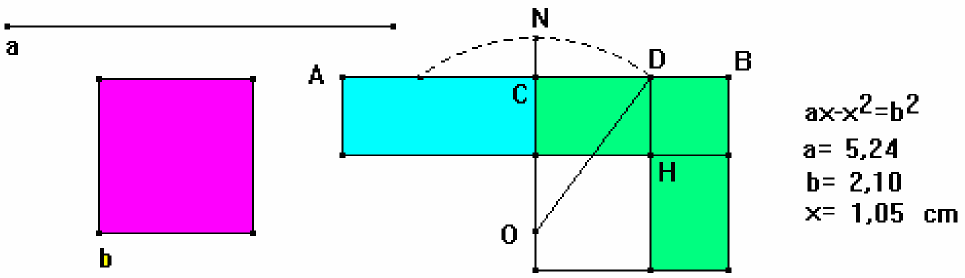
Otra mirada al teorema permite establecer la identidad $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$ y en efecto; si llamamos $AC = CB = a$ y $CD = b$, lo que demuestra la proposición 5 es que $(a+b) \times (a-b) + b^2 = a^2$, expresión que justamente es la diferencia de cuadrados mencionada arriba.

Ahora bien, al suponer que $AB = a$ y $DB = x$; el teorema 5 asevera que $a \cdot x - x^2$, es igual al rectángulo $AKHD$ e igual al gnomon NOP; de este modo, dada el área del rectángulo $AKHD$ o del gnomon NOP, dígase b^2 y dada la longitud del segmento $AB = a$, el problema de resolver la ecuación $a \cdot x - x^2 = b^2$ se ubica en un contexto geométrico: (Sobre una línea dada a constrúyase un rectángulo igual a un cuadrado dado b^2 menor que la mitad de la longitud de a)



La solución del problema parte del trazo de la mediatriz al segmento $AB = a$ desde donde se traza $CO = b$ que es el lado dado del cuadrado b^2; con centro en O y radio $\frac{a}{2}$ se traza una circunferencia para ubicar el punto D. La longitud $DB = x$ es una de las soluciones de la ecuación $a \cdot x - x^2 = b^2$ ya que de acuerdo al teorema en estudio se tiene que: $(a-x)\cdot x + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (1)

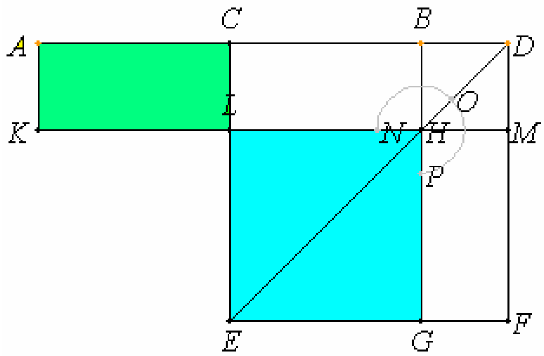
Además, en el triángulo rectángulo DCO se cumple la relación pitagórica: $b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (2); Y al restar a miembros las expresiones (1) y (2) se consigue $(a-x)\cdot x - b^2 = 0$ o lo que es lo mismo $a \cdot x - x^2 = b^2$.



El dibujo corresponde al archivo P5 elaborado en Cabrí II (Anexo A) sobre el que se puede cambiar a voluntad los valores de a y de b y obteniendo de manera inmediata el cambio en el valor de la raíz x. Sobre la construcción, se deduce que $b \leq \frac{a}{2}$ para obtener raíces reales, condición que también se infiere desde el cálculo del discriminante de la ecuación original.

4.7.6. Proposición 6. Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta; el rectángulo comprendido por la recta entera con la recta añadida y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida.

Figura 30. Proposición 6



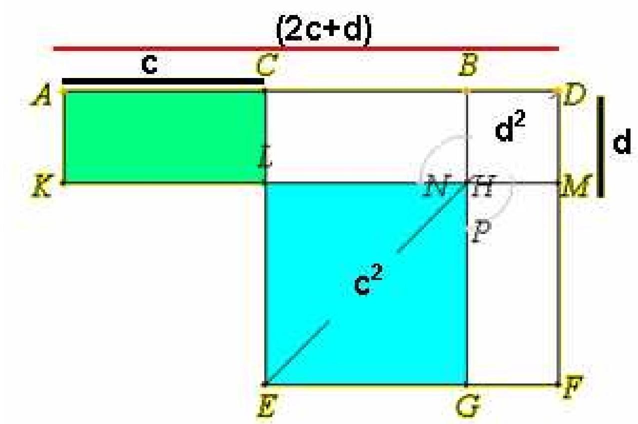
□

Divídase la recta AB en dos partes iguales por el punto C y prolónguese hasta D, constrúyase el cuadrado $CEFD$ sobre la recta CD; trácese la diagonal DE; por el punto B trácese la BG paralela a las CE y DF, por el punto de intersección H trácese la KM paralela a AB y EF; y por el punto A la AK paralela a las CL y DM.

Puesto que AC es igual a CB, también los rectángulos $AKLC$ y $CLHB$, y como $CLHB$ es igual al rectángulo $HGFM$, el rectángulo $AKLC$ será igual al rectángulo $HGFM$, si se añade el rectángulo $CLMD$, entonces el rectángulo $AKMD$ será equivalente al gnomon PON; pero el rectángulo $AKMD$ esta comprendido por las rectas AD y BD, ya que DM es igual a BD, luego también el gnomon PON será equivalente al rectángulo comprendido por AD y BD; y si se añade el rectángulo $LEGH$, que equivale al cuadrado de CB, el rectángulo comprendido por AD y BD mas el cuadrado de CB, equivale al gnomon PON y el cuadrado $LEGH$, pero el nomon y el cuadrado forman el cuadrado $CEFD$ que es el construido sobre CD.

∎

4.7.6.1. Proposición 6, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrara una secuencia lógica, donde, $\overline{AC}=\overline{CB}=c$ y $\overline{BD}=d$, para enunciarlas como una identidad algebraica:



$\left(2\cdot\overline{AC}+\overline{BD}\right)\times\left(\overline{BD}\right)+\left(\overline{CB}\right)^2=\left(\overline{CB}+\overline{BD}\right)^2$, remplazando se tiene:

$(2\cdot c+d)\cdot d+c^2=(c+d)^2$

4.7.6.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 6. Es decir que, para resolver la ecuación de segundo grado $ax+x^2=b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, se determina un segmento $AB=a$ y se construye, por una parte, rectángulo $AKHB$ de área $a\cdot x$, y de otra, por la prolongación del segmento AB el rectángulo $AKMD$ de área $a\cdot x+x^2$, que exceda al rectángulo anterior en un cuadrado de área x^2, y que es igual al área de un cuadrado de lado b, es decir, $ax+x^2=b^2$. Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $\left(\frac{a}{2}\right)$, $LEGH$ y con el rectángulo de la dos x y $\left(\frac{a}{2}\right)$, $HGFM$.

En nuestra notación se tiene:

$$ax + x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

$$b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

$$\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2}$$

$$\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + x$$

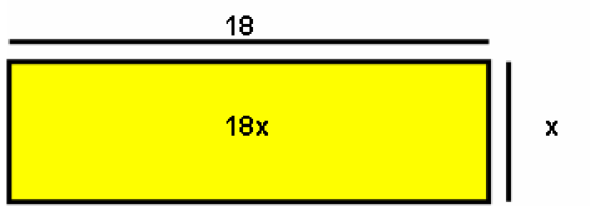
$$x = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Que permite solucionar la ecuación $ax + x^2 = b^2$.

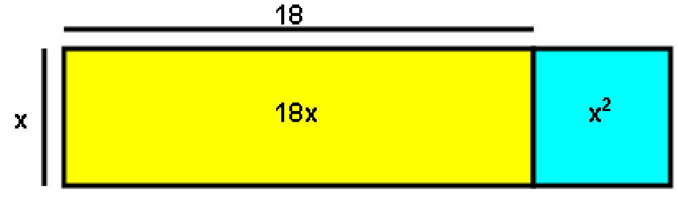
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $18 \cdot x + x^2 = 63$, se realiza el siguiente procedimiento:

Dibújese, un rectángulo de área $18 \cdot x$,

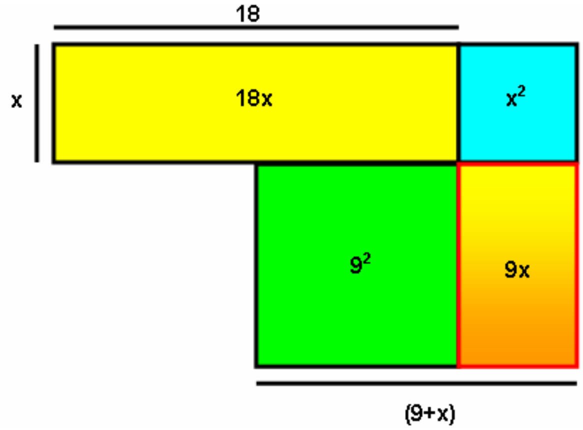


De otra parte, el cuadrado de lado x;



Se obtiene $18 \cdot x + x^2 = 63$,

Complétese la figura con un cuadrado de lado 9; y con el rectángulo de área $9 \cdot x$;



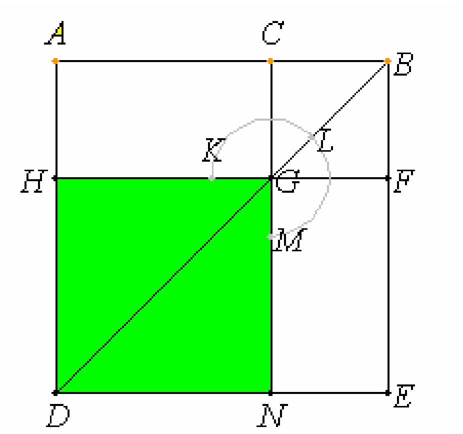
Se obtiene la ecuación $18\cdot x+x^2+9^2=(9+x)^2$; que equivale a la ecuación: $63+81=(9+x)^2$.

Donde:

$$144=(9+x)^2$$
$$12=9+x$$
$$3=x$$

4.7.7. Proposición 7. Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la recta entera y el segmento conocido más el cuadrado del segmento restante.

Figura 31. Proposición 7



□

Divídase al azar la recta AB por el punto C; constrúyase el cuadrado $ADEB$ sobre AB; trácese la diagonal BD; por el punto C, trácese la CN paralela a las AD y BE; por el punto de intersección G la HF paralela a las AB y DE.

