ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 A TRAVÉS DEL MÉTODO GRÁFICO

LISANA ANDREA PÉREZ ORDOÑEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS, NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN-CAUCA
2017

ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 A TRAVÉS DEL MÉTODO GRÁFICO

Universidad del Cauca

LISANA ANDREA PÈREZ ORDOÑEZ

Director

Ph.D. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS, NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

2017

Nota de aceptación:

____

____

____

____

Vo. Bo. Wilmer Libardo Molina
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Ph.D Yilton Ovirne Riascos
Asesor

Vo. Bo. Mg. Edwin Andrés Murillo
Evaluador

Agradecimientos

A Dios por guiar mi camino y brindarme a través de mi familia, amigos, compañeros y profesores, fuerza y motivación para alcanzar mis metas y superar las dificultades.

A mi familia, especialmente a mi madre Rosa Nubia Ordoñez por haber confiado en mí, por estar conmigo cuando he caído y motivarme a seguir adelante, por brindarme sus consejos que sirvieron de ayuda para comprender y mejorar y por sus sacrificios para darme lo mejor y formar la persona que soy. A mi padre Jorge Pérez, mi hermana Darssy, mis sobrinos Eliana y Jorge por su paciencia y apoyo incondicional.

A mis profesores de carrera, por enseñarme que no hay límites en cada paso que doy, especialmente a la profesor Yilton Riascos, quien ha sido mi apoyo a largo de mis últimos años de formación.

A las directivas de la I. E. John F. Kennedy, en cabeza de su rector, Oliverio Chilito Bravo, su coordinadora María Divina Villa (Q.P.D), al profesor Leonardo Ordoñez y al grupo de estudiantes del grado octavo A por permitirme realizar mi práctica pedagógica, por sus consejos y observaciones.

A todas las personas que confiaron en mí, me animaron y me enseñaron a enfrentar obstáculos con valentía, por colaborarme en todo lo que fuera posible y estuviera a su alcance: amigos, amigas y por supuesto tú, Felipe.

Resumen

El presente trabajo es la sistematización de la Práctica Pedagógica realizada en la Institución Educativa John F. Kennedy de la ciudad de Popayán, con estudiantes del grado octavo, con quienes se trabajó la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 por el método gráfico.

Se presentará la planeación y organización previa de las actividades y la descripción del proceso de intervención en el aula, finalmente se mostrarán los resultados obtenidos de la intervención con su respectivo análisis, teniendo en cuenta todo el proceso anteriormente descrito.

Contenido

Lista de Imágenes

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Presentación

De acuerdo a Kilpatrick, Gómez y Rico (1998), la investigación en la enseñanza de las matemáticas requiere de una indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos. A través del análisis de problemas de la vida real, se ha logrado construir modelos matemáticos que permiten tanto al docente como al estudiante establecer vías de comunicación que permitan organizar, analizar y discutir la información inicial dada en un problema, para finalmente crear y formalizar estrategias de solución.

De lo anteriormente planteado, surge la pregunta ¿Cómo iniciar el proceso de indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos? Según Díaz Quero (2006), es necesario que exista en primera instancia el deseo de hacerlo y tener una comunidad con quien compartir esta actividad, además, es necesario una concepción teórica que se exprese y revele en una práctica; en esa dirección, el presente trabajo corresponde a la sistematización de una práctica pedagógica realizada en la I. E. John F. Kennedy de la ciudad de Popayán.

Para la realización de esta intervención se hicieron participes 12 niñas y 20 niños, con edades que oscilaban entre 13 y 14 años, quienes cursaban el grado octavo en dicha institución. Durante un tiempo aproximado de ocho semanas y con una intensidad horaria de cinco horas semanales, se orientó el tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en particular el método gráfico para la solución de los mismos, el cual se ubica en el cuarto período del PEI (2013) del área de matemáticas en dicha institución.

Como referentes teóricos se tomará al filósofo y psicólogo Raymond Duval, al didacta Guy Brousseau, en conjunto con algunos estudios y aportes de quienes han encontrado interesante el tema, específicamente aquellos relacionados con la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, sus métodos de solución, en particular el aprendizaje del método gráfico.

El presente trabajo se clasifica en capítulos, con el propósito de brindar una explicación ordenada, con la siguiente secuencia:

En el primer capítulo, titulado Generalidades Institucionales, se encontrarán algunas características del entorno institucional y curricular del colegio. En el segundo capítulo, titulado Desarrollo de la Práctica Pedagógica, se encuentra una descripción del proceso llevado a cabo en la Práctica Pedagógica. En el tercer capítulo, titulado Referentes Teóricos, se encuentra el soporte teórico que nos ofreció la Didáctica de las Matemáticas. En el cuarto capítulo, titulado Antecedentes, se encuentran algunos estudios previos realizados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, en particular el método gráfico de solución de los mismos. El quinto capítulo, titulado Estrategia Pedagógica, corresponde a la descripción de la temática, metodología, evaluación y modelo pedagógico adoptado para el desarrollo de la Práctica Pedagógica. En el sexto capítulo titulado Resultados y Análisis de Resultados, se presenta una categorización de acuerdo con la evaluación de los exámenes escritos y actividades realizadas durante la intervención, así como también la discusión de tales resultados. En el séptimo capítulo, titulado Conclusiones y Consideraciones Finales, se encuentran los aspectos que se consideraron más importantes en referencia a los procesos de enseñanza y aprendizaje aquí desarrollados; finalmente se presentan la bibliografía y los anexos.

Capitulo I. Generalidades Institucionales

1.1 Características del entorno institucional

De acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2003), la necesidad de una educación de calidad para todos los ciudadanos obedece al ideal de ofrecer a toda la población del país una educación básica masiva con equidad y calidad, teniendo en cuenta este aspecto y que la misión de la institución educativa John F. Kennedy es ofrecer una educación comprometida con el conocimiento y el progreso del entorno individual, familiar y social de cada uno de sus integrantes, se escogió dicha institución para llevar a cabo el proceso de práctica pedagógica en el grado octavo, durante el cuarto periodo del año lectivo 2016.

De acuerdo con la reseña histórica del colegio John F. Kennedy (2017), la institución educativa John F Kennedy, se creó como una escuela, posteriormente recibió el nombre de concentración escolar y a partir del año 2003 se instituyó una sola institución con la fusión de las escuelas José María Obando y La Nueva Esperanza con el nombre de institución educativa John F. Kennedy.

Inicialmente la sede principal fue construida mediante un programa entre Colombia y Estados Unidos llamado *Alianza para el Progreso*, posteriormente gracias a la gestión permanente de las directivas y padres de familia, se han realizado remodelaciones en la estructura física especialmente en la construcción de salones de clase, aunque en la actualidad no se logre cubrir la demanda de cupos requeridos por la comunidad.

La Institución Educativa John F. Kennedy cuenta con dos subsedes: Nueva Esperanza, en la carrera 17 con calle 9ª y en la carrera 23 con 7ª del barrio José María Obando, correspondientes a la comuna 8 de la ciudad de Popayán.

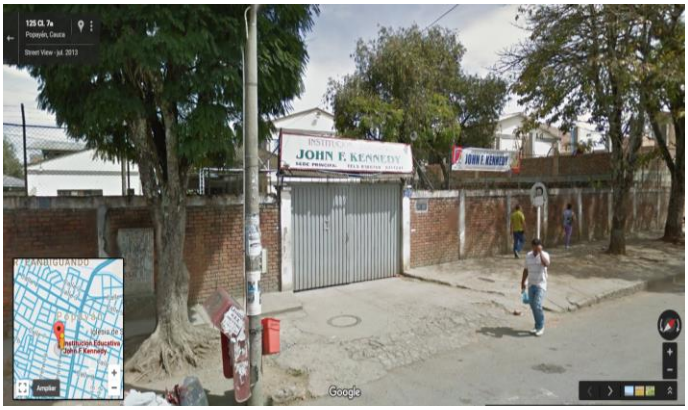


Imagen 1. Institución Educativa John F. Kennedy(Sede principal). Fuente: Google Maps

La ejecución de la práctica se llevó a cabo en la sede principal de la institución, como primer paso, se realiza el contacto con el señor rector Oliverio Chilito, él manifiesta confianza en los estudiantes de la Universidad del Cauca, razón por la cual acepta la solicitud de intervención y se formaliza dicho proceso, a través de una carta dirigida por el director de práctica Yilton Riascos. Una vez dada la aprobación formal de la solicitud, se notificó a la coordinadora de la jornada de la tarde María Divina Villa y los docentes del área de matemáticas.

Teniendo en cuenta que durante el proceso de fundamentación en la práctica pedagógica, como tarea previa se escogió el álgebra como materia a orientar en el proceso de intervención en el aula y el hecho de que el profesor Leonardo Ordoñez era el director de grupo del grado octavo A, orientaba dicha materia en su grupo y se interesó por el proceso de intervención, finalmente se acordó trabajar con él.

El profesor, describió a sus estudiantes como “niños curiosos, analíticos y propositivos, caracterizados por su buen comportamiento y disposición de trabajo, lo cual permitiría que la primera experiencia de aula fuera agradable y se pudiera desarrollar de manera eficiente”; de tal forma, 32 estudiantes (22 mujeres y 10 hombres), con edades entre los 13 y 14 años conformaron el grupo de trabajo.

Imagen 2. Estudiantes del grado Octavo. Fuente: Autor

Como aspecto adicional se requiere mencionar que durante el tiempo de intervención, el salón de clase del Grado Octavo A, se encontraba ubicado en el segundo piso de la institución, contaba con un tablero acrílico, un escritorio para el profesor y los estudiantes se organizaban en pupitres dobles.

Imagen 3. Salón de clase del grado Octavo. Fuente: Autor

1.2 Ambiente curricular (Plan de estudios en matemáticas de la Institución)

La visión de la Institución John F Kennedy, ésta busca ser reconocida como líder en la formación integral con principios éticos y valores humanos en pro de la calidad de la educación; por ello, presta el servicio educativo en los niveles de educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media académica.

Según el Proyecto Educativo Institucional- PEI (2013) en el área de matemáticas, desde el punto de vista académico, las Matemáticas desarrollan la capacidad de análisis a quien la estudia, mejora su razonamiento y le brinda herramientas para trabajar en diferentes áreas del conocimiento, por tanto, el rendimiento académico medio en el área de matemáticas evidenciado a través de los últimos resultados de las pruebas de estado, se convirtió en la motivación del PEI (2013).

Con el fin de lograr un cambio de actitud en el estudiante frente a su desempeño en el área, obtener mejores resultados en las pruebas estado y un buen desempeño en los estudios superiores, el PEI (2013) pretende estimular en cada estudiante el interés por el estudio, que adquieran los conocimientos fundamentales los cuales garanticen su vinculación y permanencia en los estudios superiores y adquieran habilidades para identificar modelos matemáticos para dar solución a problemas de la vida real.

En primera instancia, con respecto al saber disciplinar, pretende formar estudiantes con competencias matemáticas, para ello estructura el plan de área de matemáticas en competencias básicas específicas (saber), integración de competencias laborales (saber hacer) e integración de competencias ciudadanas (saber ser y convivir).

En segunda instancia, pretende que los estudiantes logren desarrollar pensamiento matemático, para ello se apoya en los cinco pensamientos con sus respectivos sistemas, establecidos en Lineamientos y Estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (2003) a saber: Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos y Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.

De acuerdo a esta visión global e integral del quehacer matemático, se consideran tres grandes aspectos para el desarrollo del currículo, estos se encuentran en el PEI (2013):

- **Procesos Generales** que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación y ejercitación de procedimientos.
- **Conocimientos básicos** que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.
- **El contexto** que tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el desarrollo de la experiencia didáctica.

Para lograr lo anteriormente dicho, el PEI (2013) plantea la utilización de una metodología "ACTIVA Y PARTICIPATIVA", donde más allá de la memorización de una serie de conceptos matemáticos, son los descubrimientos personales y la guía del profesor los que permitirán que el "estudiante aprenda haciendo", esto implica plantear al estudiante actividades a través de las cuales razone, cuestione, resuelva, opine, aporte y aplique los conceptos en cuestión.

Según el PEI, (2013) el maestro debe organizar las actividades de aprendizaje de acuerdo a la etapa de desarrollo de cada estudiante como individuo, es decir, el estudiante debe encontrarse con problemas que inicien en situaciones concretas, que le proporcionen experiencias de aprendizaje de modo que le permitan redescubrir los conceptos matemáticos y le permitan llegar a la formalización y conceptualización de principios matemáticos para posteriormente ser utilizados en la resolución de problemas.

Finalmente, entendiendo la evaluación como un estudio que desea conocer y comprender el proceso de aprendizaje de los estudiantes, el PEI (2013) plantea una evaluación cualitativa (atendiendo a los parámetros de la ley general de la educación), la cual debe ser, formativa, sistemática y flexible, sin embargo, también considera un tipo de evaluación cuantitativa que permita la recolección de datos para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren a lo largo de un periodo académico. En este sentido, la evaluación se debe realizar de manera permanente y continua, permitiendo al docente hacer un seguimiento que ayude al estudiante a superar los obstáculos y potenciar sus capacidades.

En consecuencia, para la evaluación se tendrán en cuenta actividades tales como: talleres, consultas, trabajos escritos, exposiciones, y evaluaciones escritas donde se busque potenciar en el estudiante capacidades argumentativas y críticas.

Capitulo II. Desarrollo de la Práctica Pedagógica

Dentro de la malla curricular del programa de licenciatura en matemáticas que ofrece la Universidad del Cauca, se encuentran algunos cursos cuyo propósito principal es formar al estudiante como educador matemático. Con una modalidad presencial y de manera progresiva se deben aprobar cuatro prácticas, cada práctica se caracteriza por ser un espacio curricular que brinda condiciones reales a los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas para vivenciar experiencias de aula cercanas a lo que será el desempeño profesional.

La PP_I, fue la etapa de apropiación del significado de práctica pedagógica investigativa lo cual incluyó recordar, identificar semejanzas y diferencias y reconocer la aplicación de terminología vista en cursos previos como lo son pedagogía, didáctica, investigación, investigación matemática, educación matemática, pedagogía de las matemáticas, práctica docente y practica investigativa, entre otros. Se estudió y analizó sobre la *Epistemología Genética* desarrollada por la escuela piagetiana, para que con ello, al momento de afrontar la intervención en el aula, se reconozca a cada uno de los estudiantes como un individuo que se enfrenta día a día al proceso de aprendizaje.

En la PP_II, fue la etapa de fundamentación en investigación en educación, para ello se tomó como referente los textos: *Lineamientos curriculares en Matemáticas* (1998) y *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas* (2003) ofrecidos por el Ministerio de Educación Nacional; se profundizó en el estudio acerca del sistema educativo colombiano y la calidad de la educación matemática.

Con el objetivo de acercar a cada participante al proceso de práctica pedagógica investigativa se organizó una serie de sesiones con estudiantes de Maestría en Educación, para dar a conocer sus respectivos procesos de práctica pedagógica, el cómo ha sido su intervención en el aula de clase posterior a graduarse y cómo ha ido evolucionando a través del tiempo y la experiencia la relación con cada uno de sus estudiantes.

