ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y ALGUNOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

JULIETH PAOLA CHAVARO ZUÑIGA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, 2017

ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 Y ALGUNOS METODOS DE SOLUCION

JULIETH PAOLA CHAVARRO ZUÑIGA

Director

Dr. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN, 2017

Nota de aceptación

____

____

____

____

Coordinador____________________________________

Mg. WILMER LIBARDO MOLINA YEPES

Director ____________________________________

PhD. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Evaluadora ____________________________________

Mg. JOHANA KATHERINE SANDOVAL

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 01 de Marzo de 2017

AGRADECIMIENTOS.

En primer lugar quiero agradecer a Dios, porque siempre ha estado conmigo en este y todos los caminos de mi vida, por regalarme a personas que han sido mi apoyo incondicional y a las que les debo gran parte de la culminación de este proyecto.

A mi madre Débora Zúñiga Pérez por su gran dedicación, esfuerzo y comprensión; por ser mi fortaleza y un pilar fundamental en cada paso de mi vida. De igual forma a mi familia, quienes siempre me han apoyado desinteresadamente.

Al profesor Yilton Riascos Forero por su tiempo, sus enseñanzas académicas y para la vida, por ser mi guía durante todo el camino de planeación, organización y ejecución de la práctica pedagógica investigativa.

A las directivas de la I. E. Los Comuneros, en cabeza de su rector, señor Walter Augusto Gaviria y coordinador profesor Erwuin Sánchez, así como también al profesor Juan Carlos Guevara y al grupo de estudiantes del grado noveno A por permitirme realizar mi práctica pedagógica; por sus consejos y observaciones.

Y a todas aquellas personas que de alguna forma han contribuido en la consecución de este logro.

RESUMEN

El presente trabajo corresponde a la sistematización de la práctica pedagógica realizada en la I. E. Los Comuneros de la ciudad de Popayán, para la cual se contó con un total de 22 estudiantes, 12 niñas y 10 niños, del grado noveno de dicha institución, con los que se trabajó los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos de solución de los mismos, tema que corresponde a la unidad temática número 13 del Proyecto Educativo Institucional (PEI) del área de matemáticas de la Institución.

Esta sistematización presenta la planeación y organización realizadas antes y durante el desarrollo de la intervención en el aula, así como también el desarrollo de la Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) desde su comienzo hasta la finalización de la misma.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos de la intervención con su respectivo análisis, teniendo en cuenta todo el proceso anteriormente dicho.

CONTENIDO

LISTA DE IMÁGENES.

LISTA DE FIGURAS.

LISTA DE TABLAS.

PRESENTACIÓN

La práctica pedagógica se puede definir como la actividad diaria que desarrollamos los docentes en las aulas, laboratorios y otros espacios, orientada por un currículo y que tiene como propósito la formación de nuestros alumnos (Qu (Diaz, 2006) en este sentido, el presente trabajo corresponde a la sistematización de una práctica pedagógica realizada en la I. E. Los Comuneros, la cual se encuentra ubicada en la comuna seis de la ciudad de Popayán.

Para la realización de esta actividad se contó con la participación de 22 estudiantes del grado noveno de dicha institución, de los cuales 12 eran niñas y 10 eran niños, con edades que oscilaban entre 13 y 17 años. Durante un tiempo aproximado de 12 semanas y con una intensidad de cinco horas a la semana, se orientó el tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos para la solución de los mismos, el cual se enmarca dentro de la unidad temática número 13 del PEI[1] del área de matemáticas en dicha institución

En este trabajo se tuvo en cuenta la influencia de los conocimientos previos en la manifestación de los errores y dificultades que presentan los estudiantes durante la construcción de estos conceptos. Para ello, se tomó como referente teórico principal al didacta (Brosseau, 1986) , en conjunto con algunos estudios y aportes de quienes han encontrado interesante el tema, específicamente aquellos relacionados con dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra.

Con el propósito de brindar una explicación ordenada de este trabajo, se lo clasificó en capítulos, cuya secuencia es la siguiente:

En el primer capítulo titulado Generalidades Institucionales, se encontrarán algunas características del entorno institucional y curricular del colegio. En el segundo capítulo, titulado Desarrollo de la práctica pedagógica, se encuentra una descripción del proceso llevado a cabo para desarrollar este proyecto de investigación pedagógica. En el tercer capítulo: Referentes teóricos, se encuentra el soporte teórico que nos ofreció la Didáctica de las Matemáticas, así como también algunas generalidades del álgebra, dentro de la cual se encuentran los sistemas de ecuaciones lineales y las definiciones matemáticamente formales necesarias para el desarrollo de la temática propuesta. En el cuarto capítulo titulado: antecedentes, se encuentran algunos estudios previos realizados

[1] Plan de Estudios Institucional

alrededor del mismo tema que se trabaja en este documento. El quinto capítulo, titulado estrategia pedagógica, corresponde a la descripción de la temática, metodología, evaluación y modelo pedagógico adoptado para el desarrollo de la PPI. En el sexto capítulo titulado Resultados y análisis de resultados, se presenta una categorización de acuerdo con la evaluación de los exámenes escritos y actividades realizadas durante la intervención, así como también la discusión de tales resultados y el ejercicio de investigación correspondiente al presente documento. En el séptimo capítulo titulado conclusiones y consideraciones finales, se encuentran los aspectos que se consideraron más importantes en referencia a los procesos de enseñanza y aprendizaje aquí desarrollados; finalmente se presentan la bibliografía y los Anexos donde se evidencia el trabajo realizado en la institución.

CAPITULO I. GENERALIDADES INSTITUCIONALES.

1.1. Características del entorno institucional.

La I. E. Los Comuneros está ubicada en la comuna seis, Barrio Los Comuneros, de la ciudad de Popayán (Cauca). Esta Institución cuenta con dos sedes adicionales, la escuela José Antonio Galán, y la Escuela Primero de Mayo. El estrato socioeconómico al cual pertenece la I. E. Los Comuneros, es la dos. Según algunos datos obtenidos del plan de estudios del área de matemáticas de la institución, un porcentaje significativo de la población estudiantil proviene de otras regiones del departamento (Macizo Colombiano, Costa Pacífica y Oriente Caucano); muchos de los padres de familia son analfabetas y/o con bajos niveles de escolaridad. La mayoría de los estudiantes tienen un limitado acceso a recursos tecnológicos tales como computador (propio) y conectividad a internet; gran parte de esta población proviene de familias desplazadas por la violencia y con altos niveles de pobreza; también existe presencia de estudiantes con problemas de desnutrición o mala alimentación. (Comuneros, 2002)

Imagen 1 Entrada principal de la I. E. Los Comuneros sede principal
I

Por otro lado, se observa el esfuerzo de las directivas para facilitar el derecho a la educación en esta Institución, ofreciendo tres jornadas, mañana, tarde y noche, ateniendo aproximadamente a 1000 estudiantes cada día. En su interior, la Institución cuenta con una pequeña cancha en cemento ubicada en el centro del colegio (ver imagen 2.), la que no es suficiente para realizar adecuadamente las actividades de recreación de todos los estudiantes.

Imagen 2 Cancha central de fútbol de la I. E. Los Comuneros

Para el desarrollo de actividades de educación física, los estudiantes se deben desplazar a la parte trasera del colegio donde hay otra cancha

Imagen 3 Cancha de fútbol auxiliar de la I. E. Los Comuneros

Algunos profesores y estudiantes de la Institución cuentan que los laboratorios para la realización de prácticas de materias como biología, química y física, no son lo suficientemente adecuados para brindar una educación de calidad en estas asignaturas; de igual forma, la biblioteca se encuentra en un espacio reducido y está ubicada frente a la cancha central de la Institución, dicha situación hace que trabajar en ella resulte complicado. Por la cantidad de estudiantes, las aulas se observan relativamente pequeñas, sus techos son en tejas de asbesto; provocando en la época de verano una mayor concentración del calor, y en consecuencia las actividades en la institución se torna incómodo tanto para el docente como para los estudiantes. La restauración que se hace a los pupitres cada año no es suficiente,abligando a que se deban arrumar los pupitres con mal estado en la parte trasera de los salones, contribuyendo a la percepción de hacinamiento.

A pesar de todos estos inconvenientes, es de resaltar la labor de la comunidad de docentes y directivos de esta institución ya que trabajan de manera constante para formar personas íntegras que puedan contribuir al mejoramiento de nuestra sociedad. Es de anotar también, que la mayoría de los estudiantes son amables y muy cordiales, lo cual hace que trabajar en esta institución resulte agradable y cómodo en ese sentido. De la misma forma el grupo de profesores y directivos están siempre prestos a brindar la colaboración requerida por los la comunidad en general, particularmente en las necesidades de los practicantes.

Se debe también resaltar que la administración de esta I. E. es una de las que siempre está dispuesta a recibir estudiantes que se encuentran en proceso de formación como futuros docentes, brindando así la oportunidad de vivenciar algunas de las experiencias a las que se enfrenta un educador matemático en el ejercicio de su labor.

1.2. Ambiente curricular (Plan de estudios en matemáticas de la Institución)

El Proyecto Educativo Institucional (PEI) en el área de matemáticas, de la I. E. Los Comuneros, se encuentra organizado por grados, evidenciando en cada uno de ellos las competencias que los estudiantes deberán desarrollara lo largo de un periodo académico y los logros que se pretenden alcanzar en cada uno de los mismos, así como también la especificación de cada unidad temática, el contenido de la misma y los estándares curriculares que la rigen.

El plan de estudios en el área de matemáticas de esta I. E. , apunta principalmente a la formación integral de los estudiantes, entendiéndose esto como la educación que permita que el estudiante no solo adquiera el saber disciplinar, que en este caso es el saber matemático (aprenda a hacer), si no también tenga la capacidad de apropiarse de él y aplicarlo en los diferentes contextos de la vida cotidiana (aprenda a aprender) y adicionalmente a esto se forme como persona con valores y principios desde la matemática, pudiéndolos aplicar en la convivencia y relación con el otro y con la sociedad (aprenda a ser). (Plan de Estudios. Institución Educativa Los Comuneros, 2002).

Con respecto al saber disciplinar, el PEI en el área de matemáticas, pretende formar estudiantes con competencias matemáticas y pensamiento matemático, para ello se apoya en los cinco pensamientos con sus respectivos sistemas, establecidos en Lineamientos y Estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) a saber: Pensamiento Numérico y Sistemas

Numéricos, Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos y Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.

Por otro lado, para la elaboración del PEI en matemáticas se ha considerado importante determinar inicialmente como se concibe el conocimiento matemático y de esta manera hallar una concepción respecto a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido se ha descrito brevemente acerca de que son las matemáticas y las múltiples áreas del conocimiento que ella cubre, así como también su importancia en la vida cotidiana de las personas, llegando a la conclusión de que la mejor forma para que un estudiante aprenda es la motivación. Al respecto, en el PEI en matemáticas de esta Institución se encuentra: "… por ello resulta fundamental que las actividades de aprendizaje despierten su curiosidad…". (Plan de Estudios. Institución Educativa Los Comuneros, 2002). Se reconoce además la importancia de la cotidianidad y del medio circundante para un aprendizaje significativo de las matemáticas.

Respecto a la enseñanza, el PEI en matemáticas afirma que independientemente del currículo2 que se adopte en una institución, la enseñanza del saber matemático debe cumplir con los siguientes propósitos generales:

- Generar en todos los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas y estimular en ellos el interés por su estudio.
- Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de la matemática e, igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas.
- Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real.
- Suministrar a los estudiantes el lenguaje apropiado que les permita comunicar de manera eficaz sus ideas y experiencias matemáticas.
- Estimular en los estudiantes el uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas.

[2] El currículo está compuesto por los pensamientos y sistemas descritos en los Lineamientos Curriculares del MEN.

- Retar a los estudiantes a lograr un nivel de excelencia que corresponda a su etapa de desarrollo

La metodología a través de la cual se enseñe matemáticas en esta institución, según el PEI, debe ser múltiple, de carácter activo, participativo, permitiendo cumplir con los propósitos anteriormente mencionados, fomentando siempre la capacidad reflexiva crítica y creativa del estudiante, para que este se sienta motivado hacia esta área. En este sentido el propósito general de la enseñanza de las matemáticas ha de ser: "desarrollar habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los estudiantes" (Comuneros, 2002) .

Finalmente, entendiendo la evaluación como un estudio que desea conocer y comprender el proceso de aprendizaje de los estudiantes, el PEI plantea una evaluación cualitativa (atendiendo a los parámetros de la ley general de la educación), la cual debe ser, formativa, sistemática y flexible, sin embargo, también considera un tipo de evaluación cuantitativa que permita la recolección de datos para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren a lo largo de un periodo académico. En este sentido, la evaluación se debe realizar de manera permanente y continua, permitiendo al docente, hacer un seguimiento de cada estudiante, ayudándolo a superar los obstáculos y/o potenciar sus capacidades.

En consecuencia, se deberán utilizar instrumentos de evaluación tales como: talleres, evaluaciones escritas, exposiciones, consultas y ensayos, potenciando en estas últimas la capacidad argumentativa y crítica de cada estudiante. Así, en aras de alcanzar estos parámetros evaluativos, se debe estudiar y tener en cuenta los contenidos temáticos del área (el ¿Qué?), la evolución de los estudiantes desde los estados iníciales de conocimiento hasta el estado "final" del mismo (el ¿para qué?), la observación y valoración del trabajo cotidiano, individual y grupal de cada estudiante (el ¿Cómo?), el seguimiento continuo y permanente del docente hacia cada uno de los estudiantes (el ¿Cuándo?).

CAPITULO II. DESARROLLO DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA.

Dentro de la malla curricular del programa de Licenciatura en Matemáticas que ofrece la Universidad del Cauca, se encuentran algunos cursos cuyo propósito principal es formar al estudiante como educador matemático. Con una modalidad presencial y de manera progresiva se deben aprobar: pedagogía y currículo, matemática escolar, Didáctica de las Matemáticas I, Didáctica de las Matemáticas II, Práctica Pedagógica Investigativa I, II, II y,IV (PPI-I, PPI-II, PPI-III y PPI-IV).

Los primeros cuatro cursos corresponden a una presentación que podría decirse introductoria al amplio estudio existente de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta fundamentación teórica inicial permitió reflexionar acerca de la responsabilidad que tiene un docente frente a la enseñanza de las matemáticas y la importancia de los diferentes conceptos de la Didáctica de las Matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas.

En la PPI-I (Fase exploratoria y fundamentación teórica) se deben estudiar algunos núcleos temáticos tales como, lineamientos curriculares, estándares de Calidad, calidad de la educación, Plan de estudios en matemáticas de una institución de educación media y algunos otros conceptos que el director de la práctica considere pertinentes; de tal manera que el estudiante pueda escoger una línea de interés para el desarrollo de la práctica y plantearse un problema que se enmarque dentro de dicha línea. Al finalizar este curso el estudiante debe presentar un documento correspondiente al tema y problema de investigación que se desea estudiar.

En la PPI-II, es necesario revisar el documento planteado en el anterior curso, de tal manera que se puedan hacer los ajustes correspondientes y corroborar tanto el objeto de enseñanza como el objeto de estudio con los que se va a trabajar. Una vez hecho esto, se debe hacer la solicitud correspondiente a la I. E. en la cual se desea poner en marcha el proyecto de investigación y de esta forma dar paso a la elaboración del portafolio o preparación de clases correspondientes al objeto de enseñanza escogido.

Sin embargo, debe anotarse que, para el presente trabajo de investigación, se presentaron algunos inconvenientes en los procesos anteriormente descritos (PPI-I y PPI-II), los cuales obstaculizaron el normal desarrollo de los mismos, por lo que fue necesario un replanteamiento tanto del objeto de enseñanza como del objeto de estudio y además, hubo necesidad de reforzar la fundamentación teórica vista en las prácticas I y II. En este sentido, inicialmente el documento presentado al finalizar la PPI-I se titulaba “Enseñanza de las cónicas” en la cual se pretendía orientar las actividades usando el software Geogebra en la I. E. Julumito de la ciudad de Popayán, pero este debió ser reformado en su totalidad en la PPI-II, siguiendo entonces el proceso de reconstrucción que a continuación se describe:

Teniendo en cuenta el plan de estudios en matemáticas y su organización en una Institución de educación media, se escogió la línea del álgebra elemental, y en específico el tema de interés a trabajar fue los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos de solución de los mismos. Partiendo de esto se elaboró un documento denominado “documento de intenciones” donde se encuentra, como su nombre lo indica, lo que se desea trabajar y algunos objetivos y metas que se pretende alcanzar. En este documento se especificó que el objeto de estudio serían las dificultades en relación con los errores de los estudiantes en el desarrollo de este contenido.

Una vez revisado por el director de práctica, se concluyó que era necesario un cambio en el objeto de estudio siendo el final: “el estudio de la influencia de los conocimientos previos en los errores y obstáculos que presentan los estudiantes en la construcción de los conceptos”.

Posteriormente, se prosiguió a buscar una I. E. que permitiera llevar a cabo este proyecto de investigación, en este sentido se contó con el apoyo del coordinador académico de una de las sedes de la I. E. Los Comuneros de la ciudad de Popayán, profesor Erwuin Sánchez, quien muy amablemente ofreció los cursos de grado noveno de su institución para realizar la intervención y por su recomendación se escogió el grado noveno A para desarrollar el contenido temático correspondiente al objeto de enseñanza propuesto en el documento de intenciones. De la misma forma, el profesor Erwuin Sánchez, habló con el rector de esta Institución, el señor Walter Augusto Gaviria, quien dio el aval para comenzar la ejecución de este proyecto en su Institución, este procedimiento fue formalizado por medio de una carta del director de práctica al señor rector. De la misma forma se contactó al profesor de matemáticas a cargo del grado noveno A, Licenciado Juan Carlos Guevara, a quien se le explicó lo que se pretendía trabajar en este grupo y él de manera muy cordial aceptó conceder el espacio para realizar la intervención. De esta manera culminó la PPI-II.