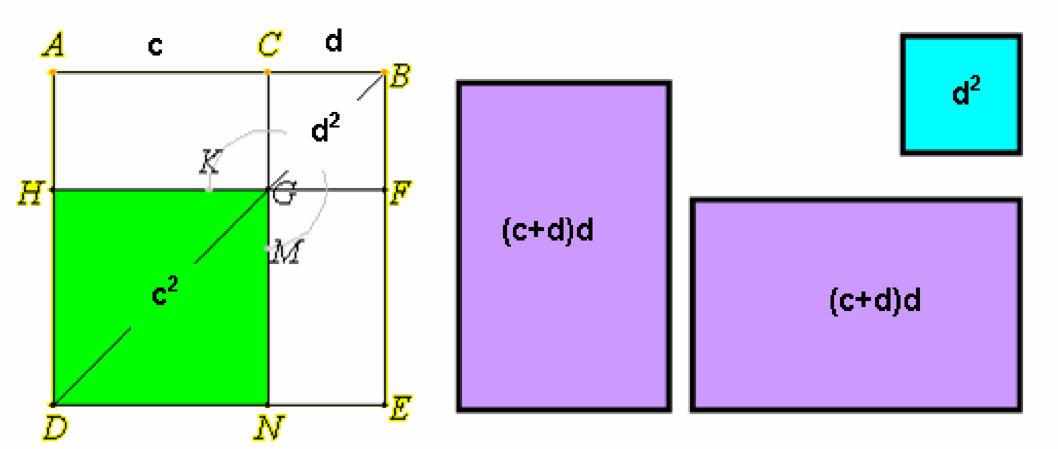
Puesto que los complementos $AHGC$ y $GNEF$ son iguales, añádase el $HDNG$ de AC común, entonces el rectángulo $ADNC$ es igual a $FHDE$; añádase el $CGFB$ sobre CB;

pero el gnomon MLK y dos veces el cuadrado $HDNG$ común, forman el cuadrado $ADEB$, que es el construido sobre AB mas el cuadrado común $HDNG$ de AC; luego el cuadrado construido sobre AB mas el cuadrado de AC equivale a dos veces el rectángulo comprendido por las rectas AC y CB añadido al cuadrado $CGFB$ sobre CB. “Si a cantidades iguales se suman otras también iguales, los totales serán iguales”.

∎

4.7.7.1. Proposición 7, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrara una secuencia lógica, para representarla como una identidad algebraica;

Si $\overline{AC} = c$ y $\overline{CB} = d$, entonces:



$\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 = 2\times\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)\times\left(\overline{AC}\right)+\left(\overline{CB}\right)^2$, reemplazando se tiene:

$(c+d)^2 + c^2 = 2\cdot(c+d)\cdot c + d^2$

4.7.7.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 7. Para resolver ecuaciones de segundo grado $x^2 + a\cdot x = b^2$, la aplicación de la proposición 7 equivale a lo siguiente; sobre la recta AB se determina un segmento $AB = \left(x+\frac{a}{2}\right)$, y se construye, por una parte de la recta, el cuadrado $BFGC$ de lado x, y el rectángulo $HENG$ de área $x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$, y de otra, por el segmento $CA = \left(\frac{a}{2}\right)$, el rectángulo $CGHA$ de área $x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$ se obtiene $x^2 + 2\cdot x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$ que es igual al área de un cuadrado de lado b. Es decir: $x^2 + a\cdot x = b^2$.

Completando ahora la figura con dos cuadrados de lado $\left(\frac{a}{2}\right)$, $GNDH$; se deduce del uso de la proposición 7 que los rectángulos $CNDA$ y $FEDH$ de áreas $\left(x+\frac{a}{2}\right)\cdot x$ más el cuadrado $BFGC$ de lado x, es igual al cuadrado $BEDA$ de área $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$, añadido a $GNDH$ de lado $\left(\frac{a}{2}\right)$.

En nuestra notación se tiene:

$$x^2+2\cdot x\cdot\left(\frac{a}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}=x+\frac{a}{2}$$

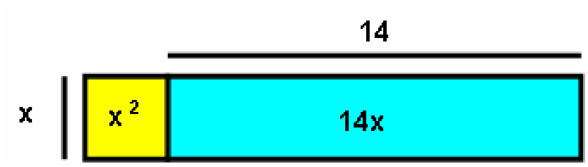
$$x=\sqrt{\left(b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}-\left(\frac{a}{2}\right)$$

Que resuelve la ecuación $x^2+a\cdot x=b^2$.

Ejemplo:

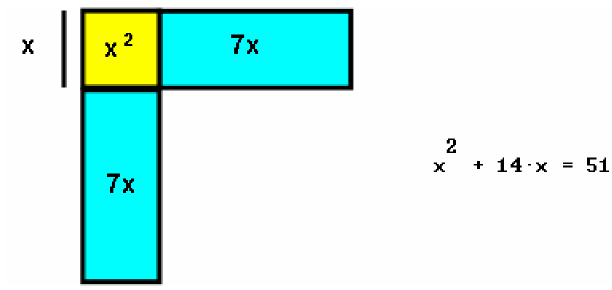
Para resolver la ecuación $x^2+14\cdot x=51$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 7.

Dibújese un cuadrado de lado x, y un rectángulo de área $14\cdot x$.

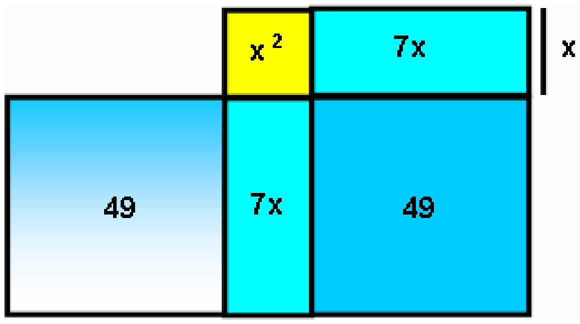


Se obtiene $x^2+14\cdot x=51$

Se cambia la figura por otra equivalente en área, de esta manera, se divide el rectángulo de área $14\cdot x$ en dos rectángulos de área $7\cdot x$, y se los ubica adyacentemente, así:



Complétese la figura con dos cuadrados de lado 7,



Es decir: $51 + 2 \cdot 49 = (x+7)^2 + 49$.

“Si se resta cantidades iguales de otras iguales, los residuos serán iguales”

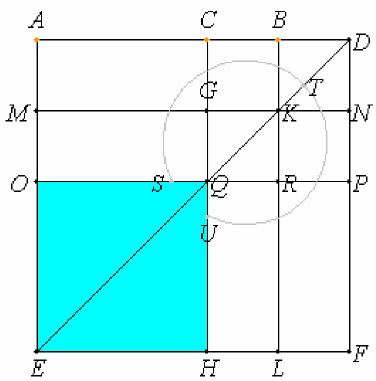
De esta manera: $100 = (x+7)^2$

$$10 = x + 7$$

$$3 = x$$

4.7.8. Proposición 8. Si se corta al azar una línea recta, cuatro veces el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos junto con el cuadrado del segmento que queda es igual al cuadrado construido a partir de la recta entera y del segmento ya conocido, tomados como una sola recta.

Figura 32. Proposición 8



□

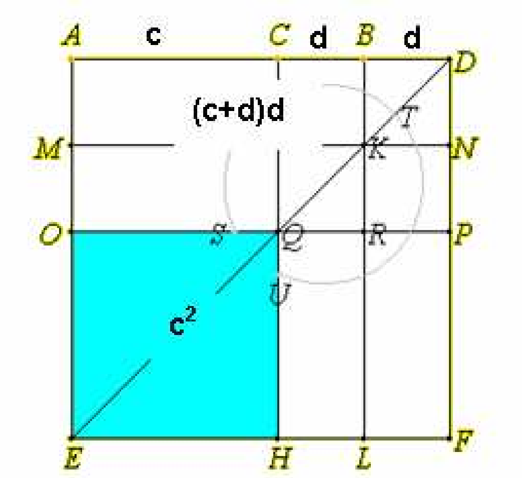
Divídase la recta AB en el punto C, prolónguese hasta el punto D de tal manera que $BD = CB$, constrúyase el cuadrado $AEFD$ sobre AD, trácese la diagonal DE; por el punto C y el punto B trácese las rectas CH y BL respectivamente paralelas a AE y DF; por el punto K la recta MN paralela a AB y EF, y por el punto Q la OP paralela a AB y EF.

Puesto que los complementos $AMKB$ y $KLFN$, más los complementos $MOQF$, y $QHLR$, que son iguales, añadidos los cuadrados $GQRK$ y $BKND$ construidos a partir de CD, será equivalente a cuatro veces el rectángulo comprendido por las rectas AB y CB, pero los complementos $AMKB$ y $KLFN$ mas $MOQF$ y $QHLR$ añadidos a los cuadrados $GQRK$ y $BKND$ equivalen al los complementos $AOQC$ y $QHFP$ que son iguales, mas el paralelogramo $CQPD$ de CD que equivale al gnomon UTS, añádase ahora el cuadrado $OEHQ$ de AC; Pero el gnomon UTS y el cuadrado $OEHQ$ de AC forman el cuadrado $AEFD$ que es construido a partir de AD. Con la premisa "el todo es igual a la suma de sus partes"

∎

4.7.8.1. Proposición 8, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrara una secuencia lógica; de tal manera que la se pueda brindarla algebraicamente.

Si $\overline{AC} = c$ y $\overline{CB} = d$,



$4\times\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)\times\left(\overline{CB}\right)+\left(\overline{AC}\right)^2 = \left[\left(\overline{AC}+\overline{CB}\right)+\left(\overline{DB}\right)\right]^2$, como $\overline{BD} = \overline{CB}$ se tiene:

$4\cdot(c+d)\cdot d + c^2 = [(c+d)+d]^2$

4.7.8.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 8. Para resolver ecuaciones $x^2 + ax = b^2$, la aplicación de la proposición equivale a lo siguiente: sobre la recta AB se determina un segmento $AB = \left(x + \frac{a}{4}\right)$; y se construye, por $AC = x$ los rectángulos $AHGC$ y $HOQG$ de áreas $x\cdot\left(\frac{a}{4}\right)$, y el cuadrado $OEHQ$ de lado x; se obtiene $AEHC$ de área $x^2 + 2\cdot x\cdot\left(\frac{a}{4}\right)$, además por el segmento CB el rectángulo $QHLR$ de área $x\cdot\left(\frac{a}{4}\right)$, y de otra, por la prolongación del segmento AB, que es

$BD = CB = \left(\frac{a}{4}\right)$, el rectángulo $RLFP$ de área $x \cdot \left(\frac{a}{4}\right)$, de esto se obtiene $x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(\frac{a}{4}\right) + 2 \cdot x \cdot \left(\frac{a}{4}\right) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{a}{4}\right)$, que es igual área de un cuadrado de lado b, es decir: $x^2 + ax = b^2$.

Completando ahora la figura con los cuadrados $GQRK, KRPN, CGKB, BKND$, de área $\left(\frac{a}{4}\right)$ y con el cuadrado $AEFD$ de lado $x + 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right) = x + \left(\frac{a}{2}\right)$, se deduce del uso de la proposición 8, que el cuadrado $OEHQ$ de lado x, mas los rectángulos $AHGC, HOQG, QHLR, RLFP$, de áreas $x \cdot \left(\frac{a}{4}\right)$, añadidos a los cuadrados $CGKB, GQRK, KRPN, BKNP$, que forman $4 \cdot \left(x + \frac{a}{4}\right) - \left(\frac{a}{4}\right)$, equivalentes al cuadrado $AEFD$ de lado $x + \left(\frac{a}{2}\right)$.

