



**ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
APLICADOS A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2×2 Y 3×3**

AUTOR: JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE MANIZALES

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

MANIZALES - CALDAS

Octubre, 2014

**ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE
APLICADOS A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2×2 Y 3×3**

AUTOR: JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

**TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

DIRECTORA DE TESIS: Mgra. YOLANDA LÓPEZ HERRERA

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE MANIZALES

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

MANIZALES – CALDAS

Octubre, 2014

DEDICATORIA

Este nuevo triunfo alcanzado se lo dedico a mis padres Luis Enrique Caicedo Tovar, Bertha Lucía Ruiz de Caicedo que aunque en este momento ya no están conmigo fueron quienes siempre me apoyaron y me aconsejaron para que fuera alguien importante en la vida.

A mi esposa Marisol Echeverry Díaz quién siempre, con su cariño, comprensión y amor me persuadió para que no me dejara vencer por los obstáculos que se nos presentaron a largo del camino.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más grandes agradecimientos a la Mgra. Yolanda López por haberme guiado y colaborado durante todo mi proceso académico el cual me sirvió completamente para terminar mi carrera universitaria con éxitos y además porque fue la persona que me orientó para poder realizar mi Proyecto de Investigación.

A mis hermanos Jaime Caicedo Ruiz, Luis Enrique Caicedo Ruiz y Gerardo Caicedo Ruiz por el apoyo moral y económico para poder culminar mis estudios universitarios.

CONTENIDO

Resumen.....	Pág.10
1. Introducción.....	Pág.11
2. Problema de investigación.....	Pág.12
3. Planteamiento del problema.....	Pág.12
4. Descripción del problema.....	Pág.12
5. Justificación.....	Pág.15
6. Descripción del escenario.....	Pág.16
6.1. Misión institucional.....	Pág.16
6.2. Visión institucional.....	Pág.17
6.3. Perfil del egresado.....	Pág.17
7.1. Objetivo general.....	Pág.18
7.2. Objetivo específico.....	Pág.18
8. Antecedentes históricos.....	Pág.19
8.1. Algo de historia.....	Pág.25
8.1.1. Breve historia de los sistemas de ecuaciones lineales.....	Pág.25
8.1.2. Breve historia de las ecuaciones cuadráticas.....	Pág.26
8.1.3. Breve historia de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.....	Pág.26
9. Marco teórico.....	Pág.27
9.1. Conceptos básicos de las ecuaciones.....	Pág.31
9.2. Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3	Pág.32

9.3. Ecuaciones cuadráticas.....	Pág. 33
9.4. Ecuaciones exponenciales.....	Pág.34
9.5. Ecuaciones logarítmicas.....	Pág.35
9.6. Resolución de problemas matemáticos.....	Pág.40
9.7. El pensamiento numérico y variacional.....	Pág.52
10. Marco metodológico.....	Pág.55
10.1. Nivel de investigación.....	Pág.55
10.2. Diseño de la investigación.....	Pág.55
10.3. Instrumentos de recolección de la información.....	Pág.57
10.4. Población y muestra.....	Pág.57
10.5. Fases metodológicas.....	Pág.58
10.5.1. Fase I.....	Pág.58
10.5.2. Fase II.....	Pág.58
10.5.3. Fase III.....	Pág.59
10.5.4. Fase IV.....	Pág.60
10.6. Resultados de las tres fases.....	Pág.60
10.6.1. Resultados de la fase I.....	Pág.61
10.6.3. Resultados de la fase II.....	Pág.62
10.6.5. Resultados de la fase III.....	Pág.65

11. Conclusiones.....	Pág.67
12. Recomendaciones.....	Pág.67
13. Referencias bibliográficas.....	Pág.69

ÍNDICE DE TABLA

Anexo 1. Taller No. 1: Problemas que se resuelven con fracciones.....	Pág.71
Anexo 2. Taller No. 2: Ecuaciones cuadráticas.....	Pág.72
Anexo 3. Taller No. 3: Problemas que se resuelven con ecuaciones cuadráticas.....	Pág.73
Anexo 4. Taller No. 4: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.....	Pág.75
Anexo 5. Taller No. 5: Problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×3	Pág.76
Anexo 6. Taller No. 6. Ejercicios y problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3	Pág.78
Anexo 7. Taller No. 7. Ejercicios y problemas aplicados a la función cuadrática.....	Pág.82

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica No.1: Nivel de logro en la resolución de problemas que se resuelven con fracciones.....	Pág.62
Gráfica No. 2: Nivel de logro en la resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3	Pág.64
Gráfica No. 4: Nivel de logro en la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas	Pág.66

RESUMEN

La idea del proyecto es mostrar una estrategia metodológica fácil, sencilla y simple para resolver problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de 2×2 y de 3×3 , basados en los trabajos de George Polya.

George Pólya propone en su libro “Cómo plantear y resolver problemas”, escrito en el año 1957, 4 pasos muy sencillos para lograr plantear y resolver cualquier problema matemático de una forma simple.

Se podrá apreciar una breve historia del motivo por el cual surgieron las ecuaciones lineales de primer grado, los sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas (2×2), los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de primer grado con tres incógnitas (3×3), las ecuaciones cuadráticas, las ecuaciones exponenciales y las ecuaciones logarítmicas. Para que se pueda aplicar los cuatro pasos propuestos por Polya (1957) es necesario que el estudiante domine claramente la resolución de ejercicios con las clases de ecuaciones.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este proyecto es lograr que cada uno de los estudiantes del grado noveno logre plantear y resolver problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de 2×2 y de 3×3 aplicando los 4 pasos creado por George Polya (1957), teniendo en cuenta los métodos de solución convencionales para resolver esta clase de problemas. La importancia de este proyecto radica en que el estudiante encuentre la facilidad al plantear y resolver un problema sobre los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 o 3×3 aplicando los cuatro pasos propuestos por Polya.

Este proyecto surgió de la necesidad que se vio en los estudiantes al tratar de plantear y resolver un problemas aplicado a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×3 , pues en el momento de resolver un ejercicio (sólo ejercicio, mas no el problema) el estudiante lo hace sin mayor dificultad, ya que después de estudiar los diferentes métodos de solución para resolver esta clase de ecuaciones simplemente lo aplica y por lo general obtienen buenos resultados, pero al tratar de plantear un problema lo más seguro es que no sepan por dónde empezar, por tal motivo es la razón de este proyecto de investigación.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo potenciar el pensamiento numérico variacional en los estudiantes del grado noveno del colegio Liceo Napolitano a través del planteo y resolución de problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 ?

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Viendo las diferentes problemáticas que presentan los estudiantes, desde el grado noveno hasta el grado undécimo, y aun los que están en los primeros semestres universidad, se puede notar las falencias que estos presentan al plantear y resolver problemas por más sencillos que sean y cuando los problemas se vuelven más complejos entonces se les vuelve más complicado a los estudiantes de resolverlos. Pero el problema de esta situación radica en todos los espacios en blanco que ellos tienen desde los primeros grados de primaria y que van en aumento al pasar al bachillerato ya que los docentes por lo general no se dan cuenta de este problema hasta que los toca de forma directa, es decir, cuando los estudiantes comienzan a presentar bajas notas y debido a esto se ve afectados en su vida universitaria.

4. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

En el grado noveno del colegio Liceo Napolitano se evidencia claramente la necesidad que tienen estos por aprender la forma de cómo interpretar, plantear y resolver problemas que se

resuelven por sistemas de ecuaciones de 2×2 , 3×3 , ecuaciones cuadráticas, ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas.

El problema que presentan estos estudiantes es la falta de motivación de la que han sido objeto por parte de los profesores y estos últimos debido al poco tiempo que tienen para cumplir con todos los contenidos y objetivos del plan de aula, pues se trata de cumplir con todos estos objetivos sin importar en realidad la calidad de la educación y por ende sin importar si los estudiantes alcanzaron los logros propuestos en cada uno de los períodos del año lectivo escolar.

El planteamiento y la resolución de problemas es un punto nodal en la educación matemática de los alumnos de la escuela básica, y es además una parte importante de la formación integral de los educandos, pues alienta el desarrollo de estructuras de pensamiento lógico-matemático, ayuda a comprender las relaciones cuantitativas y las formas espaciales que se dan en la realidad, coopera en los intentos de otras disciplinas científicas para conocer y actuar sobre el mundo, y además fomenta la creatividad y el dominio de la voluntad, entre otras cosas.

Esto lo han comprendido los hombres y mujeres vinculados con la educación básica de todas las épocas y de todos los países, desde que este nivel educativo, con diferentes particularidades, pero con similares objetivos, se implementó y difundió por el mundo, a partir de la Revolución Francesa de 1789. Por eso las matemáticas en lo general y la resolución de problemas en lo particular, siempre han estado presentes en todos los planes de estudio y en todas las reformas educativas.