Por otro lado, teniendo en cuenta que en la PPI-III se debe hacer la intervención en el aula, el siguiente paso consistió en la elaboración de un documento denominado “Portafolio” correspondiente a la planeación de cada una de las sesiones, objetivos de cada sesión, conceptos, ejemplos y ejercicios a desarrollar en cada una de ellos, que una vez recibido el visto bueno del director de práctica, fue presentado y aprobado por el profesor Juan Carlos Guevara, (presentado y aprobado clase a clase).

Para la elaboración de este documento se tomaron los siguientes referentes teóricos:

- Algebra Lineal, Sanabria, Ana María & Martínez, Héctor Jairo (2010)
- Algebra, Baldor Aurelio Ángel (1997).
- Matemáticas 2. Recursos didácticos (2013).
- Algebra Lineal, Grossman Stanley I. (1998)

Y diversos sitios web.

Estos documentos fueron utilizados principalmente para comparar las definiciones que se pretendía presentar, y algunos ejemplos; la mayor parte de los ejercicios y talleres fueron de elaboración propia, dependiendo del objetivo planteado para cada una de las sesiones de intervención en el aula.

Una vez puesto en marcha el proyecto de investigación en el aula, el primer paso fue presenciar por una semana la clase de matemáticas orientada por el profesor Juan Carlos Guevara en el grupo noveno A, en los horarios: lunes de 5:10 pm hasta 6:05 pm; Martes (bloque de 55 min cada hora) de 3:20 pm hasta 5:10 pm y viernes (bloque de 55 min cada hora) de 2:05 pm hasta 3:00 pm y de 3:20 pm hasta 4: 15 pm, en donde, en la primera clase, se realizó la presentación de la practicante, por parte del profesor ante los estudiantes. En el transcurso de esa semana el profesor y los estudiantes trabajaron la ubicación de puntos en el plano cartesiano, esto, según el docente, con el propósito de construir posteriormente el concepto de ecuación, punto-pendiente y su respectiva gráfica en el plano cartesiano.

Gracias al trabajo de observación previa se pudo conocer la estrategia del profesor, su compromiso, dedicación y responsabilidad con la enseñanza de las matemáticas, la forma de expresarse y comunicarse con sus estudiantes y con el entorno académico en general; de los estudiantes se pudo conocer su comportamiento dentro y fuera del aula, la cantidad de ellos y su actitud frente a la clase de matemáticas; del aula se observó la infraestructura y tamaño. Es también importante resaltar que todo este trabajo fue supervisado y aprobado por el director de la práctica pedagógica.

Aproximadamente cuatro semanas después de esa observación, (tres de estas semanas, correspondieron a las vacaciones de mitad de año de los estudiantes) se dio inicio a la intervención en el aula; la cual, estaba prevista para cuatro semanas, pero debido a diversas circunstancias tales como: reuniones de padres de familia, entrega de boletines, días sin clase, jornadas académicas, actividades con policía nacional y estudiantes, ritmo de aprendizaje de los estudiantes, entre otras, tuvo una duración de doce semanas tres días a la semana con los horarios anteriormente descritos.

Con el desarrollo de la primera sesión, se concluyó que era necesario reformar el portafolio, ya que este asumía un nivel de conocimiento que resultó inferior al que los estudiantes tenían en ese momento.

En el portafolio inicial se había propuesto el siguiente orden:

1. Realización de una prueba diagnóstica: cuyo objetivo apuntaba a identificar el nivel de conocimiento que en ese momento presentaban los estudiantes.

2. Repaso de conceptos: que se haría, dependiendo de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica.

3. Definición de Ecuación, identificación de sus elementos, ejemplos y ejercicios.

4. Solución de Ecuaciones Lineales.

5. Definición de ecuaciones simultáneas, ejemplos y ejercicios.

6. Definición de sistema de ecuaciones lineales, ejemplos, ejercicios; definición de sistemas compatibles e incompatibles, definición de conjunto solución ejemplos y ejercicios.

7. Algunos métodos de solución de ecuaciones lineales 2x2 (Método de igualación algebraica, Método de sustitución, Método gráfico y Método reducción o eliminación).

Sin embargo, durante la primera clase del día lunes, sorprendentemente se encontró que el profesor, Juan Carlos Guevara, estaba ya orientando (pero solo de manera introductoria) el método gráfico para la solución de ecuaciones lineales 2x2 y había propuesto un taller con algunos ejercicios básicos con respecto a este tema, por lo que en esta clase, los estudiantes hicieron preguntas relacionadas con el taller, las que se resolvieron sin inconvenientes.

Por lo anterior, en conjunto con el director de práctica y teniendo claro el objeto de estudio que pretendía este trabajo investigativo, se hicieron algunos ajustes al portafolio inicial, quedando este último con el siguiente orden:

1. Realización de una prueba diagnóstica: cuyo objetivo apuntaba a diagnosticar el nivel de conocimiento que en ese momento presentaban los estudiantes.

2. Repaso de conceptos: que se haría dependiendo de los resultados obtenidos en la prueba anterior.

3. Definición de ecuaciones simultáneas ejemplos y ejercicios.

4. Definición de sistema de ecuaciones lineales, ejemplos, ejercicios; definición de sistemas compatibles e incompatibles; definición de conjunto solución.

5. Definición de sistema de ecuaciones lineales, ejemplos, ejercicios; definición de sistemas compatibles e incompatibles; definición de conjunto solución, ejemplos y ejercicios.

6. Algunos métodos de solución de ecuaciones lineales 2x2 (Método de igualación algebraica, Método de sustitución, Método gráfico, Método reducción o eliminación y Método de determinantes).

Este último documento contempla la organización con la que se buscó desarrollar la práctica pedagógica III en esta Institución. Sin embargo, al llevar a cabo la primera actividad descrita en el portafolio (prueba diagnóstica), y luego de analizar los resultados se llegó a la conclusión de que era necesario seguir con el segundo paso de esta organización (Repaso de conceptos), en el cual se debería incluir un reforzamiento del concepto de ecuación, que como se puede observar se había quitado en la modificación del portafolio, la diferencia es que para este concepto, no se pretendía hacer énfasis como se lo haría en la planeación del primer portafolio, en este sentido, este tema se abordó utilizando algunas situaciones problema, de tal manera que los estudiantes pudieran recordar el concepto a través del planteamiento y posterior solución de una ecuación lineal, del mismo modo en este “segundo portafolio” se incluyó un tema más: solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 usando el método de determinantes. El desarrollo de estos temas, se encuentra explicado en detalle en lo que se ha titulado desarrollo secuencial de la temática.

Es también importante, mencionar que el profesor titular realizó una tarea de acompañamiento inicial dentro del aula (presencia del profesor en la clase), pero de manera progresiva, dejó a cargo del grupo a la practicante con el fin de que pudiera desarrollar la habilidad de control y manejo del grupo de tal forma que hubiera un mejor acercamiento a las condiciones reales en el aula de un educador matemático. En cada una de las sesiones el profesor Juan Carlos Guevara, hizo a la practicante algunas recomendaciones y observaciones que él consideraba importantes para el óptimo desarrollo de la intervención, de la misma forma, solicitó, al director de la práctica un formato que le permitiera evaluar el desempeño de la practicante en la institución.

Con el propósito de reconstruir posteriormente los eventos ocurridos en el proceso de intervención en el aula, se utilizó instrumentos tales como: diario de campo:en el que se describió, clase a clase y con detalle los hechos ocurridos en cada una de las sesiones, de igual forma, se tomaron registros fotográficos tanto de la infraestructura de la Institución como del trabajo realizado en el aula. Estas fotografías se pueden observar en el presente trabajo.

CAPITULO III. REFERENTES TEÓRICOS.

3.1. Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas.

Hay quienes piensan que la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas son dos términos diferentes, para entender esto, a continuación se presentan algunas definiciones que dan algunos autores respecto a estos dos términos:

Educación Matemática.

- Según Rico, Sierra y Castro (2000, p. 352) la Educación Matemática “es un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que ocurre con carácter intencional”.

- Vallejo, Fernández, Cano, Torralbo&Maz (2007), dicen que para Restivo (1992), la Educación Matemática “implica una actividad intelectual de carácter explicativo cuya forma de expresión es una amplia diversidad de símbolos, técnicas, actitudes y recursos”

- Restrepo (2011) afirma que “*dada* la influencia y centralidad de las matemáticas en otras áreas del conocimiento y en ciertas labores, la educación matemática constituye un área de estudio fundamental para el desempeño y la cohesión económica, por cuanto resulta de suma importancia para la preparación y el desempeño de quienes conforman (y conformarán) la masa laboral del país”

Didáctica de las Matemáticas.

- La Didáctica de las Matemáticas “estudia e investiga los problemas en la Educación Matemática y propone acciones para su mejor desarrollo” (Restrepo, 2011).

- La Didáctica de las Matemáticas se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. (Vallejo Ruíz, Fernández Cano, Torralbo Rodríguez, &Maz Machado, 2007).

- Para Rico, Sierra y Castro (2000, pp. 353-354) la Didáctica de las Matemáticas tiene como objeto delimitar y estudiar, los fenómenos que se presentan durante los proceso de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático.

- Según Niss (1998, pp. 4-5) citado en Vallejo Ruíz y otros (2007), la Didáctica de las Matemáticas es el campo académico y científico de investigación y desarrollo que se propone identificar, caracterizar y entender los fenómenos o procesos en potencia o en acto implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel educativo.

De acuerdo con lo anterior se puede concluir que una diferencia importante entre la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas es que la primera tiene dos sentidos, uno correspondiente al conocimiento matemático, es decir a las diferentes temáticas que componen las matemáticas y que son transmitidas por medio del sistema escolar y el otro referente a condiciones que posibilitan la comunicación entre docentes y estudiantes y que hacen posible los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mientras que la Didáctica de las Matemáticas tiene un carácter científico, es decir se encarga de estudiar los fenómenos que ocurren en todo lo relacionado con el conocimiento matemático.

Sin embargo, Godino (1991, p. 2) considera que la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas se pueden concebir como sinónimas ya que la Educación Matemática es muy amplia y permite una interpretación como sistema social interactivo donde no solo interviene el docente y/o el conocimiento sino que también existen muchos factores circundantes y de igual importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de los cuales han surgido importantes investigaciones. Recordemos además que la Educación Matemática no se limita a la teoría, en ella también es posible encontrar una parte muy importante que es la práctica, teniendo la posibilidad de experimentar todo lo que tal teoría propone. En este sentido, es importante mencionar que para el presente trabajo se adopta esta última concepción.

Por otro lado, la modelación del campo de la Didáctica de las Matemáticas permite ver la magnitud del mismo como consta en Higginson (1980), citado por Godino (1991) quien por medio de un tetraedro pretende mostrar las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas (Filosofía, Sociología, Psicología y

Matemáticas); así mismo Steiner (1990), citado por Godino (1991), muestra como la Educación Matemática es la parte central de otros sistemas de igual complejidad e importancia dentro de lo correspondiente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es importante aclarar que en el presente trabajo no se profundizará en tales modelos, pero es relevante tenerlos presentes para el desarrollo de este documento ya que, por ejemplo, el modelo del tetraedro de Higginson permite tener una idea acerca de qué se enseña (Matemáticas), por qué se enseña (Filosofía), a quién y dónde se enseña (Sociología) y cuándo y cómo se enseña (Psicología); aspectos que desde luego son centrales en los proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, y debido a la relación existente entre la Didáctica de las Matemáticas con las disciplinas, como las anteriormente mencionadas, son muchos los autores que han expresado sus ideas, presentado proyectos de investigación concernientes al ámbito educativo, específicamente enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el fin de contribuir de una u otra forma a mejorar tanto los procesos cognitivos de un sujeto como las estrategias que un docente podría implementar en la enseñanza, permitiendo a los estudiantes construir conceptos matemáticos. De la misma forma, existen algunas líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas, dedicadas, como su nombre lo indica, a investigar fenómenos que se presentan en este campo.

Sin embargo, aun así, resulta difícil presentar un algoritmo o teoría exacta que permita modelar todas las actividades correspondientes al ámbito educativo, y más aún cuando se trata de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una de las razones por las que esto sucede radica en el hecho de que se trabaja en la formación de sujetos pensantes que hacen parte de una sociedad y por tanto diferentes en todo sentido y entre sí, en consecuencia no es posible encontrar una forma estándar de enseñar y por supuesto tampoco existe una forma estándar de aprender; cada persona aprende a su ritmo, dependiendo de su pensamiento, su cultura e incluso su forma de ver y comprender el mundo que lo rodea, esto sin mencionar las diferentes condiciones con las que un docente se encuentra a la hora de enseñar matemáticas.

3.2. Investigación en didáctica de las matemáticas.

Se define investigación como "un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimiento existentes sobre un tema" (Gutiérrez Rodríguez, 1991). Los investigadores en Didáctica de las Matemáticas "tienen como misión preferente ofrecer respuestas a los problemas planteados por los profesores y diseñadores de currículo cuando quieren conseguir que las matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes" (Gutiérrez Rodríguez, 1991). Además, estos se diferencian de los investigadores matemáticos en que utilizan el conocimiento ya establecido para estudiarlo analizarlo y buscar estrategias adecuadas para impartirlo generalmente en un aula de clases.

Por otro lado y debido a la cantidad de problemas que se pueden estudiar en Didáctica de las Matemáticas, es posible encontrar líneas de investigación dedicadas a problemas específicos presentados en la educación. A continuación se mencionan algunas de ellas, sin embargo no se profundizará en su explicación ya que este no corresponde al objetivo principal del presente trabajo.

- ❖ **Investigación descriptiva:** en ella se realiza una recopilación de información utilizando como herramienta principal la observación de la actividad de determinados colectivos de individuos. Este tipo de investigación es generalmente muy amplia, se encuentra con frecuencia en estudios descriptivos de carácter nacional que se hacen para estudiar el estado actual de la educación, mejorar o modificar un currículo entre otros.

- ❖ **Investigación curricular:** en este tipo de investigación se debe seguir un proceso cíclico de desarrollo y evaluación. Se realiza generalmente cuando el objetivo final de los investigadores es el diseño de unidades curriculares, por ejemplo el diseño de unidades para la enseñanza de un tema en concreto. "En este tipo de investigaciones es muy importante la selección que se haga de las muestras para las experimentaciones y la forma de evaluar el desarrollo de las mismas" (Gutiérrez Rodríguez, 1991).

- ❖ **Investigaciones teóricas:** son aquellas orientadas a la fundamentación tanto de alguna teoría cognitiva (de enseñanza, aprendizaje, etc.) como de la Didáctica de las Matemáticas misma. Un ejemplo de este tipo es la investigación central en la historia de la enseñanza de las matemáticas o de las propias matemáticas.

Es importante mencionar que estos no son los únicos tipos de investigación, si el lector desea profundizar acerca de este tema puede consultar la siguiente página web http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html.

Así mismo, el presente trabajo se elabora teniendo en cuenta la investigación llamada análisis de comportamiento de los sujetos (también descrita por Gutiérrez (1991)), en la cual se trabaja a partir de una determinada información que permita conjeturar algunos motivos de la o las dificultades que se desea analizar. Para este caso en particular, se trabaja teniendo en cuenta el problema de las "comprensiones parciales" según el cual, parte de los errores que se cometen tiene origen una mala comprensión de los conceptos implicados.

En general, la mayoría de los conceptos y objetos matemáticos son complejos, lo que ocasiona que los estudiantes no puedan comprender y aprender a la vez, y es allí donde se presentan las comprensiones parciales ya que los estudiantes aplican leyes o propiedades fuera del dominio de validez de un concepto matemático. Un ejemplo claro de esto es lo traumático que resulta para los estudiantes pasar de las operaciones básicas en el conjunto de los números naturales (suma, resta, multiplicación y división) a operar en el conjunto de los números enteros; esto radica principalmente en que aplican las mismas propiedades de los números naturales en un dominio en el cual no son válidas, es decir el conjunto de los enteros.

Del mismo modo y teniendo en cuenta los métodos de investigación, expuestos por Gutiérrez (1991), se utiliza en este trabajo el método cualitativo, en el cual se parte de la premisa de que los estudiantes son diferentes y que su éxito o no, sobre un concepto matemático, no solo depende de su habilidad o capacidad, sino también de otras variables sociales y culturales que deben tenerse en cuenta, tales como el entorno escolar, el familiar, entre otras. Bajo este método se utilizó la observación participativa[3] como herramienta para la recolección de información necesaria para el desarrollo del documento.

De igual forma, para la sistematización del trabajo de aula resultó importante tener presente consideraciones respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que a continuación son presentadas algunas de ellas.

[3] El investigador hace parte del grupo para comprender las interacciones de éste y a la vez es un observador externo para tener una perspectiva objetiva sobre las actividades del grupo.

3.3. Consideraciones importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Gran parte de los conceptos matemáticos han sido creados por necesidad, los números irracionales, por ejemplo, aparecen cuando al intentar medir la diagonal de un cuadrado de lado uno se obtuvo un resultado que no era un número entero y tampoco un número fraccionario, así es como aparecen las magnitudes inconmensurables, obligando a los matemáticos de la época a considerar un nuevo conjunto de números más amplio. Sin embargo, es importante aclarar que la construcción de cada uno de los objetos matemáticos que conocemos hoy en día es el resultado de muchos años de trabajo continuo y constante, de discusiones fuertes, de críticas y de opiniones de diferentes matemáticos. En este sentido, es claro que las matemáticas son ante todo una construcción humana, un trabajo mancomunado y de gran esfuerzo que debió recorrer un largo camino para convertirse en lo que actualmente conocemos y que por supuesto continuará avanzando mientras surjan problemas y hayan investigadores que se interesen en darles respuesta.