En nuestra notación se tiene:

$$x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{a}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \left(x + 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)\right)^2$$

$$b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \left(x + \left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

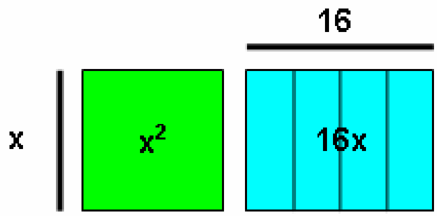
$$x = \sqrt{b^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2} - \left(\frac{a}{2}\right)$$

Que permite solucionar la ecuación dada: $x^2 + ax = b^2$.

Ejemplo:

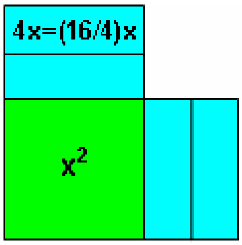
Para solucionar la ecuación $x^2 + 16 \cdot x = 192$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 8.

Dibújese un cuadrado de lado x, y un rectángulo de área $a \cdot x = 16 \cdot x$ que este dividido en 4 áreas de $x \cdot \left(\frac{16}{4}\right)$, así:



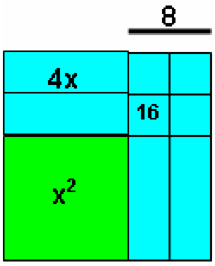
$$x^2 + 16 \cdot x = 192$$

Luego, se cambia la figura por otra, con igual área en forma adyacente; así:



$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{16}{4} \cdot x \right) = 192$$

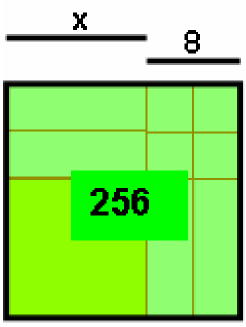
Complétese el cuadrado, agregando cuatro cuadrados de lado $\left(\frac{a}{4}\right) = \left(\frac{16}{4}\right) = 4$, de la siguiente manera:



$$x^2 + 4 \cdot \frac{16}{4} \cdot x + 4 \cdot \left(\frac{16}{4} \right)^2 = \left(x + 2 \cdot \frac{16}{4} \right)^2$$

$$192 + 4 \cdot 16 = (x + 2 \cdot 4)^2$$

En consecuencia;



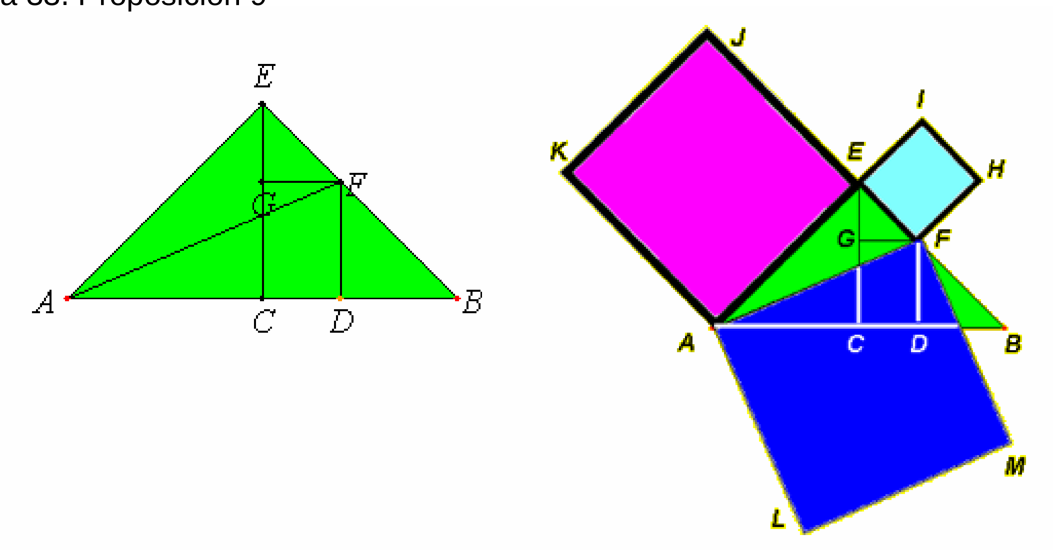
$$256 = (x + 8)^2$$

$$16 = x + 8$$

Luego $x = 8$.

4.7.9. Proposición 9. Si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la recta entera es el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la recta situada entre los puntos de sección.

Figura 33. Proposición 9



□

Divídase la recta AB en partes iguales por el punto C y en partes desiguales por el punto D, trácese por C la recta CE perpendicular a AB, de manera que CE sea igual a AC y CB; trácese la AE y BE; por el punto D la recta $DF = DB$ paralela a CE; por el punto de intersección F la FG paralela a AB e igual a CD; ahora trácese la AF .

Por el teorema de Pitágoras, la suma de las áreas de los cuadrados $KAEJ$ sobre AE y $EFHI$ sobre EF equivale al área del cuadrado $ALMF$ sobre AF , entonces:

$$(AD)^2 + (DF)^2 = (AF)^2 \text{, además}$$
$$(AC)^2 + (CE)^2 = (AE)^2 \text{, por consiguiente:}$$
$$(GF)^2 + (GE)^2 = (EF)^2$$

Luego: $(AE)^2 + (EF)^2 = (AF)^2$

De esta manera los cuadrados de los segmentos desiguales AD y DB, equivalen al cuadrado de AF , además los cuadrados de los segmentos iguales AC y CB, equivalen al cuadrado de AE y los cuadrados de sección del segmento CD equivalen al cuadrado de EF; el cuadrado de AE más el cuadrado de EF equivalen al cuadrado de AF y por consiguiente el cuadrado de AD más el cuadrado de DB equivalen a dos veces el cuadrado de AC mas dos veces el cuadrado de CD.

■

4.7.9.1. Proposición 9, enunciada en nuestro sistema notacional. Sí $\overline{CD} = \overline{GF} = \overline{GE}, \overline{DB} = \overline{DF}, \overline{AC} = \overline{CE}, \overline{AD} = d, \overline{DB} = e$,

Se tiene; $\left(\overline{AD}\right)^2+\left(\overline{DF}\right)^2=\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{CE}\right)^2+\left(\overline{GF}\right)^2+\left(\overline{GE}\right)^2$,
Remplazando en la ecuación:

$$\left(\overline{AD}\right)^2+\left(\overline{DB}\right)^2=\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{CD}\right)^2+\left(\overline{CD}\right)^2$$

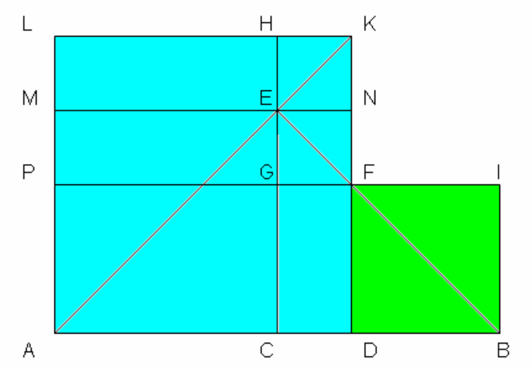
$$\left(\overline{AD}\right)^2+\left(\overline{DB}\right)^2=2\times\left(\overline{AC}\right)^2+2\times\left(\overline{CD}\right)^2 \text{ Es decir:}$$

$$d^2+e^2=2\cdot\left(\frac{d+e}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{d+e}{2}-e\right)^2$$

$$\text{Luego: } d^2+e^2=2\cdot\left[\left(\frac{d+e}{2}\right)^2+\left(\frac{d+e}{2}-e\right)^2\right]$$

- Otra forma para demostrarla:

Figura 34. Proposición 9-2

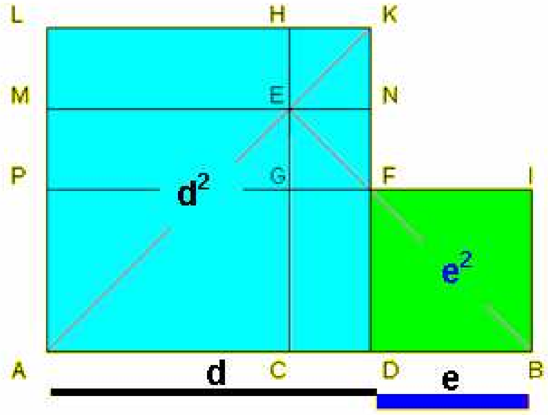


Divídase la recta AB en partes iguales por el punto C y en parte desiguales por el punto D. Constrúyase los cuadrados $ADKL$ sobre AD y el cuadrado $DBIF$ sobre DB; trácese la diagonal KA; por el punto C la CH paralela a las AL y DK; luego por el punto de intersección E la MN paralela a las AB y LK. Trácese la diagonal EB, por el punto de intersección F la PF paralela a las AB y LK.

Puesto que $ACGP$ es equivalente a $BCGI$, porque $AC=CB$; constrúyase el rectángulo $PGEM$ construido a partir de AC y CD, y el cuadrado $EGFN$ que es igual al cuadrado de CD, luego el rectángulo $LMEH$ construido a partir de AC y CD es equivalente al rectángulo $MPGE$, de esta manera el cuadrado $HENK$ que es igual al cuadrado de CD es equivalente a $EGFN$.

Luego el rectángulo $ACGP$ mas el rectángulo $MPGE$ añadido al cuadrado $EGFN$ es equivalente al rectángulo $BCGI$ más $LMEH$ añadido a $HENK$ el cual es igual al cuadrado de CD. Entonces el cuadrado $ADKL$ añadido al cuadrado $BDFI$ es equivalente a dos veces el cuadrado de $AC=ACEM$ añadido al cuadrado de $CD=EGFN$. ∎

4.7.9.2. Proposición 9, enunciada en nuestro sistema notacional. Si $\overline{AD}=d$ y $\overline{DB}=e$, con $\overline{AD}+\overline{DB}=(d+e)$AD+DB= (d+e); se tiene:



$$\left(\overline{AD}\right)^2+\left(\overline{DB}\right)^2=2\times\left[\left(\frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{2}-\overline{DB}\right)^2\right],$$ remplazando se obtiene:

$$d^2+e^2=2\cdot\left[\left(\frac{d+e}{2}\right)^2+\left(\frac{d+e}{2}-e\right)^2\right]$$

4.7.9.3. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 9. Para resolver la ecuación $x^2=a^2+b^2$, constrúyase un cuadrado de lado $AD=a$ y el cuadrado de lado $DF=b$, se obtiene a^2+b^2 que sea igual al área de un cuadrado de lado x.