El análisis es importante en la solución de problemas, debido a que a partir de él, se descompone la totalidad indiferenciada en sus partes constitutivas, señalando y destacando los elementos esenciales. Del análisis se pasa a la síntesis, que es la comparación, que permite resolver un problema teóricamente mediante una generalización. A su vez esta generalización es la herramienta que permite prescindir de pruebas prácticas de tanteo, es decir, permite la transferencia.

Actualmente subsiste la polémica sobre los alcances y limitaciones de organizar los contenidos matemáticos a partir de la solución de problemas. La escuela estadounidense es un ejemplo de la postura que pregona las grandes ventajas que reporta la adquisición de los conocimientos mediante el planteamiento y la resolución de problemas; a diferencia de la escuela francesa que pretende el estudio formal de las estructuras y los conceptos matemáticos.

Actitudes deseadas en los alumnos al resolver problemas matemáticos.

Para plantear y resolver problemas que ayuden al desarrollo intelectual de los alumnos, no basta que el maestro conozca las características de sus discípulos y que elija los problemas adecuados a ellos. También es conveniente que los aliente, motive e incentive hasta lograr actitudes como las que se enuncian a continuación, pues si no hay interés por parte de los niños para esta actividad. En ocasiones se obliga al alumno a seguir un camino para resolver problemas, determinado por el maestro o los textos escolares. Así se establece por ejemplo, una columna para escribir los datos, otra para el planteamiento, otra para las operaciones, otra para el resultado y una última para comprobar el resultado. Esto ciertamente ayuda a algunos alumnos, pero también los encasilla y les limita en su creatividad. Para evitar esto es conveniente alentar también la solución por tanteo, por estimación, por graficación, por tablas o por cualquier otro procedimiento no convencional, esto, sin eliminar totalmente el camino convencional, con sus mencionados apartados de datos, planteamiento, operaciones, resultado y evaluación, (Bellio, B, 2000, p. 124).

5. JUSTIFICACIÓN

Debido a la gran importancia que tiene el saber plantear y resolver problemas por medio de las diferentes clases de ecuaciones para los estudiantes de todos los niveles del bachillerato y aún en la universidad, se tiene la necesidad de implementar una estrategia metodológica que busque de alguna forma lograr que el estudiante pueda plantear y resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×3 . Esta misma metodología implementada servirá también como base para que se puedan plantear y resolver problemas aplicados a la mayoría de las ecuaciones que se estudian a nivel del bachillerato y también en la universidad.

Se trata de innovar de alguna manera el poder plantear y resolver problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones de 2×2 y de 3×3 sin ningún tipo de inconveniente, que siempre se tenga la certeza de aplicar esta metodología sabiendo que siempre se va llegar a resultados positivos en la solución final. Estos mismos resultados se podrán notar en la satisfacción del estudiante al poder resolver esta clase de problemas (y otros) y las excelentes notas que logren obtener.

6. DESCRIPCIÓN DEL ESCENARIO

El colegio Liceo Napolitano se encuentra ubicado en el Barrio El Troncal de la ciudad de Cali departamento del Valle. Cuenta con una planta física propia de 3 pisos lo que le permite tener 450 estudiantes aproximadamente desde grado pre-jardín hasta grado undécimo.

El colegio Liceo Napolitano cuenta con un Modelo Pedagógico Conceptual y su modalidad académica es el Bachillerato Técnico Industrial con énfasis en Diseño Gráfico. Para lograr esto el Liceo Napolitano cuenta con un grupo de docentes altamente capacitados y calificados en cada una de las disciplinas de la enseñanza que ofrece.

La pedagogía Conceptual privilegia la apropiación de instrumentos de conocimiento en los procesos educativos para asegurar una interpretación de la realidad, acorde con el momento histórico, de tal manera que el producto de esa interpretación sea el conocimiento tal como lo establece la cultura.

6.1 MISIÓN INSTITUCIONAL

El Liceo Napolitano forma educandos competentes críticos y creativos estimulando el desarrollo en todas sus capacidades físicas e intelectuales; fortaleciendo los valores personales, sociales, democráticos y culturales para que actúen con libertad, responsabilidad, tolerancia y respeto a la dignidad humana con una sólida formación con compromiso social y proyección empresarial. (Duque, López, Aida, 2000, p. 13)

6.2 VISIÓN INSTITUCIONAL

Posicionarnos en los próximos 5 años como una institución líder en la formación de educandos con proyección empresarial y compromiso social, con un alto nivel de conocimiento acceso a la tecnología, la ciencia y la cultura, contribuyendo a la consolidación de Proyectos de Vida al 2013. (Duque, López, Aida, 2000, p. 13)

6.3 PERFIL DEL EGRESADO

Ser autónomo, capaz de recibir, aceptar y seleccionar todo aquello que contribuya a fortalecer su personalidad.

Enfrentar con responsabilidad y acierto el compromiso con la realidad personal y social.

Respetar, valorar y defender los valores democráticos y la identidad nacional en acuerdo con la moral y las leyes del país.

Consolidar su proyecto de vida ingresando a un nivel de educación superior. (Duque, López, Aida, 2000, p. 13)

7. OBJETIVOS

7.1 OBJETIVO GENERAL

Potenciar el pensamiento numérico variacional en los estudiantes del grado noveno del colegio Liceo Napolitano a través del planteo y resolución de problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 .

7.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diagnosticar las habilidades y la capacidad de raciocinio de los estudiantes de grado noveno en el planteo y solución de problemas matemáticos aplicados a diversas clases de ecuaciones.
- Identificar los conocimientos algebraicos de los estudiantes de grado noveno.
- Diseñar una propuesta pedagógica para que los estudiantes de grado noveno logren potenciar sus conocimientos algebraicos y los apliquen para resolver problemas en las diferentes clases de ecuaciones.
- Aplicar la propuesta diseñada para el grado noveno.
- Evaluar el impacto de la propuesta y el nivel académico de los estudiantes en la resolución de problemas una vez aplicada la propuesta.

8. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La matemática siempre ha estado presente en la historia de la humanidad y lo seguirá estando hasta el fin de sus días. Sin la matemática hubiera sido imposible desarrollar todos los grandes descubrimientos que se han hecho hasta ahora y sin ella tampoco se hubieran podido construir tantas cosas que a pesar de que han pasado muchos años nos siguen maravillando como por ejemplo Las Pirámides de Egipto, Los Transbordadores Espaciales, etc.

Paola Cristina Astola, Andrea Elvira Salvador y Gloria Vera, (Perú, 2012) en su tesis Efectividad del programa “Gpa – Resol” en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis, para obtener el grado de Magister en Educación con Mención en Dificultades del Aprendizaje de la Pontificia Universidad Católica del Perú, proponen identificar y conocer lo eficiente que es el programa “GPA-RESOL” (grade point average – resol, que significa cálculo del promedio) en el aumento de los logros por parte de los estudiantes para resolver problemas aritméticos de adición y sustracción, en estudiantes de grado segundo de primaria en instituciones privadas y estatales. Las técnicas que utilizaron para el proceso y análisis de datos estadísticos se realizaron por medio de un programa especial que con base en este se pudieron dar cuenta de que la efectividad el programa “GPA-RESOL” en el incremento del nivel para la resolución de problemas matemáticos aritméticos de adición y sustracción es bastante alta.

Después de aplicar el programa mencionado el desempeño que obtuvieron los estudiantes de grado segundo en la resolución de problemas matemáticos aplicados a la suma y resta en el momento del post test, fue notablemente alto, es decir que ya no tuvieron inconvenientes en la resolución de estos. El programa Gpa – Resol tiene como objetivos: 1. Reforzar la comprensión del problema, como elemento indispensable para la resolución de problemas; 2. Favorecer el uso

de habilidades metacognitivas antes, durante y después de la resolución de problemas; 3. Reducir el porcentaje de estudiantes con dificultades para resolver problemas; 4. Facilitar al evaluador una guía para mejorar el nivel de logro en la resolución de problemas de tipo cambio, combinación, comparación e igualación; 5. Lograr que el niño desarrolle ejercicios de tipos problema; 6. Lograr que el niño desarrolle ejercicios de tipos problema de combinación; 7. Lograr que el niño desarrolle ejercicios de tipos problemas de igualación.

Se tomó una población total de 94 estudiantes de segundo grado de primaria repartidos en dos grupos, uno experimental (25 estudiantes de gestión privada y 24 estudiantes de gestión estatal) y otro de control (25 estudiantes de gestión privada y 20 de gestión estatal) y se les aplicó una prueba llamada ECE, Evaluación Censal de Estudiantes en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos cuya duración es de 80 minutos en total repartidos en dos días. La prueba ECE recoge información sobre el nivel de logro de los estudiantes en relación con las capacidades y desempeños evaluados. Una vez aplicada la prueba se aplicó el programa en 22 secciones y se re administró la prueba para determinar el incremento del nivel de logro en resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos. Después de esto se calificó el instrumento y se trasladó los resultados a una base de datos para luego realizar el respectivo análisis estadístico pertinente para el contraste de las hipótesis para lo cual se aplicó estadística descriptiva calculándose básicamente la frecuencia, el porcentaje, el promedio, las desviaciones estándares, la varianza y los gráficos. Por último se pudo concluir que el nivel de resolución de problemas aritméticos para la adición y sustracción se incrementó una vez aplicado el programa Gpa – Resol.