Vía e-mail, aquellos quienes laboraban como profesores en instituciones educativas, compartieron el plan de estudios en matemáticas correspondientes a las áreas de matemáticas, geometría, algebra, trigonometría y estadística, con el propósito de que cada practicante escogiera una línea de interés, planteara un problema que se enmarque dentro de dicha línea e identificara dentro de los tiempos de la institución, requisitos previos y el tiempo aproximado de intervención de acuerdo al grado en el que se orienta tal temática.

Iniciando la PP_III, se asignó como tarea buscar la Institución Educativa donde cada practicante desease trabajar y definir el objeto de enseñanza de acuerdo al gusto o interés personal del practicante. Teniendo en cuenta lo anterior se llevó a cabo la presentación con el señor rector de la Institución Educativa John F. Kennedy Oliverio Chilito quien a través de la coordinadora María Divina Villa, confirmó que docente del área, profesor Leonardo Ordoñez estaba interesado en permitir que el proceso de práctica se llevara a cabo en el grado 8 A.

Teniendo en cuenta que el tema correspondiente a sistemas de ecuaciones lineales 2x2 se encontraba ubicado en el cuarto periodo para grado octavo, se acordó tanto con el director de practica como con el docente, comenzar con una primera fase de observación del ambiente de práctica, para de tal forma realizar el diagnóstico de conocimientos previos de los estudiantes, conocer la metodología utilizada por el docente de área en clase e identificar los conceptos trabajados durante el respectivo año lectivo y la forma de evaluación de los mismos.

En este sentido, en el proceso de observación se evidenció lo siguiente:

Respecto a los estudiantes:

- Buscaban fórmulas, ejemplos y ejercicios resueltos previamente por su profesor o sus compañeros para guiarse y dar solución a los problemas planteados en clase.
- No lograban plantear una solución a una variación del problema, el cual fue el resultado de realizar modificaciones de datos o equivalencias en la situación inicial, no relacionaban conocimientos previos y se defendían con el argumento "no, eso no lo hemos visto", a pesar de que el profesor Leonardo desarrolló el tema requerido durante la fase de observación. Un caso a mencionar es el siguiente, al comenzar la clase el profesor plantea lo siguiente el tablero $2x + 3 = 13$. El ejercicio es resuelto por uno de los estudiantes de la siguiente forma:

$$2x + 3 - 3 = 13 - 3$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Posteriormente procede a plantear lo siguiente $4m - 5 = 1$. El ejercicio es resuelto por uno de los estudiantes de la siguiente forma:

$$4m - 5 + 5 = 1 + 5$$

$$4m = 6$$

$$m = \frac{6}{4}$$

Puesto que en el anterior ejercicio la respuesta corresponde a un número entero, ¿Qué sucede en este caso? El estudiante muestra duda, la cual es resuelta gracias a las intervenciones de sus compañeros, entre las cuales se menciona la palabra “simplificar”, por tanto su respuesta es la siguiente:

$$m = \frac{3}{2}$$

Respecto al profesor:

- Metodología diferente a la tradicional, se caracteriza por entablar diálogo constante con cada uno de sus estudiantes y a través de la resolución de ejercicios planteados con anterioridad, compartir la solución encontrada en el tablero, responder preguntas relacionadas con el ejercicio en cuestión, atender las dudas de sus estudiantes y dar solución entre todos los participantes de la clase.
- Disciplinariamente, cuando el profesor entra al salón de clase, todos los estudiantes se levantan y se arreglan su uniforme, además estaba pendiente de que cada uno de sus estudiantes se encontrara desarrollando la actividad dejada previamente a través de revisión del cuaderno y constante participación en el tablero.

Cabe resaltar el constante acompañamiento del docente hacia la practicante, los días lunes y martes dedicaba su hora libre para conocer acerca de lo sucedido durante cada clase, incluyendo el comportamiento de cada uno de los niños, las fortalezas y las dificultades observadas y los avances logrados. Realizaba la lectura de cada taller presentado, compartía sus experiencias al aplicar ejercicios similares con otros estudiantes y hacia constantes recomendaciones inclusive al momento de recolectar evidencias.

Por las razones anteriormente expuestas, se logró identificar la estrategia del profesor, su compromiso, dedicación y motivación al momento de desarrollar cada clase; de los estudiantes se pudo distinguir características generales de cada uno de los integrantes del grado octavo A, a través de su comportamiento dentro y fuera del aula, su actitud ante el profesor y al momento de enfrentarse a los conceptos matemáticos; del aula se observó su ubicación, infraestructura, tamaño y recursos con los cuales contaba.

Teniendo en cuenta que en la PP_III se debe hacer la intervención en el aula y considerando los resultados encontrados en la fase de observación, el siguiente paso fue acordar como tema principal los métodos de resolución de ecuaciones lineales 2x2, el tiempo otorgado fue desde el mes de octubre hasta el mes de diciembre; el horario establecido para llevar a cabo la intervención en aula fueron: los lunes desde las 16:50 hasta las 17:50, martes desde las 16:50 hasta las 17:50, miércoles desde las 14:05 hasta las 14:50, jueves desde las 13:20 hasta las 14:20 y viernes desde las 13:20 hasta las 14:20.

El siguiente paso fue presentar tanto al director de práctica como al profesor el siguiente cronograma:

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Grado: Octavo A

Asignatura: Algebra

Período: Cuarto

- **Semana 1**

  Actividad: Acercamiento a la práctica profesional docente.

  Objetivo: Tener el primer contacto con los estudiantes del grado octavo A con el fin de observar y analizar su ambiente de aprendizaje en el área de Matemáticas, las relaciones existentes entre docente, estudiante y objeto de aprendizaje.

- **Semana 2**

  Actividad: Taller diagnóstico.

  Objetivo: Identificar en los estudiantes la manifestación de sus capacidades de interpretación, análisis y aplicación de estrategias a la hora de resolver problemas

- **Semana 3**

  Actividad: Estudio de la función lineal y ecuación de la recta. (Pendiente y ordenada al origen, rectas paralelas, rectas perpendiculares, representación de una recta a partir de ciertos datos.

  Objetivo: Se busca que el estudiante identifique la función lineal y los sistemas de ecuaciones lineales.

- **Semana 4**

  Actividad: Taller 1: Función lineal y ecuación de la recta.

  Objetivos: Se busca que el estudiante identifique la pendiente de una recta numéricamente y geométricamente y determine la ecuación de una línea recta.

- **Semana 5**

  Actividad: Sistemas de Ecuaciones. Métodos de solución de sistemas 2x2(Gráfico, Sustitución, Reducción, Igualación).

  Objetivo: Se busca que el estudiante manifieste competencias comunicativas y de interpretación del lenguaje algebraico a través de la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

- **Semana 6**

  Actividad: Taller 2: Sistemas de Ecuaciones.

  Objetivo: Se busca que el estudiante logre determinar la solución de sistemas de ecuaciones con 1 y 2 incógnitas por diferentes métodos e identificar los mecanismos de solución aplicados por cada estudiante al momento de enfrentarse a una serie de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

- **Semana 7**

  Actividad: Problemas que se modelizan con ecuaciones lineales. Problemas con infinitas soluciones, con una solución y sin solución.

  Objetivo: Promover en el estudiante la comprensión de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

- **Semana 8**

  Actividad: Taller 3: Problemas que se modelizan con ecuaciones lineales.

  Objetivo: Identificar los mecanismos de solución aplicados por cada estudiante al momento de enfrentarse a problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

La planeación, elaboración y ejecución de cada una de las sesiones, contó con el seguimiento y recomendaciones del profesor Leonardo Ordoñez, para la elaboración de la guía de cada sesión se tomaron los siguientes referentes teóricos y/o conceptuales:

- Matemáticas con énfasis en competencias 8, (Fonseca Núñez, 2001)
- Alfa con estándares 9, (Uribe Camargo, García de García, Leguizamón de Bernal, Samper de Caicedo, & Serrano de Plazas, 2004)
- Algebra, Baldor Aurelio Ángel ((Baldor, 1983)).
- Geometría Analítica, (Lehmann, 1984)
- Teorías y problemas de geometría analítica plana y del espacio, (Kindle)
- Algebra y trigonometría con geometría analítica (Swokowski & Cole, 2009)

Y diversos sitios web.

Estos documentos fueron utilizados principalmente para comparar las definiciones que se pretendía presentar, y algunos ejemplos; la mayor parte de los ejercicios y talleres fueron de elaboración propia, dependiendo del objetivo planteado para cada una de las sesiones de intervención en el aula.

Debido a actividades culturales desarrolladas por parte de la institución, la fase de observación se extendió a dos semanas, y una vez finalizada, se dio inicio a la intervención en el aula. Con el desarrollo de la primera sesión, se concluyó que era necesario reformar el temario planteado en el cronograma inicial, ya que este asumía un nivel de conocimiento que resultó inferior al que los estudiantes tenían en ese momento.

El cronograma se centraría ahora en abarcar la enseñanza y aprendizaje del método gráfico como mecanismo de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 dado y la identificación de la función lineal como eje principal, lo cual se llevaría a cabo a través de talleres, exposiciones y su respectiva evaluación durante 5 semanas. Finalmente durante la última semana se orientaría a modo de seminario las principales características de los otros métodos de solución (igualación, reducción, sustitución y determinantes) mostrando a través de ejemplos desarrollados en clase, la utilización de cada uno de ellos.

Debido a eventos culturales, reducción de los 60 minutos de la hora de clase para que los estudiantes salieran más temprano del colegio, reunión de profesores y proceso de matrícula de nuevo año escolar, el cronograma debió ser adaptado nuevamente y con la ayuda del profesor Leonardo se logró gestionar una sesión de clase adicional a la jornada escolar para finalizar las actividades planeadas.

Las actividades realizadas durante el proceso de intervención en el aula se proponen en el siguiente orden:

1. Realización de una prueba diagnóstica: cuyo objetivo apuntaba a diagnosticar el nivel de conocimiento que en ese momento presentaban los estudiantes.
2. Repaso de conceptos: que se haría dependiendo de los resultados obtenidos en la prueba anterior.
3. Definición de ecuación, incógnita, expresión, expresión algebraica, expresión analítica, función, sistema; teniendo en cuenta los apuntes de clase de cada estudiante.
4. Definición de sistema de ecuaciones lineales, ejemplos, ejercicios; definición de sistemas compatibles e incompatibles; definición de conjunto solución, ejemplos y ejercicios.
5. Método gráfico de solución de ecuaciones lineales 2x2
6. Algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (Método de igualación algebraica, Método de sustitución, Método reducción o eliminación y Método de determinantes).

El desarrollo de estos temas, se encuentra explicado en detalle en lo que se ha titulado desarrollo secuencial de la temática.

Es importante, mencionar que el profesor titular realizó una tarea de acompañamiento fuera del aula; es decir, dejó a cargo del grupo a la practicante con el fin de que pudiera desarrollar la habilidad de control y manejo del grupo y no alterara el proceso de acercamiento a las condiciones reales en el aula de un educador matemático, durante los lunes y martes al finalizar cada sesión se reunía con la practicante e indagaba acerca del comportamiento de cada uno de sus niños tanto en el trato con la profesora como en el desarrollo de las actividades propuestas e hizo recomendaciones que él consideraba importantes desde su experiencia, para mejorar el proceso de intervención.

Con el propósito de reconstruir posteriormente los eventos ocurridos en el proceso de intervención en el aula, se utilizó instrumentos tales como: diario de campo: en el que se describió, clase a clase y con detalle, los hechos ocurridos en cada una de las sesiones, de igual forma, se tomaron registros fotográficos tanto de la infraestructura de la Institución como del trabajo realizado en el aula.

Teniendo en cuenta que la información recolectada sería usada para sustentar el presente trabajo, por recomendación del rector y docente de área de la institución, se solicitó a la practicante y al director de práctica un formato de consentimiento informado, a través del cual los padres de familia a través de su firma permitían el uso de tales evidencias en el presente trabajo de práctica. El formato fue respaldado con la firma del rector Oliverio Chilito, la coordinadora de la jornada de la tarde María Divina Villa, el docente de área Leonardo Ordoñez y la practicante Lisana Andrea Pérez Ordoñez; las fotografías se pueden observar en el presente trabajo y en el anexo 7 se encuentra el respectivo formato.

Capitulo III. Referentes Teóricos

Teniendo en cuenta la influencia de las matemáticas en otras áreas del conocimiento y en ciertas labores, Restrepo (2011) plantea que la Educación Matemática constituye un área de estudio fundamental para el desempeño y la cohesión económica de los docentes quienes harán parte de la masa laboral del país y la Didáctica de las Matemáticas permitirá estudiar e investigar los problemas en la Educación Matemática y proponer acciones para su mejor desarrollo.

Según Gutierrez (1991), los investigadores en Didáctica de las Matemáticas “tienen como misión preferente ofrecer respuestas a los problemas planteados por los profesores y diseñadores de currículo cuando quieren conseguir que las matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes” (pág. 149). Además, estos se diferencian de los investigadores matemáticos en que utilizan el conocimiento ya establecido para estudiarlo, analizarlo y buscar estrategias adecuadas para impartirlo generalmente en un aula de clases.

La lectura, análisis y aplicación de estrategias en diferentes contextos, ha permitido contribuir al mejoramiento de los procesos cognitivos de un sujeto, presentar una serie de estrategias entre las cuales un docente podría escoger e implementar en la enseñanza para de tal forma ayudar a que cada uno de estudiantes realice la construcción de conceptos matemáticos, sin embargo, resulta difícil presentar un algoritmo o teoría exacta que permita modelar todas las actividades correspondientes al ámbito educativo dentro de los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Lo anterior radica en el hecho de que se trabaja en la formación de sujetos pensantes que hacen parte de una sociedad, cada uno se caracteriza por su individualidad, libertad de pensamiento, cultura y manera de observar y analizar lo que lo rodea, por tanto posee su propio ritmo de aprendizaje y una estrategia para transmitir a otros sus conocimientos en una determinada situación.

Ahora bien, existen diferentes concepciones acerca de la relación entre la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas, algunos defienden la posición de que la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas son dos términos diferentes ya que la Educación Matemática tiene dos sentidos, uno correspondiente al conocimiento matemático, es decir a las diferentes temáticas que componen las matemáticas y que son transmitidas por medio del sistema escolar y el otro referente a condiciones que posibilitan la comunicación entre docentes y estudiantes y que hacen posible los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mientras que la Didáctica de las Matemáticas tiene un carácter científico, es decir se encarga de estudiar los fenómenos que ocurren en todo lo relacionado con el conocimiento matemático.

Es importante clarificar que este trabajo adoptará la concepción planteada por Godino (2010), quien considera que la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas se pueden concebir como sinónimas ya que la Educación Matemática es muy amplia y permite una interpretación como sistema social interactivo donde no solo interviene el docente y/o el conocimiento sino que también existen muchos factores circundantes y de igual importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de los cuales han surgido importantes investigaciones.

3.1 Consideraciones importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La construcción de cada uno de los objetos matemáticos que conocemos hoy en día es el resultado de constantes discusiones , críticas y opiniones de diferentes matemáticos, es así que las matemáticas son una construcción humana, la cual se ha dado a través de varios años de trabajo en equipo y el recorrer un largo camino para convertirse en lo que actualmente conocemos y que continuará generando nuevos resultados a medida que los investigadores identifiquen nuevos problemas a los cuales deseen dar respuesta.