Completando ahora la figura, con el cuadrado de área $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $AEJK$; y otro cuadrado de área $\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$, $EFHI$.

En nuestra notación se tiene:

$$x^2=a^2+b^2$$

$$a^2+b^2=2\times\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]$$

$$x^2=2\times\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]...$$

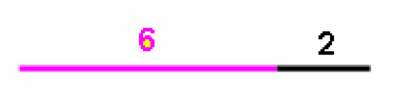
$$...x=\sqrt{a^2+b^2}$$

Que permite solucionar la ecuación: $x^2=a^2+b^2$.

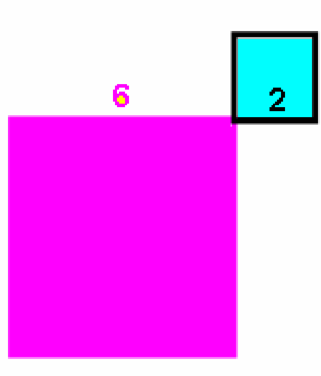
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $x^2 = 6^2 + 2^2$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 9.

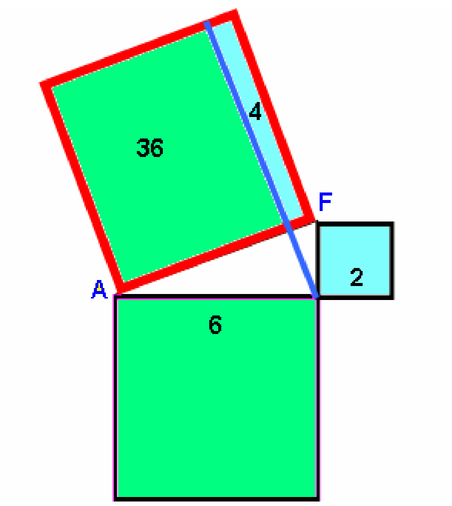
Trácese un segmento de longitud 6 y otro de forma adyacente a este de longitud 2. Así:



Constrúyase un cuadrado de lado 6, y un cuadrado de lado 2



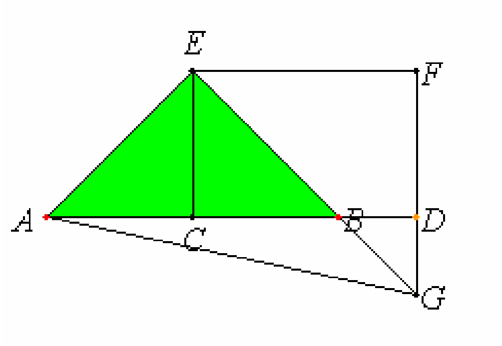
Se traza la diagonal; y sobre esta se construye un cuadrado, por el vértice del ángulo recto, y se traza una paralela a los lados del cuadrado construido, como muestra la figura;



En consecuencia el valor de $x = \sqrt{40}$. Que es igual al segmento AF.

4.7.10. Proposición 10. Si una línea recta se divide en dos partes iguales y se le añade, en línea recta, otra recta; el cuadrado de la recta entera con la recta añadida y el cuadrado de la añadida, tomados conjuntamente, son el doble del cuadrado de la mitad y el cuadrado construido a partir de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida, tomadas como una sola recta.

Figura 35. Proposición 10



□

Divídase la recta AB en partes iguales por el punto C y prolónguese hasta D. Trácese por C la CE perpendicular a AB e igual a las AC y CB; por el punto E la $EF = CD$ paralela a AB; por el punto F la FG paralela a EC; trácese la AE, EG y AG.

Por el teorema de Pitágoras el cuadrado de AC mas el cuadrado de CE, que es igual a CB, es equivalente al cuadrado de AE; el cuadrado de AD mas el cuadrado de $DG = BD$ será equivalente al cuadrado de AG, y el cuadrado de EF mas el cuadrado de FG equivale al cuadrado de EG, ya que EF y FG son iguales a CD. Por Pitágoras el área del cuadrado de la recta entera con la recta añadida AD más el cuadrado de la añadida DG es igual al doble del cuadrado de la mitad AC y el cuadrado construido a partir de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida CD.

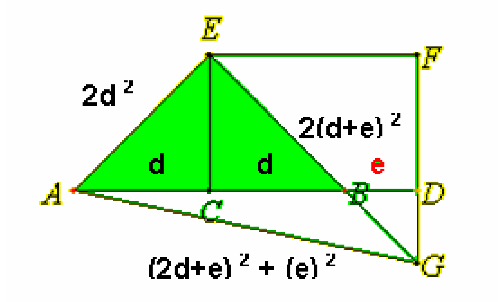
■

4.7.10.1. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 10. Se mostrará una secuencia lógica para brindarla algebraicamente, así:

Si $\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CE} = d, \overline{BD} = \overline{DG} = e, \overline{EF} = \overline{CD} = \overline{FG},$ entonces:

$$\left(\overline{AB} + \overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DG}\right)^2 = \left[\left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{CE}\right)^2 + \left(\overline{EF}\right)^2 + \left(\overline{FG}\right)^2\right],$$ remplazando tenemos:

$$\left(\overline{AB} + \overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 = \left[\left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{CD}\right)^2 + \left(\overline{CD}\right)^2\right],$$ luego:



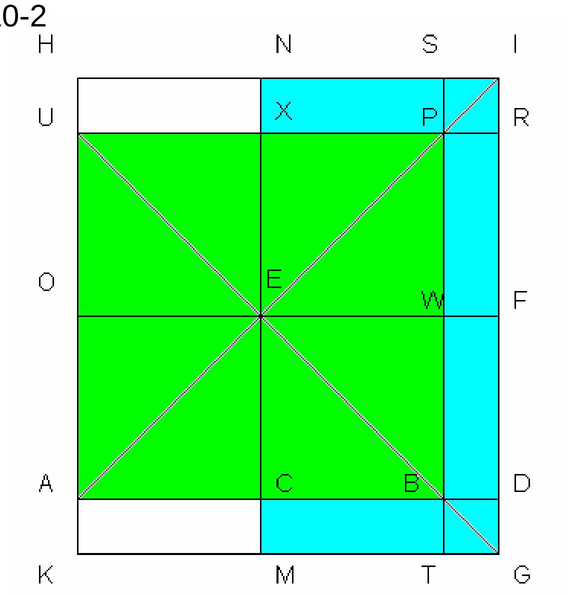
$$\left(\overline{AB} + \overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 = \left[2 \times \left(\overline{AC}\right)^2 + 2 \times \left(\overline{CD}\right)^2\right],$$

De donde: $(2 \cdot d + e)^2 + e^2 = 2 \cdot d^2 + 2 \cdot (d + e)^2$

$$(2 \cdot d + e)^2 + e^2 = 2 \cdot \left[d^2 + (d + e)^2\right]$$

- Otra demostración es:

Figura 36. Proposición 10-2



□

Divídase la recta AB en dos partes iguales por el punto C y prolónguese hasta D, constrúyase sobre la recta AD el cuadrado $ADIH$; trácese la diagonal AI; constrúyase el rectángulo comprendido por AD y DB, que es $KGDA$; por el punto B la TS paralela a las IG y HK; por el punto P la UR paralela a las AD y HI; por el punto E la OF paralela a las AD y HI; trácese la UG.

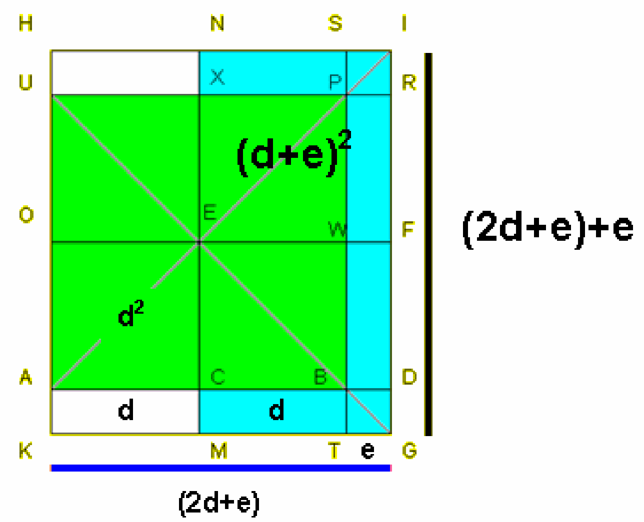
Puesto que AC es igual a CB, también el cuadrado $ACEO$ es igual al cuadrado $CEWB$ y como este es igual a $OUXE$ entonces el cuadrado $ACEO$ será igual al cuadrado $OEXU$; como el rectángulo $MTBC$ comprendido por CB y BD es igual al rectángulo $UXNH$ entonces los rectángulos $MTBC$ también será igual al rectángulo $UXNH$ comprendido por las rectas CB y BD; como MG es igual a EF; el cuadrado $MGFE$ construido sobre $MG = CD$, es equivalente al cuadrado $EFIN$ construido cobre $EF = CD$. Entonces el cuadrado $ADIH$ construido sobre AD mas el cuadrado $TGDB$ construido sobre BD, será equivalente a los cuadrados $ACEO$ construido sobre AC y $OEXU$ construido sobre $OE = AC$; añadido a los cuadrados $MGFE$ más $EFIN$.

∎

4.7.10.2. Proposición 10, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrará una secuencia lógica, para brindarla como una identidad algebraica;

Si $\overline{AC} = \overline{CB} = d, \overline{BD} = e$, entonces:

.



$\left(\overline{AB} + \overline{BD}\right)^2 + (BD)^2 = 2\times\left[\left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AC} + \overline{BD}\right)^2\right]$, remplazando se tiene
$(2\cdot d + e)^2 + e^2 = 2\cdot\left[d^2 + (d+e)^2\right]$

4.7.10.3. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 10. La propocision muestra como obtener un cuadrado cuya área sea igual a la suma de los cuadrados dados, es decir como hallar un x tal que $x^2 = (2\cdot a + b)^2 + b^2$, siendo asi otro ejemplo de álgebra geometrica.

Para resolver la ecuación $x^2 = (2\cdot a + b)^2 + b^2$, constrúyase, un cuadrado de lado $AD = (2\cdot a + b)$ y oto cuadrado de lado $BD = b$, obteniendo $(2\cdot a + b)^2 + b^2$ que es igual al área de un cuadrado de lado x.
Completando ahora la figura, con el cuadrado de área $a^2 + a^2$, $AEHK$; y otro cuadrado de área $(a+b)^2 + (a+b)^2$, $EGLM$.