Los profesores de grado octavo han notado a lo largo de los años el gran malestar que produce la iniciación al álgebra en los estudiantes esto debido a muchos factores, entre ellos el no poder comprender de forma clara y correcta cómo se deben resolver ejercicios básicos con números enteros, racionales y decimales y los problemas aplicados a estas clases de conjuntos. Entonces al enfrentarse a un nuevo campo de la Matemática como lo es el Álgebra se bloquean debido a la inclusión de literales (letras) en sus expresiones y operaciones.

Polya (1954) propuso cuatro pasos básicos para resolver problemas matemáticos: 1. Entender el problema; 2. Configurar un plan; 3. Ejecutar el plan; 4. Mirar hacia atrás. Esto hizo que sus aportes enriquecieran las matemáticas al brindarle al estudiante la posibilidad de plantear y resolver problemas matemáticos aplicados a los diferentes conjuntos numéricos lo que permite que se puedan implementar a las diferentes ecuaciones tales como ecuaciones de primer grado con una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 , ecuaciones cuadráticas, etc. Al proponérseles a los estudiantes que apliquen pasos sencillos para resolver un problema determinado se puede llegar a la conclusión de que en efecto el estudiante logra comprender mucho mejor la forma de resolver un problema matemático.

Al aplicárseles un determinado taller, a los estudiantes de grado noveno, sobre resolución de problemas matemáticos con números enteros y fracciones, después de darles a conocer en qué consiste la metodología o estrategia para resolver problemas, se puede decir con toda certeza de que el estudiante logra mejorar la forma de plantear y resolver esta clase de problemas. Este trabajo de investigación sirve como base para la realización de otros trabajos que vayan por la misma línea, además lo que se pretende es facilitarle al estudiante de grado noveno el poder comprender mejor la forma de cómo plantear y resolver problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 sin que tenga que recurrir a explicaciones monótonas ni a textos escolares adicionales a los que de pronto le puedan pedir como guía en la entidad educativa donde estudian.

Un aporte también muy relevante para esta propuesta investigativa es el hecho de que el docente se puede dar cuenta fácilmente de los errores que se cometen con los estudiantes, cuando de enseñar a resolver problemas se trata pues al proponerles un taller, cualquiera, sobre resolución de problemas antes y después de que se les enseñe los cuatro pasos de Polya pueden notar la gran diferencia que hay al comparar los resultados obtenidos del antes y después. Es fundamental que el estudiante tome conciencia de la importancia de las matemáticas y de la importancia, a su vez, que tiene el poder plantear y resolver un problema matemático sin importar a qué conjunto numérico pertenezca ni con qué clase de ecuación esté relacionado. Por otro lado

es de vital importancia que el docente se dé cuenta, también, de lo primordial que es para el estudiante el poder resolver ecuaciones y sus problemas de aplicación tanto en el modo de interpretarlos, configurarlos, ejecutarlos y resolverlos.

Cardona Márquez (2007) de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, de Tegucigalpa, en su tesis *Desarrollando el Pensamiento Algebraico en Alumnos de Octavo Grado a través de la resolución de problemas*, hace una crítica acerca del porqué los estudiantes de octavo grado rechazan el álgebra básica pero también critica a los maestros de matemática de este grado que la enseñan sin tener en cuenta las dos clases de álgebra existentes, es decir el álgebra escolar (aquella que es parte del programa de matemática en los grados octavo y noveno) y el álgebra superior (aquella que se enseña en la universidad). Esto hace que en realidad el álgebra sea una molestia para los estudiantes de grado octavo y que a su vez se vuelva un verdadero dolor de cabeza para los estudiantes de grado noveno pues cuando llegan a este grado sin los conocimientos básicos del grado anterior entonces se pierde todo el interés por aprenderla. Cardona Márquez (2007) menciona que: “Bednarz y Guzmán (2000) hablan de un proceso de transición de la aritmética al álgebra a través de un proceso de ajustes importantes a una parte considerable de los conocimientos previamente desarrollados” (Cardona Márquez. 2007, p. 11).

Cardona Márquez (2007) realizó su estudio, investigación cualitativa de tipo exploratoria, que fue desarrollada desde julio a octubre del 2006 en el Centro de Investigación e Innovación de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán con dos grupos de estudiantes conformados por 41 alumnos de primero de bachillerato y 29 alumnos de grado octavo cuyas jornadas eran iguales, vespertina. El estudio fue realizado en dos etapas, una de diagnóstico y otra de ejecución teniendo en cuenta que la etapa de diagnóstico se realizó con los estudiantes de primero de bachillerato mientras que la etapa de ejecución se realizó con los estudiantes de grado en el horario normal de las clases de matemática. Este grupo se dividió en 7 equipos de trabajo orientado a través de guías de trabajo bajo el enfoque o modalidad de resolución de problemas. El trabajo se comenzó repartiendo las guías de trabajo por equipo en donde encontraron uno o más

problemas cuya lectura, análisis, comprensión y ejecución al interior de cada equipo para luego proceder con las demás etapas del proceso que propone Polya para llegar finalmente a la verificación de los resultados. La obligación del profesor era de controlar los equipos para que pudieran llegar a la siguiente etapa hasta que la previa se había logrado de forma satisfactoria.

Los equipos que en algún momento necesitaron ayuda en cualquiera de las etapas, ésta se les brindó de forma oportuna tratando de cumplir con lo aconsejado por Polya. En la etapa diagnóstica se pretendía determinar las habilidades de pensamiento algebraico que los estudiantes de grado primero de bachillerato habían adquirido en su formación media básica. La etapa de ejecución se desarrolló una vez se obtuvo los resultados de la prueba diagnóstica y tenía como propósito desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico que se deben de desarrollar en la educación media básica. Las evidencias se registraron por medio de los siguientes instrumentos: guías y hojas de trabajo, videos y hojas de observación. En la etapa de diagnóstico se realizó un análisis cuantitativo mientras que la etapa de ejecución se realizó un análisis de tipo cualitativo.

Las habilidades de pensamiento algebraico que se pretendían desarrollar en los estudiantes se encuentran implícitas en esta propuesta de trabajo. En cuanto a las conclusiones que se llegaron se tienen la siguientes: 1. Traducir expresiones de lenguaje común a lenguaje algebraico; 2) Expresar relaciones numéricas usando lenguaje algebraico; 3. Reconocer, describir y generalizar patrones numéricos; 4. Proponer técnicas para simplificar términos semejantes y hallar el producto de monomios; 5. Construir sucesiones numéricas a partir de una regla dada. Por último se tiene que la estrategia de resolución de problemas resultó ser la indicada para iniciar en los alumnos el desarrollo de cada una de las habilidades que se pretendía con cada una de las guías de trabajo.

La dificultad de enseñar a resolver problemas matemáticos, en cualquier grado del bachillerato, ha sido siempre abordada por docentes, especialistas y psicólogos a lo largo de los

años y por lo general cuando se hacen propuestas, éstas terminan en un fracaso parcial por no decir que total ya que por más que se diseñen estrategias y metodologías nuevas éstas parecen no surtir efecto a la hora de evaluar los estudiantes por medio de la resolución de problemas matemáticos. Todo comienza desde la misma interpretación del problema ya que el estudiante al no saber leer, no logra comprender lo que el problema le quiere dar a entender.

El problema también radica en el fallo que presentan los estudiantes en la lectura y escritura, pues si se tomaran la molestia de leerse un libro cada dos meses aprenderían mucho acerca de caligrafía, ortografía, redacción, interpretación y comprensión lectora. Rodríguez Quintana (2005) de la Universidad Complutense de Madrid, en su tesis *Metacognición, Resolución de Problemas y Enseñanza de las Matemáticas. Una Propuesta Integradora desde el Enfoque Antropológico*, aborda la investigación acerca de la dificultad que tienen los estudiantes frente a la resolución de problemas matemáticos que fue iniciada por el matemático de origen húngaro George Polya (1945), quien planteó los 4 pasos fundamentales para resolver problemas matemáticos. Otra etapa muy importante en su momento fue la descrita por René Descartes (1596-1650), quien al querer encontrar una forma o método universal para la resolución de problemas matemáticos marcó notablemente lo que se ha llamado *modelos de pensamiento productivo o consejos para resolver problemas con facilidad*.