En la actualidad se reconoce la influencia de los entornos tanto social como cultural, los cuales ejercen sobre la interacción profesor- estudiante y saber, la necesidad de transformar el conocimiento científico en conocimiento de enseñanza, con el fin de que el estudiante adquiera conceptos teóricos logrando interiorizarlos y aplicarlos en problemas de la vida real. La transformación anteriormente mencionada se conoce como "Transposición Didáctica" y se aplicará en el desarrollo del presente trabajo.

Chevallard (1998), plantea que la transposición didáctica "permite desnaturalizar el saber académico, modificándolo cualitativamente para hacerlo más comprensible para el alumno" (pág. 45).

Según Brousseau (1986), corresponde al paso de ese saber axiomático y formal (saber sabio) al saber adaptado para la enseñanza (saber a enseñar), este es el trabajo de transformación que se da a los conceptos matemáticos para que puedan ser asimilados por el sujeto que aprende.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran ligados a la interacción de tres actores esenciales: estudiantes, docentes e institución, bajo el esquema de enseñanza tradicional, Buchelli Lozano (2009), quien cita a Mungaro, plantea que es frecuente encontrar algunos docentes expertos en determinada área o campo disciplinar, quienes piensan tener los derechos suficientes para no ser cuestionados por sus estudiantes, sin embargo, la "transmisión" de sus conocimientos en el aula, solo es comprendida por un reducido número de ellos.

De parte del estudiante, Buchelli Lozano (2009), plantea que debido a la falta de saberes previos, lo puede conducir a una brecha que no le va a permitir articular los nuevos conocimientos abordados en el proceso de aprendizaje, por su parte, el docente, al resultarle difícil identificar el ritmo de aprendizaje de cada uno de sus estudiantes, establece un ritmo de trabajo el cual no todos logran alcanzar llegando al punto de disminuir su motivación y poseer malas calificaciones en sus respectivas evaluaciones, en cuanto a los directivos de la institución educativa, pueden tener suposiciones erróneas relacionadas con los procesos pedagógicos, didácticos y metodológicos que aplica el docente en el aula.

En virtud de esta problemática, Buchelli Lozano (2009), cita a la Conferencia Mundial sobre Educación Superior realizada en 1998, la cual planteaba ciertos retos para el nuevo milenio entre ellos, que:

La educación superior debe formar a los estudiantes para que se conviertan en ciudadanos de bien, informados y profundamente motivados, provistos de un sentido crítico y capaces de analizar los problemas, buscar soluciones para que las plantee a la sociedad y asumir responsabilidades sociales. (pág. 23)

Ahora bien, Brousseau (1994) muestra con claridad el trabajo de la transposición en las manos del docente, en cuanto a la comunicación de los saberes del científico, él debe reorganizarlos, darles una forma comunicable, descontextualizada y despersonalizada, en algunos casos, el docente realiza un trabajo inverso, es decir, recontextualiza y repersonaliza el saber a través de la búsqueda de situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. Por tanto, el docente realiza una labor que implica la mediación entre al saber producido y su visión pedagógica del alumno, el acompañamiento y guía de cada uno de sus alumnos en el proceso de reconocimiento del saber producido como un conocimiento cultural transferible.

Brousseau (1994) resalta la preocupación ante el hecho de que es grande la tentación de saltar estas dos fases, los docentes pueden llegar al momento de decidir qué y cómo enseñar sustentados en un engañoso dilema entre enseñar saberes validados científicamente y organizar los aprendizajes de los alumnos. Por tanto, la transposición didáctica señala que la enseñanza no se puede reducir a la simple organización de unos aprendizajes, ni al interrogante de lo que se puede agregar o suprimir sobre el contenido de enseñanza por sí solo, sin considerar al estudiante como elemento activo y dinámico del proceso mismo.

Para que lo anteriormente planteado se desarrolle, se debe seguir una estructura de actividades reflexionadas con anterioridad, además, es clave promover y desarrollar el diálogo sustentado entre los participantes de la actividad a través de una argumentación apropiada y que permita el análisis y la retroalimentación constante, que permita generar un aprendizaje significativo.

Por otro lado, Brousseau (1986) distingue tres aspectos que resultan fundamentales en el trabajo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: el trabajo del matemático, el trabajo del alumno y el trabajo del profesor:

En el primero, destaca la forma como el investigador matemático trabaja antes de dar a conocer lo que puede convertirse en una nueva teoría o concepto, recopilando toda la información que tiene a la mano ya sea antigua o nueva, depurando errores al máximo, presentándose así los procesos de despersonalizar, descontextualizar y destemporalizar sus resultados, sin embargo, esto no garantiza que la teoría no vaya a ser modificada puesto que otros lectores transformarán nuevamente tales resultados.

El trabajo del alumno, debe por momentos ser comparable a esta actividad científica, es decir, que el aprendizaje de las matemáticas además del estudio definiciones, teoremas o algoritmos, sea también una actividad activa y participativa donde los estudiantes tengan la posibilidad de crear, construir, indagar, discernir y criticar constructivamente un determinado resultado.

Teniendo en cuenta lo descrito, surge el siguiente interrogante ¿Cómo conseguir esto? Y es aquí precisamente donde se resalta la importancia del trabajo del profesor, quien a través del estudio y análisis de diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas plantea su propias estrategias, propone actividades que fomenten la participación de los estudiantes y les brinde la confianza de proponer, comparar y discutir argumentativamente soluciones a un determinado problema.

Pero más allá de propiciar las mejores condiciones para el desarrollo del proceso de aprendizaje, un docente debe estar en constante actualización de los fenómenos didácticos que se puedan presentar en el aula, para de tal forma preveer lo que pueda suceder con sus estudiantes y plantear posibles soluciones, es así como, el docente se convierte en un investigador, quien a través de la observación del comportamiento de sus estudiantes y el análisis de cada una de sus reacciones y respuestas dadas ante las diferentes actividades planteadas, le permite reflexionar sobre el ejercicio docente, (en este caso la práctica pedagógica), identificando fortalezas y debilidades a tener en cuenta durante el proceso de enseñanza de las matemáticas.

Para esta etapa, se contó con el acompañamiento del director de práctica pedagógica, quien orientó cada una de las propuestas a realizar, en donde tanto las situaciones didácticas[1] como las situaciones a-didácticas[2] estuvieran lo más acorde posibles al objetivo de cada una de las sesiones y en general al objeto de estudio del trabajo.

---

[1] Son aquellas situaciones en las que existe acompañamiento y orientación por parte del docente. (Brousseau, 1986, pp. 47)

[2] Son aquellas situaciones en las que los estudiantes construyen su conocimiento sin acompañamiento del docente. (Brousseau, 1986, pp. 47)

Capitulo IV. Antecedentes

Los Estándares Básicos de Competencias establecido por el Ministerio de Educación Nacional (2003), establece cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el de medida o métrico, el aleatorio o probabilístico y el variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, los cuales tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones problema que integran los diferentes pensamientos y posibilitan los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

El presente trabajo se encuentra estrechamente relacionado con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, el cual permite el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Ahora bien, según los Estándares Básicos, el pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático y a su vez con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias como lo son la modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos. También tiene como uno de sus propósitos, construir desde la educación básica primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico.

Teniendo en cuenta lo anterior y siguiendo lo planteado por Fonseca (2001), en su libro: Matemáticas con Énfasis en Competencias 8, el representar los números reales mediante símbolos ha permitido la modelación de problemas de la vida real y el encontrar la solución a dichos modelos da sentido al quehacer del álgebra. Las ciencias naturales, las económicas y sociales, expresan sus leyes mediante ecuaciones, donde conociendo ciertos datos de una situación, se establece una ecuación que modela un problema y mediante la transformación en ecuaciones equivalentes, se encuentran respuestas, las cuales luego de ser analizadas son aplicables a la situación inicialmente planteada.

Fonseca (2001), plantea que el concepto de función, se percibe en situaciones de la vida real, la utilización de modelos lineales para explicar fenómenos sociales o naturales, cuyo comportamiento se aproxima a través de la función lineal, ha permitido lograr avances en la ciencia y la tecnología.

Cabra M. & Gómez G., en su documento La Función Lineal en Diferentes Contextos (s.f), plantean que es importante incluir la manipulación conceptual y operatoria del concepto de Función Lineal en las tareas académicas, para de tal forma, crear vínculos con los fenómenos de cambio, variación y modelos algebraicos y analíticos. Además, presentan un análisis de los conocimientos básicos relacionados con la red de conceptos y procedimientos que posibilitan su movilización, entre ellos: proporcionalidad, magnitudes directa e indirectamente proporcionales, variables dependientes e independientes, relaciones, cambio, variación y variable; así mismo los procesos de pensamiento relacionados con la representación gráfica, simbólica, tabular, interpretación de gráficas y reconocimiento de patrones de variación.

Según Gonzáles & Hernandez (s.f), en la enseñanza tradicional para expresar la relación entre dos variables se utilizan fundamentalmente tablas de valores, expresiones algebraicas y gráficos de sistemas de coordenadas, así, durante años se ha enseñado a los alumnos cómo construir tales representaciones y los subsiguientes métodos para manipular dichas representaciones; pero el impacto de la tecnología está obligando a reconsiderar la forma en que se enseñan las funciones.

Por lo anterior, plantean los siguientes tópicos necesarios para adquirir una comprensión de las funciones y de su representación gráfica:

- Definir la regla de una función en tres modos de representación: representación gráfica en sistemas de coordenadas, con palabras y con símbolos algebraicos.
- Adquirir conceptos relacionados con los gráficos y los sistemas de coordenadas como: ejes, pares ordenados, tablas de valores.
- Pasar de un conjunto discreto de puntos a las funciones y sus gráficos.
- Clasificar gráficos y funciones con diferentes criterios.
- Transformar geométricamente funciones y gráficos y observar cambios paralelos en la representación simbólica.

Continuando con Gonzáles & Hernandez (s.f), plantean que en el trabajo con los alumnos, se ha observado que no están acostumbrados a relacionar los coeficientes de la expresión algebraica de una función polinómica con las características de su representación gráfica; para reforzar su supuesto, citan a Leinhardt , quien reconoce que una tarea de mayor dificultad es la traducción entre las representaciones gráfica y algebraica y a Eisenberg, quien señala que la función es un concepto trascendental en la comprensión de la matemática y que desarrolla en los estudiantes una sensibilidad para las funciones.

Ahora bien, para Gonzáles & Hernandez (s.f), la enseñanza de la función lineal puede ser abordada mediante el uso de sus representaciones, donde a través de la manipulación de estas formas de representación el estudiante realiza traducciones entre ellas, por ejemplo: de la algebraica a la tabular, de la tabular a la gráfica, o de la gráfica a la algebraica; en consecuencia, le permite explorar algunas nociones acerca del concepto de función. Ciertas traducciones no son directas, requieren de representaciones intermedias para poder efectuarse, por ejemplo, durante el proceso de ir de lo algebraico a lo gráfico, el estudiante en la mayoría de los casos utiliza como paso intermedio la tabulación de la expresión algebraica para obtener una serie de valores que le permitan ubicar puntos en el plano cartesiano y así construir la gráfica correspondiente a la función dada, luego, al trabajar con la función lineal se debe tener en cuenta sus diferentes formas de representación.

Ahora bien, Duval (1993a), resalta la importancia de trabajar con los diferentes registros de representación semiótica[3], puesto que la coordinación entre estos, juega un papel fundamental en la actividad matemática, Duval (1993a) afirma que: “Los objetos matemáticos[4] no son directamente accesibles a la percepción humana o de una experiencia intuitiva, es necesario entonces poder proporcionar representantes” (pág. 118).

La teoría de Duval plantea que las representaciones semióticas utilizadas en matemáticas, pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, limitaciones de funcionamiento y significado, y se encuentran condicionadas por las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Duval (1998) establece lo siguiente:

Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis:

1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado 2) El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es

---

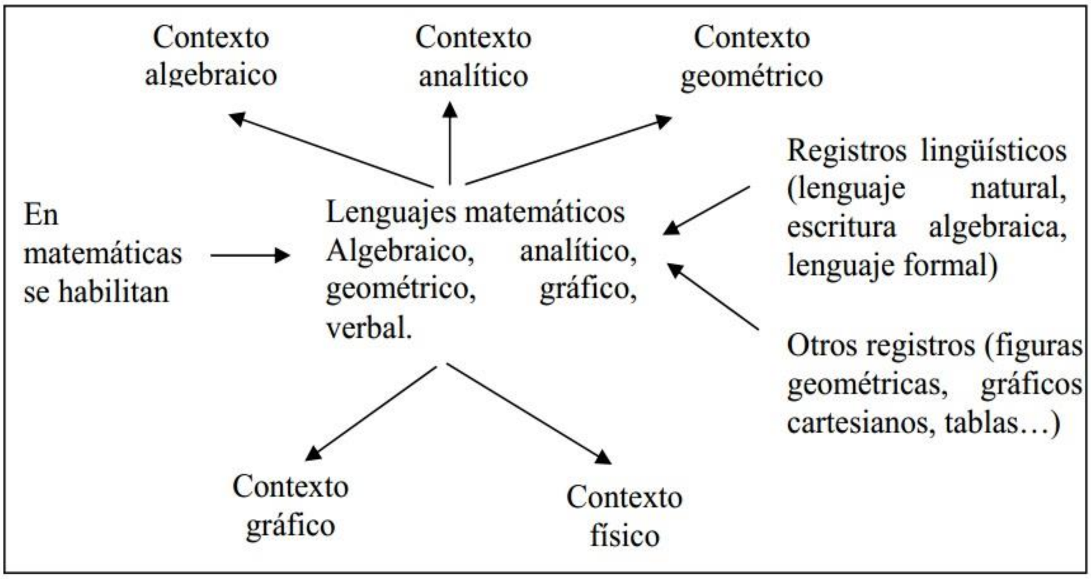
[3] Duval (1998) define el concepto de Representación semiótica, de la siguiente manera: son producciones constituidas por el empleo de signos, que representan a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Estas pueden ser representadas por medio de un enunciado en lengua natural, una formula algebraica, una gráfica, una figura geométrica.

[4] Duval (1998) menciona que los objetos matemáticos no es otra cosa que lo conceptual, (aprehensión conceptual). Ejemplos de objetos matemáticos: Una escritura, una notación, un número, una función, un vector, lo mismo son los trazos y las figuras geométricas.

una transformación interna a un registro 3) La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. (págs. 177-178)

Garbin (2005) explica los aportes de Duval partiendo del hecho de que en matemáticas se habilitan diferentes lenguajes matemáticos como: el algebraico, analítico, el geométrico, el grafico y el verbal, y cada lenguaje utiliza ciertos registros de representación semiótica que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquema, etc.).

Figura 1. Lenguajes Matemáticos. Fuente: Garbin (2005)



En un estudio realizado por Guzmán R (1998) con estudiantes de primer año de ingeniería, considerando como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica (Duval R. , 1998), su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades de funciones y tomando en cuenta los registros gráfico, algebraico (o formal) y lengua natural, afirma que los estudiantes muestran deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural.