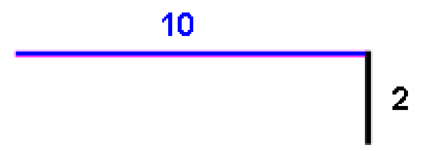
En nuestra notación se tiene:

$$x^2 = (2\cdot a + b)^2 + b^2$$
$$(2\cdot a + b)^2 + b^2 = 2\times\left[a^2 + (a+b)^2\right]$$
$$x^2 = 2\times\left[a^2 + (a+b)^2\right]..$$
$$...x = \sqrt{(2\cdot a + b)^2 + b^2}$$

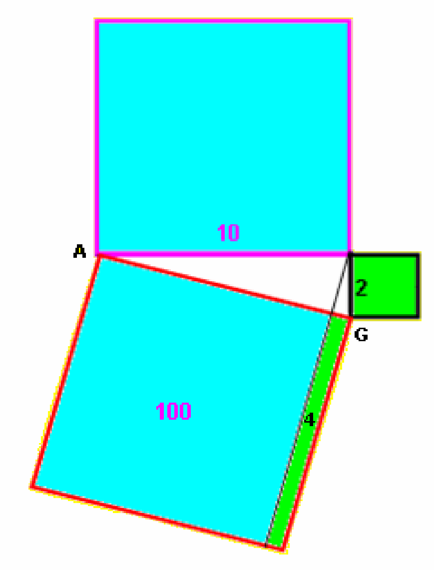
Que permite solucionar la ecuación: $x^2 = (2\cdot a + b)^2 + b^2$.

Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $x^2 = (2 \cdot 4 + 2)^2 + 4$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 10.
Trácese un segmento de longitud 10 y otro de forma adyacente a este de longitud 2. Así:



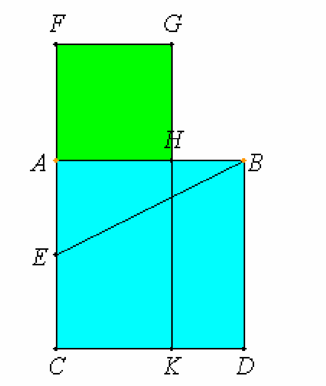
Constrúyase un cuadrado de lado 10, y un cuadrado de lado 2, Se traza la diagonal; y sobre esta construimos un cuadrado, por el vértice del ángulo recto, se traza una paralela a los lados del cuadrado construido, como muestra la figura;



En consecuencia el valor de $x = \sqrt{104}$. Que es igual al segmento AG.

4.7.11. Proposición 11. Dividir una recta de tal forma que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento que queda.

Figura 37. Proposición 11



La importancia histórica de la proposición 11 aparece en su reiterada aplicación en los espacios artísticos y en el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que se trata de la famosa *razón áurea,* problema que leído desde este contexto trata de *dividir un segmento en dos partes de modo que el todo es a la parte mayor como ésta es a la parte menor*.

Si $AB = a$ que es la longitud del segmento dado y si x representa la longitud de la parte mayor en que queda dividido el segmento; las condiciones del problema se contextualizan en la proporción $\left(\frac{a}{x}\right) = \left(\frac{x}{a-x}\right)$ que a su vez determina la ecuación cuadrática. $x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$

La construcción presentada por Euclides parte del cuadrado AD cuyo lado inicial es $AB = a$. Sobre AC se calcula el punto medio E y se traza la EB. Luego prolónguese CA hasta F de manera que EF sea igual a EB.

A continuación se construye el cuadrado $AHGF$ sobre AF. De este modo se encuentra el segmento $AH = x$ pues en concordancia con el teorema, el cuadrado $AHGF$ tiene igual área que el rectángulo $HKDB$; consecuencia del teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo BAE siendo $EB = EF = \left(\frac{a}{2} + x\right)$ y $AF = AH = x$ de donde $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$ y de aquí se sigue que $a^2 - a \cdot x = x^2$, es decir, $a \cdot (a - x) = x^2$, expresión que coincide con la ecuación original.

4.7.11.1. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 11. Para solucionar ecuaciones de segundo grado $a^2 - a \cdot x = x^2$, sobre la recta AB Se determina un segmento $AB = a$, sobre este constrúyase el cuadrado $ACDB$ de área a^2. Por el punto medio E del lado AC , trácese el segmento EB, por la aplicación del teorema de Pitágoras $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, trasladar la distancia EB hacia el lado AC de manera que los segmentos de lado $\frac{a}{2} + x$, $EB = EF$. Se construye el cuadrado $FAHG$ de lado x, fíjese el rectángulo de área $a^2 - a \cdot x$, que es igual a $(a - x) \cdot a$. Se obtiene $a^2 - a \cdot x = x^2$ Y en consecuencia el segmento $AF = x$ es la solución de la ecuación.

4.7.11.2. Proposición 11, enunciada en nuestro sistema notacional. A continuación se mostrará una secuencia lógica, para brindarla como una identidad algebraica, asi:

.

$$a \cdot (a - x) = x^2$$

$$a^2 - a \cdot x = x^2$$

$$x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$$

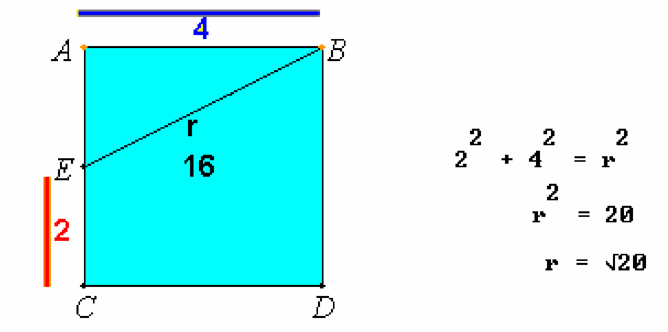
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Que permite solucionar la ecuación dada: $a^2 - a \cdot x = x^2$.

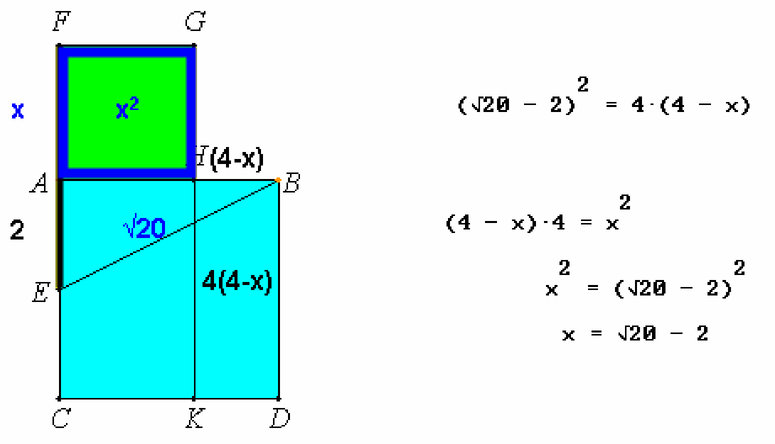
Ejemplo:

Para resolver la ecuación $16 - 4 \cdot x = x^2$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 11.

Dibújese un cuadrado de lado 4, y por el punto medio E de un lado de este, trazamos el segmento de longitud $r = 2 + x$ a cualquier vértice opuesto B o D.



Trasladar la distancia $\sqrt{20}$ hacia el lado AC de manera que los segmentos $EF = 2 + x = \sqrt{20}$. Construimos el cuadrado $FAHG$ de lado x, fíjese el rectángulo de área $16 \ - 4 \cdot x$, que es igual a $(4 - x) \cdot 4$. Se obtiene $16 \ - 4 \cdot x = x^2$



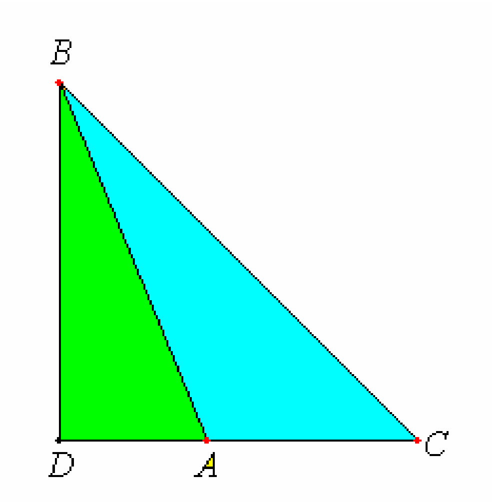
En consecuencia el segmento $AF = \sqrt{20} - 2$ es la solución de la ecuación.

En nuestra notación se tiene:

$$(4-x)\cdot 4 = x^2$$
$$16-4\cdot x = x^2$$
$$x^2+4\cdot x-16=0$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+64}}{2}$$
$$x_1=-2\cdot\sqrt{5}-2$$
$$x_2=2\cdot\sqrt{5}-2$$

4.7.12. Proposición 12. En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Figura 38. Proposición 12



Ésta proposición que se va ha analizar es el teorema del coseno en el caso del cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso.

□

En esta proposición Euclides utiliza el teorema de Pitágoras. Euclides parte del triángulo BAC obtusángulo en A y traza, a partir del punto B, la perpendicular DB al lado CA prolongado. La base del triángulo rectángulo se puede considerar cortada al azar por el punto A, luego; $\left(\overline{DC}\right)^2=\left(\overline{DA}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2+2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right)$.

Además si se añade a ambos miembros el cuadrado de DB, se tiene: $\left(\overline{DC}\right)^2+\left(\overline{DB}\right)^2=\left(\overline{DA}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2+2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right)+\left(\overline{DB}\right)^2$.

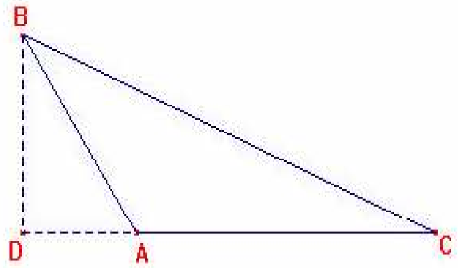
Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos BDA y BDC, el primer miembro de la igualdad anterior se convierte en $\left(\overline{CB}\right)^2$ y en el segundo miembro se pueden sustituir por

$\left(\overline{DA}\right)^2 + \left(\overline{DB}\right)^2$ por $\left(\overline{AB}\right)^2$, de lo que resulta el teorema, es decir: $\left(\overline{CB}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 + 2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right)$.