8.1 ALGO DE HISTORIA

8.1.1 BREVE HISTORIA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida como por ejemplo: “ $\frac{1}{4}$ de anchura + longitud = 7 manos y longitud + anchura = 10 manos”. Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones pero utilizando métodos geométricos.

El libro “El arte matemático”, de autor chino desconocido (siglo III antes de Cristo), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un bosquejo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de estos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial, (López, I, s.f., p. 1). Pero para aplicar el método por determinantes se debe despejar claramente la duda de lo que es un arreglo para matrices o mejor lo que es la determinante en un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 o 3×3 .

8.1.2 BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

El origen y solución de las ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas se remonta desde la antigüedad. Actualmente hay evidencias de que los babilonios alrededor del año 1600 antes de Cristo, ya conocían un método para solucionar ecuaciones de segundo grado, pero no tenían una notación algebraica para expresar dicha solución. En Babilonia se utilizaron los algoritmos para resolverlas. En Grecia, el matemático Diofanto de Alejandría aportó un método para resolver este tipo de ecuaciones aunque sólo encontraba una de las soluciones sin importar que las soluciones encontradas fueran positivas.

La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham Bar-Hiyya, en una de sus publicaciones llamada Liber Embadorum, (Resources, s.f., 1995, p. 1), aunque no se aplicaba la ecuación general para resolver ecuaciones cuadráticas.

8.1.3 BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Los logaritmos fueron inventados por John Napier alrededor del año 1590 y por Jobst Bürgi pero de forma independiente. Los trabajos de Napier, quien era un lord escocés, tuvieron mayor influencia. Sus vecinos pensaban que tenía un pacto con el diablo. El enfoque que le dio a los logaritmos fue muy diferente a la actual pues se basaba en la relación entre secuencias aritméticas y geométricas y no como función inversa de las funciones exponenciales.

Las tablas de Napier que se publicaron en 1614, contenían logaritmos naturales y eran difíciles de usar pero un profesor londinense llamado Henry Briggs, se interesó en las tablas y después de

una visita que le hizo al mismo Napier, ambos desarrollaron la idea de los logaritmos comunes y Briggs convirtió las tablas de Napier en las tablas de los logaritmos comunes que se publicaron en 1617 y alrededor de 1659 se imprimían en lugares como China.

9. MARCO TEÓRICO

LA IMPORTANCIA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA VIDA ESCOLAR DEL ESTUDIANTE

Claramente se puede notar que para resolver problemas matemáticos el método convencional que lleva un orden lógico (análisis, operación y respuesta) es el más indicado de aplicar pero de igual forma se le deben hacer una o varias reformas para que este método funcione a plenitud.

No obstante no siempre se pueden resolver problemas matemáticos de una forma fácil o rápida aunque debería siempre de hacerse de una forma divertida por parte del estudiante, pero ¿qué pasa cuando es el docente de matemática el que al proponer un problema matemático a sus estudiantes se da cuenta que él mismo no se tomó el tiempo para resolverlo con anterioridad y se bloquea al resolverlo durante la clase?

La matemática siempre ha estado presente en la historia de la humanidad y ha presentado muchos cambios a través de los descubrimientos que se han hecho tanto directos como indirectos. Esto ha causado que diversas teorías hayan tenido que reformarse después de sus respectivas comprobaciones. La resolución de problemas matemáticos también es uno de los pilares de la matemática y está presente en todos los

niveles de escolaridad académica tanto en la primaria como en la secundaria, media vocacional y universitaria.

La historia de la Matemática está vinculada a la resolución de ciertos problemas y esta afirmación puede hacerse desde los siguientes puntos de vista:

Algunos problemas están en el origen del desarrollo de la Matemática.

La resolución de ciertos problemas ha motivado la aparición de nuevas ramas de la Matemática.

Otros problemas han ocasionado rupturas epistemológicas.

Determinados problemas han abierto crisis en los fundamentos de la Matemática.

Podemos revisar cuatro puntos de vista relacionados con la Matemática y la resolución de problemas matemáticos. Estos puntos de vista son los siguientes:

Primero. Problema en el origen del desarrollo de la Matemática.

Es común citar diversos problemas como motivadores del desarrollo matemático en varias épocas de la antigüedad, como por ejemplo:

La medida de terrenos por los agrimensores tras las crecidas del río Nilo en el Antiguo Egipto, para el manejo práctico de las propiedades de los triángulos.

La Matemática griega debió gran parte de su crecimiento a ciertos problemas muy concretos que sirvieron como centros de atracción y estímulo para los investigadores ampliando muchos de los conocimientos de los griegos. Cabe así interpretar el famoso Teorema de Pitágoras, la construcción de poliedros regulares, pero en especial los tres problemas clásicos:

1. La duplicación del cubo, que consiste en construir un cubo cuyo volumen sea el doble que el de un cubo de lado dado, usando únicamente regla y compás.
2. la trisección del ángulo, que consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, usando sólo regla y compás.

3. La cuadratura del círculo, que consiste en encontrar el lado de un cuadrado cuya área sea la misma que la del círculo inicial, utilizando sólo regla y compás.

4. Los problemas de repartos de herencia según la ley coránica para el Álgebra en la cultura árabe, etc.

Segundo. Problemas motivadores de la aparición de nuevas ramas de la Matemática.

A partir del estudio de problemas concretos ciertos matemáticos famosos desarrollaron nuevas ramas de la Matemática.

- ❖ El conocido problema del recorrido por los Puentes de Königsber fue resuelto por Euler en 1735. Su método consistía en reemplazar las áreas de tierra por puntos y los puentes por líneas que los conectaran. Los puntos se llaman vértices y a su vez un vértice se llama par o impar dependiendo del número de líneas que conducen a él. Toda la configuración es un grafo. Euler descubrió que puede recorrerse el grafo con un trazo continuo si contiene sólo vértices pares y un número par de vértices impares. Otro lado había descubierto un importante principio científico escondido en lo que sólo parecía un acertijo: *-Hay propiedades geométricas que son invariantes bajo transformaciones de distorsión-*.
- ❖ El problema de la estimación del volumen de los toneles (problema del aforo), fue para Kepler estímulo inicial para el desarrollo de los métodos infinitesimales y en especial en la elaboración del Cálculo Integral.
- ❖ Entre los continuadores de la obra matemática de Kepler y Galileo, la atención se centraba en dos problemas principales: 1. El Problema de las Tangentes que es la determinación de las tangentes a una curva dada –problema fundamental del Cálculo Diferencial-. 2. El Problema de las Cuadraturas que consiste en determinar el área encerrada por una curva dada –problema fundamental del Cálculo Integral-. Al ver la relación entre ambos problemas, Newton y Leibniz desarrollaron el Cálculo Infinitesimal.

- ❖ El Problema Regio de Fermat: “Es imposible resolver la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$ ”. Este resultado es enunciado por Fermat en el margen de un libro y no ha sido resuelto hasta 1955 por Andrew Wiles. Los intentos para resolverlo han abierto importantes caminos para el Álgebra como por ejemplo *el estudio de los números algebraicos y de los ideales por Kummer*.
- ❖ Es lógico citar como origen del estudio matemático de la Probabilidad a los intentos de Pascal y Fermat por resolver los dos problemas planteados por Antoine Gombaud, el Caballero de Meré. Hans Freudenthal, en “*La Matemática como una tarea educativa*” dice: “*El Caballero de Meré era un hombre educado, y sin duda aprendió Matemática, sin embargo, cuando se encontró ante una situación nueva no fue capaz de resolverla. Tan solo aplicó la Matemática que conocía, La Regla de Tres*”.

Tercero. Problemas que han provocado rupturas epistemológicas

Al considerar la historia de la Matemática, se debe tener en cuenta que el desarrollo de ésta no se produce por simple acumulación de resultados, sino también por rupturas en el modo de concebir y abordar los problemas. La imposibilidad de resolver ciertos problemas matemáticos en el anterior marco de conocimientos provoca la aparición de nuevas teorías. De esta forma se comprende como diversos matemáticos, sin conexión entre sí, hayan llegado en un mismo tiempo a parecidas formulaciones.

Según señala Javier De Lorenzo en *La Matemática y el problema de su historia*, en los últimos siglos han sido tres las rupturas epistemológicas esenciales: La inversión (1827), la abstracción (1875) y el paso a las estructura (1930).

Cuarto. Problemas que han abierto crisis en los fundamentos de la Matemática.

Se ha comentado la crisis acerca de las relaciones entre Matemática y realidad que provocaron la Geometrías no Euclideas y en el siglo XX se produjo la crisis en los fundamentos, a partir de la resolución de problemas y que han afectado a cuestiones tan esenciales como el concepto de verdad en matemática o el concepto de demostración”. (Sorando, J., 1994, p.135)

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede concluir que la Historia de la Matemática está relacionada directamente con la resolución de problemas, ya sea de tipo aritmético, algebraico o geométrico, además se debe tener en cuenta que la gran dificultad que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos es precisamente la falta de interpretación de estos.