Plantea que los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro grafico al algebraico; además, la preparación de los estudiantes es insuficiente en este tipo de tareas puesto que las traducciones y traslados requieren aprendizaje.

Gonzáles & Hernandez (s.f) cita el trabajo hecho por Janvier, quien reporta que algunas traducciones no son directas, sino que requieren de alguna otra forma de representación para poder efectuarse, como es el caso del proceso de ir de lo algebraico a lo gráfico, donde el estudiante acude, como caso intermedio, a la tabulación de la expresión algebraica, con lo que se obtiene una serie de valores que le permiten ubicar estos puntos en el plano cartesiano para así construir su gráfica correspondiente.

En una investigación hecha por Hitt (1995), se relaciona con la detección de errores al pasar de un tipo de representación (gráfica de una función) a otra (diseño de un recipiente y viceversa, trabajo con base a las respuestas dadas por profesores de matemáticas quienes presentan dificultades en contextualizar (analíticamente) la variable independiente que aparece en una gráfica, y en la realización de la traducción (preservando el significado), al pasar al contexto real y viceversa.

Hitt (1995), manifiesta que la visualización matemática permaneció a un nivel intuitivo primario donde, en la visualización matemática es la aptitud de los estudiantes para elaborar diagramas apropiados (con lápiz y papel, o en algunos casos con microcomputadoras para representar un concepto matemático o un problema del uso del diagrama para alcanzar la comprensión y como ayuda en la resolución de problemas.

La ausencia de procesos analíticos, no permitió a los profesores de matemáticas (nivel medio superior en México) pasar a otro nivel de abstracción que les proporcionara elementos de comparación con sus procesos intuitivos.

Así mismo, el presente trabajo se elabora teniendo en cuenta la investigación llamada análisis de comportamiento de los sujetos (también descrita por Gutiérrez (1991)), en la cual se trabaja a partir de una determinada información que permita conjeturar algunos motivos de la o las dificultades que se desea analizar. Para este caso en particular, se trabaja teniendo en cuenta el problema de las "comprensiones parciales" según el cual, parte de los errores que se cometen tiene origen una mala comprensión de los conceptos implicados.

D'Amore, Fandiño Pinilla y Lori (2013) se basan en los estudios realizados por Duval (1996, 2008) sobre la semiótica en el aula, para reconocer las dificultades que encuentran los estudiantes al realizar transformaciones semióticas en el desarrollo de las actividades matemáticas, por tanto, es importante focalizar la atención en las variaciones de las representaciones en otro registro.

D'Ámore et.al. (2013), plantean que: "El conocimiento es el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus experiencias sensoriales" (pág. 151). Por tanto, el sujeto que aprende, se caracteriza por participar activamente en el proceso de aprendizaje y por transformar y reconstruir un objeto de conocimiento, utilizando los instrumentos cognitivos que posee.

En general, la mayoría de los conceptos y objetos matemáticos son complejos, lo que ocasiona que los estudiantes no puedan comprender y aprender a la vez, D'Amore (2013) plantea que *Aprender* parece ser una construcción sometida a la necesidad de *socializar,* y en la Matemática está condicionado por el registro de representación elegido o impuesto por el contexto.

D’Amore (2013), presenta como una conclusión que todo objeto matemático lleva consigo varios componentes conceptuales y pueden ser representados en varios registros semióticos, por tanto, la mayor parte de estudiantes presentan dificultad en la gestión del aparato semiótico que la enseñanza- aprendizaje de la Matemática implica y por ello, en el aula de clase, los estudiantes aplican leyes o propiedades fuera del dominio de validez de un concepto matemático. Un ejemplo es lo traumático que resulta para los estudiantes pasar de las operaciones básicas en el conjunto de los números naturales (suma, resta, multiplicación y división) a operar en el conjunto de los números enteros; esto radica principalmente en que aplican las mismas propiedades de los números naturales en un dominio en el cual no son válidas, es decir el conjunto de los enteros.

En este trabajo se tendrán en cuenta lo planteado por D'Amore et al. (2013) y Gutiérrez (1991), en el sentido de que como docente, se deberán identificar las causas del *fracaso* y partir de la premisa de que los estudiantes son diferentes y que su éxito o no, sobre un concepto matemático, no solo depende de su habilidad o capacidad, sino también de otras variables sociales y culturales que deben tenerse en cuenta, tales como el entorno escolar, el familiar, entre otras.

Capitulo V. Estrategia Pedagógica

5.1 Objeto de enseñanza

Teniendo en cuenta que durante el desarrollo de la intervención en el aula, se tiene como interés identificar y estudiar la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes en los obstáculos y errores que se presentan durante el proceso de aprendizaje de conceptos ubicados dentro del algebra y teniendo en cuenta la organización del plan de estudios en el área de matemáticas de la I. E. John F. Kennedy, se escogió el grado octavo para realizar dicha intervención.

Se acordó orientar el tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en particular el método de solución gráfico, contenido programado para el cuarto periodo del grado octavo en el área de matemáticas y el cual se organiza a través de los siguientes desempeños, para el cual asigna un tiempo probable de 15 bloques de 60 minutos. (3 semanas):

- Formación intelectual (Competencias básicas específicas)

  Saber: Concepto de ecuación, ecuación lineal, solución de ecuaciones lineales.

- Proyección del conocimiento (Integración de competencias laborales)

  Saber hacer: Resolver ecuaciones de primer grado.

- Formación en valores y actitudes (Integración en competencias ciudadanas)

  Saber ser y convivir: Responsabilidad, Puntualidad.

Como estrategia didáctica menciona las didácticas contemporáneas, estructúrales, cognitivo y cognitivo-afectivo. Como estrategias evaluativas plantea la exposición temática, resolución de problemas, trabajos escritos, libro abierto, representación gráfica, examen, pruebas de actuación.

Establece como criterio de desempeño que dada una ecuación de primer grado con una incógnita se determine su conjunto solución aplicando correctamente las técnicas del despeje.

Respecto a la descripción de los componentes curriculares del área para el grado octavo cuyo eje son las ecuaciones, tiene en cuenta los siguientes estándares curriculares (2003):

Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y cambios en las gráficas que las representan.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertinentes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas

Estos estándares corresponden a toda la unidad temática, siendo el primero de ellos el que soporta el tema que correspondió orientar durante un tiempo de 8 semanas con clases de cinco horas semanales.

El objeto de enseñanza estuvo compuesto por los siguientes temas:

1. Ecuaciones (soluciones enteras y racionales), expresión algebraica, variable (Repaso).
2. Sistemas de ecuaciones lineales

   2.1 Conjunto solución.
3. Función lineal

   3.1 Gráfico de una función lineal en un plano cartesiano

   3.2 Gráfico de dos funciones lineales en un mismo gráfico: Punto de intersección.
4. Método de solución para sistemas de ecuaciones lineales 2x2

   4.1 Método gráfico.

   4.2 Método de igualación, método de sustitución, método por determinantes (Seminario).

5.2. Objetivos

5.2.1. Objetivo general (A nivel curricular).

Desarrollar competencias comunicativas y de interpretación del lenguaje algebraico y su relación con el lenguaje gráfico, a través de la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.2.2. Objetivos específicos (A nivel curricular).

- Estudiar los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.
- Proponer problemas en los que los sistemas de ecuaciones lineales apoyen su solución.
- Promover la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 a través del uso del método gráfico.

5.2.3. Objetivo general (De la intervención).

Estudiar la modificación del desempeño de los estudiantes a partir de las intervenciones en el aula realizada por la practicante en el desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.2.4. Objetivos específicos (De la intervención).

- Indagar sobre conocimientos previos que tienen los estudiantes.
- Identificar errores y dificultades en la evolución del desempeño de los estudiantes.
- Desarrollar una estrategia de enseñanza basada en trabajo en equipo para presentar los métodos de solución gráfica de Sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.3 Desarrollo secuencial de la temática

En primera instancia, se buscó diseñar y organizar de manera previa, las sesiones correspondientes al tema Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 a orientar en el grado octavo de la I. E. John F. Kennedy, la planeación debió ser modificada en varias ocasiones, debido a circunstancias presentadas en el aula durante el desarrollo de la práctica pedagógica.

Se acordó con el profesor no realizar presentación a los estudiantes, con el fin de observar el ambiente de aprendizaje sin la imposición de la relación profesor-estudiante, gracias a ello, en momentos donde el profesor salía del salón se pudo observar momentos donde primaba el dialogo y el juego por encima del trabajo asignado, también las constantes preguntas acerca de por qué razón estaba en su salón de clase, aunque inmediatamente se incorporaban a sus tareas cuando él volvía, lo anterior se relaciona con la descripción de “niños curiosos” dada previamente por el docente.

También se observó la confianza al momento de pedir o dar apoyo hacia sus compañeros al desarrollar las actividades y dar solución a las dificultades presentadas, además del constante dialogo con su profesor y participación al compartir la solución de un determinado ejercicio tanto verbal como escrito en el tablero.

Como proceso de transición entre la etapa de observación y la intervención en el aula de clase, se presentó la visita del Ministerio de Educación Nacional en la cual debían estar presentes los docentes en una reunión, razón por la cual, el docente a cargo presento a la practicante a los estudiantes y aclaro que a partir de esa sesión sería la encargada de orientar y evaluar los temas correspondientes al periodo final del año lectivo, en particular los sistemas de ecuaciones lineales 2X2 y sus métodos de solución.

Para lograr llevar a cabo el primer acercamiento, el profesor Leonardo recomendó plantear y resolver problemas lógicos, de esta forma previa a la clase se presentaron una serie de acertijos relacionados con el planteamiento de ecuaciones lineales de una y dos variables, de los cuales se escogieron los siguientes:

- Un gavilán vio una bandada de palomas y les dijo “Adiós a las cien palomas”, a lo que una de ellas respondió: “No somos cien, pero nosotras, más el doble de nosotras, más el triple del doble de nosotras, más usted señor gavilán, somos cien” ¿Cuántas palomas había?
- Doce halcones vieron una bandada de golondrinas, uno de ellos les dijo: “Adiós a las cien golondrinas” y una de ellas respondió: “No somos cien, pero tantas veces nosotras, más la mitad de nosotras, más la tercera parte de la mitad de la mitad de nosotras, más ustedes sumamos cien”. ¿Cuántas golondrinas había?

Lo anteriormente planteado se convirtió en la prueba diagnóstica de los conocimientos previos de cada estudiante (examen escrito de dos preguntas, sin calificación cuantitativa), el objetivo de esta prueba era observar y analizar como los estudiantes enfrentan cada uno de los problemas, discuten sobre las posibles soluciones y establecen mecanismos para lograr establecer la ecuación lineal asociada.

El taller estaba previsto inicialmente para una hora de clase, pero teniendo en cuenta que los estudiantes requirieron leer cada acertijo y plantear como entendían cada uno de ellos, además de que se debió hacer aclaraciones acerca del enunciado de los mismos, se extendió a dos horas durante las cuales por iniciativa propia plantearon a los asistentes su propuesta de solución de los mismos. Para esta actividad se contó con un total de 28 estudiantes.

Puesto que al revisar cada evaluación, se puede evidenciar en general, que el grupo de estudiantes presenta dificultades en el dominio de conceptos previos, se plantea que los estudiantes formen grupos según su afinidad para realizar las actividades posteriores, lo anterior teniendo en cuenta que se observó confianza al momento de pedir o dar apoyo hacia sus compañeros durante la búsqueda de soluciones a las dificultades presentadas en el desarrollo de la clase.

A continuación, con el fin de que los estudiantes realicen avances progresivos en su proceso de aprendizaje, se abordan los conceptos a enseñar de manera progresiva. En este sentido, el siguiente es el orden y la forma como se orientaron los temas:

1. *Se planteó como objetivo identificar lo que cada estudiante entiende por variable, incógnita, ecuación, función, línea recta y como se gráfica.*

Para ello durante el desarrollo de la clase se llevó a cabo una socialización acerca de lo que ellos entendían, además se retomó lo que el profesor había definido en relación a estos conceptos, para finalmente formalizar los conceptos tratados en clase.

A continuación se agregan las definiciones dadas en clase, las cuales se extraen de la RAE (2016) y del algebra de Baldor (1983):

- **Ecuación:** Es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.
- **Incógnita**: Cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema para resolverlos.
- **Expresión:** Conjunto de términos que representa una cantidad.
- **Expresión Algebraica:** Expresión analítica que solo contiene aquellas funciones calculables con las operaciones del álgebra, es decir, la suma, la multiplicación y sus inversas.
- **Expresión Analítica:** Conjunto de números y de símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones del análisis matemático.
- **Función:** Para el concepto de función se tendrá en cuenta lo planteado por María Cristina Toro Machado (2017) en su libro: La función del objeto α y la lógica del análisis. El concepto de *función* en matemáticas indica una forma de relación constante que puede tomar varios valores. Propiamente, la *función matemática* se deriva de la teoría de conjuntos, donde a un elemento de un conjunto "A" corresponde la relación con un solo elemento de un conjunto "B". $f(x)$ sería, entonces la función de este elemento x perteneciente al conjunto "A", que determina al segundo, al cual puede darse el nombre de y, quedando entonces la fórmula $f(x) = y$. En lógica formal, la primera parte de esta proposición es llamada la de los *argumentos* y la segunda, la de los *valores,* sabiendo también que a nivel de los argumentos existe un valor que va a

determinar el valor de toda la operación. Así, x se convierte en la variable independiente que determina el valor de y, como variable independiente.

Como tarea en casa se pidió investigar y entregar de manera escrita la solución a los siguientes interrogantes:

- ¿Qué son los ejes coordenados?
- ¿Qué clase de elementos conforman cada eje coordenado?
- ¿Qué es el plano cartesiano?
- ¿Cuál es la escala que tiene cada eje coordenado?
- Para $x = \square$, ¿cuál es su valor de y?
- ¿Existe algún valor de x para el cual no exista un valor de y?
- ¿Cómo se gráfica $y = x$?

Una vez revisadas y calificadas de manera cuantitativa lo entregado por los estudiantes se prosiguió a explicar en clase lo propuesto en la tarea, esto con el objetivo de que los estudiantes reconozcan el plano cartesiano, identifiquen las coordenadas de un punto en el plano cartesiano y logren dibujar el gráfico de una función lineal $y = x$, obteniendo la tabulación de la misma. Para esto se dieron las siguientes definiciones propuestas en Baldor (1983):

- Dos líneas rectas que se cortan constituyen **un sistema de ejes coordenados,** el punto de corte se denominará **Origen,** formando un ángulo de 90° y constituyendo así un **sistema de ejes coordenados rectangulares.**
- Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes** donde, cualquier distancia medida en el eje horizontal (eje de las x) desde el punto de origen hacia la derecha es **positiva** y desde el origen hacia la izquierda es **negativa**; ahora bien, cualquier distancia medida en el eje vertical (eje de las y) desde el punto de origen hacia arriba es **positiva** y desde el origen hacia abajo

es **negativa.** Por tanto el plano cartesiano permite la ubicación de un punto constituido por dos componentes llamadas coordenadas o par ordenado y el orden es (x, y).