Contrariamente a esto, las matemáticas son presentadas, por lo general, en su forma axiomática, que no deja de ser importante, pero que la hace que parezca como una ciencia acabada; sin embargo “además de las virtudes científicas que se le conocen, parece estar maravillosamente adaptada para la enseñanza” (Brousseau, 1986), lo que se consigue por medio de la transposición didáctica (aplicado al presente proyecto como se evidenciará más adelante) que corresponde al paso de ese saber axiomático y formal (saber sabio) al saber adaptado para la enseñanza (saber a enseñar), este es el trabajo de transformación que se da a los conceptos matemáticos para que puedan, de algún modo, ser asimilados por el sujeto que aprende. Ahora bien, según Brousseau (1993), este proceso no permite ver el recorrido (como se describió arriba) que ha tenido un concepto matemático antes de su formalización, evidenciando así que aunque necesaria e importante, la transposición didáctica tiene también una desventaja en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, (Brosseau, 1986) distingue tres aspectos que resultan fundamentales en el trabajo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: el trabajo del matemático, el trabajo del alumno y el trabajo del profesor:

En el primero, destaca la forma como el investigador matemático trabaja antes de dar a conocer lo que puede convertirse en una nueva teoría o concepto, recopilando toda la información que tiene a la mano ya sea antigua o nueva, depurando errores al máximo, “de esta manera el productor del conocimiento despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados” (Brousseau, 1986). Sin embargo, esto no garantiza que la teoría no vaya a ser modificada ya que muy probablemente otros lectores transformarán nuevamente tales resultados, de esta forma es como el conocimiento ha avanzado y continuará avanzando.

El trabajo del alumno, según Brousseau, debe “por momentos ser comparable a esta actividad científica” es decir que, el aprendizaje de las matemáticas se convierta en una actividad activa y participativa donde los estudiantes tengan la posibilidad de crear, construir, indagar, discernir y hasta criticar constructivamente un determinado resultado, una actividad que no simplemente se limite a memorizar definiciones, teoremas o algoritmos (que por supuesto también debe ser arte del aprendizaje de las matemáticas) que den solución a los problemas planteados. Ahora bien la pregunta obvia es ¿Cómo conseguir esto? Y es aquí precisamente donde es tan importante el trabajo del profesor, pues es éste quien tiene que idear estrategias que permitan a los estudiantes realizar estas actividades, el docente debe proponer actividades que fomenten la participación de los estudiantes y poder así conocer sus opiniones y dudas al respecto, así como también proponer actividades donde el estudiante tenga completa libertad para proponer lo que considere la solución del problema, comparar y discutir con los demás compañeros acerca de la misma.

De hecho, el trabajo del docente va mucho más allá de propiciar las mejores condiciones para que el proceso de aprendizaje se dé de la mejor forma, un docente debe conocer algunos de los fenómenos didácticos que se puedan presentar en el aula o tener la capacidad de preverlos, para poder solucionarlos de la mejor manera posible. Además, como sucede en este caso, el docente se convierte en un investigador al observar el comportamiento de sus estudiantes y estudiar cada una de sus reacciones y respuestas dadas ante las diferentes actividades planteadas, lo cual permite reflexionar sobre el ejercicio docente, (en este caso la práctica pedagógica), identificando fortalezas y debilidades por reformar en la enseñanza de las matemáticas.

Una buena forma para conseguir esto es quizá a través de las experiencias vividas en el aula, informándose acerca de métodos y estrategias e implementándolas en el aula, estudiando el comportamiento de los estudiantes frente a tales estrategias, y buscado la forma de mejorarlas o adaptarlas a las necesidades de los alumnos y al propósito que como docente se tiene con ellos, proponiendo algunas más o rescatando las que se consideren adecuadas o que en cierto modo han dado mejores resultados (esto claro, en casos particulares), en otras palabras siendo parte del problema y también de la solución.

Para este caso en particular, se contó con el acompañamiento del director de la práctica pedagógica,quien orientó a la practicante en cada una de las propuestas que se llevaron al aula, procurado así que tanto las situaciones didácticas[4] como las situaciones a-didácticas[5] estuvieran lo más acorde posible al objetivo de cada una de las sesiones y en general al objeto de estudio del trabajo.

Habiendo dicho esto, a continuación se presentan, a grandes rasgos, algunas características de la rama de las matemáticas dentro de la cual se encuentra enmarcado el objeto de enseñanza Sistemas de Ecuaciones Lineales con el que se trabajó en el aula y gracias al cual se desarrolla la presente sistematización.

3.3.1. El Álgebra.

El álgebra, es la rama de las matemáticas encargada de estudiar la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas. Dentro de esta rama, se distinguen el álgebra elemental y el álgebra abstracta, el presente trabajo está enfocado en la primera.

El álgebra elemental permite, entre otras cosas, realizar operaciones aritméticas tales como suma, resta, multiplicación y división; sin embargo a diferencia de la aritmética[6], el álgebra incorpora símbolos (a, b, c, x, y, z, etc), que posibilitan:

- la formulación de leyes un poco más generales, por ejemplo $a + b = b + a$, siendo este el primer paso para el estudio de las propiedades del conjunto de los números reales.

- Hacer referencia a números desconocidos, los cuales son denotadas generalmente por letras llamadas incógnitas o variables.

- La exploración de relaciones matemáticas y cantidades, por medio de la formulación de ecuaciones y solución de las mismas.

[4] Son aquellas situaciones en las que existe acompañamiento y orientación por parte del docente. (Brousseau, 1986, pp. 47)
[5] Son aquellas situaciones en las que los estudiantes construyen su conocimiento sin acompañamiento del docente. (Brousseau, 1986, pp. 47)
[6] Parte de la matemática que estudia los números y las operaciones que se hacen con ellos.

De igual forma, existen algunas otras definiciones acerca de lo que es el álgebra, Cathyseeley (1993), citada en Sancho (2008), señala por ejemplo que “el álgebra, como área específica de conocimiento tiene distintos significados: el de una estructura abstracta, el de un instrumento para el estudio de las funciones o el de un método de resolución de problemas”; sin embargo como objeto matemático el álgebra posee unas reglas y una lógica interna particulares las cuales deben ser dadas a conocer por parte del docente a los estudiantes.

En este sentido, el álgebra exige en el sujeto que aprende, el desarrollo del pensamiento abstracto y “es muy bien sabido que uno de los tópicos curriculares más difíciles de la matemática enseñada a principios de nivel secundaria es el álgebra” (Radford, 1999) ya que el estudiante debe ser capaz de incorporar varios conceptos adicionales a los ya aprendidos, manejar un complejo lenguaje simbólico y establecer una relación entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico. De hecho, en el desarrollo de las matemáticas, el álgebra fue uno de los últimos conocimientos construidos por el ser humano, históricamente, el saber fue evolucionando en un orden que se podría decir ascendente, donde la primera rama en aparecer fue la geometría, seguida de la aritmética y posteriormente el álgebra, esto explica de alguna forma, la complejidad de esta rama de las matemáticas.

Por esta razón ha surgido la necesidad de investigar acerca de las dificultades y los errores que presentan los estudiantes al abordar este objeto matemático; sin embargo y teniendo en cuenta que estamos trabajando el área de la educación, se considera que no es posible dar una respuesta exacta acerca de esta problemática pero se puede obtener información muy valiosa y enriquecedora de las investigaciones realizadas (en el presente trabajo no se profundizará en tales resultados, solo se mencionará de manera muy general lo que se considere relevante y sobre el cual se apoya este documento).

3.3.2. Sistemas de ecuaciones lineales.

De manera informal, se puede decir que los sistemas de ecuaciones lineales son un conjunto de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de ecuaciones con dos o más variables y que tienen la forma de un polinomio de primer grado, esto es, la máxima potencia a la cual se encuentran elevadas las variables es uno. En este sentido, un sistema de ecuaciones lineales está compuesto por dos o más ecuaciones lineales y dos o más incógnitas. Geométricamente, los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos variables, denominados sistemas de ecuaciones lineales 2x2, representan dos rectas en un mismo plano cartesiano, aquellos sistemas de ecuaciones lineales 3x3 representan tres planos en el mismo espacio. El presente documento se ocupa del primero de este tipo de sistemas, por lo que a continuación, se muestran algunas definiciones que fueron necesarias para el desarrollo del trabajo en el aula; sin embargo, es importante aclarar que estas definiciones corresponden a la formalidad que las matemáticas exigen pero por supuesto fue necesario realizar un proceso de "transposición didáctica" antes de ser presentadas en clase, con el propósito de hacer más accesible el conocimiento para los estudiantes.

- **Definición (ecuación):** una ecuación con incógnitas o variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una proposición abierta[7] que establece la igualdad entre dos expresiones Matemáticas. (Sanabria & Martínez, 2010).

- **Definición (solución de una ecuación):** una solución de una ecuación con variables $x_1, x_2, \dots, x_n$es una n–upla tal que al sustituir cada una de las variables de la ecuación por las componentes respectivas de la n–upla, obtenemos una identidad[8]. Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación lo llamamos conjunto solución. (Sanabria & Martínez, 2010).

- **Definición (ecuación lineal):** una ecuación que se puede escribir de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$es una ecuación lineal con variables$x_1, x_2, \dots, x_n$, coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$y término independiente b. (Sanabria & Martínez, 2010).

- **Definición (sistema de ecuaciones lineales):** un sistema de $m$ecuaciones lineales con $n$variables $x_1, x_2, \dots, x_n$(sistema de ecuaciones lineales mxn) es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma:

$$
\begin{array}{c}
\alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\
\alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
\alpha_{m1}\, x_1 + \alpha_{m2}\, x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Dondeel número α_{ij}es el coeficiente de la variable x_j en la ecuación iy $b_i$es el término independiente de la ecuación i. Cuando todos los términos

[7] Una proposición abierta o funcional es aquella cuyo valor de verdad depende del (de los) valor(es) que tome(n) la(s) variable(s) involucrada(s) en ella (Sanabria & Martínez, 2010).

[8] Llamamos identidad a una proposición universalmente verdadera. (Sanabria & Martínez, 2010)

independientes $b_i$son 0, el sistema sedenomina homogéneo. (Sanabria & Martínez, 2010).

❖ **Definición (solución de un sistema de ecuaciones lineales):** una solución de un sistema de ecuaciones lineales con variables$x_1, x_2, \dots , x_n$es una n–upla que es solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Al conjunto formado por todas las soluciones de un sistema se le llama conjunto solución. (Sanabria & Martínez, 2010).

❖ **Definición (sistema de ecuaciones lineales consistente):** a un sistema de ecuaciones lo denominamos consistente si tiene al menos una solución. (Sanabria & Martínez, 2010).

❖ **Definición (sistema de ecuaciones lineales inconsistente):** a un sistema de ecuaciones lo denominamos inconsistente si no tiene solución. (Sanabria & Martínez, 2010).

❖ **Definición (determinante):** sean $A = (a_{ij})_{nxn}$una matriz de orden n y $\alpha \in R$. Definimos det(α), el determinante de un matriz 1x1, como α y det A, el determinante de A,como la suma de los productos dea_{ij}, la j–ésima componente de la primera fila de la matriz A,por det M_{1j}, el determinante del menor$(1, j)$ de A, multiplicado por$(-1)^{1+j}$; es decir,

det(α) $= \alpha, \quad \alpha \in R$

det$A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det M_{1n}$.(Sanabria & Martínez, 2010).

CAPITULO IV. ANTECEDENTES

El álgebra es una de las ramas de las matemáticas que al parecer presenta más dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje tanto a nivel de secundaria como a nivel universitario, prueba de ello, son las investigaciones que existen alrededor de este problema. Las posibles razones por las cuales los estudiantes presentan más dificultad en esta área de las matemáticas son diversas.

En este sentido, Radford (2013) señala tres problemas alrededor de los cuales pueden estar las posibles razones por las cuales los estudiantes fracasan con más recurrencia en el aprendizaje del álgebra, las cuales son:

❖ **Problema Fenomenológico:** donde participan “la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad”.

❖ **Problema Epistemológico:** relacionado con la generalización a través de la cual se produce el nuevo objeto matemático.

❖ **Problema Semiótico:** referente a la manera como los estudiantes denotan un nuevo objeto matemático.

Para ilustrar estos tres tipos de problemas, el autor presenta una secuencia que hace parte de una serie de lecciones sobre la generalización algebraica emprendida en una clase de segundo año, con niños entre los siete y ocho años de edad (Radford, En torno a tres problemas de la generalización, 2013).

Otro posible argumento que da respuesta a los problemas presentados en el aprendizaje del álgebra, radica en que no tiene sentido para los estudiantes, es decir, es un concepto vacío y con falta de significado. Ante esto es importante mencionar que el álgebra desarrolla en el estudiante un pensamiento abstracto que le permite entender más fácilmente algunas de las situaciones problema que se le pueden presentar a diario, “el álgebra es crucial para inspeccionar y entender expresiones simbólicas, desarrollar una actitud crítica hacia ellas sabiendo establecer y evaluar cuando es apropiado usarlas y cuando no lo es” (Arcavi, 2003).

Por esta razón, es importante que docentes y estudiantes construyan ese significado, que esté acorde con las expectativas, intereses y capacidades intelectuales de los estudiantes.

Teniendo en cuenta estos aspectos generales con respecto a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, a continuación se presentan,en resumen, tres investigaciones relacionadas con el tema que se plantea en este trabajo, (dificultades y errores en relación con los conocimientos previos en el aprendizaje del álgebra) y que se utilizan como principales puntos de referencia para el análisis de resultados y conclusiones aquí presentadas:

- ✓ Errores y Dificultades en procesos de representación. El caso de la generalización y el razonamiento algebraico (Castellanos & Obando, 2009).

Esta investigación es realizada por los docentes María S Castellanos y Jorge A Obando en el colegio Galán del municipio de Cumaral – Meta y presentada en el 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa realizado en San Juan de Pasto.

Para indicar su contexto, presenta en su inicio una frase de RolandCharnay que dice:*“considerar el error no como una falta o una insuficiencia si no como una parte coherente de un proceso, que ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos”*.

Al respecto de las múltiples angustias surgidas por docentes de matemáticas en formación, entorno a las dificultades y errores evidenciados por estudiantes de básica secundaria y media en la construcción de pensamiento algebraico, se exponen, para el caso de la generalización algebraica, los hallazgos logrados desde la investigación que recupera los referentes teórico conceptuales, las definiciones pertinentes y la clasificación de las dificultades y errores en Educación Matemática especialmente en el caso del álgebra; de igual manera se detallan características y acuerdos conceptuales en torno a razonamiento y razonamiento algebraico.

Esta ponencia evidencia los presupuestos e ideales para la Educación Matemática y la enseñanza del álgebra estableciendo la relación y justificación conceptual entre sistemas de representación (errores); dificultades (comprensión) y razonamiento algebraico. Con la exposición de ejemplos logrados en las experiencias de aula y analizados, producto del trabajo de campo en este estudio, se presenta a manera de propuesta los comentarios, reflexiones y recomendaciones que permitirán al futuro docente de matemáticas diseñar un modelo de competencia formal y cognitivo para entender y actuar en situaciones de la enseñabilidad que se dan en el entorno educativo en especial en relación al razonamiento algebraico.

Después del análisis del trabajo de campo realizado por estos investigadores, se encuentra que sobresalen principalmente los siguientes aspectos con respecto a los errores y obstáculos en el aprendizaje del álgebra:

1. Las dificultades para usar e interpretar los paréntesis.
2. Los cambios conceptuales entre la aritmética y el álgebra en relación con los errores; dentro de los cuales se encuentran: el significado de los símbolos e interpretaciones de las letras y el concepto de igualdad.

Así mismo, destacan que los errores de cálculo o uso incorrecto de fórmulas o procedimientos, “son producto de problemas que quedan sin corregir en la aritmética”(conocimientos previos). Entre los más recurrentes hallados en este trabajo se encuentran:

- ❖ Problemas asociados al manejo de operaciones en el conjunto de los números enteros y fraccionarios.
- ❖ Uso inadecuado de la propiedad distributiva.
- ❖ Generalización incorrecta de propiedades aritméticas.

El artículo finaliza con una propuesta didáctica, que pretende orientar a los docentes en formación, de tal manera que les permita proponer sus propios modelos de competencia, así como también actuar frente a los fenómenos y situaciones problemáticas que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

✓ Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico

Este trabajo es realizado por dos docentes especialistas en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de la Laguna (ubicada en la ciudad de San Cristóbal de la Laguna, Tenerife (España)) y corresponde a los resultados de una revisión de investigaciones relacionadas con los procesos cognitivos integrados en el aprendizaje del álgebra; en el afirman: *“…nos ocupamos especialmente de los obstáculos que frenan el progreso del conocimiento del alumno y que son* *inherentes al aprendizaje de conceptos y procedimientos en el inicio del acercamiento al álgebra, o sea, tipos de dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el comienzo de su aprendizaje"* (Palareas Medina & Socas Robayna, 1994).

En este trabajo, se presentan inicialmente algunas definiciones de obstáculo, tipos de obstáculos tales como: obstáculos epistemológicos, obstáculos de origen ontogénico, de origen didáctico, obstáculos cognitivos dentro de los cuales se distingue: obstáculos basados en la secuencia de un tema y obstáculos basados en casos simples;así como también se muestran las principales características de cada uno y autores o investigadores que se han referido a este concepto.

Con respecto de los obstáculos basados en la secuencia de un tema afirman: "…la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente de creer que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentementemás profundas." (Palareas Medina & Socas Robayna, 1994).

Sin embargo, es importante mencionar que este trabajo investigativo se centra en los obstáculos de tipo epistemológicos y didácticos (definidos anteriormente) y en este sentido parten de lo siguiente: "se puede conjeturar que los obstáculos cognitivos son el producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interna de las experiencias" (Palareas Medina & Socas Robayna, 1994). Del mismo modo, se distinguen dos tipos de errores:

- ❖ Errores del álgebra que están en la aritmética.
- ❖ Errores del álgebra debido a características propias del lenguaje algebraico.