9.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE ECUACIONES

Una ecuación es un igualdad entre dos operaciones matemáticas, ya sean complejas o sencillas, que tiene, como mínimo, un elemento o magnitud desconocido representado por una letra minúscula del abecedario llamada incógnita a la cual hay que hallarle su valor numérico para que la igualdad se cumpla teniendo en cuenta la principal propiedad de las igualdades que es la propiedad uniforme. Esta propiedad uniforme es básica para desarrollar o resolver, por lo general, cualquier tipo de ecuación inclusive las ecuaciones de orden superior.

9.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 3X3

Un sistema de ecuaciones lineales de 2X2 es una expresión de la forma
$$\begin{cases} ax + by = p \\ mx + ny = q \end{cases}$$

donde x, y son las variables y a, b, m, n, p, q pertenecen a los números reales. Un sistema de ecuaciones lineales de 2X2 se caracteriza por tener dos ecuaciones con dos incógnitas, además puede tener una sola solución, infinitas soluciones o no tener ninguna solución y estas se pueden determinar por medio de 5 métodos de solución como el gráfico, sustitución, reducción, igualación y determinantes. En el método gráfico el punto de corte de las dos líneas rectas que representa cada ecuación indica la solución.

Un sistema de ecuaciones lineales de 3X3 también puede tener una sola solución, infinitas soluciones o no tener ninguna. Al igual que el sistema de ecuaciones lineales de 2X2, un sistema de ecuaciones lineales de 3X3 se puede resolver por los mismos métodos.

La expresión que representa un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 es

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1p = u \\ a_2m + b_2n + c_2p = v \\ a_3m + b_3n + c_3p = w \end{cases}$$

Los literales m, n, p representan las incógnitas mientras que las demás variables representan números reales.

Ejemplo de problema que se resuelve por medio de un sistema de ecuaciones lineales de 2X2 y ejemplo de problema que se resuelve por medio de un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 respectivamente: (1) *La suma de dos números es igual a 120 y su diferencia es igual a 48.* (2) *Se deben repartir 2.400.000 dólares entre tres personas A, B, C de tal forma que A reciba el doble de B y C el triple de A.* En el primer problema los dos números que son desconocidos podría representarse con las letras m y n . en el segundo problema los literales m , n , p pueden representar las cantidades de dinero que le corresponde a cada una de las personas.

El resolver problemas matemáticos aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y de 3x3 le da al estudiante la seguridad de poder resolver cualquier otro tipo de problema que se le presente en su vida escolar de ahí en adelante y aun en sus estudios superiores ya que esto indica que al fin puede comprender lo que lee y esto da pie para que se enfrente a problemas matemáticos cada vez más complejos, como los que ve en los grados décimo y undécimo y los que se enfrentará en su vida tecnológica o universitaria.

9.3. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación cuadrática es una expresión que puede tener las siguientes formas $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$, $ax^2+bx+c=0$. Esta última expresión representa una ecuación cuadrática completa. Para resolver una ecuación cuadrática se pueden utilizar varios métodos que son: factorización, completación de cuadrados y fórmula general. La fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ presenta una expresión muy particular llamada discriminante. Esta expresión llamada discriminante es $\sqrt{b^2 - 4ac}$ e indica si la ecuación tiene dos soluciones reales, dos soluciones imaginarias, o una sola solución real.

Ejemplo de problema que se resuelve por ecuación cuadrática: *El triple producto del cuadrado de un número sumado con el quintuple del mismo número es equivalente a 150.* Este problema se puede representar algebraicamente de la siguiente forma teniendo en cuenta de que x representa el número desconocido: $3x^2 + 5x = 150$ y como toda ecuación cuadrática completa debe igualarse a cero entonces la ecuación anterior queda $3x^2 + 5x - 150 = 0$. Esta ecuación se puede resolver por completación de cuadrados o por la formula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde $a=3, b=5, c=-150$.

9.4. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella ecuación donde la incógnita se encuentra en el exponente, como por ejemplo las siguientes ecuaciones $2^{2x+9} = 2^{x-8}$, $6^{9x-12} = 6^{4x+10}$, $7^{4x+10} = 5^{2x-4}$. Las dos primeras ecuaciones tienen como particularidad la misma base mientras que la última tiene bases distintas. En el primer caso (bases iguales) se trabaja únicamente con los exponentes, en tanto que en el segundo caso se debe aplicar logaritmo para poder resolverla. Para resolver ecuaciones exponenciales como logarítmicas se debe de tener en cuenta las propiedades de los exponentes y las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo de problema que se resuelve con ecuaciones exponenciales: “El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora se duplica el número de las mismas. En estas condiciones había 1000 bacterias al iniciar el experimento. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo cuando transcurra un día? El patrón de crecimiento de las bacterias está dado por la expresión $N = N_0 \cdot a^{t/tr}$ donde N = población de individuos, N_0 =población inicial, a = ritmo de crecimiento,

t =tiempo transcurrido, t_r =tiempo que tarda una población en aumentar su población según dicho ritmo”, (Salmedina, s.f., 1990, p. 1). En la anterior ecuación podemos apreciar claramente la ecuación exponencial ya que t/t_r es el exponente de la base a .

9.5. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una ecuación logarítmica es aquella en que la ecuación aparece afectada por un logaritmo. Para resolver ecuaciones logarítmicas se deben de tener en cuenta las propiedades básicas de los logaritmos. Son ejemplos de ecuaciones logarítmicas las siguientes expresiones: $\text{Log}_2 34=x$, $\text{Log}_3 729=x$, $\text{Log}_5 (2x+18)=\text{Log}_5 (8x-9)+4$.

Ejemplo de problema que se resuelve por ecuación logarítmica: *El nivel de intensidad (B) de un sonido medido en decibels (dB) se define por la ecuación logarítmica $b = 10 \log_{10} \frac{I}{i}$ donde I es la intensidad del sonido medida en vatios/cm² e i equivale a la intensidad mínima que puede escuchar el oído humano que es de 10^{-16} vatios/cm². Determinar el nivel de intensidad de un sonido cuya intensidad es de 4×10^{-12} vatios/cm².*

En el ejemplo anterior podemos ver claramente que para poderlo resolver necesitamos aplicar simplemente una de las propiedades de la potenciación o de los exponentes, aunque debemos recordar o tener muy presente las propiedades que se cumplen en los logaritmos las cuales son simplemente tres propiedades muy sencillas.

9.6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La idea principal de este trabajo de investigación es lograr que todos los estudiantes de grado noveno puedan aprender esta metodología y aplicarla claramente para plantear y resolver problemas matemáticos aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 de una forma práctica y sencilla de tal forma que los puedan resolver sin ningún inconveniente.

Polya (1954) basó su interés en el proceso del descubrimiento o la forma en que se derivan los resultados matemáticos, por esta razón generalizó su método de enseñanza en cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Al resolver un ejercicio matemático simplemente se realiza un paso por simple rutina pero cuando se quiere resolver un problema matemático lo que se necesita hacer es un profundo análisis para identificar de qué trata el problema, el proceso que se debe realizar para plantearlo y la operación que se debe aplicar para finalmente dar una respuesta correcta.

Resolver ejercicios es muy importante para el aprendizaje de las matemáticas pues ayuda a comprender conceptos, propiedades y procedimientos que se aplican para la resolución de problemas. Se debe tener en cuenta también que aunque no todo lo que se aprende en los años de escolaridad básica, técnica, tecnológica o profesional se va a aplicar en nuestra vida diaria o profesional, siempre va a servir pues puede ayudar a pensar rápidamente y a tomar decisiones en su mayoría acertadas. No se puede permitir que los estudiantes se sientan vencidos o derrotados

por no poder plantear o resolver un problema matemático sin importar de que trate ni que tan complicado o complejo les pueda parecer. Por esta razón se debe tener en cuenta los siguientes pasos propuestos y aplicados por Polya (1954) para el planteo y resolución de problemas matemáticos, aunque en algunos casos (problemas) no se aplican al pie de la letra:

Paso No. 1: Entender el Problema.

1.1. ¿Entender todo lo que dice?

2.2. ¿Puedes plantear el problema en tus propias palabras?

2.3. ¿Distingues cuáles son los datos?

2.4. ¿Sabes a qué quieres llegar?

2.5. ¿Hay suficiente información?

2.6. ¿Hay información extraña?

2.7. ¿Es este problema similar a algún otro que hayas solucionado antes?

Paso No. 2: Configurar un Plan.

¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final o resultado).

2.1. Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).