- **Gráfico de una función:** Sea $\boldsymbol{y = f(x)}$. Para cada valor de $\boldsymbol{x}$ corresponde uno y sólo un valor de $\boldsymbol{y}$, esto es, tomando valores de $\boldsymbol{x}$ como primeras componentes y los valores $\boldsymbol{y = f(x)}$ como segundas componentes se obtendrá una serie de puntos; el conjunto de todos estos puntos será una línea recta o curva, que determina el gráfico de la función o el gráfico de la ecuación $\boldsymbol{y = f(x)}$ que representa la función.

El proceso anteriormente descrito tuvo una duración de una semana (5 horas) y contó con la participación de 23 estudiantes.

2. *Se planteó como objetivo que el estudiante deduzca que para obtener el gráfico de la función lineal asociada a una ecuación, basta tabular y representar unos cuantos puntos y unirlos.*

Teniendo en cuenta que de manera previa en clase se tabulo y graficó la ecuación $y = x$, asociada a una función lineal, se plantean los siguientes ejercicios:

1. $y = -x$
2. $y = x + 1$
3. $y = -x + 1$
4. $y = x - 1$
5. $y = -x - 1$
6. $y = 2x$
7. $y = -2x$
8. $y = 2x + 1$
9. $y = 2x - 1$
10. $2y = x$

Los ejercicios son realizados en clase de manera progresiva, por tanto los estudiantes en clase preguntan acerca de sus dudas y se resuelven a medida que avanzan en los ejercicios. De acuerdo a los progresos realizados se les otorga una serie de bonificaciones, las cuales se suman en la nota final de esta segunda parte.

La duración del proceso anteriormente mencionado fue de dos semanas (10 horas) debido a que por reunión de profesores y eventos culturales no había clase y al transcurrir de una semana los estudiantes solicitaban que la profesora aclarara sus dudas y corrigiera sus errores durante la hora de clase.

Al finalizar este tiempo, se recogió el trabajo escrito desarrollado por los estudiantes para ser calificado.

3. *Se tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen un sistema de ecuaciones lineales 2x2 e identifiquen a través de la gráfica de cada ecuación en un mismo plano cartesiano la solución del mismo.*

Para ello, se presenta en clase la siguiente definición:

- Sistema de ecuaciones lineales (Baldor, 1983): Un sistema de ecuaciones lineales, es un grupo de dos más ecuaciones, con dos o más incógnitas o variables.

Para abordar el estudio de aquellos sistemas que comprenden 2 ecuaciones y dos incógnitas, o más comúnmente llamados sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se presentó las siguientes definiciones: (Baldor, 1983):

- **Conjunto solución**: dado un sistema de ecuaciones lineales, el conjunto solución se define como el grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

- **Sistema de ecuaciones lineales** Grossman (1998): Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de m ecuaciones lineales en las mismas n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Posterior a ello se plantearon los siguientes ejercicios, los cuales son desarrollados en clase y en casa:

1. $\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - x = -1 \\ y + x = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ y + 2x = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2y - x = 2 \\ 2y + x = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y - x = 0 \\ 5y + 5x = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 12y - 6x = 3 \\ 4y - 2x = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 27y + 9x = 18 \\ 3y + x = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6y - 8x = 12 \\ 3y - 4x = 6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y + x = 0 \\ y + x = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3y + 5x = 0 \\ 3y + 5x = 11 \end{cases}$

Durante el desarrollo en clase se les realizaban las siguientes preguntas:

¿Es este ejercicio similar a algún otro que hayas solucionado antes?

¿Qué características tienen en común cada una de las ecuaciones?

¿Mínimo cuantos puntos son necesarios para obtener cada gráfico?

¿Existe algún valor de x para el cual no exista un valor de y?

¿Se cortan en algún punto?

¿No se cortan en ningún punto?

¿Se cortan en una gran cantidad de puntos?

A pesar de que son ejercicios trabajados en el taller previo, algunos estudiantes siguen presentando dudas al momento de realizar la gráfica de cada ecuación.

La duración del proceso anteriormente mencionado fue de dos semanas (10 horas), donde al finalizar este tiempo se recogió de manera escrita lo desarrollado por los estudiantes en grupos para ser calificado.

4. *Se busca que el estudiante logre relacionar lo trabajado en sesiones anteriores para llegar a identificar y utilizar el método gráfico de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.*

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios realizados hasta el momento, y teniendo en cuenta que los estudiantes llegan al punto de identificar las gráficas realizadas asociadas a la línea recta, se debió mencionar que se había estado trabajando con sistemas de ecuaciones lineales, las cuales debían su nombre a que cada una de las ecuaciones del sistema representa líneas en el plano cartesiano, en este sentido se dio la siguiente definición:

- Método gráfico (Baldor, 1983): Consiste en dibujar en un mismo plano cartesiano las rectas cuyas ecuaciones aparecen en el sistema.

Pasos para usar este método: "Forma estándar" de aplicar este método.

1) Despeja la variable y en ambas ecuaciones.
2) Realiza la tabulación para cada una de las ecuaciones encontradas en el paso 1.
3) Dibuja las rectas en un mismo plano.
4) Observa y encuentra su punto de intersección (si lo hay).
5) Realiza la verificación correspondiente: esto es, toma el punto de intersección que encontraste (si lo hay) en el paso anterior y remplázalo en cada una de las ecuaciones, observa y concluye.

Dentro de los ejercicios propuestos para la aplicación de este método, se presentó a los estudiantes algunos sistemas con infinitas soluciones, como también otros que no tienen solución, con el fin de que al graficar las rectas, fueran ellos quienes notaran la diferencia.

Entre algunos de dichos sistemas están:

1. $\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - x = 0 \\ 5y - 5x = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$

La duración del proceso anteriormente mencionado fue de una semana (5 horas), donde al finalizar este tiempo se recogió de manera escrita lo desarrollado por los estudiantes en grupos para ser calificado.

5. *Se busca presentar a los estudiantes las principales características de los otros métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (igualación, reducción, sustitución y determinantes)*

Lo anterior se realizó a modo de seminario, durante una sesión de dos horas adicionales, la cual fue gestionada por el profesor Leonardo Ordoñez, por petición de la practicante. Durante ella se retomaron algunos ejercicios trabajados de manera previa en las sesiones y se presentó la forma de solucionarlos a través de los diferentes métodos, frente a la cual se llegó a la conclusión de que el resultado debe ser el mismo en cada uno de ellos.

Para ello se retomaron las definiciones de sistema de ecuaciones y solución de un sistema de ecuaciones dados en las sesiones anteriores, el objetivo es que cada estudiante logre resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2, por los siguientes métodos de solución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases}$$

1. **Método Gráfico:**

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico se debe:

a) Despejar la variable "y" para escribir cada ecuación del sistema en forma de la ecuación general de la línea recta, como sigue:

$$\begin{cases} y = \dfrac{28 - 2x}{3} \\ . \\ y = \dfrac{10 + 4x}{5} \end{cases}$$

a) Realizar el gráfico asociado a las ecuaciones que componen el sistema.

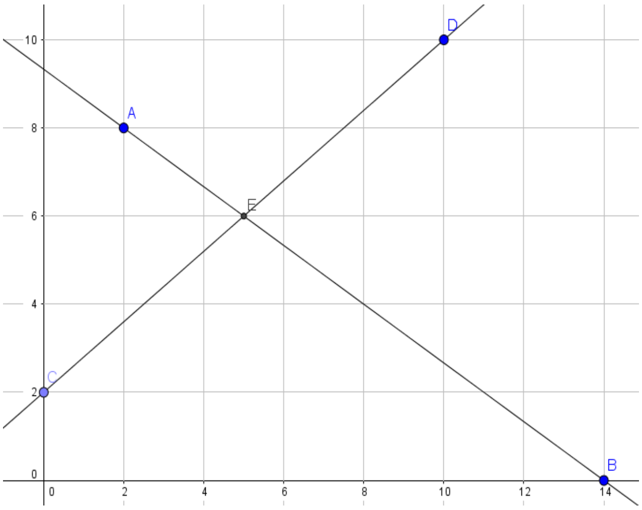
   Para ello, se asignan valores distintos a x y se calcula el correspondiente valor de y, en cada caso, se marcan estos dos puntos en el plano cartesiano.

En este caso, en la primera ecuación, si $x = 2$, entonces $y = 8$, esto corresponde al punto $A\ (2, 8)$. Si $x = 14$, entonces $y = 0$, que corresponde al punto $B\ (14, 0)$.

De la misma manera, en la segunda ecuación, si $x = 0$, entonces $y = 2$; esto corresponde al punto $C\ (0, 2)$, si $x = 10$, entonces $y = 10$, que corresponde al punto $D\ (10, 10)$.

Con esto se pueden graficar ambas rectas como lo muestra en el siguiente grafico

Figura 2. Solución gráfica del sistema. Fuente: Geogebra



Las rectas se intersecan en el punto $E\ (5, 6)$. Entonces, $x = 5, y = 6$ es solución del sistema.

Prueba:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 2(5) + 3(6) = 28 \\ 5(6) - 4(5) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 + 18 = 28 \\ 30 - 20 = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 28 = 28 \\ 10 = 10 \end{cases}$$

2. **Método por Igualación**

Para resolver el sistema, se debe encontrar el punto de intersección entre las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación. Para ello:

a) Se despeja una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual se obtiene un sistema equivalente (en este caso se elige y):

$$\begin{cases} y = \dfrac{28 - 2x}{3} \\ . \\ y = \dfrac{10 + 4x}{5} \end{cases}$$

b) Como los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto al igualar se tiene:

$$\frac{28-2x}{3}=\frac{10+4x}{5}$$

$$5\,(28-2x) \;=3(10+4x)$$

$$140-\;10x \;=\; 30+12x)$$

$$140-\;30 \;=\; 10x+12x$$

$$110 \;=\; 22x$$

$$\frac{110}{22}=\; x$$

$$5 \;=\; x$$

c) Reemplazando el valor $x=\;5$ en alguna de las ecuaciones (en este caso se elige la segunda ecuación):

$$y=\frac{10+4(5)}{5}$$

$$y=\frac{10+20}{5}=\frac{30}{5}$$

$$y=6$$

Se realiza la prueba, en ambas ecuaciones, para saber si realmente el valor $(x.y)=(5{,}6)$ las satisface

$$\begin{cases}2x+3y=28\\ 5y-4x=10\end{cases}\sim\begin{cases}2(5)+3(6)=28\\ 5(6)-4(5)=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}10+18=28\\ 30-20=10\end{cases}\sim\begin{cases}28=28\\ 10=10\end{cases}$$

De lo anterior se puede concluir que $x=5$ y $y=6$ satisface el sistema dado.

Se plantea al estudiante realizar este mismo ejemplo despejando x al comienzo y reemplazando en las dos ecuaciones.

3. **Método por Sustitución.**

Para resolver el sistema se debe:

a) Despejar una de las variables en una de las ecuaciones (en este caso se elige la variable y en la primera ecuación): $y = \frac{28-2x}{3}$

b) El anterior valor se reemplaza en la segunda ecuación:

$$5\left(\frac{28-2x}{3}\right) - 4x = 10$$

c) Operando para despejar la única variable existente se sigue:

$$5\left(\frac{28-2x}{3}\right) - 4x = 10$$

$$\frac{140-10x}{3} - 4x = 10$$

$$3\left[\left(\frac{140-10x}{3}\right) - 4x\right] = 3(10)$$

$$140 - 10x - 3(4x) = 30$$

$$140 - 10x - 12x \quad = 30$$

$$140 - 22x = 30$$

$$140 - 30 \quad = 22x$$

$$110 \quad = 22x$$

$$\frac{110}{22} = \quad x$$

$$5 = \quad x$$

d) Se reemplaza el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (en este caso se escoge la primera ecuación):

$$2x + 3y = 28$$

$$2(5) + 3y = 28$$

$$10 + 3y = 28$$

$$3y = 28 - 10$$

$$3y = 18$$

$$y = \frac{18}{3}$$

$$y = 6$$

La respuesta es $x = 5$, $y = 6$, la cual es igual que en el caso anterior.

4. **Método por Reducción**

Teniendo en cuenta que se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ -4x + 5y = 10 \end{cases}$$

El objetivo es eliminar una de las incógnitas, dejándolas inversas aditivas, se recuerda a los estudiantes que una igualdad no cambia si se la multiplica por un número, además que una igualdad no se altera al sumar otra igualdad.

Luego, si se quiere eliminar la variable x, ¿por qué número se debe multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

La respuesta es -2. En efecto:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 & \textit{se multiplica por } (2) \\ -4x + 5y = 10 & \textit{se multiplica por } (1) \end{cases}$$

Con lo que se obtiene:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 56 \\ -4x + 5y = 10 \end{cases}$$

Y se suma a la primera, con lo cual se obtiene:

$$11y = 66$$

$$y = \frac{66}{11}$$

$$y = 6$$

Luego se reemplaza el valor obtenido de y en la segunda ecuación $5y - 4x = 10$, para finalmente hallar el valor de x:

$$5(6) - 4x = 10$$

$$30 - 4x = 10$$

$$30 - 10 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$\frac{20}{4} = x$$

$$5 = x$$

La respuesta $x = 5$, $y = 6$, igual que en el caso anterior.

Los resultados de la secuencia anteriormente descrita y su respectivo análisis se mostraran en el capítulo VI.

5.4 Metodología

De acuerdo a los resultados obtenidos en el proceso de observación, en el desarrollo de la práctica docente como experiencia en el aula y teniendo en cuenta las recomendaciones dadas por el docente Leonardo Ordoñez, se planteó combinar los siguientes métodos de enseñanza:

El método inductivo comenzando con la exploración de algoritmos y reglas vistos durante el desarrollo de los tres períodos anteriores, para ser aplicados a situaciones problema del contexto general de los estudiantes hasta llegar a la solución de problemas generales y complejos.

El método deductivo en cambio, funcionó con algunos estudiantes que a partir de la solución de situaciones problemas iniciales, generalizaron reglas, procedimientos y alternativas de solución más complejas.

En cuanto a las actividades con los estudiantes se les brinda la posibilidad de participar según la necesidad de cada uno, preguntar, proponer y plantear alternativas de solución en los diferentes temas desarrollados, solución de talleres, así como la programación de cada evaluación. Ellos trabajaron de manera grupal empleando el trabajo en equipo, para superar dificultades, autocorregir y fortalecer aspectos del proceso cognitivo en forma grupal.

Durante el transcurso de las clases en el proceso de intervención, se tiene que algunos de ellos no asisten a clase de manera frecuente por quebrantos de salud o por asuntos familiares; por otra parte, otros estudiantes manifiestan que a pesar de la explicación dada en clase, el tema no les quedó claro. Para enfrentar estas dificultades fue necesario dialogar con el estudiante para llegar a una solución, de las cuales fueron:

- Leer en casa los conceptos vistos en clase, retomar de nuevo los ejemplos dados y con calma intentar dar solución con ayuda de lo previamente estudiado.
- Consultar en libros sobre el tema, visitar algunas páginas en internet en las que encuentra tanto explicación del tema, como ejercicios resueltos, o ejercicios de aplicación entre otros.
- Asignación de nuevos ejercicios se relacionen a lo visto en clase y permitan como profesor evidenciar los avances que el estudiante logre.