Dentro del primer tipo están los errores relacionados con:

- El manejo inadecuado de las operaciones con los números enteros y fraccionarios:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{(2+3)} \rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{(x+y)}\,;\ \frac{-(3+5)}{4}=\frac{-3}{4}+\frac{5}{4} \rightarrow \frac{-(a+b)}{c}=\frac{-a}{c}+\frac{b}{c}$$

- Mal uso de la propiedad distributiva: extensión de la propiedad distributiva con relación a la adición (o sustracción), al caso de la multiplicación:

$$3 * (4 + 5) = 3 * 4 + 3 * 5 \rightarrow a * (b + c) = a * b + a * c$$

$$3 * (4 * 5) = 3 * 4 * 3 * 5 \rightarrow a * (b * c) = a * b * a * c$$

- Errores con el desarrollo binomial: extensión de la propiedad que relaciona la potencia con el producto al caso de la suma:
  $(ab)^2 = a^2b^2$
  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- Errores con respecto a la potenciación y radicación.
- Errores relativos al uso de recíprocos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{(3*5)} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x*y)}$
- Errores de cancelación: $\frac{(xy)}{(xz)} = \frac{y}{z}$, se extiende a $\frac{(x+y)}{(x+z)} = \frac{y}{z}$

Por otro lado, los errores del algebra debido a características propias del lenguaje algebraico hacen referencia a aquellos que no están ligados directamente con la aritmética, entre ellos están: el sentido del signo “=” en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal, ya que en el primer caso, tenemos el sigo “=” en aritmética es utilizado para designar una “tautología numérica” es decir, algo que es siempre verdad en todos los casos, por ejemplo $(3 + 4) = 7$, esto no ocurre en álgebra, en donde la igualdad aritmética solo se cumple cuando se trabaja con tautologías algebraicas por ejemplo $(x + y) = (x + y)$ pero en expresiones tales como$4x - 3 = 2x + 7$ la situación es diferente ya que la igualdad se cumple solamente cuando $x = 5$.

Con respecto a la sustitución formal, los autores afirman que es un proceso que va más allá de la generalización, por ejemplo cuando en la identidad$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$se sustituye$a$por $a + c$y$b$por $b + d$, nuevamente se obtiene una identidad con nuevas variables y aún más complejas.

El artículo finaliza con la siguiente conclusión: “…hoy en día el álgebra no es meramente “dar significado a los símbolos” si no otro nivel más allá que eso, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos; por ejemplo manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos proceso y controlarlos “es lo que significa pensar algebraicamente” Kieran&Filloy (1989)”.

✓ Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.

Este trabajo es realizado por la docente especialista en Didáctica de las Matemáticas, Encarnación Castro Martínez de la universidad de Granada

(España) y presentado en el XVI simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

En la introducción del trabajo se habla de:

❖ **El pensamiento algebraico**. Donde se encuentran temas tales como, uso de símbolos en álgebra, la importancia del pensamiento algebraico e indicadores para caracterizar el pensamiento algebraico.

❖ Tipos de dificultades.

- **De carácter epistemológico**: referente a la naturaleza del algebra, su lenguaje, sus elementos y las reglas que la rigen.
- **De carácter Ontogénico**: referentes a la complejidad que tienen la generalización y la abstracción.
- **De carácter Didáctico:** la carencia de sentido que la enseñanza ha dado para los estudiantes.

❖ **Crisis en la enseñanza**. Asociada a aspectos tales como, suposición de dificultad en la manipulación de símbolos algebraicos y proceso de generalización, actitud negativa frente al álgebra, desmotivación de los estudiantes, entre otros.

❖ **Caracterización del álgebra escolar.** Referente a los puntos de vista desde los cuales algunos autores ven el álgebra dentro del contexto escolar: medio para resolver problemas, actividad donde se requiere generalizar, factorizar, transformar, plantear y resolver ecuaciones, entre otras.

Del mismo modo, se plantea una relación entre la aritmética y el álgebra escolar, para ello se presentan dos posturas: en la primera de ellas se plantea una relación dual entre el álgebra y la aritmética, pero además, se muestra el álgebra como algo más que una generalización de la aritmética, para esto se apoya en Subramaniam y Banerjee, 2011 “el álgebra no solo es la generalización de la aritmética sino que proporciona una fundamentación para la misma”. En la segunda postura, se presenta al álgebra como una herramienta de generalización de la aritmética que permite la generalización y comprensión de algunas estructuras matemáticas y la formalización de las mismas.

De este modo, se identifican como principales nociones que producen dificultades en el aprendizaje del álgebra las siguientes:

- ❖ El lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras.
- ❖ La preservación de la jerarquía de operaciones para la que no encuentran justificación.
- ❖ El uso de paréntesis.
- ❖ La percepción del signo igual como expresión de una equivalencia.

Por otro lado, se plantea que una posible causa del fracaso de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, está precisamente ligada a la relación existente entre la aritmética y el álgebra, ya que las convenciones y reglas de la segunda rigen también a la primera, en consecuencia, si los estudiantes ignoran estas reglas en aritmética, muy probablemente el éxito en álgebra será limitado.

A continuación se muestran algunos ejemplos de errores recurrentes de algunos estudiantes al momento de trabajar en aritmética y álgebra:

Dificultades asociadas a la aritmética.
Ejemplo 1.

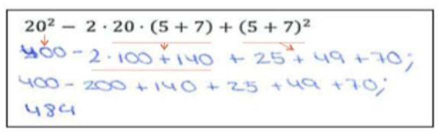


Imagen 4 Dificultades asociadas a la aritmética. (Uso de paréntesis)

Ejemplo 2.

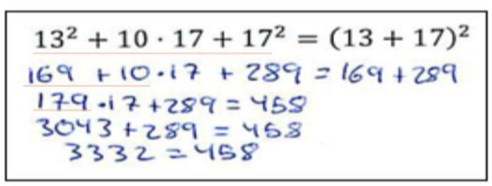


Imagen 5 Dificultades asociadas a la aritmética. (Jerarquía de operaciones)

Dificultades asociadas al lenguaje algebraico.
Ejemplo 1.

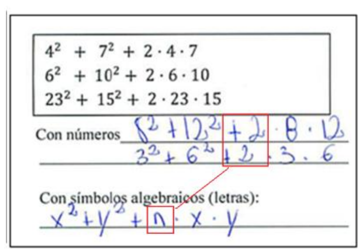


Imagen 6 Dificultades asociadas al lenguaje algebraico. (Uso de letras)

Ejemplo 2.

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$$

Imagen 7 Dificultades asociadas al lenguaje algebraico. (Asociada a la estructura de expresiones algebraicas)

Finalmente, apoyada en Bednarz y Janvier, 1996, la autora concluye con lo siguiente: “un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los estudiantes comprender la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico”.

CAPITULO V. ESTRATEGIA PEDAGÓGICA

5.1. Objeto de enseñanza.

Partiendo del interés de estudiar las dificultades y los errores de los estudiantes en relación con los conocimientos previos de los mismos y teniendo en cuenta la organización del plan de estudios en el área de matemáticas de la I. E. Los Comuneros, se escogió el grado noveno de este colegio para realizar la intervención en el aula, acordando orientar el tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos de solución de los mismos, contenido que se enmarca dentro de la unidad temática número 13 del PEI en el área de matemáticas de esta Institución, y en la que se consideran los siguientes estándares curriculares:

- ❖ Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- ❖ Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.
- ❖ Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- ❖ Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y cambios en las gráficas que las representan.
- ❖ Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertinentes a familias de funciones polifónicas, racionales, exponenciales y logarítmicas

Estos estándares corresponden a toda la unidad temática, siendo el primero de ellos el que soporta el tema que correspondió orientar durante un tiempo de tres meses con clases de cinco horas semanales.

El objeto de enseñanza estuvo compuesto por los siguientes temas:

1. Operaciones con números enteros, fraccionarios y reducción de términos semejantes (Repaso).
2. Ecuaciones simultáneas.
3. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Sistema de ecuaciones compatible.

3.2 Sistema de ecuaciones compatible determinado.
3.3 Sistema de ecuaciones compatible indeterminado.
3.4 Sistema de ecuaciones indeterminado
3.5 Conjunto solución.
4. Método de solución para sistemas de ecuaciones lineales 2x2
4.1 Método gráfico.
4.2 Método de sustitución algebraica.
4.3 Método de igualación.
4.4 Método de eliminación o reducción
4.5 Método de eliminación o reducción
4.6 Método de determinantes

5.2. Objetivos

5.2.1. Objetivo general (A nivel curricular)

Desarrollar competenciascomunicativas y de interpretación del lenguaje algebraico a través de la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.2.2. Objetivos específicos (A nivel curricular)

- Estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.
- Proponer problemas de la vida cotidiana en los que los sistemas de ecuaciones linealesapoyen su solución.
- Promover la comprensión de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.2.3. Objetivo general (De la intervención)

Estudiar la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes en los obstáculos y errores que presentan al desarrollarSistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.2.4. Objetivos específicos (De la intervención)

- Indagar sobre conocimientos previos que tienen los estudiantes.
- Identificar dificultades atribuibles a conocimientos previos.
- Desarrollar una estrategiade enseñanza basada en trabajo en equipo para presentar los Sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

5.3. Desarrollo secuencial de la temática.

Inicialmente se diseñó un portafolio que contuviera la planeación de las sesiones correspondientes al temaSistemas de ecuaciones lineales 2x2, que seríaorientada en el grado noveno de la I. E. Los Comuneros. Esta planeación inicial tuvo que ser modificada en varias oportunidades debido principalmente a circunstancias presentadas en el aula durante el desarrollo de la práctica pedagógica investigativa.

Conscientes de la dificultad que ocasionan las expresiones algebraicas en los estudiantes y sabiendo además, que para abordar esta temática es necesario e importante que los estudiantes recuerden y manejen algunos conocimientos previos, la intervención en el aula se inició con una prueba diagnóstica para identificar el nivel de conocimientos en el que los estudiantes se encontraban,en relación con el tema propuesto, permitiendo así clasificarlos en tres grupos: **grupo 1:** nivel avanzado; **grupo 2:** nivel medio; **grupo 3:** nivel bajo.

La organización anterior permitió hacerse una idea de cómo empezar a orientar este tema. En la prueba diagnóstica mencionada (examen escrito de 4 preguntas, sin calificación cuantitativa) fueron evaluados los siguientes temas: suma, resta, multiplicación y división de números enteros; suma, resta, multiplicación y división de números racionales y reducción de términos semejantes. Para esta actividad se contó con un totalde 22 estudiantes.

Una vez revisado el examen, se observó que era necesario dedicar las primeras clases al repaso de los temas evaluados; tiempo durante el cual se hizo especial énfasis en la suma y resta de números enteros con diferente signo, Todo esto con el fin de poder hacer lo mismo en el conjunto de los números racionales. Esta actividad, tuvo una duración de cinco clases, con los horarios descritos en el capítulo II.

Las actividades posteriores al repaso fueron: un taller correspondiente a las operaciones de números enteros y fraccionarios y otro taller enfocado a reducción de términos semejantes; posterior a esto se realizó una evaluación escrita, evaluando cuantitativamente los mismos temas de la prueba diagnóstica, con el objetivo de observar el progreso de los estudiantes.

Posteriormente, se comenzó a abordar el objeto de enseñanza anteriormente descrito. Es importante resaltar que los conceptos correspondientes a esta temática fueron, en la medida de lo posible, orientados de manera progresiva para que los estudiantes pudieran avanzar en su proceso de aprendizaje. A continuación se presenta el orden y la forma en que se orientaron los temas

1. Una vez culminado el repaso, se comenzó con el tema ecuaciones lineales de primer grado. Es de anotar, que los estudiantes ya estaban familiarizados con este tema, ya que había sido orientado por el profesor a cargo del grupo. Teniendo en cuenta lo anterior , se comenzó explicando algunos ejemplos, tales como:

- ❖ $3x - 5 = x + 3 \Rightarrow x = 4$
- ❖ $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3) \Rightarrow x = 3$
- ❖ $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6) \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$

Haciendo énfasis a los estudiantes que cada raíz satisface cada una de las ecuaciones dadas.

El significado de las raíces o soluciones de una ecuación, se estudió partiendo de la siguiente definición:

“Las raíces o soluciones de una ecuación, son los valores que satisfacen la ecuación, en otras palabras, son los valores que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en una identidad”.

Seguido es esto se le recordó a los estudiantes la forma estándar de solucionar una ecuación lineal o de primer grado (como cualquiera de las descritas anteriormente); esto es: 1. Efectuarlas operaciones indicadas si las hay. 2. Reunir en un lado de la igualdad todos aquellos términos que contengan la incógnita y en el otro lado, todas las cantidades conocidas. 3. Reducir términos semejantes en cada uno de los lados de la igualdad. 4. Despejar la incógnita. 5. Realizar la verificación correspondiente. Este primer punto finalizó con la presentación de algunos ejercicios para resolver en clase, Los cuales fueron realizados de manera individual dentro del aula y con acompañamiento de la practicante.

Con el propósito de que los estudiantes fueran conscientes de la relación que existe entre este lenguaje matemático, más precisamente algebraico con la cotidianidad, se presentaron situaciones problema los estudiantes para que plantearan la ecuación que soluciona el problema y resolverla, para finalmente llegar a la respuesta, algunas de ellas fueron:

- ❖ La edad de Alberto es el triple de la edad de Luisa. Si al sumar ambas edades obtenemos 128, ¿Cuáles son sus edades?
- ❖ La suma de tres números consecutivos es 156. Hallar cada uno de estos números.

Es importante mencionar que el desarrollo de este tema tardó aproximadamente cuatro clases (incluyendo los días en los que se tenía bloque). Del mismo modo, cabe decir, que este tipo de problemas ya habían sido evaluados por el profesor titular, razón por la cual se consideró pertinente no realizar nuevamente un examen escrito del tema en cuestión, sin embargo, se pretendía implementar situaciones similares cuando se abordara la temática de, sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

2. Se presentó a los estudiantes algunos ejemplos de ecuaciones simultaneas, con el fin de introducir el concepto de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 , para ello, algunos ejemplos propuestos fueron: fueron:

❖ $\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$ con $x = 3$ y con $y = -2$

❖ $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$ con$x = 3$ y con $y = 4$

Una vez se percibe que tienen idea de la posible definición de ecuaciones simultáneas, se les propone la siguiente definición:

- Definición (ecuaciones simultáneas) (Baldor, 1997):Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son simultáneas cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas.

Aprovechando que anteriormente fueron presentados ejemplos, lo siguiente fue formular algunos ejercicios para que los estudiantes verificaran si eran o no simultáneas, esta actividad fue realizada en el aula, y tuvo una duración de una clase.

Una vez culminada esta actividad, se procedió de la siguiente manera:

3. se les propuso el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

El objetivo era que los estudiantes al intentar resolverlo notaran que no siempre las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales son simultáneas. Seguido de esto, se les formalizó el caso con la definición:

- (Baldor, 1997): Un sistema de ecuaciones lineales, es un grupo de dos más ecuaciones, con dos o más incógnitas o variables.

Continuo a esto, se les recuerda a los alumnos que se estudiaran aquellos sistemas que comprenden 2 ecuaciones y dos incógnitas, o más comúnmente llamados sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

- A modo de complemento, se presentaron las siguientes definiciones (Baldor, 1997):

1. **Sistema de ecuaciones compatible:** un sistema de ecuaciones se denomina compatible cuando este sistema tiene solución.

   1.1 **Sistema de ecuaciones compatible determinado:** es un sistema que tiene solución, y además, la solución es única.

   1.2 **Sistema de ecuaciones compatible indeterminado**: es un sistema que tiene infinitas soluciones.

2. **Sistema de ecuaciones incompatible:** un sistema de ecuaciones se denomina incompatible, cuando este no tiene solución.

3. **Conjunto solución:** dado un sistema de ecuaciones lineales, el conjunto solución se define como el grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Con el propósito de brindar un acercamiento a cada una de las anteriores definiciones, se realizaron ejemplos en clase, del mismo modo, se propusieron algunos ejercicios donde los estudiantes tuvieran la oportunidad de utilizar cada una de las definiciones anteriores

Posteriormente se presentaron los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \textbf{(1)} \qquad\qquad \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \textbf{(2)}$$

Esto se hizo con el objetivo de conocer si los estudiantes lograban,en ese momento, identificar y diferenciar en **(1)** los coeficientes o números que acompañan a las variables y en (**2**) identificar las variables del sistema. Una vez hecho esto, se dio a conocer una definición más formal de sistemas de ecuaciones lineales, aclarando que era solo de carácter informativo ya que para efectos del desarrollo de la presente temática no sería necesaria. .

- Definición (sistema de ecuaciones lineales) (Grossman, 1998): Se llama sistema de $m$ecuaciones lineales con $n$incógnitas a un conjunto de $m$ecuaciones lineales en las mismas $n$incógnitas:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ \dots + \ a_{1n}x_n = \ b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ \dots + \ a_{2n}x_n = \ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ \dots + \ a_{mn}x_n = \ b_m \end{array}\right\}$$

El tema de las ecuaciones simultáneas fue evaluado por medio de un taller, debido a su complejidad, este tema no se incluye en ninguno de los exámenes escritos realizados durante el proceso de la práctica pedagógica.

Los temas correspondientes al tercer ítem de este orden, exigieron un tiempo aproximados de 6 clases.

4. Una vez dadas las definiciones necesarias para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se presentaron a los estudiantes los principales métodos para solucionar dichos sistemas en el siguiente orden:

- ❖ Método gráfico e igualación.
- ❖ Método de sustitución y reducción o eliminación.
- ❖ Método de determinantes.

Antes de iniciar con el primer método, se aclaró que son llamados sistemas de ecuaciones lineales, porque cada una de las ecuaciones del sistema representa líneas en el plano cartesiano y en este sentido el primer método a estudiar es el gráfico.

Es de anotar que cada uno de los anteriores métodos de solución de ecuaciones lineales 2x2fue orientadobajo el siguiente esquema:

- ❖ Breve descripción del método a estudiar.
- ❖ Forma estándar de aplicarlo. (pasos enumerados secuencialmente)
- ❖ Ejemplos, usando la forma estándar.
- ❖ Ejercicios.