2.2. Usar una variable.

2.3. Buscar un Patrón.

2.4. Hacer una lista.

2.5. Resolver un problema similar más simple.

- 2.6. *Hacer una figura.*
- 2.7. *Hacer un diagrama.*
- 2.8. *Usar razonamiento directo.*
- 2.9. *Usar razonamiento indirecto.*
- 2.10. *Usar las propiedades de los Números.*
- 2.11. *Resolver un problema equivalente.*
- 2.12. *Trabajar hacia atrás.*
- 2.13. *Usar casos.*
- 2.14. *Resolver una ecuación.*
- 2.15. *Buscar una fórmula.*

- 2.16. *Usar un modelo.*
- 2.17. *Usar análisis dimensional.*
- 2.18. *Identificar sub-metas.*
- 2.19. *Usar coordenadas.*
- 2.20. *Usar simetría.*

Paso No. 3: Ejecutar el Plan.

- 3.1. *Implementar las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.*
- 3.2. *Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento.*
- 3.3. *No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.*

Paso No. 4: Mirar hacia atrás.

4.1. ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

4.2. ¿Adviertes una solución más sencilla?

4.3. ¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general? (Suma22, 1996, p. 104).

Comúnmente los problemas se enuncian en palabras, ya sea de forma oral o escrita. Las palabras que forma el problema se deben transformar en símbolos matemáticos para que de esta forma se plantee el problema y luego aplicar la estrategia necesaria para su posterior solución.

Algunas sugerencias hechas por quienes tienen éxito en resolver problemas:

Además del Método de Cuatro Pasos de Polya nos parece oportuno presentar en este apartado una lista de sugerencias hechas por estudiantes exitosos en la solución de problemas:

1. Acepta el reto de resolver el problema.
2. Reescribe el problema en tus propias palabras.
3. Tómate tiempo para explorar, reflexionar, pensar...
4. Habla contigo mismo. Hazte cuantas preguntas creas necesarias.

5. Si es apropiado, trata el problema con números simples.
6. Muchos problemas requieren de un período de incubación. Si te sientes frustrado, no dudes en tomarte un descanso –el subconsciente se hará cargo-. Después inténtalo de nuevo.
7. Analiza el problema desde varios ángulos.
8. Revisa tu lista de estrategias para ver si una (o más) te pueden ayudar a empezar
9. Muchos problemas se pueden de resolver de distintas formas: solo se necesita encontrar una para tener éxito.
10. No tenga miedo de hacer cambios en las estrategias.
11. La experiencia en la solución de problemas es valiosísima. Trabaje con montones de ellos, su confianza crecerá.
12. Si no estás progresando mucho, no vaciles en volver al principio y asegurarte de que realmente entendiste el problema. Este proceso de revisión es a veces necesario hacerlo dos o tres veces ya que la comprensión del problema aumenta a medida que se avanza en el trabajo de solución.
13. Siempre, siempre mira hacia atrás: Trata de establecer con precisión cuál fue el paso clave en tu solución.
14. Ten cuidado en dejar tu solución escrita con suficiente claridad de tal modo puedas entenderla si la lees 10 años después.
15. Ayudar a que otros desarrollen habilidades en la solución de problemas es una gran ayuda para uno mismo: No les des soluciones; en su lugar provéelos con sugerencias significativas.
16. ¡Disfrútalo! Resolver un problema es una experiencia significativa (I.E.S. Rosa Chacel – Depto. de Matemática, 2000, p. 2).

Pero resolver problemas matemáticos no tiene por qué ser complicado, al contrario debe ser agradable para el estudiante el poder analizar, plantear y resolver un problema matemático por más complicado que parezca, pero al final queda la satisfacción de que se pudo resolver.

Por lo general todos los problemas matemáticos están relacionados con el álgebra por más sencillos que parezcan, inclusive aquellos que están diseñados para los grados cuarto de primaria hasta séptimo (segundo de bachillerato) donde supuestamente el álgebra no ha sido *tocado*. Algunos ejemplos de problemas matemáticos para estos grados son los que se muestran a continuación. Sólo así se podrá saber que el álgebra se encuentra en ellos de una forma *indirecta*. *Indirecta* ya que en estos niveles de educación el estudiante no conoce directamente el estudio del álgebra.

Algunos ejemplos claros de la introducción al Álgebra en la Aritmética son:

1. Ana tiene debe \$900. Si cancela su deuda le quedan \$1,400. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

Podemos plantearlo de la siguiente manera:

x es la cantidad de dinero que tenía Ana.

Si a lo que tenía Ana que es x le restamos lo que pagó (\$900) entonces le queda una cantidad de dinero actual (\$1,400).

Planteándolo y resolviéndolo de forma matemática tendríamos:

$$x - 900 = 1,400$$

$$x = 1,400 + 900$$

$$x = 2,300.$$

Conclusión: Ana antes de pagar su deuda tenía \$2,300. Al cancelar su deuda que era de \$900 se queda solamente con \$1,400.

2. *¿Cuánto hay que sumarle a 39 para que sea igual al mayor número par de tres cifras?*

El planteo sería:

x = es la cantidad que hay que sumarle a 39 para que sea igual al mayor número par de tres cifras.

El mayor número par de tres cifras es 998.

Planteándolo y resolviéndolo de forma matemática tendríamos:

$$39 + x = 998$$

$$x = 998 - 39$$

$$x = 959.$$

Conclusión: La cantidad que hay que sumarle a 39 para que sea igual al mayor número par de tres cifras es 959 ya que 959 más 39 es igual a 998.

3. *Una persona necesita recorrer 428 kms en total durante 5 días para ganar una competencia. El primer día recorre 80 kms; el segundo día recorre la mitad de lo que recorrió el primer día; el tercer día recorre lo que recorrió el primer y segundo días juntos; el cuarto día recorrió 122 kms. Si ganó la competencia, ¿cuántos kms recorrió el quinto día?*

Planteando el problema quedaría de la siguiente forma:

El primer día recorrió 80 kms.

El segundo día recorrió la mitad de lo que recorrió el primer día, es decir 40 kms.

El tercer día recorrió lo que recorrió el primer y segundo día juntos, es decir 80 kms más 40 kms es igual a 120 kms.

El cuarto día recorrió 122 kms.

x es la cantidad de kms que recorrió el quinto día.

De forma matemática quedaría planteado y resuelto así:

$$80 + 40 + 120 + 122 + x = 428$$

$$362 + x = 428$$

$$x = 428 - 362$$

$$x = 66.$$

Conclusión: La persona recorrió 66 kms el quinto día para poder ganar la competencia.

4. En un depósito hay 1,200 litros de agua. Por la parte superior un tubo vierte en el depósito 30 litros por minuto, pero por la parte inferior del mismo depósito otro tubo saca agua a razón de 45 litros por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá en el depósito después de 25 minutos de funcionamiento?

Planteando el problema quedaría de la siguiente forma:

El depósito tiene 1,200 litros de agua.

En la parte superior del depósito un tubo vierte agua a éste a razón de 30 litros por minuto, lo que quiere decir que en 25 minutos ha vertido en total 750 litros de agua.

En la parte inferior del mismo depósito otro tubo saca agua a razón de 45 litros por minuto lo que quiere decir que en 25 minutos a sacado en total 1,125 litros de agua.

x es la cantidad de agua que queda en el depósito después de 25 minutos.

De forma matemática el problema quedaría planteado y resuelto así:

$$x = 1,200 + (30 \times 25) - (45 \times 25)$$

$$x = 1,200 + 750 - 1,125$$

$$x = 825.$$

Conclusión: Después de 25 minutos quedarían 825 litros de agua en el depósito estando funcionando los dos tubos, el de entrada y el de salida de agua. (30×25) se suman porque es la cantidad de litros de agua que entra en el depósito durante 25 minutos y (45×25) se restan porque es la cantidad de litros de agua que sale del depósito.

5. Un ascensor se encuentra en el piso número 15 de un edificio de apartamentos. Después de un determinado tiempo sube 4 pisos, luego baja 12 piso, después sube 5 y por último baja 18 pisos. ¿En qué piso se detuvo el ascensor?

Planteando el problema queda de la siguiente forma:

Piso número 15 es la posición actual del ascensor.

Sube 4 pisos.

Baja 12 pisos.

Sube 5 pisos.

Finalmente baja 18 pisos.

x = piso donde quedó el ascensor después de todo su recorrido.

De forma matemática queda expresado y resuelto así:

$$x = 15 + 4 - 12 + 5 - 18$$

$$x = 24 - 30$$

$$x = -6.$$

Conclusión: El ascensor se detuvo en el piso número -6, lo que se puede interpretar como un edificio de apartamentos que tiene varios niveles por debajo del primer piso, en otras palabras es un edificio que consta de mínimo 6 desniveles de parqueadero.

Se puede observar claramente que en cada uno de los problemas planteados y resueltos anteriormente se utilizó un lenguaje común, otro lenguaje aritmético y por último un lenguaje algebraico.