Aquellos estudiantes que siguieron lo sugerido hacían aportes de mayor complejidad en el transcurso de la clase.

5.5 Evaluación

Según los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (2003), el conocimiento matemático se distingue por los siguientes tipos básicos:

- El conocimiento conceptual: Se caracteriza por ser un conocimiento teórico producido por la actividad cognitiva, tener un carácter declarativo. Se asocia con el saber qué y el saber por qué, lo cual lo hace más cercano a la reflexión.
- El conocimiento procedimental: Se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones, las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. Este conocimiento se encuentra más cercano a la acción, puesto que se asocia con el saber cómo, esto es, ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos.

Con base a lo anterior, la evaluación se compone de tres ítems conceptual, procedimental y actitudinal, para ello se tiene en cuenta la escala cuantitativa de evaluación de uno (1) a cinco (5) establecida por el reglamento interno del colegio. La nota final del curso, se obtuvo promediando las notas obtenidas en cada ítem.

5.5.1 Evaluación conceptual.

Se obtiene a través de la utilización de los siguientes instrumentos:

- **Talleres escritos:** Esta actividad se realizó de manera previa a cada uno de los exámenes de manera grupal, con el fin de que los estudiantes identificaran los conceptos tratados en clase y a través de la práctica y constante intercambio de opiniones entre ellos mismos o con la docente, resolvieran sus dudas respecto al tema.
- **Exposiciones cortas:** Al proponer ejercicios en el tablero, los estudiantes salían a resolverlos, en términos de evaluación, se tenía en cuenta la habilidad del estudiante para resolver el problema y la claridad a la hora de exponer sus ideas ante el resto del grupo, lo anterior se planteó con el objetivo de fomentar la comunicación y la capacidad participativa y critica de los estudiantes.

5.5.2. Evaluación procedimental.

Se obtiene a través de la utilización del siguiente instrumento:

- **Examen escrito:** Se hicieron en total tres exámenes incluyendo la prueba diagnóstica, cada uno de estos constaba de una serie de preguntas dependiendo del tema a evaluar y los ejercicios realizados en clase. El tiempo dado para la resolución de estas pruebas fue calculado a partir del tiempo que se demoraba la practicante en resolverlos, dando el 75% más del tiempo usado por la practicante. Todos los exámenes fueron resueltos de manera individual y sin la posibilidad de usar ningún dispositivo electrónico

5.5.2. Evaluación actitudinal.

Teniendo como eje principal al estudiante y su aprendizaje, durante la intervención se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: responsabilidad, comportamiento dentro y fuera del aula, respeto dentro y fuera del aula, interés, participación, presentación personal, asistencia y puntualidad, lo anterior permitió a la docente asignar una nota cuantitativa.

Cada estudiante tuvo la oportunidad de evaluar los aspectos anteriormente mencionados, a través de lo cual se buscó que él llegará a describir su propia metodología de trabajo, a reconocer los logros obtenidos e identificará que aspectos debía mejorar y asignar una nota cuantitativa teniendo en cuenta sus propios criterios.

5.6 Modelo pedagógico adoptado

El modelo pedagógico adoptado es el constructivista, para lo cual se tendrá la posición intermedia a las aportaciones piagetianas y vygotskianas, donde la interacción social favorece la producción de aprendizaje individual.

Tünnermann Bernheim (2011) cita a la doctora Frida Díaz-Barriga y al maestro Gerardo Hernández Rojas, quienes describen los principios educativos asociados con una concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza, donde el aprendizaje es subjetivo y personal al implicar un proceso constructivo interno; social y cooperativo que facilita la mediación o interacción con los otros. El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo, emocional y social, y de la naturaleza de las estructuras de conocimiento, donde el punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos y experiencias previos y la disposición por aprender que tiene el aprendiz.

Ahora bien, Ramirez Toledo (s.f) describe al docente como aquel profesional reflexivo que piensa críticamente en su práctica, toma decisiones y soluciona problemas presentados durante el desarrollo de sus clases, además se encarga de realizar una labor de mediación entre el conocimiento y el aprendizaje de sus estudiantes, y orienta la actividad mental constructiva de los mismos. Señala que el docente debe de estructurar experiencias interesantes y significativas que promuevan aprendizajes significativos, con sentido y que sean funcionales para los estudiantes, teniendo en cuenta la diversidad de necesidades o intereses y situaciones en que ellos se involucran.

Capítulo VI. Presentación y Análisis de Resultados

En la intervención en el aula, se manejó un proceso de evaluación en el que se tuvo en cuenta lo conceptual, procedimental y actitudinal. Con respecto lo conceptual y procedimental con el fin de cuantificar el desempeño del estudiante, en la tabla 1 se presenta la escala de valoración de uno (1) a cinco (5).

Tabla 1. *Escala de Valoración Cuantitativa*

Nivel de Desempeño	**Calificación**
Superior	[4.5-5.0]
Alto	[4.0-4.5)
Básico	[3.0-4.0)
Bajo	[1.0-3.0)

Con respecto a lo actitudinal, teniendo en cuenta el desempeño del estudiante en las diferentes actividades desarrollas, se cuantificó y se promedió con lo procedimental y lo conceptual para obtener el desempeño final. De acuerdo con el PEI (2013), se aprueba la materia con una calificación final mayor o igual 3,0.

A continuación, se presentarán los resultados correspondientes al primer examen, lo cual fue acordado con el director de práctica en vista de que a partir de ellos se formularán observaciones y consideraciones finales.

5.1 Resultados del Primer Examen Escrito

El primer examen estuvo compuesto de una sola pregunta y con base a los 23 resultados (23/32 estudiantes) obtenidos se presenta una categorización, la descripción de cada categoría y el porcentaje de estudiantes que se encuentran en cada una de ellas.

Categorías del primer examen escrito (23/32 resultados)

Primer punto. Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

En este punto, el estudiante debe retomar conceptos vistos previamente en clase y desarrollados en los talleres 1 y 2 tales como ecuación, plano cartesiano y la respectiva representación de una ecuación lineal en un plano cartesiano. Además, el estudiante debe identificar que las ecuaciones que conforman el sistema, pasan por el origen.

La tabla 2 muestra las diferentes categorizaciones en relación con los resultados obtenidos en el primer punto del primer examen escrito.

Tabla 2. *Resultados del primer examen escrito*

Categoría	Descripción	% de estudiantes
C1. Identifica la relación entre las ecuaciones presentadas y su respectiva representación en un plano cartesiano.	El estudiante entiende que en un plano cartesiano se deben presentar la representación de cada una de las ecuaciones, identifica que cada representación equivale a una ecuación, identifica si la representación de cada ecuación es de la forma $y = mx$ y de no estar es capaz de llevarlo a la forma, además reconoce la necesidad de conocer los puntos del plano cartesiano por donde pasa cada ecuación, tabula, dibuja en el plano cartesiano, ubica los puntos y finalmente realiza el gráfico.	18,8
C2. Identifica solo ciertas características de la relación entre las ecuaciones presentadas y su respectiva representación en un plano cartesiano.	El estudiante entiende que en un plano cartesiano se deben presentar la representación de cada una de las ecuaciones, aunque no identifique algunos de los componentes descritos en C1.	53,1
C3. No identifica la relación entre las ecuaciones presentadas y su respectiva representación en un plano cartesiano.	El estudiante no identifica ninguna de los componentes descritos en C1.	0
C4. No presentaron	Los estudiantes no presentaron el primer examen.	28,1

En la categoría C1, el 18,8% de los estudiantes identifica la relación entre las ecuaciones presentadas y su respectiva representación en un plano cartesiano.

El estudiante reconoce una secuencia lógica y ordenada de pasos que le permite plantear un esquema de solución, esto es:

1. Entiende que en un plano cartesiano se debe presentar la representación de cada una de las ecuaciones.
2. Identifica que cada representación equivale a una ecuación.
3. Identifica si la representación de cada ecuación es de la forma $y = mx$.
4. En caso contrario, debe llevar la ecuación a dicha forma.
5. Reconoce la necesidad de conocer los puntos del plano cartesiano por donde pasa la ecuación.
6. Tabula cada ecuación.
7. Dibuja un plano cartesiano y ubica los puntos.
8. Realiza el gráfico.

En la categoría C2, el 53,1% de los estudiantes que entienden que en un plano cartesiano se deben presentar la representación de cada una de las ecuaciones, aunque presentan dificultades en los cálculos aritméticos, lo cual los conlleva a dar una tabulación errada y realizan una representación que no corresponde a la solución del sistema de ecuaciones presentado.

En la categoría C3, el 0% de los estudiantes no identifican la relación entre las ecuaciones presentadas y su respectiva representación en un plano cartesiano.

En la categoría C4, se encuentra el 28.1% de los estudiantes que no asistieron al primer examen, por ello no se puede realizar el respectivo análisis de resultados.

5.2 Desempeño de los Estudiantes

A continuación, se presenta y describe el desempeño de los estudiantes desde el inicio de la intervención hasta la finalización de la misma, para lo cual se muestran gráficas del desempeño en la prueba diagnóstica, la evaluación procedimental (promedio de los talleres), la evaluación conceptual (se muestran los desempeños en cada uno de los exámenes y el promedio entre ellos), la evaluación actitudinal (la cual tuvo en cuenta la asistencia, respeto y responsabilidad, además de notas adicionales dadas por participación y realización de ejercicios adicionales). Posteriormente se presenta el desempeño de la nota parcial obtenida con el promedio de la evaluación conceptual y procedimental para finalmente mostrar el desempeño final de los estudiantes (promedio de las tres evaluaciones).

Respecto a los estudiantes que no participaron en alguna de las actividades, durante el transcurso de la intervención, cada uno de ellos presentó la excusa autorizada por parte del colegio, lo cual le permitió recuperar a través de la realización de ejercicios adicionales.

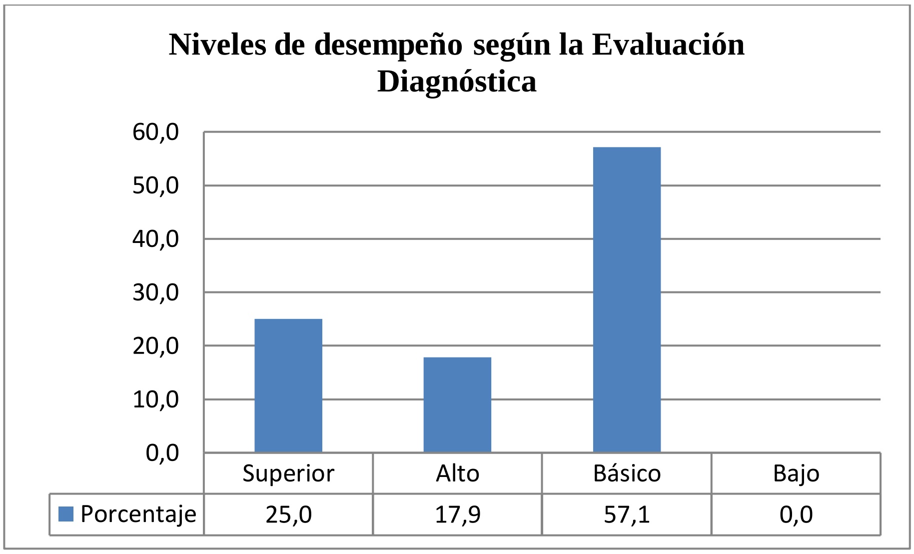
Es importante mencionar que en la siguiente descripción de los niveles de desempeños, en el análisis se consideraron solamente los niños que participaron en las actividades correspondientes.

- **Desempeño en la Evaluación Diagnóstica**

Respecto a la evaluación diagnóstica el desempeño fue tenido en cuenta solamente por la practicante para organizar las actividades desarrolladas durante el transcurso de la intervención.

Esta actividad contó con la participación de 28 de un total de 32 estudiantes (87,5%).

Figura 2. Niveles de desempeño de los estudiantes según la Prueba Diagnóstica



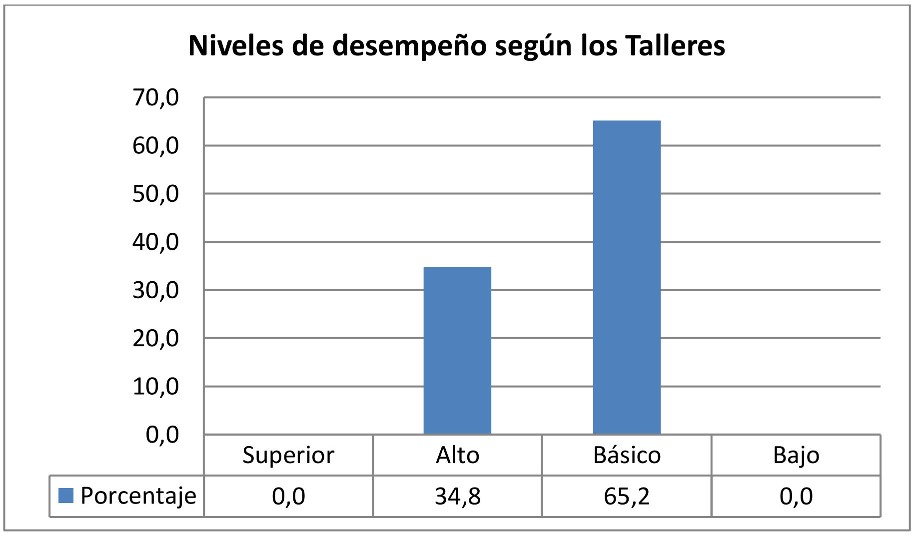
La Figura 2, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos en el desarrollo de la prueba diagnóstica, donde el 25,9% de los estudiantes se encuentran ubicados en nivel superior, el 17,9% en nivel alto, el 57,1% en nivel básico y un 0% en nivel bajo.

En cada uno de los niveles de desempeño analizados, se consideró solamente los niños que participan en las actividades correspondientes.

- **Desempeño en los Talleres**

Esta actividad contó con la participación de 23 de un total de 32 estudiantes (71,9%).

Figura 3. Niveles de desempeño según los talleres (Promedio de los tres talleres)

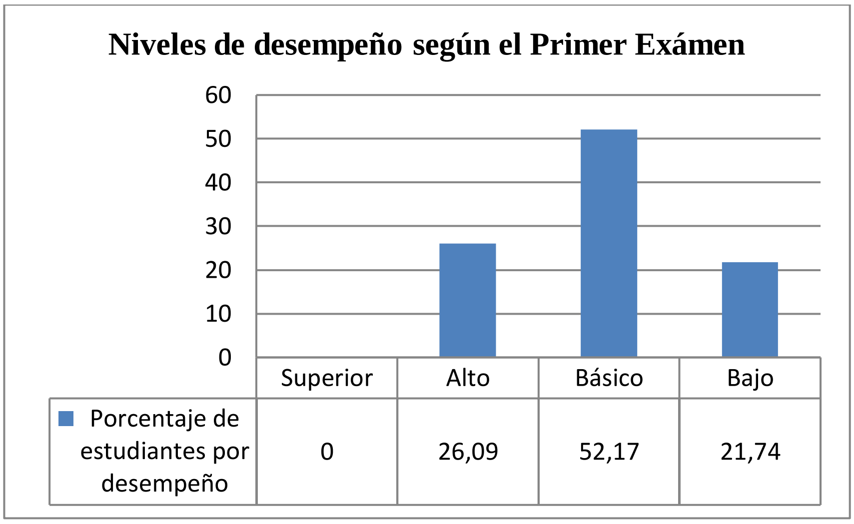


La Figura 3, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos en el desarrollo de talleres, el cual se basa el promedio de las notas cuantitativas obtenidas en los tres talleres realizados. Donde el 0% está en nivel superior, un 34,8 % está en nivel alto, un 65,2% en nivel básico y un 0% en nivel bajo.