En este sentido se comenzó con el método gráfico:

- **Método gráfico.** (Baldor, 1997): Consiste en dibujar en un mismo plano cartesiano las rectas cuyas ecuaciones aparecen en el sistema.

  Pasos para usar este método: "Forma estándar" de aplicar este método**.**

  1. Despeja la variable y en ambas ecuaciones.

  2. Realiza la tabulación para cada una de las ecuaciones encontradas en el paso 1.

  3. Dibuja las rectas en un mismo plano.

  4. Observa y encuentra su punto de intersección (si lo hay).

  5. Realiza la verificación correspondiente: esto es, toma el punto de intersección que encontraste (si lo hay) en el paso anterior y remplázalo en cada una de las ecuaciones, observa y concluye.

Dentro de los ejercicios propuestos para la aplicación de este método, se presentó a los estudiantes algunos sistemas con infinitas soluciones, como también otros que no tienen solución, con el fin de que al graficar las rectas, fueran ellos quienes notaran la diferencia. Entre algunos de dichos sistemas están:

❖ $\begin{cases} y + x = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$ ❖ $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ ❖ $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$

- **Método de igualación algebraica**(Baldor, 1997): Consiste en igualar las dos ecuaciones dadas en el sistema, eliminar o agrupar términos semejantes, con el fin de obtener una ecuación lineal con una incógnita.

  De manera análoga, se presentan ejercicios con única, infinitas y sin solución para que los estudiantes noten qué sucede en cada uno de los casos.

  Terminado el estudio de este tema, se entregó un taller que contenía: una parte teórica, dentro de la cual se encontraban los temas: ecuaciones simultaneas, definición de sistema de ecuaciones, sistema compatible, sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado, sistema incompatible, conjunto solución y algunas situaciones problema en las que los estudiantes debían proponer la ecuación que los modela y presentar su solución, así mismo, este taller contenía ejercicios de los métodos, gráfico e igualación algebraica, con el propósito de que los estudiantes repasasen estos temas y así poder posteriormente efectuar la evaluación de los mismos. La evaluación correspondió a un examen escrito de cuatro preguntas, para el que se dio un tiempo de 85 minutos para su solución. De esta manera se efectuó la segunda parte de la intervención en el aula.

- **Método de sustitución** (Baldor, 1997): Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones dadas en el sistema y remplazarla en la otra ecuación con el fin de agrupar y eliminar los términos semejantes obteniendo así una ecuación lineal de una incógnita.

- **Método de reducción o eliminación**(Baldor, 1997): Consiste en eliminar una de las dos incógnitas del sistema, reduciendo el sistema de ecuaciones lineales 2x2 a una ecuación lineal con una incógnita.

  Una vez terminada esta temática, se presentó un taller que incluyó ejercicios correspondientes a los métodos de sustitución y eliminación para que los estudiantes reforzaran su conocimiento y presentaran así un examen escrito de cuatro preguntas, el cual debió ser resuelto en un tiempo aproximado de 85 minutos.

- **Método de determinantes** (Grossman, 1998): Antes de iniciar con este método, se introdujo una noción de lo que es el determinante de una matriz. Se aclaró que la definición formal de determinante no fue dada a conocer debido al nivel escolar en el que se trabajó.

  En este orden de ideas, se definió determinante de la siguiente manera:

  Determinante(Baldor, 1997)**:** es un número asociado a un arreglo cuadrado de números encerrados entre dos barras verticales.

Seexpusieron ejemplos acorde a la anterior definición. Utilizando los mismos ejemplos se explicaron los elementos que componen un determinante (filas y columnas) y la manera de calcular su valor numérico.

Una vez hecho lo anterior se procedió a solucionar el sistemas de ecuaciones lineales 2x2, utilizando este método, que en realidad es un artificio matemático o regla que permite de manera sencilla encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2;

Al igual que en los métodos anteriores, se presenta una forma estándar de aplicar este método seguido de algunos ejemplos y posteriores ejercicios.

Finalmente se realiza un último taller escrito e individual en aula de este tema con el fin de contribuir a la preparación del examen escrito que los estudiantes deben presentar posteriormente al desarrollo de esta actividad.

El examen escrito correspondiente a este tema consta de cinco puntos y se da un tiempo de 70 minutos para su solución.

De esta forma se termina la intervención en aula, usando aproximadamente 20 clases más, para el desarrollo del cuarto ítem de la secuencia anterior.

NOTAS:

1. Los talleres mencionados anteriormente, fueron desarrollados de la siguiente manera: una parte dentro del aula y con acompañamiento de la practicante y otra de manera individual y sin acompañamiento a manera de tarea.

2. Los resultados de la secuencia anteriormente descrita y su respectivo análisis se mostraran en el capítulo V

5.4. Metodología

Con el objetivo de fortalecer en los estudiantes la percepción y la crítica, la metodología adoptada en la práctica pedagógica investigativa fue de carácter activo y participativo, por lo cual se dio prioridad e importancia al estudiante y al proceso de construcción de conocimiento por parte del mismo, en este sentido la practicante se consideró como una mediadora entre los estudiantes y el conocimiento.

Dentro del salón de clases, se optó por permitir a los estudiantes participar y dar sus opiniones respecto al tema trabajado en cada una de las sesiones, del mismo modo, se privilegió el trabajo del estudiante (con y sin acompañamiento de la practicante) dentro y fuera del aula, procurando así una formación integral, es decir, la formación de una persona con saberes disciplinares (matemáticas en este caso) y valores éticos tales como el respeto, la tolerancia y la solidaridad, que le permitan convivir dentro de una sociedad; se fomentó también el trabajo en equipo y se resaltó la importancia del otro en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

También, con el propósito de obtener más información que permitiera dar respuesta al objetivo propuesto en el presente trabajo, se procuró establecer una buena comunicación entre la practicante y los estudiantes de tal forma que los últimos se sintieran cómodos en cada una de las sesiones y tuvieran libertad absoluta de expresar sus dudas u opiniones respecto a los diferentes temas.

Por lo anterior y en aras de propender por el aprendizaje del estudiante, durante la intervención en el aula, se contó con la orientación del director de la práctica, con quien se planearon cada una de las actividades que se realizarían dentro del aula, del mismo modo, se realizó una evaluación y análisis por parte del director de práctica y posteriormente por el profesor titular del curso de cada una de las propuestas antes de llevarlas al salón de clases, de tal modo que se modificara lo necesario y se planeara nuevamente la actividad.

Además, con el fin de reconstruir los hechos ocurridos en cada una de las sesiones se utilizó un diario de campo, el cual fue escrito inmediatamente después de cada clase con el fin de describir lo más detalladamente posible lo ocurrido dentro del aula.

5.5. Evaluación

En términos de la evaluación de los estudiantes, se decidió hacerlo de manera cualitativa y cuantitativa de la siguiente forma:

- Evaluación cuantitativa.

En aras de cumplir con el reglamento interno del colegio en términos de notas (en una escala de cero a cinco), que dieran cuenta del rendimiento académico del grupo de estudiantes fue necesario implementar la evaluación cuantitativa, para ellos e escogieron los siguientes instrumentos:

- **Examen escrito:** Se hicieron en total cinco exámenes incluyendo la prueba diagnóstica, cada uno de estos constaba de cuatro a cinco preguntas aproximadamente. El tiempo dado para la resolución de estas pruebas fue calculado a partir del tiempo que se demoraba la practicante en resolverlos, dando el 75% más del tiempo usado por la practicante. Todos los exámenes fueron resueltos de manera individual y sin la posibilidad de usar ningún dispositivo electrónico

- **Talleres escritos:** esta actividad fue realizada en la mayoría de los casos en grupos con el propósito de fomentar el trabajo en equipo, la comunicación y el aprendizaje en conjunto con del otro. Esta actividad se realizó siempre previo a cada uno de los exámenes con el fin de que los estudiantes practicaran lo aprendido en clase y resolvieran sus dudas respecto al tema; cada taller tenía un valor correspondiente al 10% de la nota en el examen.

❖ **Exposiciones cortas:** corresponden a aquellas actividades que se realizaron esporádicamente en el aula en las que, a través de dinámicas, se proponían ejercicios en el tablero y los estudiantes salían a resolverlos, en términos de evaluación, se tenía en cuenta la habilidad del estudiante para resolver el problema y la claridad a la hora de exponer sus ideas ante el resto del grupo. Este tipo de actividades fomentó la comunicación y la capacidad participativa y critica delos estudiantes. Además, en cuanto a la nota de este tipo de actividades, se acordó con los estudiantes que se darían algunas décimas que sumarian ala nota del examen del tema correspondiente.

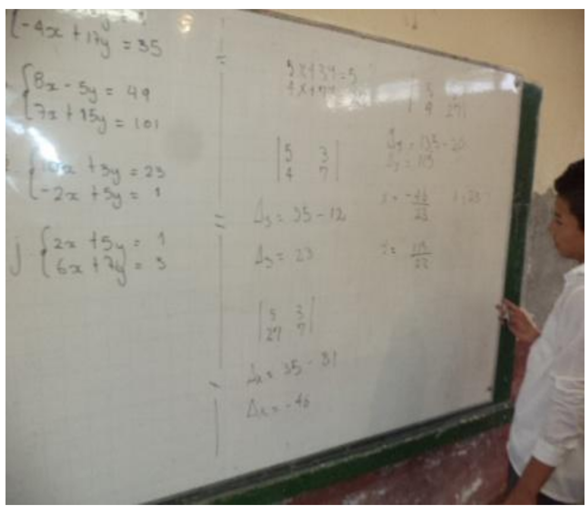


Imagen 8 Trabajo de los estudiantes en aula

- Evaluación cualitativa

Teniendo como eje principal al estudiante y su aprendizaje, durante la intervención se tuvieron en cuenta algunos aspectos cualitativos que complementaron la evaluación cuantitativa, dentro de tales criterios evaluativos se encuentran: responsabilidad, comportamiento dentro y fuera del aula, respeto dentro y fuera del aula, interés, participación, presentación personal, asistencia y puntualidad.

5.6. Modelo pedagógico adoptado.

El modelo pedagógico se considera de acuerdo a las diferentes concepciones que se tenga respecto a la enseñanza de las matemáticas; particularmente nos identificamos con lo que el modelo constructivista promulga respecto a la enseñanza de las matemáticas, motivo por el cual el modelo escogido para la realización de la práctica fue precisamente el modelo constructivista.

El constructivismo se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos (Angarita, 2010), está centrado en la persona que aprende, en sus experiencias previas de las que realiza nuevas construcciones mentales, considera que la construcción de conocimiento se produce: cuando el sujeto interactúa con el objeto de conocimiento (Piaget); cuando eso lo realiza en interacción con otros (Vigotsky) y cuando es significativo para el sujeto (Ausubel); además en este modelo pedagógico el docente es considerado como un acompañante o asesor del estudiante que se convierte en el medio a través del cual el sujeto que accede al conocimiento.

Algunos de los principios epistemológicos del constructivismo son:

- Existe una relación dinámica y no estática entre el sujeto y el objeto.
- El conocimiento es un proceso de estructuración y construcción.
- El sujeto construye su propio conocimiento de manera idiosincrática[9].
- La función de la construcción es la adaptación y no la igualación de lo real y lo simbólico.
- Los conocimientos nuevos se vinculan a los previamente construidos y los modifican. (Ruíz, 2011)

[9] Distintivos propios de un individuo o de una comunidad

CAPITULO VI. PRESENTACIÓN Y ANALISIS DE RESULTADOS.

6.1. Presentación de resultados.

En primer lugar, recordemos que la temática trabajada para el desarrollo dela presente PPI corresponde a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos de solución de los mismos; sin embargo, en conjunto con el director de la práctica pedagógica, se acordó presentar a continuación, los resultados obtenidos en el tercer examen escrito realizado a los estudiantes que participaron durante el proceso de trabajo en el aula, ya que se consideró que este examen recoge información valiosa que permite formular algunas observaciones y comentarios finales. En este examen, los estudiantes tuvieron la posibilidad de usar como métodos de solución a los ejercicios planteados los siguientes: método gráfico, método de sustitución algebraica, método de igualación algebraica, y método de reducción o eliminación.

El examen en cuestión está compuesto por cuatro preguntas (descritas a continuación), en cada una de ellas se presenta una categorización de los estudiantes, la descripción de cada categoría y el porcentaje de estudiantes que se encuentran en cada una de ellas. También es importante mencionar que durante la realización de este examen se contó con la participación de 20 estudiantes de una total de 22.

Primera pregunta. Identificación del método usado para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 dado.

En esta pregunta se les presenta a los estudiantes un sistema de ecuaciones lineales 2x2 con su respectiva solución; a continuación se pregunta si la solución mostrada es correcta y además se les solicita escribir el nombre del método que se usó para resolver tal sistema. Las categorías encontradas en esta pregunta fueron:

Categoría.	Descripción.	%
C1. Responde correctamente a la pregunta y reconoce el método usado para obtener la solución.	El estudiante contesta acertadamente la pregunta, justificando en algunos casos su respuesta y además escribe correctamente el nombre del método usado para obtener la solución al sistema dado.	55%
C2. Responde correctamente a la pregunta peor no reconoce el método usado para obtener la solución.	El estudiante contesta acertadamente la pregunta, justificando en algunos casos su respuesta, sin embargo el nombre del método usado para obtener la solución es incorrecto.	40%

Categoría.	Descripción.	%
C3. Responde incorrectamente a la pregunta pero reconoce el método usado para obtener la solución.	El estudiante no responde correctamente a la pregunta, sin embargo escribe el nombre correcto del método usado para encontrar la solución.	5%

Tabla 1 Categorías primer punto del tercer examen escrito

Los resultados de la tabla muestran que el 55% de los estudiantes ubicados en la primera categoría, reconocen el método utilizado en la solución del sistema de ecuaciones lineales 2x2 propuesto por la practicante en el examen; adicionalmente, contestan de manera acertada la pregunta y en algunos casos la respuesta es justificada de forma algebraica, esto permite intuir que reconocen una secuencia lógica y ordenada de pasos que les permite finalmente emitir un juicio de verdad o falsedad respecto a tal procedimiento.

Por otro lado, la segunda categoría de la tabla, muestra que el 40% de los estudiantes da una respuesta parcialmente correcta a este punto del examen al reconocer la validez del procedimiento realizado para obtener la solución del sistema de ecuaciones planteado, sin embargo no identifican el nombre correcto del método que permite llegar a la respuesta del ejercicio, esto permite intuir que prima para estos estudiantes la manera de llegar a la solución más que la clasificación por nombre propio de cada uno de los métodos. Este resultado además, obligó a reflexionar la forma de mostrar a los estudiantes la importancia de reconocer y diferenciar cada uno de los métodos dados para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Finalmente, la tercera categoría muestra que el 5% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta la pregunta y sin embargo acertaron en el nombre del método usado para obtener la solución. El porcentaje es relativamente bajo, esto condujo a una reflexión en relación con el desempeño de estos estudiantes en el aula de clase y su actitud frente a esta temática.

Segunda pregunta. Aplicación de métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

En esta pregunta se presenta a los estudiantes dos sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Se solicita resolverlos utilizando el método que consideren más adecuado. Las categorías obtenidas en este punto fueron las siguientes:

Categoría.	Descripción.	%
C1. Usocomprensivo de algún método de	El estudiante aplica correctamente alguno de los métodos estudiados para solucionar este tipo de sistemas, además, no	30%

Categoría.	Descripción.	%
solución.	presenta errores aritméticos al operar con números enteros y fraccionarios, respeta la jerarquía de operaciones, usa correctamente paréntesis y demás símbolos y notaciones matemáticas.	
C2. Uso comprensivo de alguno de los métodos de solución y omisión de cálculos y el símbolo de un número fraccionario.	El estudiante aplica correctamente alguno de los métodos estudiados para solucionar sistemas de este tipo, opera de manera correcta en los números enteros y fraccionarios; sin embargo en el conjunto solución, omite el valor de alguna de las dos incógnitas y el símbolo de la “línea” que representa un numero fraccionario	20%
C3. Uso parcialmente comprensivo de alguno de los métodos de solución.	El estudiante aplica hasta cierto parte del ejercicio propuesto alguno de los métodos estudiados para solucionar este tipo de sistemas, sin embargo, durante este proceso presenta errores al operar con números enteros negativos, fraccionarios, reducción de términos semejantes, uso de paréntesis y jerarquización de operaciones.	35%
C4. Omisión.	El estudiante no presenta ningún tipo procedimiento.	15%

Tabla 2 Categorías segundo punto del tercer examen escrito

La clasificación mostrada en la tabla 2 indica que un 30% de los estudiantes reconoce alguno de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 vistos en clase, lo aplica de manera adecuada y obtiene correctamente el conjunto solución del sistema dado. Adicionalmente, este porcentaje de estudiantes opera sin mayor problema en el conjunto de los números enteros y fraccionarios, manejan adecuadamente el lenguaje algebraico respetando la jerarquía de las operaciones y usando correctamente paréntesis y otros signos de agrupación.

En la categoría 2, se encuentra el 20% de los estudiantes que reconocen y aplican de manera correcta alguno de los métodos de solución para ecuaciones lineales 2x2 vistos en clase, adicionalmente este porcentaje de estudiantes opera correctamente en los números enteros y fraccionarios de igual forma manejan adecuadamente el lenguaje algebraico, respetando la jerarquía de operaciones y utilizan adecuadamente signos de agrupación; sin embargo este grupo de estudiantes omiten de manera total la línea que por notación matemática se utiliza para simbolizar un numero faccionario. La omisión de este símbolo permite intuir que para este grupo de estudiantes, no representa ningún significado trazar un pequeño segmento de recta horizontal debajo del primer número (numerador), por lo que operar con o sin este símbolo resulta para ellos equivalente.

Observe que entre las categorías 1 y 2 se obtiene un total del 50% de los estudiantes que reconocen y aplican correctamente alguno de los métodos de solución vistos hasta ese momento.