Al utilizar la x o cualquier otra letra minúscula del abecedario para asignar una cantidad desconocida se emplea el idioma algebraico aunque no se le diga directamente que se está utilizando pero cuando nuestros estudiantes lleguen a grado octavo se darán cuenta de que siempre utilizaron la ayuda del álgebra para solucionar sus problemas matemáticos y que el álgebra les facilitó en gran parte esta tarea ya que no tuvieron necesidad de usar el símbolo de interrogación $?$ para asignar la cantidad o cantidades desconocidas en un determinado problema aritmético.

Para que los estudiantes de grado noveno del Liceo Napolitano puedan resolver problemas de diversas aplicaciones como función lineal, función cuadrática, función exponencial, función logarítmica, sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×3 donde se ven implicados los números naturales, enteros, racionales e irracionales se les debe preparar de una forma adecuada en el uso del álgebra para que así de esta forma puedan desarrollar mejor sus conocimientos algebraicos y los apliquen en la solución de problemas matemáticos. Pero no se debe olvidar de ningún modo la enseñanza de conjuntos numéricos como los mencionados anteriormente (natural, entero, racional e irracional) y las operaciones básicas que se resuelven con estos conjuntos.

Inclusive se debe abordar de forma muy clara el conjunto de los números imaginarios y el conjunto de los números complejos que juegan un papel importante en la resolución de problemas matemáticos.

Todos los pensamientos matemáticos son sumamente importantes en la resolución de problemas aplicados en cualquier nivel de la matemática por eso es tan importante que los estudiantes los conozcan muy bien y los aprendan a diferenciar y trabajar claramente por medio de ejercicios básicos tanto sencillos como complejos.

Según una investigación que hizo Hugo Barrantes (2006), Schoenfeld después de estudiar Matemática Pura se dio a la tarea de averiguar por qué en la Universidad donde estudió nunca le habían enseñado la metodología de Polya la cual consideró que le habría servido de mucho en su carrera universitaria como matemático puro y al indagar acerca de la no enseñanza de esta metodología se dio cuenta de que la mayoría de los docentes de su universidad no la conocían y los pocos que la conocían opinaban que esta metodología no brindaba los resultados esperados o simplemente no servía pero al buscar más respuestas con profesores que preparaban estudiantes para las olimpiadas matemáticas se enteró que las respuestas eran parecidas. Pero se debe tener en cuenta de que Polya trabajó a base de conjeturas pues nunca realizó un trabajo de campo verdadero con estudiantes, sin embargo Polya le dio mucha importancia a la Resolución de Problemas Matemáticos pues por medio de la resolución de estos se puede crear conciencia y conocimiento en esta disciplina compleja y necesaria, pero también hay que tener en cuenta de que la Matemática es una invención del hombre y lo que siempre ha existido son los números. Por ejemplo, el hombre tuvo que inventar la suma y la resta en épocas antiguas para poder realizar las primeras transacciones existentes en la contabilidad.

La idea de Shoenfeld (1985) fue involucrar en sus investigaciones acerca de la resolución de problemas matemáticos a estudiantes con conocimientos previos y a profesores quienes estaban completamente preparados para resolverlos aunque los problemas matemáticos que les propuso eran lo suficientemente complejos (complicados de resolver). El separó en grupos tanto profesores como estudiantes y a estos últimos los separó en grupos para luego filmarlos, tomarles fotografías y poder así hacerles un seguimiento acerca de los que hacían al resolver tales problemas.

Una vez concluidos estos experimentos, Shoenfeld llegó a la conclusión: “Cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas de Matemática como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas” (Barrantes, 2006, p.2). Pues él comprendió que esto sólo es posible si se tienen en cuenta otros factores tales como los recursos, las heurísticas y el control ya que sin esto simplemente no funcionaría.

Ahora bien, *los recursos* son los conocimientos y herramientas básicas que tiene la persona como los algoritmos, las fórmulas y las nociones necesarias para poder hacerle frente al problema o problemas que va a resolver, sin embargo es el docente el que cuenta con el suficiente criterio personal y profesional para identificar qué estudiante o estudiantes en realidad cuentan con esos recursos necesarios para resolver determinados problemas ya que cada uno de los problemas que va a resolver el estudiante tiene también su grado de complejidad.

Cuando un estudiante logra analizar un determinado problema para después resolverlo quiere decir esto que puede tener buenas bases o algunos buenos recursos, es decir lo que conocemos como saberes previos ya que previamente está consultando analíticamente en su interior los pasos o algoritmos que debe seguir para poder lograr su objetivo. Por ejemplo, cuando se trata de un problema que se resuelve por un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 o de 3×3 el estudiante con sólo leer el problema se da cuenta de que dicho problema se resuelve por alguno de los dos sistemas de ecuaciones lineales, luego el detalle está en que pueda plantearlo y luego resolverlo por alguno de los métodos existentes que se utilizan para esto.

Existe también una gran cantidad de procesos erróneos en el análisis y solución de problemas aplicados a la Matemática pues si en algunos casos logra plantear el problema, digamos sencillo, no sigue la jerarquía de las operaciones básicas matemáticas. Por ejemplo: *si al doble producto*

de un número entero se le resta 450 entonces el resultado es igual al triple del mismo número aumentado en el producto de 10 por 5. ¿Cuál es el número?

El planteo a este sencillo problema matemático es el siguiente: *digamos que x es el número desconocido, entonces $2x - 450 = 3x + 10 \cdot 5$* . Primero el estudiante debe de identificar y aplicar la propiedad uniforme de las igualdades para poder dejar en el miembro izquierdo de la igualdad los números enteros con la incógnita y en el lado derecho de la misma ecuación los números enteros o reales. Teniendo en cuenta esto la anterior ecuación queda $2x - 3x = 450 + 10 \cdot 5$. Después puede cometer un error común en estos casos. Realiza la suma de 450 con 10 y el resultado lo multiplica por 5. En este punto omitió la jerarquía de las operaciones básicas, es decir realizar primero el producto y luego realizar la suma. Estos son algunos de los conceptos básicos que deben de tener presente los estudiantes para poder resolver problemas matemáticos.

Los estudiantes de grado noveno deben de tener conceptos básicos y definidos tanto de Aritmética como de Álgebra. En Aritmética realizar correctamente operaciones básicas con números enteros, racionales, decimales, conceptos de perímetro, área y volumen. En Álgebra operaciones con expresiones algebraicas, pues al resolver problemas matemáticos de diversa índole simplemente se potencia de una forma acertada el trabajo y desempeño con las expresiones algebraicas las cuales en muchos estudiantes siempre han sido un gran dolor de cabeza por muchas razones como por ejemplo la didáctica, metodología y pedagogía que emplea el docente encargado pues el docente es parte fundamental en el estudiante y es el que lo motiva para que quiera seguir aprendiendo.

Por otro lado *la heurística* es simplemente el arte de inventar, hallar y descubrir métodos para realizar o resolver positivamente las situaciones que se nos presentan y esto se puede aplicar perfectamente en la resolución de problemas matemáticos de cualquier tipo pero teniendo en cuenta los conceptos básicos aprendidos en cursos pasados. En la heurística también entra a formar parte la creatividad pues cada estudiante es creativo y puede ampliarse creativamente.

Polya (1954) propone como heurísticas hacer dibujos, pero Shoenfeld (1985) dice que no en todo problema se puede dar este tipo de heurística específica, (Barrantes, 2006, p. 3), pero para dar claridad a este punto podemos dar un ejemplo sencillo donde no se puede aplicar esta clase de heurística. *Un hacendado tiene en su finca cabezas de ganado, ovejos y patos. El número de reses es igual al doble de ovejas más el triple de patos. La cantidad de patos es igual al triple de las ovejas. El número total de animales es de 1.200. ¿Cuántos animales hay de cada clase?* Se podría realizar un dibujo con reses, ovejas y patos, pero ¿tendría algún sentido hacerlo? Esta clase de heurística no serviría de nada en la solución de este problema.

De hecho, *el control* cuando el estudiante controla su trabajo para saber si al resolver un determinado problema matemático elige correctamente la vía que lo lleva a la solución exacta de dicho problema o por si al contrario debe tomar otra al darse cuenta que la primera que eligió no sirvió. Por lo general esto le sucede a muchos estudiantes que al tratar de resolver un problema de Matemática lo aborda y lo analiza de una forma para darle solución, pero al no encontrarle la solución correcta por el camino que eligió no le queda más de otra que intentarlo de otra forma hasta que al fin la encuentra, si es que tiene las bases completamente básicas y necesarias ya que todo debe de estar completamente controlado.

Todo estudiante debe darse cuenta hasta donde es capaz de analizar, comprender y resolver un problema matemático, es decir se debe dar cuenta de qué trata el problema que va a resolver para poder hacerlo de lo contrario no lo hará nunca, además sabemos que los problemas matemáticos tienen una sola respuesta lógica y correcta.