∎

- Otra demostración es:

Figura 39. Proposición 12-2



□

Constrúyase el triángulo obtusángulo BAC, trácese por B la BD perpendicular a AC y prolónguese la recta AC hasta D. Luego el triangulo BDC nos proporciona:

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2 \text{, luego}$$
$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DA}+\overline{AC}\right)^2,$$
$$\text{Entonces } \left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DA}\right)^2 + 2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}\right)^2,$$

Además el triángulo BDA, posee:

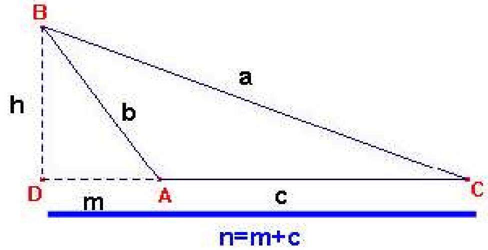
$$\left(\overline{BA}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DA}\right)^2,$$

Luego:

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DA}\right)^2 + 2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}\right)^2,$$
$$\text{Es decir: } \left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BA}\right)^2 + 2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}\right)^2$$

∎

4.7.12.1. Proposición 12, enunciada en nuestro sistema notacional. Para brindarla algebraicamente se hace. $\overline{BC} = a, \overline{BA} = b, \overline{AC} = c, \overline{BD} = h, \overline{DA} = m$; Y $\overline{DC} = n$, de la siguiente manera:



Sustituyendo se tiene:

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{BA}\right)^2 + 2\times\left(\overline{DA}\right)\times\left(\overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}\right)^2,$$
$$a^2 = b^2 + 2\cdot m\cdot c + c^2$$

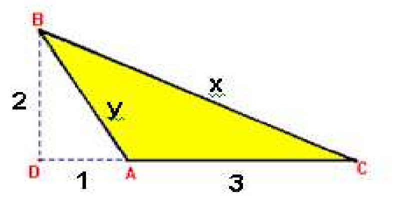
4.7.12.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 12. Para solucionar la ecuación de segundo grado $x^2 = y^2 + c^2 + 2\cdot m\cdot c$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: Constrúyase el triángulo BAC obtusángulo en A, por el segmento BC se construye un cuadrado $BCEF$, de lado x. Trácese, a partir del punto B, el segmento $DB = h$ perpendicular al lado $CA = c$ y prolónguese hasta D, el segmento $CA = c$, $AD = m$

Sobre el segmento DB constrúyase el cuadrado $DBGH$, de lado h, sobre el segmento $DC = m + c$ constrúyase el cuadrado $DKLC$, de área $(m+c)^2 = m^2 + 2\cdot(m\cdot c) + c^2$, se obtiene $x^2 = h^2 + m^2 + 2\cdot m\cdot c + c^2$, además el triángulo BDA, por el segmento BA constrúyase el cuadrado $AMNB$ de lado $y^2 = m^2 + h^2$. Luego el cuadrado $BCEF$ de area x^2, es equivalente al cuadrado $AMNB$ de area y^2, mas el cuadrado de lado c, mas dos veces el rectángulo de area $m\cdot c$.

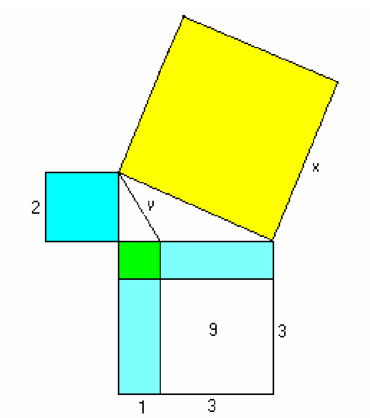
Ejemplo:

Para resolver la ecuación de segundo grado $x^2 = y^2 + 2\cdot(2\cdot 3) + 3^2$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 12.

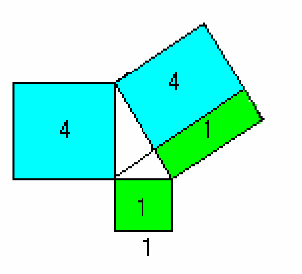
Dibújese el triangulo obtusángulo, de lados y,3 y x; respectivamente. Trácese el segmento perpendicular de longitud 2, y prolónguese el segmento de lado 3 en 1 hasta la perpendicular.



Constrúyase, el cuadrado sobre el lado del segmento de longitud 2, el cuadrado de área $(1+3)^2$; y el cuadrado de lado x.

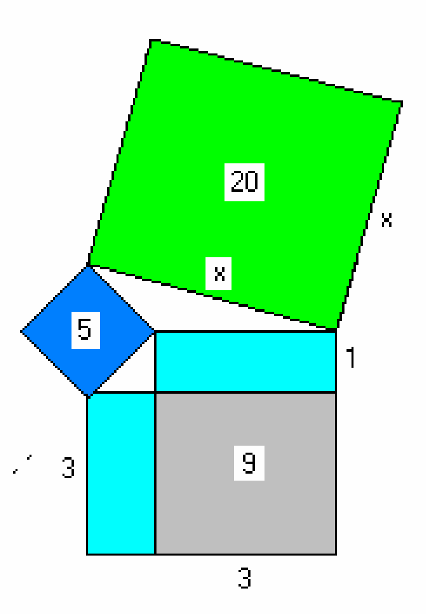


Se toma el triángulo rectángulo, el cuadrado de área 4 más el cuadrado de área 1, es igual al cuadrado de área $y^2 = 5$. Luego el lado $y = \sqrt{5}$.



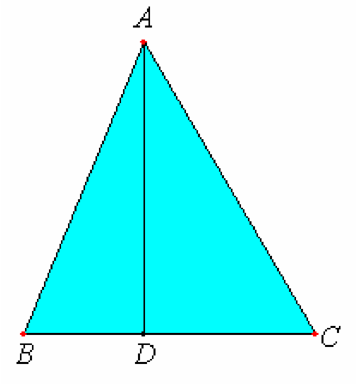
Por consiguiente, el cuadrado de área 5 más el cuadrado de área 9, más dos veces el cuadrado de área 3 es igual al cuadrado de área 20.

En consecuencia el segmento x tiene longitud $\sqrt{20}$.



4.7.13. Proposición 13. En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

Figura 40. Proposición 13



□

Construyase el triángulo acutángulo ABC, trácese la altura AD perpendicular a BC, luego el triángulo rectángulo ADC, nos proporciona:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2;$$

Luego: $\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{BC} - \overline{BD}\right)^2$; por ser $\overline{DC} = \left(\overline{BC} - \overline{BD}\right)$,

Por consiguiente:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 - 2\times\left(\overline{BC}\right)\times\left(\overline{BD}\right),$$

Es decir que el triángulo rectángulo ADB, posee:

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2;$$

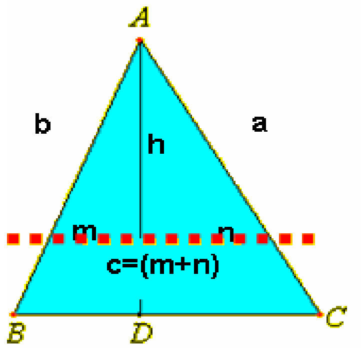
Sustituyendo en $\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 - 2\times\left(\overline{BC}\right)\times\left(\overline{BD}\right)$

Se tiene: $\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 - 2\times\left(\overline{BC}\right)\times\left(\overline{BD}\right),$

∎

.

4.7.13.1. Proposición 13, enunciada en nuestro sistema notacional. Si $\overline{BC} = c, \overline{BD} = m, \overline{DC} = n, \overline{AB} = b, \overline{AC} = a$ y $\overline{AD} = h$, se tiene:



Sustituyendo en $\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 - 2\times\left(\overline{BC}\right)\times\left(\overline{BD}\right)$,
Se tiene: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot m$

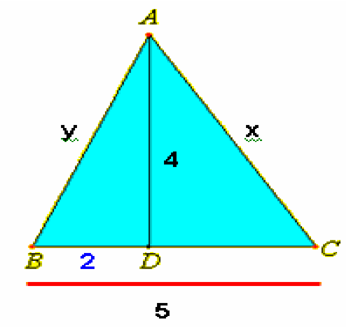
4.7.13.2. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 13. Para solucionar la ecuación de segundo grado $x^2 = y^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot m$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: Constrúyase el triángulo ABC acutángulo en B, por el segmento AC se construye el cuadrado de AC, de lado x. Trácese, a partir del punto A, el segmento $AD = h$ perpendicular al lado $BC = c$, el segmento $BD = m$.

Sobre el segmento AD constrúyase el cuadrado de lado h , sobre el segmento DC constrúyase el cuadrado respectivo de área $(c-m)^2 = c^2 + m^2 - 2\cdot(c\cdot m)$, se obtiene $x^2 = h^2 + m^2 + c^2 - 2\cdot(c\cdot m)$; En el triángulo ADB , por el segmento BA constrúyase el cuadrado de área $y^2 = m^2 + h^2$. Luego el cuadrado AC de area x^2, es equivalente al cuadrado AB de área y^2, más el cuadrado de BC lado c, menos dos veces el rectángulo de área $(m\cdot c)$.

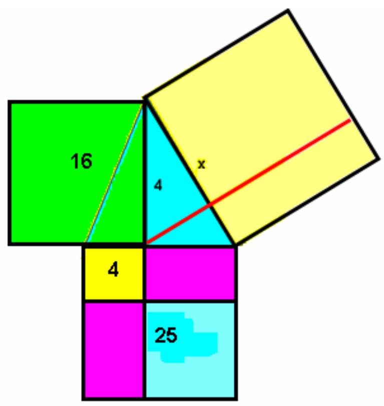
Ejemplo:

Para resolver la ecuación de segundo grado $x^2 = y^2 - 2\cdot(5\cdot 2) + 5^2$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 13.

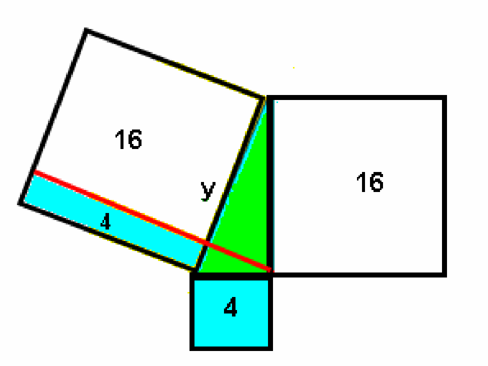
Dibújese el triángulo acutángulo, de lados $y, 5$ y x; respectivamente. Trácese el segmento perpendicular de longitud 4,



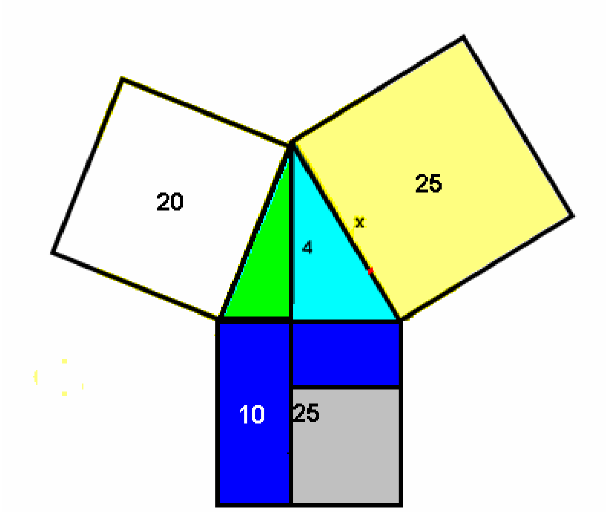
Constrúyase, el cuadrado sobre el lado del segmento de longitud 4, el cuadrado de área $(5-2)^2$; y el cuadrado de lado x.