El porcentaje más alto en esta tabla le corresponde a la categoría 3 con un 35% de los estudiantes quienes reconocen y aplican de manera parcial alguno de los métodos estudiados para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Este porcentaje de estudiantes corresponde a aquellos que comienzan solucionando el sistema de manera correcta, pero llegan a un punto donde empiezan a aparecer errores sucesivos en el manejo del lenguaje algebraico, errores al operar con números enteros (sobresaliendo principalmente aquellas operaciones que involucran números negativos) y fraccionarios, así como también el uso inadecuado de signos de agrupación y errores en la reducción de términos semejantes evidenciado así un uso incomprensivo de los métodos de solución para este tipo de sistemas.

Finalmente la categoría 4 con un 15% corresponde a aquellos estudiantes que no se atrevieron a realizar ningún tipo de procedimiento para encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones planteado.

Observe que el 50% obtenido de sumar los porcentajes de las categorías 3 y 4 corresponden a los estudiantes que presentan algún tipo de problema en el aprendizaje de esta temática. Este porcentaje es la mitad del total de estudiantes del grado noveno, por lo que es importante concentrar la atención en este grupo y en la medida de lo posible hacer un acompañamiento adecuado que permita a estos estudiantes avanzar en el proceso de aprendizaje de esta temática.

Tercera pregunta. Problema de aplicación.

En esta pregunta, se plantea a los estudiantes una situación problema y se solicita resolver el problema como consideren pertinente hacerlo. En esta pregunta se encontraron las siguientes categorías:

Categoría.	**Descripción**.	**%**
C1. Reconoce el concepto de perímetro, base y altura y los traslada al lenguaje algebraico.	El estudiante plantea y resuelve el problema adecuada y correctamente.	25%
C2. No reconoce los conceptos de perímetro, base y altura y los traslada incorrectamente al lenguaje algebraico.	El estudiante plantea y resuelve el problema de manera incorrecta.	10%
C3. Omisión de procedimiento.	El estudiante no presenta un procedimiento escrito que permita observar cómo obtiene la solución.	25%
C4. Omisión.	El estudiante no presenta solución al problema.	40%

Tabla 3 Categorías tercer punto del tercer examen escrito

De la tabla anterior se observa que los estudiantes de la categoría 1, con un 25%, reconocen conceptos geométricos tales como perímetro, base y altura, esto les permite plantear y resolver el problema de manera correcta. Es importante mencionar que el total de los estudiantes ubicados en esta categoría utilizaron directamente el lenguaje algebraico para resolver el problema. Este resultado permite decir que estos estudiantes trasponen adecuadamente el conocimiento teórico a una situación problema, en donde es aplicable tal conocimiento, lo que es un proceso complejo y de mayor exigencia.

La segunda categoría con un 10% corresponde a los estudiantes que evidencian en sus procedimientos que no reconocen algunos conceptos geométricos tales como perímetro, base y altura ya que este grupo dibuja la figura correspondiente a un rectángulo y ubica incorrectamente la base y la altura del mismo, proceso que lleva a la solución incorrecta del problema. Estos son estudiantes que reconocen y aplican algún método de solución para este tipo de sistemas sin ningún problema, pero que presentan errores al intentar trasladar el lenguaje algebraico para solucionar un problema práctico.

La categoría 3 con un 25% corresponde a aquellos estudiantes que no escriben ningún tipo de procedimiento para dar la solución al problema, sin embargo la respuesta que dan es correcta.

Finalmente, la categoría con mayor porcentaje es la 4, en la que se observa que el 40% de los estudiantes no se atreve a presentar ningún tipo de procedimiento para resolver el problema planteado. Este resultado es inquietante ya que el porcentaje es alto, lo cual obligó a reflexionar sobre las prácticas de enseñanza relacionadas con este tema, es decir, la solución de situaciones problema.

Cuarta pregunta. Pregunta abierta.

En esta pregunta se indaga a los estudiantes su opinión acerca de su preferencia con respecto a los métodos vistos hasta ese momento. Dado que esta corresponde a una pregunta abierta y de gusto personal, no se categorizó como las anteriores, sin embargo, a continuación se presentan los porcentajes obtenidos de la respuesta de los estudiantes en comparación con el método más usado en el desarrollo de este examen.

Método	% preferencia	% uso en el examen
Sustitución algebraica.	40%	30%
Eliminación o reducción.	25%	35%
Igualación algebraica.	0%	15%

Método	% preferencia	% uso en el examen
Gráfico	0%	0%
Omisión	30%	20%

Tabla 4Preferencia versus uso de los métodos de solución de ecuaciones 2x2

Por otro lado, con el propósito de brindar información al profesor titular del curso acerca del rendimiento académico durante la intervención de la practicante en el aula, se calificó el desempeño de los estudiantes en una escala numérica de 1 a 5 de la siguiente manera:

Excelente: $4 \leq x \leq 5$

Sobresaliente: $3 \leq x < 4$

Insuficiente: $2 \leq x < 3$

Deficiente: $0 \leq x < 2$

Donde x es la nota numérica que a juicio de la practicante obtuvo el estudiante en cada uno de los cuatro exámenes realizados durante la intervención en el aula. Es importante mencionar que antes de cada examen escrito se entregó un taller que los estudiantes debían resolver y entregar a la practicante con el propósito de mejorar los resultados en cada uno de los exámenes.

A continuación se presenta y describe el desempeño de los estudiantes desde el inicio de la intervención hasta la finalización de la misma, para lo cual se muestrangráficas del desempeño en la prueba diagnóstica y los cuatro exámenes escritos, teniendo en cuenta las notas adicionales por talleres u otras actividades en el aula.

- Desempeño en la prueba diagnóstica

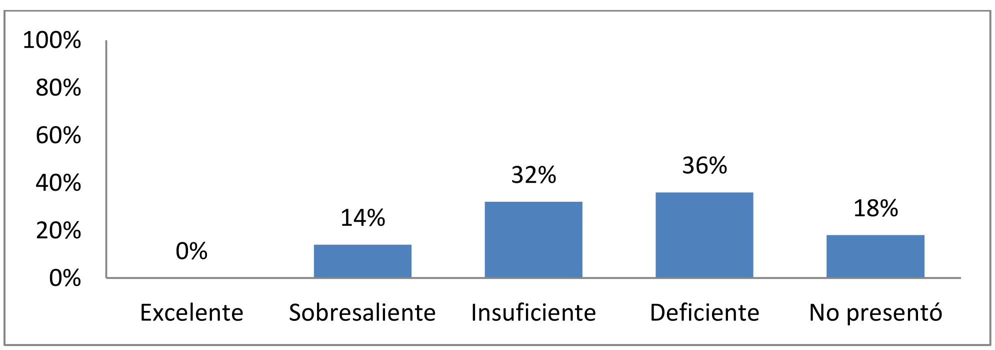


Figura 1 Desempeño en la prueba diagnóstica

Es importante recordar que este examen se realizó con el propósito de diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes en temas como, operaciones con números enteros, fraccionarios y reducción de términos semejantes.

- Desempeño en el primer examen escrito

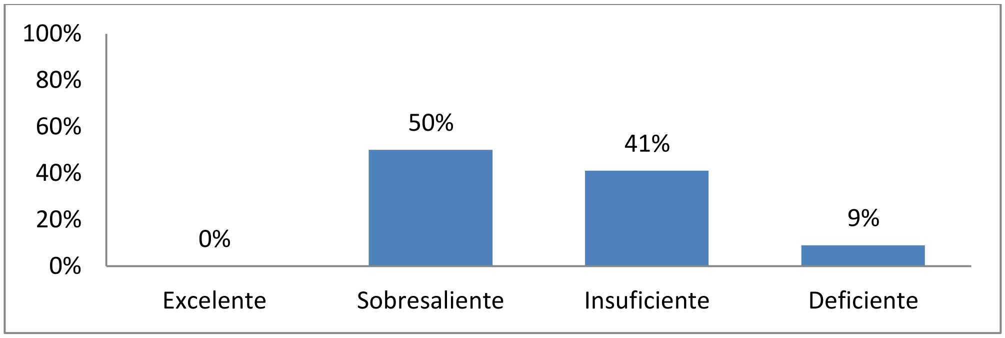


Figura 2 Desempeño en el primer examen escrito

Los datos mostrados corresponden al desempeño de los estudiantes sin las decimas adicionales del taller escrito. En este examen se evaluaron: operaciones en el conjunto de nueros enteros, fraccionarios y reducción de términos semejantes.

A continuación se muestra el desempeño de los estudiantes en este mismo examen pero teniendo en cuenta el taller escrito que los estudiantes presentaron previo al examen.

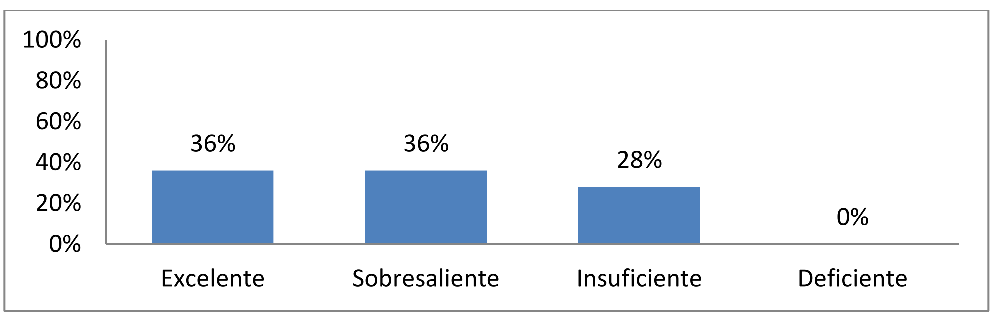


Figura 3 Desempeño en el primer examen escrito teniendo en cuenta otras actividades

Observe, que si se tiene en cuenta el taller (el cual fue presentado por la totalidad de os estudiantes), los resultados cambian significativamente obteniendo desempeños excelentes, reduciendo el insuficiente y eliminando el deficiente.

- Desempeño en el segundo examen escrito

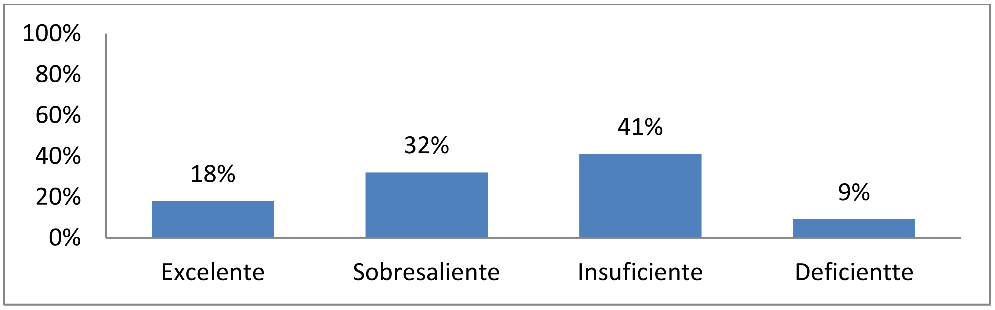


Figura 4 Desempeño en el segundo examen escrito

Observe que este es el primer examen escrito y se puede observar desempeños en todas las categorías.

A continuación se muestra el desempeño en este mismo examen pero teniendo en cuenta la nota adicional del taller que algunos estudiantes (68%) presentaron.Debido a esto, se propuso realizar en el aula algunos ejercicios en los que los estudiantes que no presentaron el taller tuvieran la oportunidad de salir al tablero y mejorar la nota del examen, esta actividad contó con la participación voluntaria de muy pocos estudiantes que no presentaron el taller.

Adicionalmente, tres estudiantes no asistieron el día en el que se realizó este examen, por lo que fue necesario realizar para ellos un examen similar al aplicado para el resto del grupo, sin embargo su desempeño se encuentra incluido en la gráfica anterior.

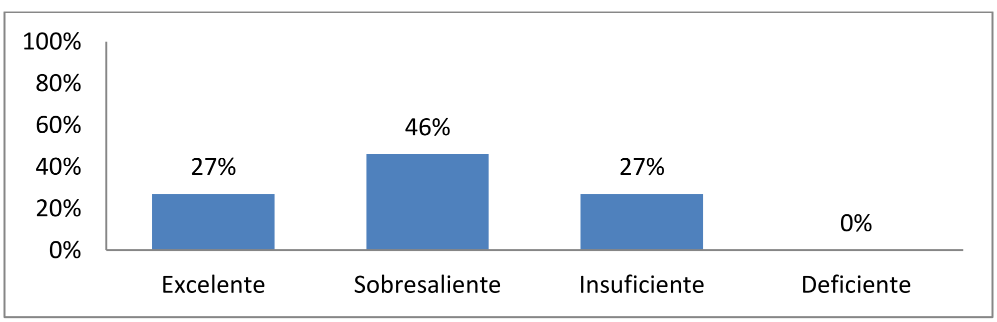


Figura 5 Desempeño en el segundo examen escrito teniendo en cuenta otras actividades

Observe que teniendo en cuenta la nota del taller y los ejercicios adicionales, los resultados mejoran parcialmente en este caso, eliminando nuevamente el desempeño deficiente.

- Desempeño en el tercer examen escrito

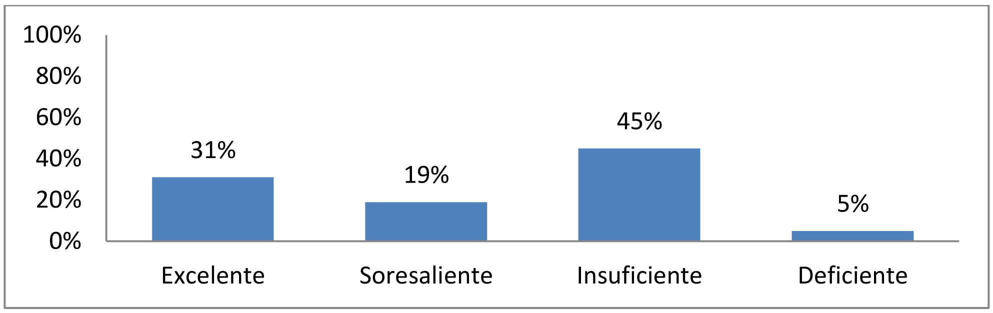


Figura 6 Desempeño en el tercer examen escrito

La figura muestra desempeño en todas las categorías, siendo superior la insuficiente.

Durante la realización de este examen no asistieron dos estudiantes, por lo que fue necesario la elaboración de un examen para ellos con el tema de evaluación correspondiente, sin embargo, el desempeño que registraron se encentra incluido en la gráfica anterior.

La entrega del taller para este examen tuvo una participación del 59%, adicionalmente a esto se realiza una actividad lúdica en la que los estudiantes tuvieron la oportunidad de responder algunas preguntas realizadas por la practicante y de este modo mejorar la nota del examen escrito. Así, teniendo en cuenta la nota del taller y la actividad descrita se presenta a continuación el desempeño para este examen.

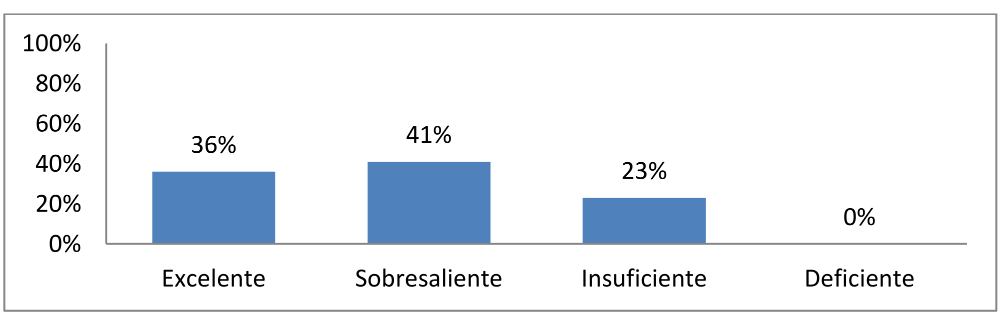


Figura 7 Desempeño en el tercer examen escrito teniendo en cuenta otras actividades

Con las actividades implementadas se puede observar que los resultados en este examen mejoran parcialmente y el desempeño deficiente vuelve a desaparecer.

- Desempeño en el cuarto examen escrito

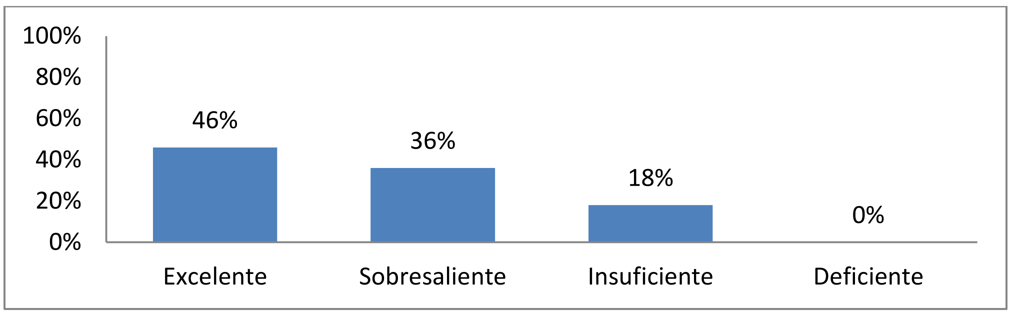


Figura 8 Desempeño en el cuarto examen escrito

El desempeño en este examen escrito fue el más satisfactorio como se puede observar, ya que el mayor porcentaje (46%) presentaron un desempeño excelente y no se registró porcentaje para desempeño deficiente.

Durante el desarrollo de esta actividad no asistieron cuatro estudiantes a los cuales les fue realizado un examen similar para evaluar el tema correspondiente, estos resultados también fueron incluidos en la anterior gráfica.

Es importante mencionar que en este examen no se entregó taller previo, sin embargo, se propuso una actividad en el aula para que los estudiantes de manera voluntaria salieran al tablero y explicaran algún ejercicio, de tal forma que permitiera mejorar la nota obtenida en el examen. Los resultados de esta actividad se muestran a continuación.

