

RI-28

USOS DE LA DIFERENCIAL EN UNA LECCIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE INTEGRAL

Manuel Alejandro Verón¹, Belén Giacomone², Margarita del Carmen Benítez¹

¹Universidad Nacional de Misiones, ²Universidad de la República de San Marino

alejandroveron@fceqyn.unam.edu.ar, belen.giacomone@unirsm.sm,

mbenitez@fceqyn.unam.edu.ar

Análisis de libros de texto y currículum de matemáticas. Educación Superior y Postgrado.

RESUMEN

En este trabajo, se presenta el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto que relaciona la integral y la diferencial. Para el análisis se emplean las nociones de idoneidad didáctica, configuración didáctica y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del Enfoque Ontosemiótico. El objetivo es identificar potenciales conflictos y mejoras en el aprendizaje de los significados del diferencial pretendidos en el libro de texto. Los resultados permiten al profesor reflexionar sobre las potencialidades y limitaciones del libro y anticiparse a posibles conflictos, aspectos fundamentales para mejorar la gestión del proceso instruccional.

Diferencial, Idoneidad Didáctica, Conflictos semióticos, Libro de texto, Reflexión del profesor.

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El uso del libro de texto es un recurso ampliamente usado en las clases de matemáticas. Es considerado como un plan de acción o planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje (Frank y Thompson, 2021) que usan con frecuencia los profesores y que condiciona lo que puede suceder en las aulas (Castillo et al., 2022), y, por lo tanto, es importante que puedan anticipar y resolver potenciales conflictos, como así también proponer alternativas para mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Por tal motivo, Konic et al. (2010) plantean la necesidad de revisión continua para su evaluación en su aspecto disciplinar y didáctico.

En los cursos de cálculo o análisis matemático de diferentes carreras universitarias, el estudio de los conceptos de integral y diferencial ocupan un lugar importante. Resulta de interés indagar cómo se presenta las relaciones de estos conceptos en una lección de un libro de texto, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes reportados por la literatura (Ely, 2017; Jones, 2015). En cuanto a estudios que abordan su tratamiento en libros de texto (como Gómez, 2019; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016; Pulido, 2010), se reportan dificultades relacionadas con la forma en que se los presenta.

Partimos de considerar que una lección “es un proceso de instrucción (potencial o planificado) que se compone de la secuencia de prácticas matemáticas y didácticas que propone el autor para el estudio del tema en cuestión” (Burgos et al., 2020, p. 42). De esta manera, es posible valorar la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto.

El objetivo de este artículo es compartir análisis y reflexiones de una lección sobre el estudio de la integral en la que interviene la diferencial, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación al diferencial de una función.

A continuación, se sintetizan las nociones teóricas y metodológicas que sirven de fundamento para abordar el problema de investigación; posteriormente, se presenta el análisis de una lección de un libro de texto; finalmente, se discuten algunas implicaciones para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

El análisis de los conocimientos y los significados implicados en el cálculo integral, y de las reflexiones sobre su uso en relación con el concepto de diferencial, se realiza desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2020). En particular, la noción de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2018; Godino, 2013) permite abordar el problema del análisis didáctico permitiendo describir y caracterizar las configuraciones didácticas propuestas (lecciones del libro de texto) identificando elementos que puedan ser potencialmente conflictivos, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos pretendidos, de las posibilidades de los estudiantes, y del proceso de instrucción que se propone.

La idoneidad didáctica se considera como un criterio sistémico de optimización de un proceso de enseñanza de las matemáticas (Godino et al., 2020). El grado de idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto podrá incrementar en la medida se tenga en cuenta los diversos significados de los objetos matemáticos del contenido en estudio. Por consiguiente, la valoración de este proceso se realiza teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la diferencial de una función (Verón y Giacomone, 2021).

Para el análisis de las configuraciones didácticas se utilizan las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica (ej. Godino et al., 2017), la noción de configuración didáctica (Godino et al., 2014) y las facetas (epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional) e indicadores de idoneidad didáctica.

En este trabajo seleccionamos para analizar una lección (una configuración didáctica), con relación al concepto del diferencial de una función tomada del libro de texto de cálculo Stewart (2012). Las herramientas del EOS permiten estudiar potenciales conflictos epistémicos, relacionados a los significados y objetos institucionales presentes en la lección; potenciales conflictos cognitivos, relativos a los conocimientos previos; y potenciales conflictos instrucionales, relacionados a los modos de interacción y uso de los recursos didácticos (Burgos et al., 2020).

ANÁLISIS DE UNA CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA INTEGRAL

A continuación, seleccionados a modo de ejemplo una sección del libro de texto de cálculo (una configuración didáctica) de Stewart (2012).

Figura 1.

Uso de la diferencial en la integral.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo \int y se llama signo de integral. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ se llama integrando, y a y b se conocen como límites de integración; a es el límite inferior y b es el límite superior. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado por sí mismo; la expresión $\int_a^b f(x) dx$, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x . El procedimiento para calcular una integral se llama integración.

Fuente: Stewart (2012, p. 372).