Tómese el triángulo rectángulo, el cuadrado de área 4 más el cuadrado de área 16, es igual al cuadrado de área $y^2 = 20$. Luego el segmento $y = \sqrt{20}$.



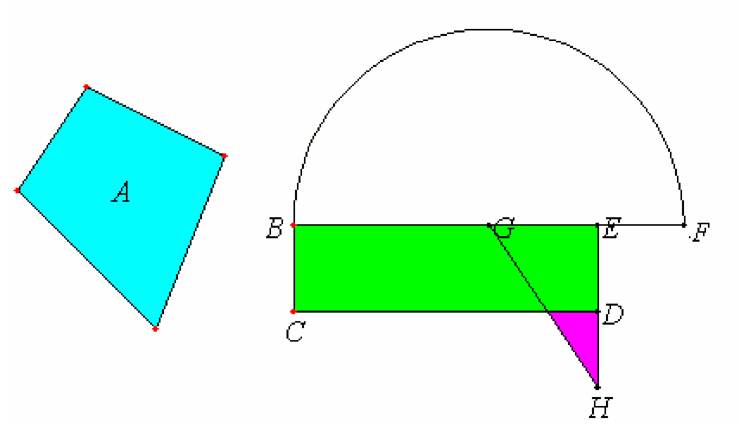
Por consiguiente, el cuadrado de área 20 mas el cuadrado de área 25, menos dos veces el cuadrado de área 10 es igual al cuadrado de área 25.



En consecuencia el segmento x tiene longitud $\sqrt{25}$.

4.7.14. Proposición 14. Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

Figura 41. Proposición 14



□

Una vez construido el rectángulo $CBED$, igual a la figura A, se toma el caso en que uno de los lados, en este caso BE, sea mayor, pues si los lados fueran iguales ya estaría concluido el problema.

Se prolonga entonces el segmento BE hasta el punto F, tal que EF sea igual a ED, se encuentra el punto medio G del segmento BF y se traza la circunferencia con centro en G y radio GF. Se prolonga el segmento DE hasta que se interseque con la circunferencia, el punto H, y se traza el segmento GH.

Como el segmento BF esta dividido en partes iguales por G y en partes desiguales por E, el rectángulo comprendido por BE y EF mas el cuadrado de lado EG es igual al cuadrado de EF (Proposición II-5) y al cuadrado de GH, pues este ultimo es igual al segmento EF (Noción común 1). Por otra parte, el cuadrado de EG mas el cuadrado de EH es igual al cuadrado de GH (Proposición I-47), luego el rectángulo comprendido por BE y EF mas el cuadrado de lado EG; es igual a el cuadrado de EG mas el cuadrado de EH (Noción común 1).

Restando el cuadrado común de lado EG, el rectángulo comprendido por BE y EF resulta ser igual al cuadrado EH (Noción común 3), como se quería demostrar, pues EF es igual a ED. Entonces, el cuadrado de lado EH es igual a la figura A dada.

∎

4.7.14.1. Ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación de la proposición 14. Para construir ecuaciones de segundo grado $a \cdot b = x^2$, la aplicación de la proposición 14 equivale a lo siguiente, dada la figura rectilínea $BCDE$ de área $a \cdot b$, trazamos sobre el segmento BE de longitud a, el segmento EF de longitud b, se obtiene el segmento BF de longitud $(a+b)$, se toma el punto medio G de BF de longitud $\frac{a+b}{2}$ y se construye la circunferencia de radio $\frac{a+b}{2}$ y centro G, por el segmento GE de longitud $\frac{a-b}{2}$ se traza el segmento EH de longitud x, que es la solución de la ecuación. Se traza GH de longitud $\frac{a+b}{2}$. Por el uso de la proposición 14 se deduce que por Pitágoras el cuadrado de EH es igual al rectángulo $BCDE$ de área $a \cdot b$. Es decir: $x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

4.7.14.2. Proposición 14, enunciada en nuestro sistema notacional. En nuestra notación se tiene:

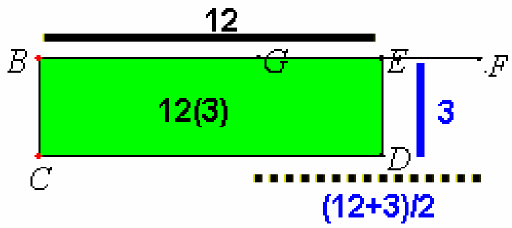
$$a \cdot b = x^2$$
$$x = \sqrt{a \cdot b}$$

Que permite solucionar la ecuación: $a \cdot b = x^2$.

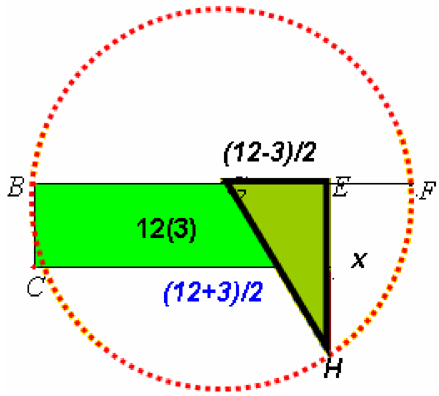
Ejemplo:

Para solucionar la ecuación $12 \cdot 3 = x^2$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 14.

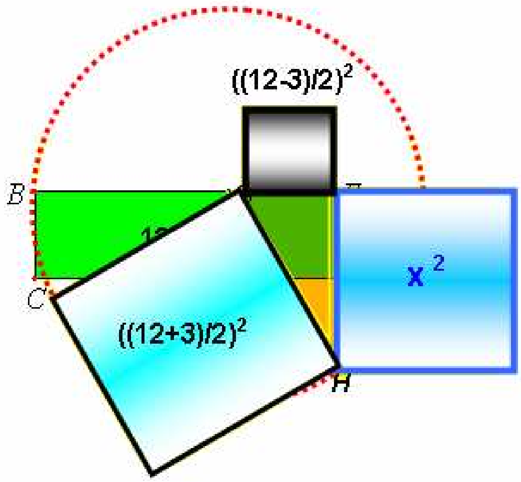
Sobre la figura rectilínea dada $BCDE$, de área $12 \cdot 3$, se prolonga el lado de longitud mayor $b = 12$, hasta F con $EF = a = 3$, se obtiene BF de longitud $(12+3)$, luego se toma el punto medio G de BF; así:



Ahora se construye la circunferencia de centro en G y radio $\frac{12+3}{2}$, luego por el segmento ED se traza una perpendicular EH de longitud x y se traza GH de longitud $\frac{12+3}{2}$. Así:



Luego:



Es decir que por Pitágoras se tiene:

$$x^2 = \left(\frac{12+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{12-3}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 56.25 - 20.25$$

Luego:

$$x^2 = 36$$

En consecuencia:

$$x = 6$$

5. CONCLUSIONES

- Los “Elementos” de Euclides son un texto valioso, ya que es la base de conocimientos aritméticos y geométricos que se utilizan aun, en nuestros días, además la utilización del Libro II de los elementos de Euclides, en la enseñanza, permitirá elaborar conceptos mucho más significativos sobre álgebra y geometría; ya que los procedimientos geométricos poseen un alto contenido lúdico y explicaciones razonables.

- El hecho de trabajar con demostraciones por medio de áreas, es una propiedad de el proyecto, como recurso pedagógico, que permite al estudiante formarse y adquirir nuevas y sólidas bases, para efectuar demostraciones con identidades geométricas básicas.

- Mediante el trabajo se deducen algunos tipos de ecuaciones que se pueden resolver a través de la utilización del libro II de los Elementos, como:

$$a \cdot x + b \cdot x + c \cdot x = d \cdot c$$
$$x^2 = b \cdot x$$
$$x^2 = c$$
$$x^2 + c = b \cdot x$$
$$x^2 = b \cdot x + c$$
$$x^2 + b \cdot x = c$$
$$a \cdot x - x^2 = b^2$$

Entre otras que se derivan de estas.

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, CARL B., Historia De La Matemática. Editorial Alianza Universidad. Madrid. 1986.

COLLETE, Jean Paúl. Historia de las matemáticas. Tomo I. México, 1986. Siglo XXI. Editores.

Elementos Libros I-IV. Editorial: Biblioteca Clásica Gredos.

E.T. Bell. Historia de las matemáticas. Fondo de la Cultura Económica. México. D.F, 1995. Impreso en México.

EUCLID, The thirteen books of Euclid´s elements, Volume I Introduction and Books I,II., Dover Publications, Inc, New York.

KLINE, M., El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días, Volumen II, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

LOIDI, Juan Navarro, Los Elementos de Euclides, Instituto de bachillerato a distancia, Guipúzcoa. Libro II

LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J., Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir, Universidad Pedagógica Nacional, Ediciones Antropos, 2002.

M.M. Socas- M. Camacho-M. Palarea-J. Hernández. Iniciación al algebra, 1996, Editorial Síntesis, Vallehermoso Madrid

PAULOS, John Allen. Más Allá de los Números II. 1998, Tusquets Editores, S.A. Barcelona.

http://www.google.co/Memorias de Geometría y Aritmética

http://www.euclides.org

http://www.caminantes.net/web/biografias.htm

http://www.terra.es/personal/jjtjjt/biografias/Apolonio.htm

http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/pagjor/cuadro.htm

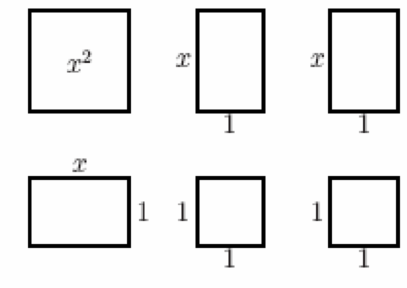
http://www.memo.com.co/fenonimo/aprenda/biogresult.php3?bio=571

http://www.alephv.clartu.edu/~djoice/hcme.html.

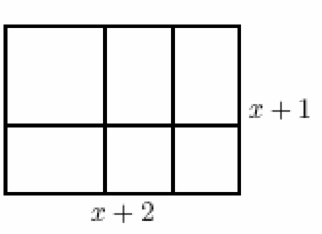
ANEXOS

Anexo A. CD. Definiciones, proposiciones y archivos PDF (CABRI II). El CD es una presentación en Power Point que contiene figuras construidas en Cabri Geométre II, con proposiciones del libro I de los Elementos de Euclides, que conllevan al tratamiento de área que realizo Euclides, para después generalizarlo con su libro II, además se presenta una serie de archivos PDF; que permiten consultar temas que se relacionan con la aritmética, álgebra, geometría, entre otros; y pueden ser aprovechados por el lector.

Anexo B. Solución de ecuaciones cuadráticas método árabe. El matemático árabe Tabit Ben Qurra, representó geométricamente el polinomio $x^2+3\cdot x+2$ como un producto de factores así: x^2 como el área de un cuadrado de lado x, a $3\cdot x$ como tres rectángulos cada uno de dimensiones x y 1; y a 2 por dos cuadrados de lado 1.