- **Desempeño en el Primer Examen**

Esta actividad contó con la participación de 23 de un total de 32 estudiantes (71,9%).

Figura 4. Niveles de desempeño de los estudiantes según el Primer Examen



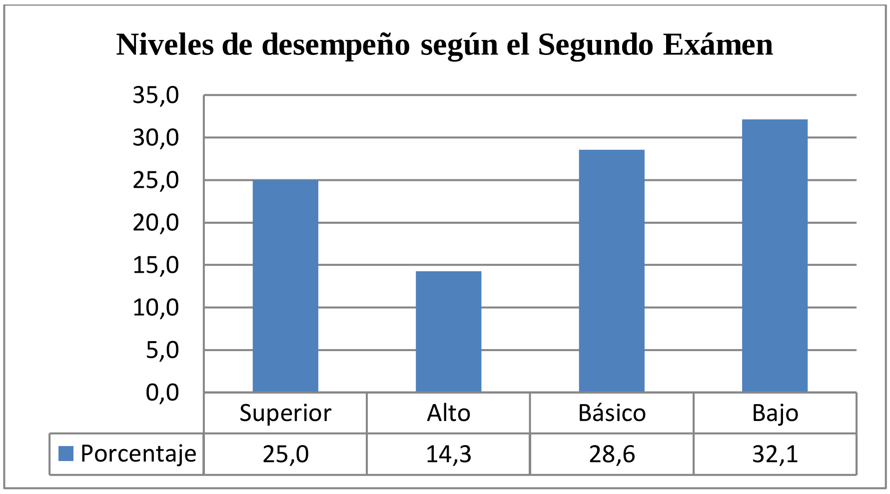
La Figura 4, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos en el desarrollo del primer examen. Donde el 0% de estudiantes se encuentran en nivel superior, el 26,09% en nivel alto, el 52,17% en nivel básico y un 21,74% en el nivel de desempeño bajo.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el primer examen, en donde se evidenciaron errores aritméticos y de establecimiento de escalas en un plano cartesiano, la practicante en la clase siguiente presentó a los estudiantes los errores más frecuentes y resolvió lo propuesto en el correspondiente examen.

- **Desempeño en el Segundo Examen**

Esta actividad contó con la participación de 28 de un total de 32 estudiantes (87,5%).

Figura 5. Niveles de desempeño de los estudiantes según el segundo examen



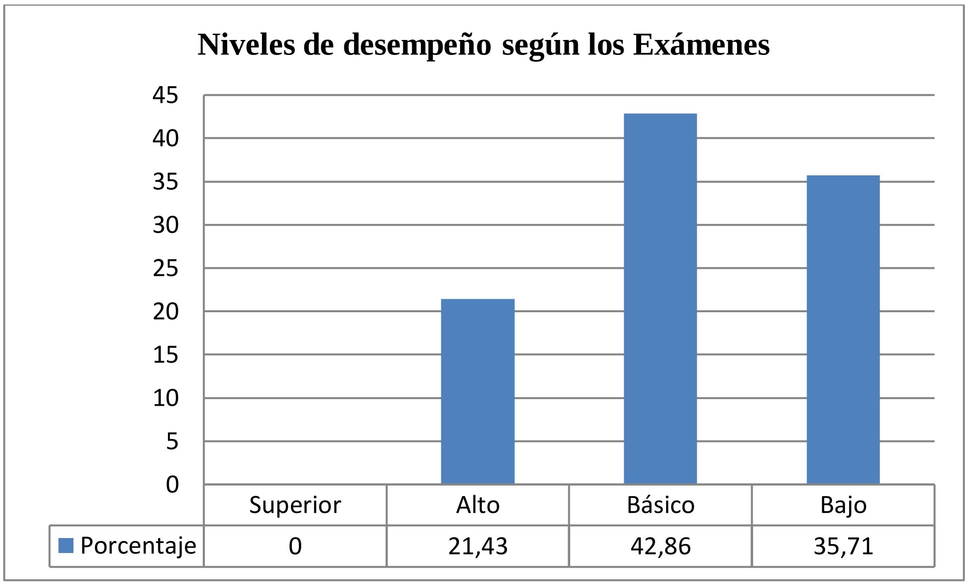
La Figura 5, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos en el desarrollo del segundo examen. Donde el 25,0% de estudiantes se encuentran en nivel superior, el 14,3% en nivel alto, el 28.6% en el nivel de desempeño básico y un 32,1% en el nivel bajo.

Mientras que en el primer examen no se ubicaron estudiantes en el nivel desempeño superior, en el segundo examen se ubica un 25% en este nivel, una de las razones que se puede inferir de la revisión de los exámenes es que tuvieron en cuenta lo sugerido después del primer examen, sin embargo, se presenta un 32,1% de estudiantes ubicados en desempeño bajo.

- **Desempeño en los Exámenes**

Esta actividad contó con la participación de 28 de un total de 32 estudiantes (87,5%).

Figura 6. Niveles de desempeño de los estudiantes según los Exámenes (Promedio de los dos exámenes)

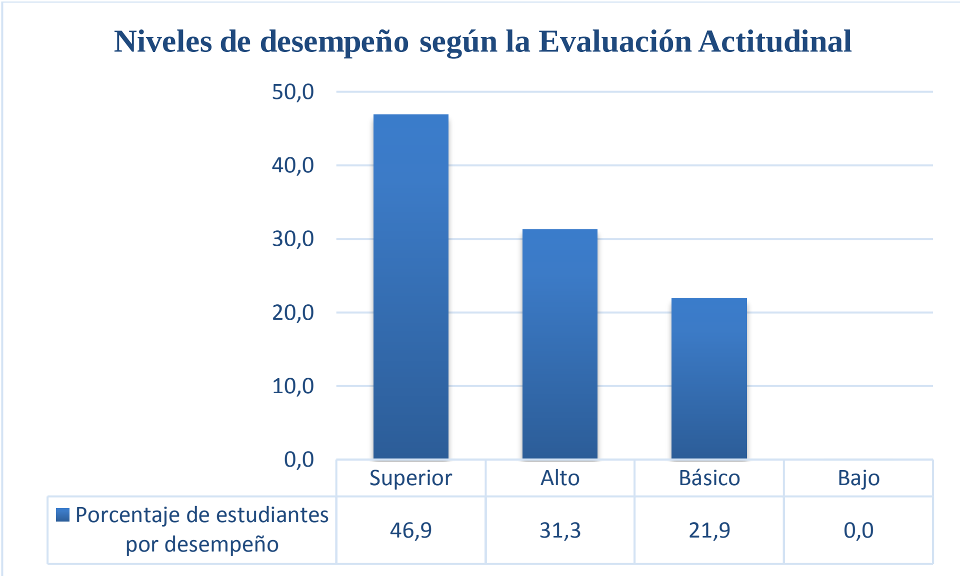


La Figura 6, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos del promedio de las dos evaluaciones. Donde el 0% de estudiantes se encuentran en nivel superior, el 21,43% en nivel alto, el 42,86% en el nivel básico y un 35,71% en nivel bajo.

- **Desempeño en la Evaluación Actitudinal**

Esta actividad contó con la participación de 32 de un total de 32 estudiantes (100%).

Figura 7. Niveles de desempeño de los estudiantes según la Evaluación Actitudinal



La Figura 7, muestra los niveles de desempeño según los resultados obtenidos en la evaluación actitudinal, la cual se tuvo en cuenta durante todo el proceso de intervención y que tiene en cuenta aspectos del estudiante como asistencia, participación, respeto y responsabilidad en la participación de las actividades propuestas. Donde el 46,9% de estudiantes se encuentran en nivel superior, el 31,3% en nivel alto, el 21,9% en el nivel básico y el 0% en nivel bajo.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los dos exámenes, los estudiantes solicitaron a la practicante asignar ejercicios adicionales que les permitiesen mejorar su rendimiento, lo cual permitió seguir evidenciando su interés y participación en las actividades planteadas durante la intervención. La nota obtenida por la realización de estos ejercicios se promedia en la evaluación actitudinal.

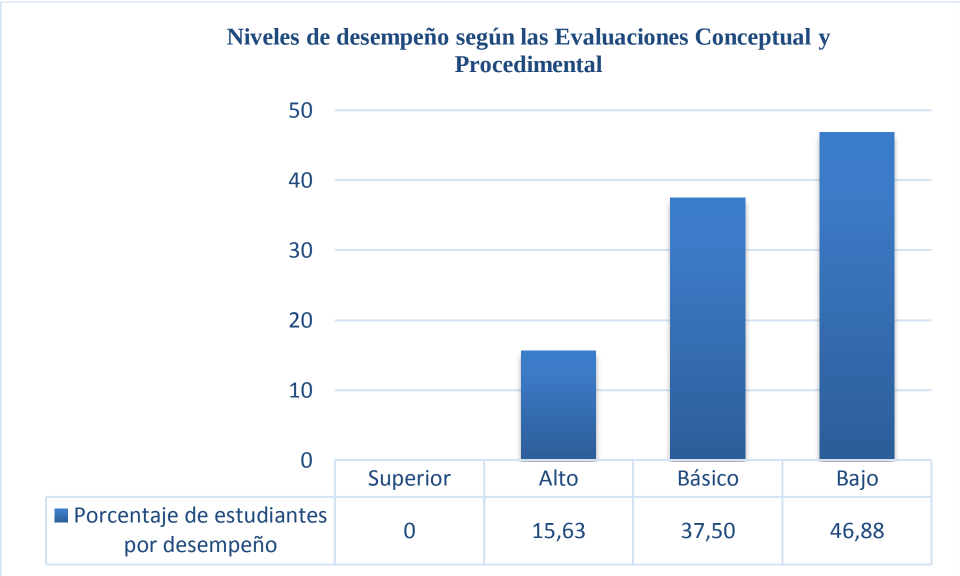
- **Desempeño de la Nota Definitiva**

Para obtener la nota definitiva se tendrán en cuenta las notas previas obtenidas para la evaluación actitudinal y procedimental (obtenidas a partir del promedio de los talleres y el promedio de las evaluaciones escritas respectivamente) y la nota obtenida en la evaluación actitudinal, para ello se asignará el 33,3% a cada una de ellas.

Para ello primero se analiza los niveles de desempeño en las Evaluaciones Conceptual y Procedimental.

Esta actividad contó con la participación de 32 de un total de 32 estudiantes (100%).

Figura 8. Niveles de desempeño según las Evaluaciones Conceptual y Procedimental (Promedio)

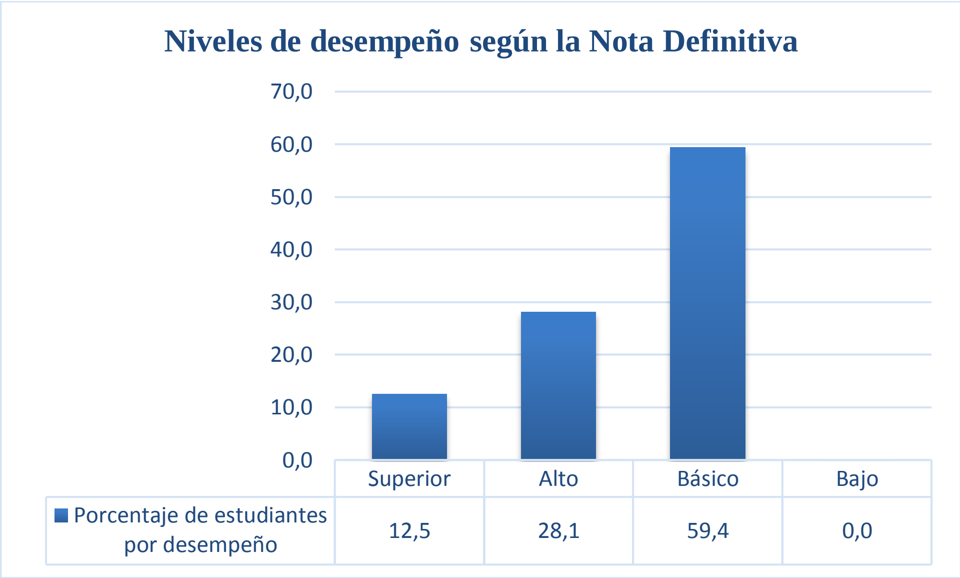


La Figura 8, donde un 0% de estudiantes se encuentran en el nivel superior, un 15,63% en nivel alto, un 37,50% en el nivel básico y un 46,88% en el nivel bajo.

De lo anterior, si la nota definitiva dependiera solo de estas evaluaciones, un 46,88% (15 de 32 estudiantes) no aprobarían el curso.

Ahora bien, analizando la nota obtenida al promediar las evaluaciones procedimental, conceptual y actitudinal se tiene:

Figura 9. Niveles de desempeño de los estudiantes según la nota definitiva



La Figura 9, muestra los niveles de desempeño de los 32 estudiantes, teniendo en cuenta el promedio de la evaluación conceptual y procedimental y lo cual se toma como la nota definitiva de la materia (Algebra, cuarto período). La Nota definitiva que ubica al curso 8A en un 12,5% de estudiantes en el nivel de desempeño superior, un 28,1% en el nivel de desempeño alto y el 59,4% en el nivel de desempeño básico. De lo anterior se tiene que ninguno de los estudiantes se encuentra en el nivel de desempeño bajo, razón por la cual los 32 estudiantes aprueban la materia.

Capítulo VII. Conclusiones y Consideraciones

- El proceso de práctica pedagógica permitió reflexionar sobre el quehacer del docente y generar conciencia acerca de la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el aula.
- La práctica pedagógica fue fundamental en la formación docente, pues en ella se aplicaron conocimientos adquiridos en el proceso de formación, los cuales debieron ser transformados para diseñar un proyecto de intervención en el aula, el cual se ajustará a las exigencias que se dan en una institución educativa.
- El proceso de práctica permitió que como docente, se reflexionara acerca de la importancia de estar constantemente actualizado acerca de los fenómenos que suceden en el aula, lo cual ha sido trabajado en las diferentes investigaciones en didáctica de la matemática.
- Uno de los objetivos de la intervención en el aula era generar un ambiente donde el estudiante tuviera la posibilidad de desarrollar competencias, destrezas y habilidades que le permitan resolver situaciones problema presentados en su entorno, para ello se debió tomar conciencia de que el docente y el estudiante en el aula, forman parte de una comunidad de práctica donde se trabaja con los significados y representaciones de los objetos matemáticos.
- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos durante la intervención en el aula, como docentes, se deberá tener en cuenta que cada uno de nuestros estudiantes como individuo, desarrolla un proceso de aprendizaje de acuerdo a su propio ritmo; además, sin importar la edad y el grado en el cual se encuentre, presentará confusiones con ciertos objetos matemáticos y sus respectivas formas de representación.