Prácticas y objetos

Para el análisis de las facetas epistémicas y cognitivas, en primer lugar, se describen las prácticas matemáticas que se proponen en cada lección, identificando los objetos matemáticos primarios que intervienen en las mismas.

Luego de la presentación de la definición de la integral definida como el límite de suma (Stewart, 2012, pp. 371-372), el libro de texto realiza una nota donde hace referencia a la diferencial de x . En las prácticas que se presentan predomina un lenguaje natural y simbólico. Se destaca la proposición:

“el símbolo dx no tiene significado por sí mismo” (Stewart, 2012, p. 372).

“la expresión, $\int_a^b f(x)dx$, vista como un todo, es un símbolo único” (Stewart, 2012, p. 372).

“ dx indica simplemente que la variable independiente es x ” (Stewart, 2012, p. 372).

Relaciones

En esta configuración didáctica se pretende establecer relaciones entre la integral y la diferencial, indicando que en la expresión de la integral definida la función de la dx es solo para indicar cual es la variable independiente de la integración.

Procesos

Conceptualización/definición: se plantea que la dx no tiene significado por sí mismo y que solamente indica la variable de integración en la expresión de la integral definida.

Interpretación/representación: se menciona que la expresión de la integral definida debe ser considerada como un único símbolo y que la dx indica la variable independiente.

Potenciales conflictos

En la configuración didáctica se observa la nueva conceptualización de la diferencial como un indicador de la variable de integración, en relación a la integral definida. Esto puede llegar a generar un conflicto epistémico y cognitivo ya que en secciones anteriores se presenta a la diferencial como “ dx es una variable independiente; esto es, dx cualquier número real” (Stewart, 2012, p. 253). Por otro lado, al mencionar que “ dx no tiene significado por sí mismo” (Stewart, 2012, p. 372), se puede originar un potencial conflicto epistémico-cognitivo (Ely, 2017; Jones, 2015) ya que previamente, el libro de texto refuerza la idea de $dx = \Delta x$. Además, en páginas siguientes se retoma este hecho mencionando, sin muchas explicaciones, cómo en la definición de la integral se reemplaza Δx por la dx en la expresión $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x)dx$ (Stewart, 2012, p. 374).

REFLEXIONES FINALES

En este artículo se ha presentado el análisis de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de la integral que involucra al diferencial de una función, con el objetivo de identificar posibilidades, limitaciones y potenciales conflictos epistémico-cognitivos del libro de texto para la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial.

En la configuración didáctica se refleja un uso instrumental de la diferencial como un elemento necesario para definir a la integral, con lo cual es posible asociar el uso de la diferencial al significado parcial de Diferencial de Cauchy (Verón y Giacomone, 2021) ya que se menciona que la diferencial de x indica la variable independiente y que no tiene significado. Esto va en línea con lo que ha sido reportado en diversas investigaciones como uno de los usos de la diferencial que genera diferentes conflictos epistémicos y cognitivos en los estudiantes (por ejemplo: Burgos et al., 2021; Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015).

Los resultados permiten describir y caracterizar potenciales conflictos epistémicos, relacionados con los significados parciales del diferencial, donde cobra un papel central el uso del lenguaje símbolo y su relación con la integral; también, se identifican potenciales conflictos cognitivos, relacionados principalmente con los saberes previos de los estudiantes. Teniendo en cuenta tales conflictos, con este tipo de análisis el docente podría reflexionar sobre la organización del contenido y el orden de la secuencia de actividades y, así, proponer cambios en la conceptualización del diferencial en las diferentes configuraciones didácticas evitando generar nuevos conflictos de tipo instruccionales, para ello será necesario plantear otras situaciones-problemas que permitan abordar otros significados parciales del diferencial.

Por último, consideramos importante destacar la importancia de realizar este tipo de análisis desde la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. El profesor debe conocer y saber usar herramientas que le permitan reflexionar en forma competente sobre la propia práctica (Castillo y Burgos, 2022; Giacomone et al., 2018). Pero también, debe conocer los distintos significados que pone en juego de la diferencial en relación con otros conceptos como la integral, y comprender cuál de estos se está movilizando en cada problema, lección o configuración didáctica.

Referencias

- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40-68. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., & Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education*, 10(1), 4-40.
- Castillo, M. J., y Burgos, M. (2022). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(72). 555-579. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>
- Castillo, M., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022). Directrices para el análisis de las lecciones de los libros de texto de matemáticas sobre el tema de la proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-19.
- Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 152-167. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002>
- Frank, K., & Thompson, P.W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education*, 53, 549-562. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8>
- Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-25. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J.M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Godino J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 34(2/3), 167-200.
- Gómez, A. (2019). A look to differential. *Journal of Physics: Conference Series*. V International Conference Days of Applied Mathematics, 1414(1), 1-7.

- Hu, D., & Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 9(2), 1-14.
- Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-28. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001>
- Konic, P.M., Godino, J.D., y Rivas, M.A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 74, 57-74.
- López-Gay, R., Sáez, J. M., y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, 24(5-6), 591-613.
- Oldenburg, R. (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 55-82. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2>
- Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime*, 13(4-I), 85-97.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.
- Verón, M. A., y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, 3, e202109. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202109>