Si se quiere representar la suma de estas áreas como un producto, nuestra tarea es formar un rectángulo con estas figuras, una manera de hacerlo es



Y por lo tanto $x^2+3\cdot x+2=(x+1)\cdot(x+2)$.

"Al-Khwarizmi" es considerado uno de los precursores del álgebra por la importancia de su obra y la forma como este resolvía las ecuaciones. Nació y murió en Bagdad, se sabe poco de sus primeros años. Seguramente era originario de la ciudad persa de Khwarizmi (actual Jiva). Fue matemático, astrónomo y geógrafo. Es posible que fuera el quien dio a nuestros lenguajes el término "álgebra", por el titulo de su libro al-Jabr wálmuqabala, esto es, "Ciencias de Reducción y Cancelación". Su importancia en la historia de las matemáticas no estriba en este interesante detalle, sino en el hecho de que fue el primero en presentar un tratado sistemático sobre tal materia.

Tomó tanto de los conocimientos griegos como de los hindúes, e influyó en el pensamiento matemático más que ningún otro escritor medieval. Su principal aporte consistió en la aplicación de los nombres de los números hindúes a la solución numérica de las ecuaciones. Y en segundo lugar, su contribución, "a la solución de las ecuaciones lineales que constituyó el reconocimiento definitivo de la aplicación de axiomas a la transposición de términos y la reducción de fracciones implícitas a explícitas". Sus dos soluciones a la ecuación cuadrática $x^2+p\cdot x=q$ estaban basadas en métodos griegos. Por otra parte, no consideró la raíz negativa, ni coeficientes negativos de ecuaciones, lo mismo que los posteriores escritores persas, de hecho, no fue reconocida hasta el siglo XVII. Ni tampoco se interesó por las ecuaciones cúbicas, aunque el termino "cubo" tuvo que serle familiar.

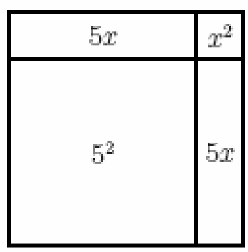
El escritor musulmán iraní Muhammad Ibn Husain Bahauddín al-Amilí (1547- 1621) dice que, según Al-Khwarizmi, la reducción de una ecuación se lleva a cabo utilizando las operaciones de al-jabr (“completación”, el proceso de remover términos negativos de la ecuación y al-muqabala “balanceo”), el proceso de reducir los términos positivos de la misma potencia cuando suceden de ambos lados de la ecuación. Luego, Al-Khwarizmi, basándose en estas operaciones, muestra como resolver los seis tipos de ecuaciones, usando métodos de solución algebraicos y geométricos. Las cuales son:

- Cuadrados iguales a raíces.
- Cuadrados iguales a números.
- raíces iguales a números.
- Cuadrados y raíces iguales a números, es decir ; $x^2 + b \cdot x = c$
- Cuadrados y números iguales a raíces, es decir ; $x^2 + c = b \cdot x$
- raíces y números iguales a cuadrados, es decir ; $b \cdot x + c = x^2$

A continuación se presenta el método de solución de Al-Khwarizmi para los tres últimos casos.

➢ *Cuadrados y raíces iguales a números* $x^2 + b \cdot x = c$.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 10 \cdot x = 39$, se escribe: un cuadrado y diez raíces son iguales a 39 unidades. O sea, cuál es el cuadrado que, combinado con diez de sus raíces, dará una suma total de 39. La manera de resolver este tipo de ecuaciones, es tomar la mitad de las raíces mencionadas; ahora, las raíces en el problema que se tiene son diez. Por lo tanto, se toma 5 que multiplicadas por si mismas dan 25, una cantidad que se agregaría a 39 dando 64. Habiendo extraído la raíz cuadrada de esto, que es 8, sustraemos de allí la mitad de las raíces, 5, resultando 3. Por lo tanto el número tres representa una raíz de este cuadrado.



Como se ve, no incluían términos negativos y las soluciones negativas tampoco eran aceptadas. Según el algoritmo anterior se podría llegar a la siguiente formula para resolver $x^2 + b \cdot x = c$:

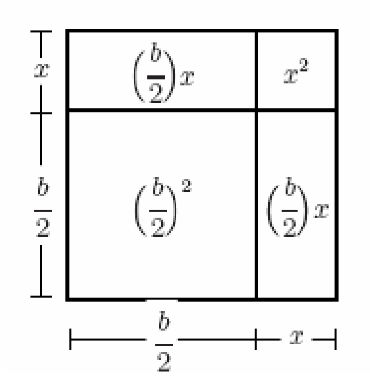
$$x^2 + 2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)\cdot x = c$$

$$x^2 + 2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)\cdot x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

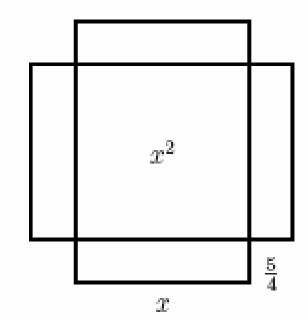
$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$



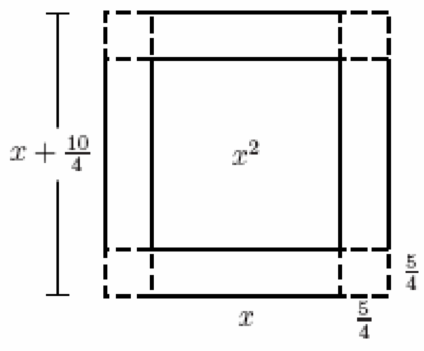
En el siglo IX, Muhammad ibn Muza Al-khowarizmi en su libro Al-jabr wál muqábalah dio solución a ecuaciones cuadráticas, usando un método que se conoce como completación de cuadrados.

Ejemplo:

La ecuación: $x^2 + 5\cdot x = 36$ se enuncia, cuando un cuadrado de lado x es añadido a un rectángulo con lados de longitud 5 y x, el resultado es un área con 36 unidades cuadradas. Para resolver esta ecuación, Al-khowarizmi dibuja un cuadrado de área x^2 y sobre cada uno de los lados de éste, cuatro rectángulos de dimensiones x y $\frac{5}{4}$ esta figura tiene, en suma un área de 36:



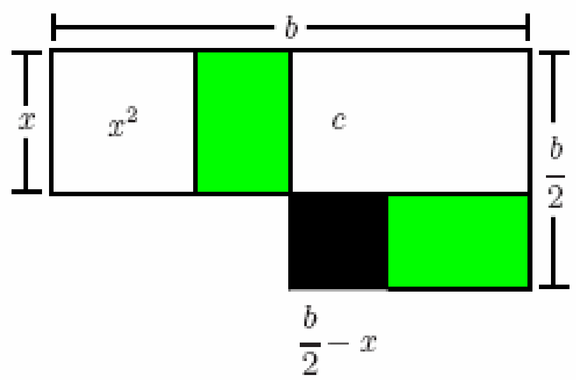
Entonces, para completar el cuadrado, se agregan cuatro cuadrados de lado $\frac{5}{4}$; con esto, se obtiene un cuadrado de lado $x + \frac{10}{4}$ y área $36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4}$ unidades.



Luego, el lado del cuadrado debe ser $x+\dfrac{10}{4}=\dfrac{13}{2}$, y por lo tanto $x=4$.

➢ *Cuadrados y números iguales a raíces* $x^2+c=b\cdot x$.

Para resolver esta ecuación, suponía que x^2 estaba representado por un cuadrado, de modo que un lado de este cuadrado era x , a partir de este construían un rectángulo cuya área era c. La figura entera, o sea el rectángulo valdrá x^2+c y también $b\cdot x$, puesto que un lado del rectángulo es x , el otro lado vale b. Tomando el punto medio de este lado, es decir, $\dfrac{b}{2}$ y construyendo un cuadrado que vale $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$.

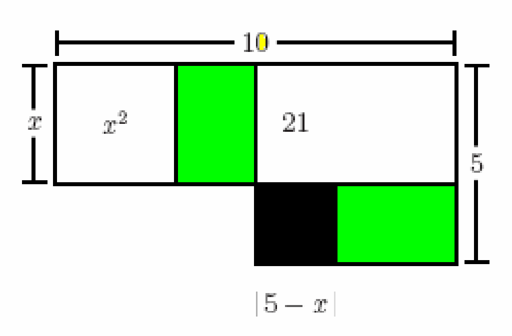


Se puede ver que hay dos rectángulos iguales en la figura, entonces el área del cuadro negro vale $\left(\dfrac{b}{2}-x\right)^2$, luego se tiene:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2+c=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$
$$\frac{b}{2}-x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$
$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $x^2+21=10\cdot x$ Aplicando el método se obtiene:



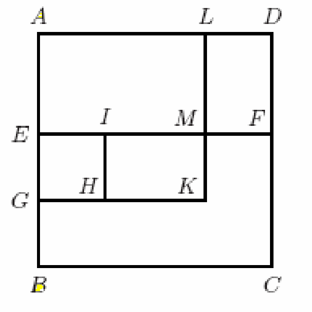
$$(5-x)^2+21=5^2$$
$$(5-x)^2=25-21$$
$$(5-x)^2=4$$
$$5-x=2$$
$$x=3$$

- *Raíces y números iguales a cuadrados* $b\cdot x+c=x^2$

Representa x^2 por el cuadrado $ABCD$ cuyo lado AB es x, y se toma BE igual a b, de modo que $EBCF$ representa $b\cdot x$ y, por consiguiente $AEFD$ será igual a c puesto que $b\cdot x+c=x^2$ se toma el punto medio G de EB y se construye el cuadrado $EGHI$ que valdrá $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ y el $AGKL$ L, el rectángulo $LMFD$ será igual a $IHKM$ por ser $LD=GB=EG=IH, LM=IM=AG-EG$; luego el cuadrado $AGKL$ equivale a la suma del rectángulo $AEFD$ y del cuadrado $EGHI$ y vale por lo tanto $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ y su lado

$AG = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$; luego:

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}$$



Ejemplo:

Para resolver la ecuación $3 \cdot x + 4 = x^2$. Representa x^2 por el cuadrado $ABCD$ cuyo lado $AB = x$, y se toma $BE = 3$, de modo que $EBCF$ representa $3 \cdot x$ y, por consiguiente $AEFD$ será igual a 4 puesto que $x^2 = 3 \cdot x + 4$. Tomando el punto medio G de EB se construye el cuadrado $EGHI$ de área $\frac{9}{4}$ y el cuadrado $AGKL$. El rectángulo $LMFD$ será igual a $IHKM$ por ser $LD = GB = EG = IH, LM = IM = AG - EG$ LD; luego el cuadrado $AGKL$ equivale a la suma del rectángulo $AEFD$ y del cuadrado $EGHI$ y vale por lo tanto $4 + \frac{9}{4}$, Y su lado $AG = \sqrt{4 + \frac{9}{4}}$,

Ó sea; $$x = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$$

$$x = 4$$