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos durante la intervención en el aula, sería importante incorporar a las prácticas establecidas en el pensum de la carrera, un proceso progresivo de intervención en el aula, comenzando con estudiantes de educación básica y continuando con estudiantes de educación media, donde se contraste lo teórico con la realidad. Para que se desarrolle lo anteriormente planteado, será fundamental la guía de los docentes de práctica y de los docentes del área de matemáticas de la institución educativa, generando espacios de discusión, reflexión e intercambio entre los practicantes acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en el aula.

Bibliografía

Alsina, Á. (2012-2015). *Las Matemáticas en la Escuela.* Barcelona: Ediciones Octaedro, S.L.

Baldor, A. (25 de 10 de 1983). *Algebra.* Madrid: CODICE, S.A.Madrid.

Brousseau, G. (1986). Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa.

Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro.* Barcelona: Paidos: Parra, C; Saiz,J (Compiladores) Didáctica de matemática.

Buchelli Lozano, G. A. (26 de Noviembre de 2009). Transposición Didáctica: Bases para repensar la enseñanza de una disciplina científica. I Parte. *Revista Académica e Institucional de la UCPR*, 17-38. Recuperado el Julio de 2017, de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4897931.pdf

Cabra M., D. F., & Gómez G, J. A. (s.f). La función lineal en diferentes contextos. (I. d. Pedagogía, Ed.) *Ministerio de Educación Nacional*, 1-25. Recuperado el Septiembre de 2017, de http://www.bdigital.unal.edu.co/39669/1/2806909%20_%202014.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica: Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* (C. Gilma, Ed.) Argentina: Aique.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Lori, M. (2013). *La Semiótica en la Didáctica de la Matemática.* Bogotá D.C, Colombia: Magisterio.

Departamento de Matemáticas. (2013). *Plan Educativo Institucional I.E John F. Kennedy*. I.E John F. Kennedy, Cauca, Popayán.

Díaz Quero, V. (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. (U. P. Libertador, Ed.) *Laurus. Revista de Educación, 12*(Ext, 2016), 88-103. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76109906

Duval, R. (1993a). Semiosis y noesis. . En *En Sánchez y Zubieta (Eds.), Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa* (págs. 118-144). México: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. (E. F. (Ed.), Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.

Fonseca Núñez, L. A. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 8.* Bogotá D.C, Colombia: Horizontes.

Garbin, S. (Julio de 2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? Lainfluencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. (O. I. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, Ed.) *RELIME, 8*(2), 169-193. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33580205

Godino, J. D. (Septiembre de 2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. En D. d. Matemática. (Ed.). Universidad de Granada. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.ugr.es/local/jgodino

Gonzáles Astudillo, M. T., & Hernandez, E. M. (s.f). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobrela representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. 8.

Grossman, S. I. (1998). *ALGEBRA LINEAL.* Belmont, California: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.

Gutierrez Rodriguez, Á. (1991). La Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*, 149-195. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html

Guzmán R., I. (Marzo de 1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. (O. I. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, Ed.) *RELIME , 1*(1), 5-21. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510102

Hitt Espinoza, F. (Abril de 1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y visceversa. *Educación Matemática, 7*(1), 63-74. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol7/1/07Hitt.pdf

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes.Resolución de problemas.Evaluación. Historia. (J. Kilpatrick, P. Gómez, & R. Luis, Edits.) *Una empresa docente R*, 1-141. Recuperado el Julio de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

Kindle, J. H. (s.f.). *Geometría Analítica Plana y del Espacio- Series de compendios Schaum.* McGraw- Hill.

Lehmann, C. H. (1984). *Geometría Analítica.* (N. Editores, Ed.) México: LIMUSA.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de Comptencias en Matemáticas.* Bogotá.

Nacional, M. d. (7 de Junio de 1998). Serie Lineamientos curriculares. 103.

Poggioli, L. (s.f.). Estrategias de Resolución de Problemas. 33.

RAE. (2016). Recuperado el Julio de 2017, de http://dle.rae.es/?id=EMMSFY8

Ramirez Toledo, A. (s.f). *El constructivismo pedagógico.* Colegio de Altos Estudios de Acayucan, Veracruz.

Restrepo Santamaria, A. M. (2011). Educación Matemática. (D. Toro ramos, L. P. Melanie, L. M. Reina Fuquene, & M. A. Bravo Sarmiento, Edits.) *Informe Seminario de Matemáticas*, 6. Recuperado el Juliio de 2017, de http://157.253.244.83/archivos/TeoriaPracticas2011/8.EducacionMatematica.pdf

Swokowski, E. W., & Cole, J. (2009). *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* Mexico: Cengage Learning.

Toro Machado, M. C. (Septiembre de 2017). *Google Books.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2016, de La función del objeto a(alfa) y la lógica del análisis: https://books.google.com.co/books?id=r2AdRU0asxUC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

Tünnermann Bernheim, C. (Enero-Marzo de 2011). El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. (U. A. México, Ed.) *Redalyc*(48), 21-32. Recuperado el Julio de 2017, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37319199005

Uribe Camargo, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (2004). *Alfa con estándares 9.* Bogotá: Norma.

User, S. (07 de Septiembre de 2017). *Colegio John F. Kennedy IED*. Obtenido de Reseña de la Institución: http://www.colegiojohnfkennedyied.edu.co/index.php/colegio/5-resena-de-la-institucion

Zapata Obando, G., & Muñera Cordoba, J. ( ). Las Situaciones Problema como estrategia para la Conceptualización Matemática. *Educación y Pedagogía, XV*(35).

Anexo 1: Evaluación Diagnóstica

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Práctica pedagógica III
Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

1. Un gavilán vio una bandada de palomas y les dijo: "Adiós a las 100 palomas"; a lo que una de ellas respondió: "No somos 100, pero nosotras, más el doble de nosotras, más el triple del doble de nosotras, más usted señor gavilán sumamos 100" ¿Cuántas palomas había?
2. Doce halcones vieron una bandada de golondrinas, uno de ellos les dijo: "Adiós a las 100 golondrinas"; a lo que una de ellas respondió: "No somos 100, pero tantas veces nosotras más la mitad de nosotras más la mitad de la mitad de nosotras más la tercera parte de la mitad de la mitad de nosotras más ustedes sumamos 100" ¿Cuántas golondrinas había?

Anexo 2: Taller 1

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

¿Qué entiendes por $y = x$?

¿Cómo se gráfica?

¿Qué son los ejes coordenados?

¿Qué clase de elementos conforman cada eje coordenado?

¿Qué es el plano cartesiano?

¿Cuál es la escala que tiene cada eje coordenado?

Para $x = \square$, ¿cuál es su valor de y?

¿Existe algún valor de x para el cual no exista un valor de y?

Anexo 3: Taller 2

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Realizar la gráfica para cada uno de los siguientes casos:

1) $y = -x$

2) $y = x + 1$

3) $y = -x + 1$

4) $y = x - 1$

5) $y = -x - 1$

6) $y = 2x$

7) $y = -2x$

8) $y = 2x + 1$

9) $y = 2x - 1$

10) $2y = x$

Anexo 4: Taller 3

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Se busca que cada estudiante logre resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2, por los siguientes métodos de solución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases}$$

1) **Método Gráfico:**

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico se debe:

a) Despejar la variable "y" para escribir cada ecuación del sistema en forma de la ecuación general de la línea recta, como sigue:

$$\begin{cases} y = \dfrac{28 - 2x}{3} \\ y = \dfrac{10 + 4x}{5} \end{cases}.$$

b) Realizar el gráfico asociado a las ecuaciones que componen el sistema.

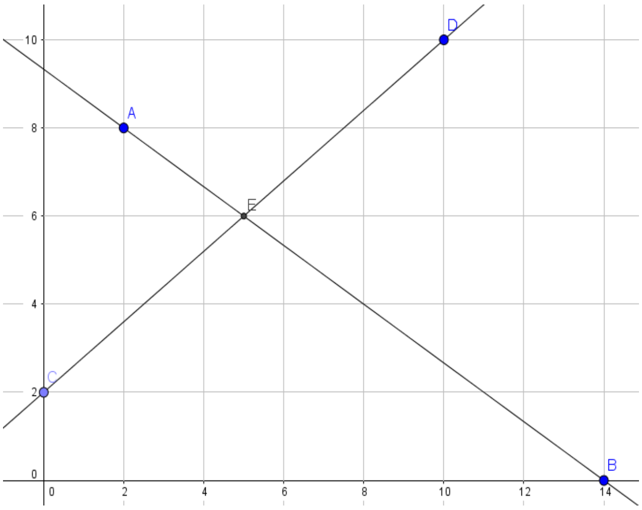
   Para ello, se asignan valores distintos a x y se calcula el correspondiente valor de y, en cada caso, se marcan estos dos puntos en el plano cartesiano.

En este caso, en la primera ecuación, si $x = 2$, entonces $y = 8$, esto corresponde al punto $A\ (2, 8)$. Si $x = 14$, entonces $y = 0$, que corresponde al punto $B\ (14, 0)$.

De la misma manera, en la segunda ecuación, si $x = 0$, entonces $y = 2$; esto corresponde al punto $C\ (0, 2)$, si $x = 10$, entonces $y = 10$, que corresponde al punto $D\ (10, 10)$.

Con esto se pueden graficar ambas rectas como lo muestra en el siguiente grafico

Figura 2 Solución gráfica del sistema. Fuente: Geogebra



Las rectas se intersecan en el punto $E\ (5, 6)$. Entonces, $x = 5, y = 6$ es solución del sistema.

Prueba:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 2(5) + 3(6) = 28 \\ 5(6) - 4(5) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 + 18 = 28 \\ 30 - 20 = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 28 = 28 \\ 10 = 10 \end{cases}$$

2) Método por Igualación

Para resolver el sistema, se debe encontrar el punto de intersección entre las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación. Para ello:

a) Se despeja una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual se obtiene un sistema equivalente (en este caso se elige y):

$$\begin{cases} y = \dfrac{28 - 2x}{3} \\ y = \dfrac{10 + 4x}{5} \end{cases}$$

b) Como los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto al igualar se tiene:

$$\frac{28-2x}{3}=\frac{10+4x}{5}$$
$$5\,(28-2x)\ =3(10+4x)$$
$$140-\ 10x\ =\ \ 30+12x)$$
$$140-\ 30\ =\ \ 10x+12x$$
$$110\ =\ \ 22x$$
$$\frac{110}{22}=\ \ x$$
$$5\ =\ \ x$$

c) Reemplazando el valor $x=\ 5$ en alguna de las ecuaciones (en este caso se elige la segunda ecuación):

$$y=\frac{10+4(5)}{5}$$
$$y=\frac{10+20}{5}=\frac{30}{5}$$
$$y=6$$

Se realiza la prueba, en ambas ecuaciones, para saber si realmente el valor $(x.y)=(5{,}6)$ las satisface

$$\begin{cases}2x+3y=28\\ 5y-4x=10\end{cases}\sim\begin{cases}2(5)+3(6)=28\\ 5(6)-4(5)=10\end{cases}$$
$$\begin{cases}10+18=28\\ 30-20=10\end{cases}\sim\ \begin{cases}28=28\\ 10=10\end{cases}$$

De lo anterior se puede concluir que $x=5$ y $y=6$ satisface el sistema dado.

Se plantea al estudiante realizar este mismo ejemplo despejando x al comienzo y reemplazando en las dos ecuaciones.

3. Método por Sustitución.

Para resolver el sistema se debe:

a) Despejar una de las variables en una de las ecuaciones (en este caso se elige la variable y en la primera ecuación):

$$y = \frac{28 - 2x}{3}$$

b) El anterior valor se reemplaza en la segunda ecuación:

$$5\left(\frac{28 - 2x}{3}\right) - 4x = 10$$

c) Operando para despejar la única variable existente se sigue:

$$5\left(\frac{28 - 2x}{3}\right) - 4x = 10$$

$$\frac{140 - 10x}{3} - 4x = 10$$

$$3\left[\left(\frac{140 - 10x}{3}\right) - 4x\right] = 3(10)$$

$$140 - 10x - 3(4x) = 30$$

$$140 - 10x - 12x \quad = 30$$

$$140 - 22x = 30$$

$$140 - 30 \quad = 22x$$

$$110 \quad = 22x$$

$$\frac{110}{22} = \quad x$$

$$5 \ = \ \ x$$

d) Se reemplaza el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (en este caso se escoge la primera ecuación):

$$2x + 3y = 28$$

$$2(5) + 3y = 28$$

$$10 + 3y = 28$$

$$3y = 28 - 10$$

$$3y = 18$$

$$y = \frac{18}{3}$$

$$y = 6$$

La respuesta es $x = 5$, $y = 6$, la cual es igual que en el caso anterior.

4. Método por Reducción

Teniendo en cuenta que se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5y - 4x = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ -4x + 5y = 10 \end{cases}$$

El objetivo es eliminar una de las incógnitas, dejándolas inversas aditivas, se recuerda a los estudiantes que una igualdad no cambia si se la multiplica por un número, además que una igualdad no se altera al sumar otra igualdad.

Luego, si se quiere eliminar la variable x, ¿por qué número se debe multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

La respuesta es -2. En efecto:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 & se\ multiplica\ por\ (2) \\ -4x + 5y = 10 & se\ multiplica\ por\ (1) \end{cases}$$

Con lo que se obtiene:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 56 \\ -4x + 5y = 10 \end{cases}$$

Y se suma a la primera, con lo cual se obtiene:

$$11y = 66$$

$$y = \frac{66}{11}$$

$$y = 6$$

Luego se reemplaza el valor obtenido de y en la segunda ecuación $5y - 4x = 10$, para finalmente hallar el valor de x:

$$5(6) - 4x = 10$$

$$30 - 4x = 10$$

$$30 - 10 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$\frac{20}{4} = x$$

$$5 = x$$

La respuesta $x = 5\,, y = 6$, igual que en el caso anterior.

Anexo 5: Examen 1

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Realice un gráfico donde se representen las siguientes ecuaciones:

1) $\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

Anexo 6: Examen 2

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Realice un gráfico donde se representen las siguientes ecuaciones:

1) $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = 0 \\ 5y - 5x = 0 \end{cases}$

Anexo 7: Consentimiento Informado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Práctica pedagógica
Docente: Lisana Andrea Pérez Ordoñez

Popayán Cauca 10 de noviembre de 2016

Consentimiento Informado

Debido a la necesidad de reportar información acerca del proceso de la Práctica pedagógica Investigativa que como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca me encuentro adelantando en el grupo 8 A de la Institución Educativa **JOHN F. KENNEDY** en la cual se encuentra su hijo ____

Solicito a usted como su acudiente, autorice el reporte de la información pertinente.

Esta información será tratada con fines académicos y de investigación por la cual se garantiza la integridad de los niños participantes.

Por lo anterior y a través de su firma confiero confirmación de la petición

_____________________________ _____________________________

Nombre del acudiente Firma

Oliverio Chilito Bravo
Rector I.E John F. Kennedy

María Divina Villa
Coordinadora

Leonardo Ordoñez
Docente de Área

LISANA ANDREA PÉREZ O.
Lisana Andrea Pérez Ordoñez
Practicante Universidad del Cauca