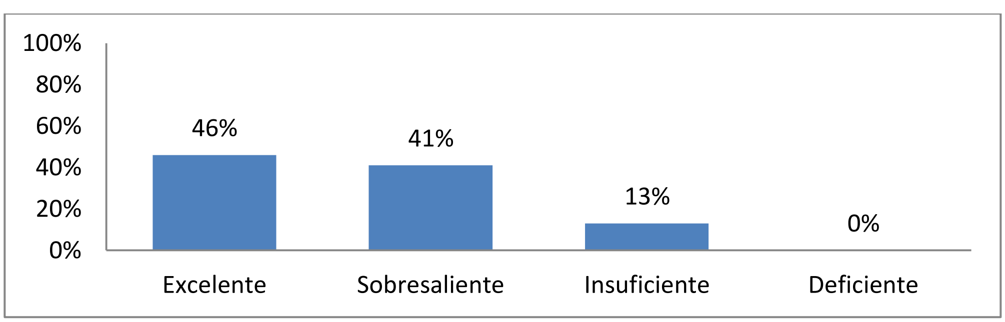


Figura 9 Desempeño del cuarto examen escrito teniendo en cuenta otras actividades

La actividad implementada modificó los resultados, obteniendo así un incremento en el desempeño sobresaliente y una disminución en el desempeño insuficiente.

Teniendo en cuenta todos los datos suministrados anteriormente, a continuación se presenta el desempeño en general que tuvieron los estudiantes durante la intervención de la practicante en el aula. El siguiente corresponde al desempeño entregado al profesor titular del curso, por lo que solo se tuvo en cuenta los cuatro exámenes escritos.

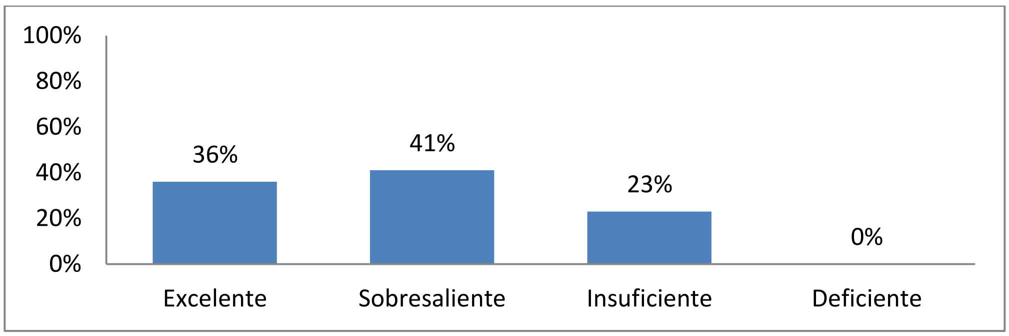


Figura 10 Desempeño académico final

Observe que de acuerdo con este resultado el 23% de los estudiantes no alcanzó a aprobar la materia, por lo que fue necesario tomar en cuenta también las notas dadas por la practicante en: disciplina, responsabilidad, respeto y puntualidad así, los resultados finales del desempeño de los estudiantes fue:

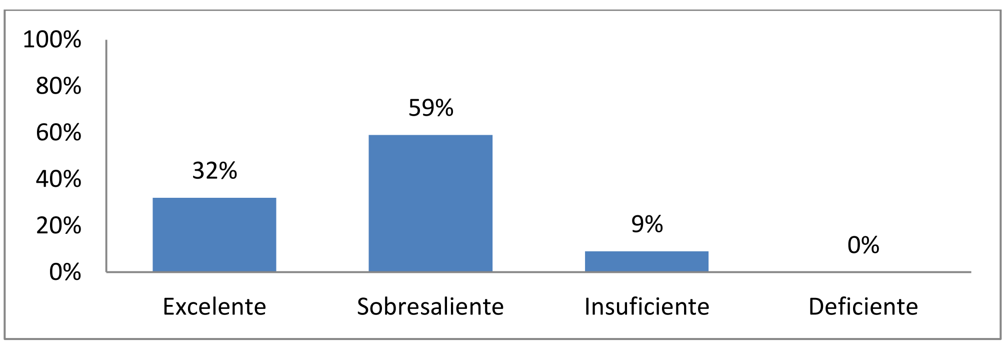


Figura 11 Desempeño académico final teniendo en cuenta otros criterios de evaluación

Así, en la nota numérica entregada por la practicante se tuvo en la nota que se obtuvo con los criterios mencionados, de este modo sólo 2 estudiantes reprobaron la materia con un desempeño insuficiente.

6.2. Discusión de resultados.

La realización de una prueba diagnóstica antes de iniciar con la temática preparada para la intervención fue muy importante, ya que esta permitió detectar las falencias más sobresalientes que tenían los estudiantes hasta ese momento y de este modo tomar las medidas que se consideraran pertinentes, que en este caso fue realizar un repaso donde los estudiantes tuvieran la oportunidad de recordar los conceptos planteados en la prueba diagnóstica por considerarlos bases fundamentales para el desarrollo del tema correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y algunos métodos de solución.

Al observar el desempeño que tuvieron los estudiantes en la prueba diagnóstica y compararlo con el desempeño en el primer examen (ver figuras 1 y 2), se puede concluir que la estrategia fue pertinente, ya que el desempeño deficiente pasó del 36% al 9% y de igual forma se obtuvo un mejor resultado con respecto al desempeño sobresaliente.

Por otro lado, si se observa el desempeño real en el segundo examen escrito (figura 4) y el desempeño en el tercer examen escrito (figura 6), se nota un crecimiento en el desempeño insuficiente y un decrecimiento en el desempeño sobresaliente, esto condujo a reflexionar acerca de las estrategias de enseñanza y actividades realizadas en el aula.

Es importante decir, que en el segundo examen fueron evaluados los métodos gráfico e igualación algebraica, en donde se observa que predomina el método gráfico sobre el algebraico. En el tercer examen escrito se evaluaron los métodos de eliminación o reducción y sustitución algebraica; los dos son de naturaleza algebraica. Así teniendo en cuenta que la preferencia de los niños parece ser el método gráfico, se puede decir que esta es una posible causa para el aumento en el desempeño insuficiente y el decrecimiento en el desempeño sobresaliente.

Esta situación, condujo a replantear algunas estrategias pedagógicas con el propósito de que los estudiantes tuvieran la posibilidad de familiarizarse un poco más con el lenguaje algebraico. Estas estrategias estuvieron centradas en aumentar el acompañamiento de la practicante a los estudiantes, con talleres y ejercicios tanto grupales como individuales dentro del aula que permitieran observar y escuchar la manera como los estudiantes concebían la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Finalmente, observando el desempeño en el cuarto examen (figura 8), los resultados son satisfactorios ya que el desempeño insuficiente disminuyó significativamente y aumentaron los desempeños excelente y sobresaliente. En este examen se evaluó el método de determinantes que es un método de naturaleza algebraica, lo cual permite concluir que bajo la suposición de que la hipótesis que se formuló arriba (primer párrafo de esta página) es acertada, la estrategia de acompañamiento fue pertinente.

6.3. Ejercicio de Investigación.

En esta parte del documento se presenta uno de los ejercicios propuestos en el tercer examen escrito (literal a) durante la intervención en el aula. El ejercicio es descrito y analizado teniendo en cuenta lo que plantea (Vergnaud, 1990) en su teoría de los campos conceptuales.

El ejercicio mencionado, es el siguiente:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, usando el método que usted considere adecuado:

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases} (1)$$

Este ejercicio se encuentra dentro de lo que Vergnaud denomina campo conceptual[10], y dentro de cuyo conjunto de situaciones estarían aquellas que requieren operaciones con números enteros, fraccionarios y reducción de términos semejantes.

Por otro lado es de anotar que los estudiantes contaban con 4 métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 vistos en clase hasta este momento, (método de sustitución algebraica, método de igualación algebraica, método gráfico y método de eliminación o reducción) para abordar esta situación, razón por la cual disponen de las herramientas que les permiten enfrentar el ejercicio, en palaras de Vergnaud(1990), “el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias de competencias necesarias para el tratamiento inmediato de la situación”.

A continuación se presenta la solución del sistema de ecuaciones (1), utilizando cada uno de los métodos de solución arriba mencionados:

- Método de igualación algebraica.

[10] Conjunto de situaciones conceptos y teoremas (Vergnaud, 1990).

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases}$$

Despejando y de ambas ecuaciones (también se puede despejar x en ambas ecuaciones si se desea).

De la primera ecuación; $y = \frac{-1-5x}{3}$ y de la segunda ecuación; $y = -5 + 3x$

Igualando estas ecuaciones y operando, se obtiene:

$-1 - 5x = -15 + 9x$

$-14x = -14$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Remplazando el valor numérico obtenido para x en la ecuación $y = -5 + 3x$, obteniendo que $\boldsymbol{y = -2.}$

Por tanto el conjunto solución que se denota de aquí en adelante como C.N es para este caso: C.N = $\{1, -2\}$.

- Método de sustitución algebraica.

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases}$$

Despejando una de las dos incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones, para este caso se despeja y de la segunda ecuación del sistema, que después de despejar y simplificar se obtiene:

$y = -5 + 3x$, en seguida remplazando esta expresión algebraica para y en la primera ecuación del sistema dado:

$5x + 3(-5 + 3x) = -1$

$14x = 14$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Finalmente remplazando este valor numérico obtenido para x en la ecuación $y = -5 + 3x$, de donde se obtiene que $\boldsymbol{y = -2.}$

Por tanto el conjunto solución es: C.N = $\{1, -2\}$.

- Método gráfico.

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases}$$

Despejando $y$de ambas ecuaciones, obteniendo de la primera de ellas: $y = \frac{-1-5x}{3}$y de la segunda ecuación, $y = -5 + 3x$. En seguida, realizando la tabulación correspondiente a cada una de las rectas, así:

Para $y = \frac{-1-5x}{3}$;

x	-2	-1	0	1	2
y	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-2	$\frac{-11}{3}$

Tabla 5 Tabulación para la primera recta

Para $y = -5 + 3x$

x	-2	-1	0	1	2
y	-11	-8	-5	-2	1

Tabla 6 Tabulación para la segunda recta

En seguida trazando el grafico de las dos líneas rectas en un mismo plano cartesiano así:

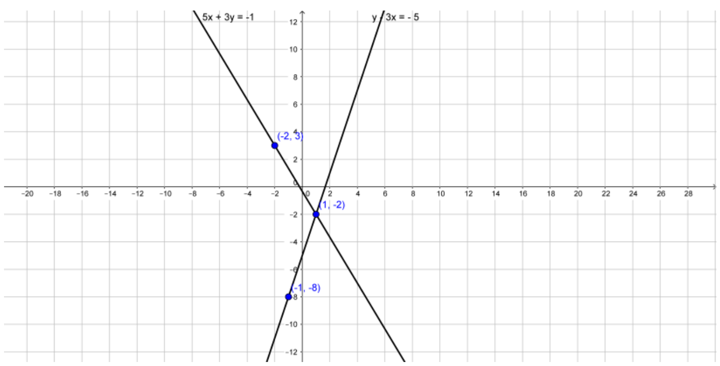


Figura 12 Gráfica del sistema de ecuaciones dado

Finamente, se observa el punto de intersección de las os rectas y se concluye que el conjunto solución del sistema es: C.N = $\{1, -2\}$.

- Método de eliminación o reducción.

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases}$$

Ordenando la ecuación de tal forma que se obtenga la misma incógnita en la misma columna.

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ -21x + 7y = -35 \end{cases}$$

Multiplicando por $\frac{21}{5}$ en la primera ecuación del sistema, operando se obtiene:

$$\begin{cases} 21x + \frac{63}{5}y = -\frac{21}{5} \\ -21x + 7y = -35 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones $21x + \frac{63}{5}y = -\frac{21}{5}$ y $-21x + 7y = -35$ asi:

$$\begin{aligned} 21x + \frac{63}{5}y &= -\frac{21}{5} \\ -21x + 7y &= -35 \\ 0x + \frac{98}{5}y &= -\frac{196}{5} \end{aligned}$$

En seguida despejando $y$de $\frac{98}{5}\ y = -\frac{196}{5}$ se obtiene que $\boldsymbol{y = -2.}$

Finalmente remplazando este valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, para este caso, remplazando en$5x + 3y = -1$, de donde operando y despejando x se tiene que$\boldsymbol{x = 1.}$

Por tanto el conjunto solución es: C.N = $\{1, -2\}$.

De lo anterior, observe que el orden del sistema esta alterado, esto requiere en el estudiante un esfuerzo cognitivo adicional si escoge el método de eliminación o reducción para solucionar el sistema que como se puede apreciar es el que para este caso implica un poco más de trabajo.

En este sentido, se puede conjeturar que al dejar al estudiante la decisión acerca del método pueden ocurrir dos casos: el primero, que el estudiante se sienta cómodo con la pregunta, elija el método de solución lo aplique y obtenga resultados (matemáticamente correctos o incorrectos); el segundo, que el estudiante se desoriente en la elección del método y no se atreva a proponer un método de solución para obtener la respuesta del ejercicio.

Esta situación favorece el desequilibrio de conocimiento y de una u otra forma obliga al estudiante a salir de una zona de conocimiento y aproximarse a una nueva, es decir lo que (Vigotsky, 1978) denomina zona de desarrollo próximo, por lo que muy probablemente la organización invariante de la conducta de los sujetos ante esta situación comience a variar, y en consecuencia los esquemas cognitivos de los estudiantes también se modifican llevando en algunos casos al fracaso en el momento de enfrentarse a determinada situación, que para este caso particular corresponde al ejercicio presentado.

En este sentido, y teniendo en cuenta algunos invariantes operatorios[11] mencionados por Vergnaud(1990), para este caso han sido identificados y clasificados de la siguiente forma:

- **Invariante operatorio general.** cálculo de los valores numéricos de las incógnitas x y y que solucionan el sistema de ecuaciones lineales planteado.

- **Invariante operatorio (Método de igualación algebraica).** Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones para posteriormente igualarlas.

- **Invariante operatorio (Método de sustitución algebraica).** Despejar cualquiera de las dos incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones y remplazar en la que permanece intacta.

- **Invariante operatorio (Método gráfico).** Trazar el gráfico de las dos líneas rectas en un mismo plano cartesiano.

- **Invariante operatorio (Método de eliminación o reducción).** Encontrar un escalar adecuado que permita la eliminación de una de las incógnitas del sistema;

A continuación se presenta la clasificación de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver el sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 que se viene trabajando.

Categoría.	**Descripción.**	**%**
C1.contruccion total y correcta del método.	Construyen de manera adecuada el método de solución, obtienen la respuesta correcta.	25%
C2. Construcción total del método con errores aritméticos.	Construyen el método de solución pero la respuesta dada es incorrecta	20%
C3. Construcción parcial del método.	Construyen el método hasta cierto punto.	30%
C4. Omisión	No realizan ningún procedimiento para solucionar el sistema.	25%

Tabla 7 Categorías del ejercicio de investigación

[11] Conceptos y conocimientos en acto que permanecen invariantes.

De la tabla se observa que el porcentaje más alto corresponde a la categoría 3, es decir a los estudiantes que comienzan construyendo de manera correcta el método, sin embargo llegan hasta cierto punto donde aparecen lo que Vergnaud denomina inferencias, es decir los estudiantes escriben lo que cognitivamente es para ellos la secuencia correcta del método, obteniendo (en algunos casos) respuestas incorrectas. Algunos de estos estudiantes no escriben la respuesta al ejercicio, simplemente dejan indicada la construcción del método de solución.

La categoría 2 equivalea estudiantes que construyen de manera correcta el método de solución, sin embargo, en el desarrollo de este, se presentan errores aritméticos relacionados principalmente con las operaciones en el conjunto de los números enteros y fraccionarios, así como también en el manejo de signos de agrupación. Con respecto a los errores aritméticos en los enteros, este porcentaje de estudiantes comete errores sobre todo al enfrentarse a situaciones que implican operaciones con números enteros negativos.

El 25% de los estudiantes construye el método y lo desarrolla sin ningún tipo de inconveniente aparente, obteniendo de manera correcta la respuesta. Este porcentaje de estudiantes ha logrado construir un esquema adecuado de al menos un método que permite solucionar el sistema planteado.

Finalmente el 25% de los estudiantes no realizan ningún tipo de procedimiento, lo cual impide realizar alguna observación o comentario al respecto, sin embargo este porcentaje lleva a reflexionar al docente sobre su trabajo en el aula y a implementar nuevas estrategias que permitan la disminución o en el mejor de los casos la desaparición de este porcentaje de estudiantes.

Es importante decir también que en la totalidad de los casos tuvieron prioridad los métodos de igualación y sustitución algebraica, ubicándose así en los invariantes operatorios correspondientes a este método. Aquellos estudiantes que optaron por utilizar el método de eliminación o reducción dejaron indicado el método, en su gran mayoría estos estudiantes se encuentran ubicados en la categoría 3 y por tanto en el invariante operatorio correspondiente a este método de solución.

Como se había mencionado anteriormente, el método de eliminación o reducción, resulta para este caso ser el que más demanda cognitiva tiene para un estudiante, esto puede ser una de las razones por las cuales los estudiantes que eligieron este método como camino para enfrentarse a esta situación en su gran mayoría fracasaron.

A continuación se muestran alunas imágenes que corresponden a los trabajos realizados por los estudiantes en este ejercicio y que pretenden ejemplificar lo anteriormente dicho con respecto a las categorías.

La siguiente es la imagen ilustra lo observado en la categoría 1 (C1), donde los estudiantes construyen totalmente el método de solución operan correctamente y obtienen la respuesta esperada

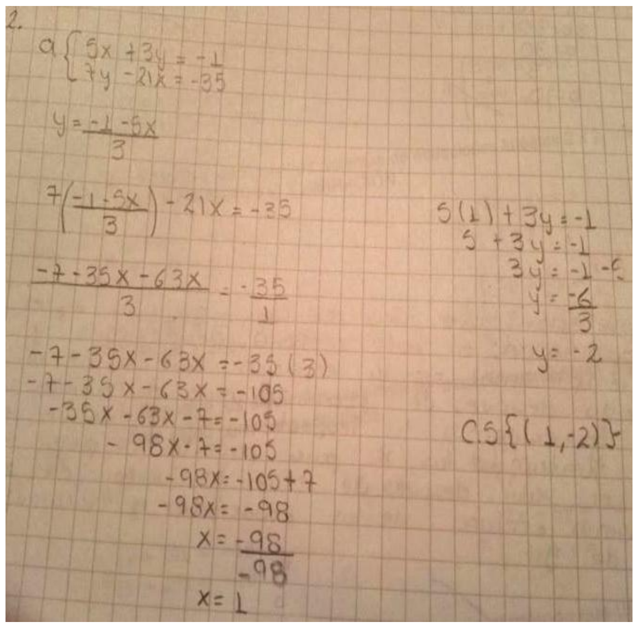


Imagen 9 Ejercicio de Investigación, Categoría 1

En seguida se muestra la imagen que ilustra lo observado en la categoría 2 (C2), donde los estudiantes construyen totalmente el método pero presentan algunos errores aritméticos. Para el siguiente caso, el estudiante presenta errores al operar con números enteros negativos, omite en algunos casos la línea que denota un número fraccionario y utiliza de forma inadecuada algunos signos de agrupación, sin embargo da una respuesta a la situación planteada.

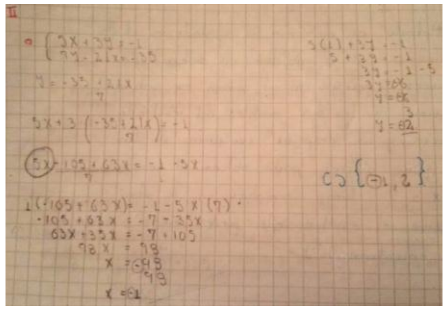


Imagen 10 Ejercicio de Investigación, categoría 2

Finalmente se muestra la imagen que ilustra lo observado para la tercera categoría (C3), en donde el estudiante construye parcialmente el método, para este caso el estudiante llega hasta cierto punto de la construcción y luego comienza a inferir lo que considera correcto, dando finalmente una respuesta.

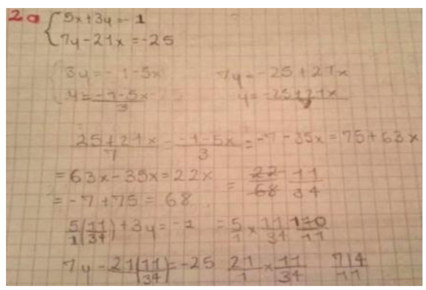


Imagen 11 Ejercicio de Investigación, categoría 3

6.4. Conclusión (Ejercicio de Investigación).

De la tabla que muestra la categorización de las estrategias utilizadas por este grupo de estudiantes (tabla 7), observe que el 50% (independientemente de la construcción total o parcial del método), en general cometen errores tanto aritméticos como en el manejo de los signos de agrupación.

De acuerdo con el PEI en matemáticas de la Institución, el conjunto de números enteros y fraccionarios así como también las operaciones en estos conjuntos, manejo de signos de agrupación y reducción de términos semejantes, son construidos por los estudiantes entre los grados séptimo y octavo; en consecuencia, los estudiantes de grado noveno deberían tener estos esquemas[12] ya establecidos. Sin embargo, los resultados observados en este ejercicio muestran que un gran porcentaje de los estudiantes aun presentan dificultades al

[12] "Llamamos esquema a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada" (Vergnaud G. , 1990)

enfrentarse a las situaciones que implican los conocimientos anteriormente mencionados.

En este sentido, se concluye que los conocimientos previos de los estudiantes son muy importantes en la construcción progresiva de los conceptos matemáticos y por tanto es importante que los docentes reflexionen sobre sus estrategias de enseñanza para minimizar y en el mejor de los casos solucionar esta situación.

CAPITULO VII. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES.

- Los procesos de enseñanza y aprendizaje son en general complejos sobretodo en el área de matemáticas debido a la naturaleza de esta ciencia, esto exigen en el docente la elaboración de estrategias adecuadas que sirvan de camino en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

- El acompañamiento que realiza el profesor durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas resulta ser importante, ya que fortalece y potencia las capacidades del estudiante y el docente tiene la oportunidad de aprender tanto de sus estudiantes como de los resultados que obtenga de su trabajo.

- La práctica pedagógica permite a los docentes en formación un acercamiento a las condiciones reales a las que enfrentará en el ejercicio profesional de su labor.

- Un docente de matemáticas debe ser consciente de la capacidad que tienen sus estudiantes, valorar el esfuerzo y tiempo que los niños dedican en la construcción del conocimiento matemático, del mismo modo el docente debe saber que la noción que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas es muy diferente a la que él tiene.

- Dentro del contexto académico y teniendo en cuenta la diversidad de culturas y costumbres, se pueden presentar diferentes situaciones que retan al docente a ser cada vez más versátil para enfrentarlas y obtener el resultado esperado.

- El docente debe ser responsable con su autoformación, con el fin de brindar una buena calidad de educación sus estudiantes. Actualmente la tecnología es un aliado muy importante ya que brinda todas las facilidades para que los docentes estén informados y actualizados en todo lo referente al campo educativo, descubrimientos, estudios, informes, etc.

- La práctica pedagógica muestra al futuro docente que los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan en el aula son complejos y por lo tanto requieren de seriedad y compromiso del docente.

- Es importante que los docentes de matemáticas seamos conscientes de que el ritmo de aprendizaje es diferente en cada uno de los estudiantes, esto permite al profesor ser además de profesional, consciente de su labor y responsabilidad de formación.

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos durante la intervención y los antecedentes expuestos en el Capítulo IV, es posible concluir que los errores tienden a ser recurrentes independientemente de los estudiantes y de la institución en la que se trabaje.

- Los resultados obtenidos permiten evidenciar los saltos en términos del aprendizaje que pueden dar los estudiantes de un tema a otro. Estos saltos pueden tener implicaciones negativas y positivas en el proceso de aprendizaje y el docente debe tener o desarrollar la capacidad para enfrentar cada una de estas situaciones.

Bibliografía

Angarita, N. I. (2010). Modelos pedagógicos y modelos matemáticos en la en la formación docente Preescolar. *Memorias IX ENEMES* , 126 - 131.

Arcavi, A. (2003). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En M. C. Luis Rico, *Investigación en Didáctica de la Matemática.* (págs. 13 - 22). Granada: Comares.

Baldor. (199). *ALGEBRA.*

Baldor, A. Á. (1997). *Álgebra.*

Blanco, F. (2009). Un enfoque para un viejo problema. Origen de las paradojas en teoría de conjuntos. *A Parte Rei. Revista de Filosofia* , 1 - 10.

Brosseau, G. (1986). Lecturas en didáctca de las Matemáticas: Escuela Francesa. *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques* , 33- 115.

Castellanos, M., & Obando, J. A. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación. El caso de la generalización y el razonamiento algebraico. *10o. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto: ASOCOLME.

Chevallard, Y. (1998). *La Trasposición Didáctica - Uruguay Educa.* Recuperado el 07 de 08 de 2016, de La Trasposición Didáctica - Uruguay Educa: http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5Cchevallard.pdf

Comuneros, I. E. (2002). Plan de Estudios en Matemáticas de la Institucion Educativa Los Comuneros. *Plan de Estudios en Matemáticas de la Institucion Educativa Los Comuneros* . Popayán, Colombia.

Diaz, V. Q. (2006). *Redalyc.Formacion docente, práctica pedagógica y saber pedagógico.* Recuperado el 16 de 08 de 2016, de Redalyc.Formacion docente, práctica pedagógica y saber pedagógico: http://www.redalyc.org/pdf/761/76109906.pdf

Godino, J. D. (09 de 1991). *Perpectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientifica.* Recuperado el 31 de 07 de 2016, de Perpectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientifica: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Grossman, S. I. (1998). *ALGEBRA LINEAL.* Belmont, California: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.

Minnaard, S. M. (2004). Análisis de los errores: una fuente valiosa de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* , 1-13.

Monica Vallejo Ruiz, A. F. (25 de Febrero de 2007). *Enseñanza de las ciencias.* Recuperado el 07 de Diciembre de 2016, de Enseñanza de las ciencias: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/87877/216411

Palareas Medina, M. M., & Socas Robayna, M. M. (1994). Algunos Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algegraico. *Revista Suma , 16*, 91-98.

Plan de Estudios. Institución Educativa Los Comuneros. (13 de 11 de 2002). *Plan de Estudios. Institución Educativa Los Comuneros* . Popayán, Cauca, Colombia.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perpectiva post - Vigotskiana. En L. Radford, *ARTICULOS DE INVESTIGACIÓN.* (págs. 25 - 53). Canada.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2003). En torno a tres problemas de la generalización. En M. C. Luis Rico, *Investigacion en Didáctica de La Matemática* (págs. 3 - 12). Granada: Comares.

REPREENTANTES CONSTRUCTIVISTAS: CONSTRUCTIVISMO. (2011). Recuperado el 10 de 05 de 2016, de REPREENTANTES CONSTRUCTIVISTAS: CONSTRUCTIVISMO: http://constructivismo.webnode.es/autores-importantes/

Restrepo, A. M. (11 de Noviembre de 2011). *Educacion Matemática*. Recuperado el 07 de Diciembre de 2016, de Educacion Matemática: http://matematicas.uniandes.edu.co/archivos/TeoriaPracticas2011/8.EducacionMatematica.pdf

Rodríguez, Á. G. (1991). *A. Gutiérrez Publicaciones.* Recuperado el 05 de 08 de 2016, de A. Gutiérrez Publicaciones.: http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut91a.pdf

Ruiz, G. A. (2011). *El constrructivismo como modelo peedaógico.* Recuperado el 10 de 05 de 2016, de El constrructivismo como modelo peedaógico: http://escuelainteligente.edu.ec/docs/constructivismo.pdf

Sanabria, H. J. (2010). *ALGEBRA LINEAL.* Cali.

Sancho, A. M. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebráico: del símbolo a la generalización agebráica:Aplicación a la práctica docente. *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebráico: del símbolo a la generalización agebráica:Aplicación a la práctica docente.* Madrid -

España.

Socas., M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Revista Suma* , 91- 98.

Teorias del aprendizaje. (s.f.). Recuperado el 27 de 05 de 2016, de Teorias del aprendizaje.: http://uoctic-grupo6.wikispaces.com/Cognitivismo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER. (26 de 08 de 2010). *LINEAS DE INVESTIGACION*. Recuperado el 31 de 07 de 2016, de LINEAS DE INVESTIGACION: http://matematicas.uis.edu.co/formacion/programas_posgrado/maestria_educacion_matematica/lineas_investigacion

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de Campos Conceptuales . *Recherches en Didáctique des Mathématiques* , 133 -170.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques , 10* (2 - 3), 133 - 170.

Vigotsky, L. (1978). *Vigotsky, L Psychology.* Recuperado el 23 de 09 de 2016, de Vigotsky, L Psychology: http://www.psy.cmu.edu/~siegler/vygotsky78.pdf

ANEXO 1

PRUEBA DIGNOSTICA.
INSTITUCION EDUCATIVA LOS COMUNEROS.

Nombre_________________________________ Grado _____ Fecha _______

1. Coloca falso (F) o verdadero (V) en cada una de las siguientes igualdades, diciendo en cada caso por qué tu respuesta.

a) $10 - 12 = 22$
b) $-5 - 6 = -11$
c) $-6 + 4 = 10$
d) $-3 + 5 = 2$

2. Resuelve las siguientes operaciones como creas adecuado.

a) $-7x - 9x =$
b) $8a + 9a =$
c) $x + 2x =$
d) $-x + 19x - 18x =$
e) $3(3 - 2x) - 4(x + 1) + 2 =$

3. Ordenar las siguientes fracciones de menos a mayor.

$\frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{1}{4}$

4. Realizar las siguientes operaciones como considere adecuado.

a) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} =$

b) $\frac{5}{6} \div \frac{1}{4} =$

ANEXO 2

PRIMER EXAMEN.
INSTITUCION EDUCATIVA LOS COMUNEROS

Nombre________________________________ Grado _____ Fecha _______

1. Realice las siguientes operaciones (números enteros).

a) $-8+15=$
b) $-7-3=$
c) $(-4)\text{x }4=$
d) $10\div(-2)=$

2. Realice las siguientes operaciones (números fraccionaros).

a) $\frac{12}{5}-\frac{3}{20}=$

b) $\frac{4}{5}\times\frac{6}{4}=$

c) $\frac{40}{10}\div\frac{3}{2}=$

3. Reduzca los términos semejantes.

a) $15a+8a-3a=$
b) $(x-1)-5(x-10)=$
c) $3x(2+3y+4)=$
d) $4\left(\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}y\right)+\frac{1}{3}=$

ANEXO 3

SEGUNDO EXAMEN
INSTITUCION EDUCATIVA LOS COMUNEROS.
TEMAS A EVALUAR: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2. METODO GRAFICO Y METODO DE IGUALACION ALGEBRAICA.

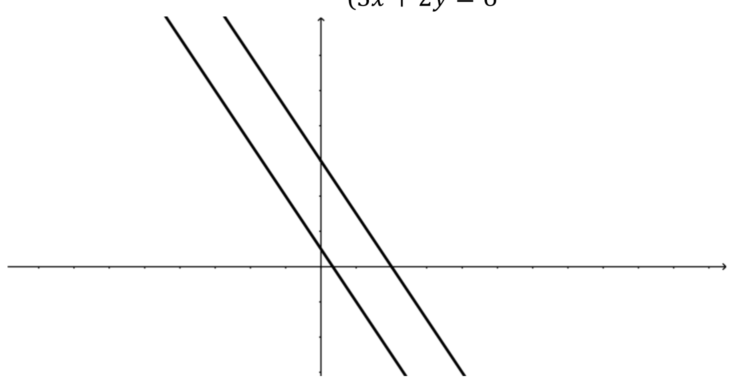
Nombre________________________________ Grado _____ Fecha _______

1. Complete en cada caso como usted crea correcto.

a) Un sistema de ecuaciones lineales es compatible cuando _________________________

b) Un sistema de ecuaciones lineales es compatible ___________________ cuando tiene infinitas soluciones.

2. La siguiente gráfica corresponde al sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$



Observe la gráfica anterior y responda:
¿Por qué el sistema no tiene solución?

3. Verifique si el conjunto solución dado para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2, es el correcto. Si el conjunto solución es incorrecto, corríjalo.

a) $\begin{cases} y + x = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$ C.S = $\{(2, 4)\}$ Grafíquelo

b) $\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ C.S = $\{(1, 1)\}$

4. Resuelva el siguiente problema, utilizando el método que considere adecuado.

La suma de dos números distintos entre sí, es 2 y la diferencia de estos dos números es 4. Hallar los dos números.

ANEXO 4

TERCER EXAMEN

INSTITUCION EDUCATIVA LOS COMUNEROS.

TEMAS A EVALUAR: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2.

Nombre________________________________ Grado ______ Fecha ____________

1. Para resolver el sistema: $\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y - 4x = -5 \end{cases}$; Ana realizó el siguiente procedimiento:

$2 * (y + 2x) = 2 * 1$ (Multiplicó por 2 en ambos lados de la ecuación)

$2y + 4x = 2$ (Desarrolló las operaciones correspondientes)

$2y + 4x = 2$ (Sumó la ecuación $2y + 4x = 2$ con la ecuación $y - 4x = -5$)

$\underline{y - 4x = -5}$

$3y + 0x = -3$

$y = \frac{-3}{3}$ (Despejó y)

$y = -1$

$-1 + 2x = 1$ (Remplazó el valor de y encontrado en la ecuación $y + 2x = 1$ y luego

$2x = 1 + 1$ despejó x)

$x = \frac{2}{2}$

$x = 1$

Finalmente, Ana escribió: C.S = $\{(1, -1)\}$

¿Los cálculos que realizó Ana son correctos?

¿Cómo se llama el método que usó Ana para resolver el sistema?

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, usando el método que usted considere adecuado.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 7y - 21x = -35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 30x + y = -10 \\ -20x + y = -10 \end{cases}$

3. Resuelve el siguiente problema, utilizando el método que usted considere adecuado.

El perímetro de un rectángulo es 30 cm. Si la base del rectángulo es dos veces la medida de la altura; ¿Cuáles son las medidas de la base y de la altura del rectángulo?.

4. De los métodos estudiados hasta el momento para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2, nombre y describa el que más le ha gustado.

ANEXO 5

EXAMEN FINAL

INSTITUCION EDUCATIVA LOS COMUNEROS.

TEMAS A EVALUAR: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2.

Nombre________________________________ Grado ______ Fecha ____________

1. Un __________________ es un número asociado a un arreglo cuadrado de números encerrados entre dos barras verticales.

¿Cuál de las siguientes palabras considera usted adecuada para llenar el espacio en blanco?

a) Número.
b) Determinante.
c) Sistema de ecuaciones..
d) Método.

2. Dado el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, dibuje:

a) La diagonal principal.
b) La diagonal secundaria.

3. Para calcular el determinante: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, Jorge realizó lo siguiente:

PASO 1. PASO 2.

$$3 \times (-1) = -34 \times (-2) = -8$$

Y finalmente Jorge restó así: $-3 - 8 = -11$

¿considera que los cálculos de Jorge son correctos?

4. Calcule el determinante en cada caso.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{vmatrix}$

5. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 utilizando el método de determinantes.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y - 3x = -7 \end{cases}$

$$\Delta_s = -17\Delta_s = 5$$

$$\Delta_x = -17\Delta_x = 10$$

$$\Delta_y = -34\Delta_y = -5$$