Los estudiantes del grado noveno del Liceo Napolitano son conscientes de las falencias que tienen en Matemática tanto en Aritmética como en el Álgebra y esto se debe a muchos factores. En el Aritmética las fallas o falencias corresponden a la resolución de ejercicios básicos con números enteros, números racionales y números decimales. En estos conjuntos por lo general confunden la ley de los signos con la ley para sumar números enteros. Estas dos clases de leyes

se aplican en la resolución de ejercicios básicos con números reales. A continuación mostraremos algunos ejemplos donde se aplican estas leyes y en las cuales los estudiantes cometen diversos errores:

A. $-326+598=-272$. El error en este ejemplo consiste en que se aplicó la ley de los signos, es decir menos por más es igual a menos cuando en realidad se debe aplicar la ley para sumar números enteros, es decir al sumar números enteros de signos contrarios lo que se hace en realidad es una resta y al resultado se le agrega el signo del número que tiene mayor valor absoluto que para este ejemplo sería positivo ya que el valor absoluto de 598 es mayor que el valor absoluto de 326.

B. $100-200+300-400=200$. El error que se cometió aquí es prácticamente el mismo que se cometió en el primer ejemplo es decir se aplicó la ley de los signos en el mismo orden como aparecen los números enteros; más por menos es menos, menos por más es menos y por último menos por menos es más, cuando sabemos que el resultado en este ejemplo es -200 pues podemos sumar los números enteros de signos iguales y por último realizamos la resta.

C. $(-95) \times 97 = 9215$. En este ejemplo el error claro que se comete es simplemente que no se aplicó la ley de los signos sino la ley para sumar números enteros pues se realizó el producto normalmente pero el resultado dio positivo porque el número mayor es positivo.

Otro típico error cometido por gran parte de los estudiantes es que no tienen en cuenta la jerarquía de las operaciones básicas las cuales son:

1. Multiplicaciones y divisiones se resuelven primero que las sumas y las restas.

2. Operaciones dentro de signos de agrupación como paréntesis, llaves y corchetes se resuelven antes que las demás, es decir que se deben resolver primero que las operaciones básicas que no se encuentran dentro de los signos de agrupación.

3. Sumas y restas o multiplicaciones y divisiones se resuelven en su orden. Lo que quiere decir que si hay sumas y restas solamente pues se van realizando estas operaciones en el orden que van apareciendo. Lo mismo pasa con las divisiones y multiplicaciones.

Pero la gran mayoría de los estudiantes no tienen en cuenta estas reglas básicas, ya que van resolviendo los ejercicios en el mismo orden como aparecen. Podemos dar algunos ejemplos para demostrar los errores que los estudiantes comenten de forma regular:

A. $10-50 \times 20-60 \div 5 = -172$. En este ejemplo el error clásico que se cometió es que se hicieron las operaciones en el mismo orden en que aparecen, es decir que no tuvieron en la jerarquía o las reglas vistas anteriormente para proceder así: $10-50 = -40$, $-40 \times 20 = -800$, $-800-60 = -860$ y finalmente $-860 \div 5 = -172$, cuando el procedimiento era simplemente $10-1000-12 = 10-1012 = -1002$. Aquí podemos ver que el orden es el siguiente siguiendo las tres reglas anteriores: (1) Se realizan la multiplicación y la división; (2) Se realiza la suma de los números enteros negativos; (3) Se efectúa la resta entre el número entero positivo y el número entero negativo para obtener finalmente el resultado final.

B. $50+80-(45-95 \times 7-90)-(-90 \times 3+200-50 \times 3) = 130-(-50 \times 7-90)-(-270+200-50 \times 3) = 130-(-350-90)-(-70-50 \times 3) = 130-(-440)-(-120 \times 3) = 130-440-360 = -670$. En este simple ejercicio se pueden ver claramente todos los posibles errores que cometen los estudiantes. Pues realizan las operaciones en el mismo orden como aparecen sin tener en cuenta la jerarquía ni la ley de los signos ni la ley para sumar números enteros, pues el orden lógico y correcto para resolver este ejercicio es el siguiente:

$$50+80-(45-95 \times 7-90)-(-90 \times 3+200-50 \times 3)=50+80-(45-665-90)-(-270+200-150)=50+80-(45-755)-(200-420)=50+80-(-710)-(-220)=50+80+710+220=1060.$$

En el Álgebra los errores son muy similares y en algunos casos más frecuentes y más comunes pues muchos de ellos no han logrado entender muy bien la forma en que se resuelvan las operaciones básicas con polinomios, es decir que no saben cómo resolver reducción de términos semejantes, adición y sustracción de polinomios, producto de expresiones algebraicas, división de expresiones algebraicas, simplificación de fracciones algebraicas, adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de fracciones algébricas. A parte de esto también presentan muchas falencias con respecto a los tipos de funciones, como por ejemplo funciones lineales, funciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 porque así se les hayan explicado estos temas con anterioridad simplemente no repasan lo aprendido por falta de interés en gran parte de ellos. Estos temas en específico se deben de reforzar pues son muy necesarios para la comprensión y resolución de problemas matemáticos.

El problema fundamental que radica en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra es en gran parte porque el docente no sabe cómo compenetrar esta parte de la Matemática de una forma sencilla para el estudiante y por otro lado porque el estudiante al llegar al grado octavo viene con muchas falencias de los temas básicos que debió haber aprendido en el grado anterior.

9.7. EL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y VARIACIONAL

El pensamiento numérico se refiere simplemente a la comprensión general que tienen las personas acerca de los diferentes conjuntos numéricos tales como el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales, etc., y las diferentes clases de operaciones que puede hacer con ellos, operaciones básicas como adiciones, sustracciones, productos, divisiones, potenciaciones, etc. El pensamiento variacional se refiere a

la percepción y la caracterización de la variación y al cambio en contextos distintos, en este pensamiento entra de lleno el álgebra ya que es en esta parte de la matemática que se introducen símbolos representados por las letras minúsculas del abecedario.

Los lineamientos curriculares (MEN, 1998) permiten interpretar una nueva manera de reorganizar todos aquellos contenidos que se han constituido en los desarrollos curriculares para el área de las matemáticas en los grados 8º y 9º, tradicionalmente, etiquetados con el nombre de álgebra. Por lo tanto es importante acercarnos a la comprensión del pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos. Sólo así podemos continuar comprendiendo el porqué de la necesidad de una propuesta curricular que mejore los desempeños de nuestros estudiantes en lo relativo al álgebra escolar.

El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, “el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2003, s.p.)

Así pues, dicha forma de comprender el pensamiento variacional, el carácter estático de la presentación de los objetos matemáticos en un curso normal de álgebra² se constituye en el punto de llegada de un camino iniciado con el estudio y modelación de situaciones de variación. Esto es, a partir del análisis matemático de contextos de las matemáticas, desde las ciencias, desde la vida cotidiana, etc., en los cuales se puedan modelar procesos de variación entre variables, se abre un camino fructífero para el

desarrollo de los procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

Vincular las condiciones de contexto en donde las situaciones de cambio sean el ingrediente primordial en la actividad matemática del estudiante permite ver que el desarrollo de pensamiento algebraico deja de ser exclusivo de los grados 8° y 9°, y que por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado 1° al grado 11°, tal como se propone desde los Estándares Básicos de Matemáticas. (MEN, 2003, s.p.)

Pero además, el estudio del álgebra escolar al lado de los procesos de variación permite ver que este tipo de pensamiento involucra los otros tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico y estadístico. Esto, al menos por dos razones: de un lado, su estudio como parte de un proceso de búsqueda de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento implica el reconocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio; y de otro lado, todos ellos Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas ofrecen herramientas para modelar situaciones a través de las funciones como resultado de la cuantificación de la variación.

En adelante, con base en la interpretación de los estándares curriculares, se presenta una propuesta de reorganización de los mismos para el desarrollo del pensamiento variacional, en el ciclo escolar de primero a undécimo. Para ello, presentamos una estructura conceptual que sirva de orientación en el desarrollo del currículo de la educación básica y media. Ésta aparece organizada en tres ejes temáticos, en los que, creemos se recogen los diferentes estándares por grupos de grados. Estos ejes temáticos son: patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones. (Ministerio de Educación Nacional, p. 245)

10. MARCO METODOLÓGICO.

10.1. NIVEL DE INVESTIGACIÓN.

Lo primero que se hace para poder aplicar la metodología de Polya en la resolución de problemas matemáticos es reforzarles los temas básicos que necesitan para su posterior aplicación siendo estos temas realmente importantes para el estudiante ya que no sólo los van a necesitar para resolver problemas matemáticos sino también para su vida universitaria pues es lógico que en todas las carreras ya sean técnicas, tecnológicas y profesionales necesiten de los conceptos básicos de la Matemática y muchos de ellos necesitarán de Matemática un poco más avanzada como el cálculo diferencial, cálculo integral y en algunos casos el cálculo multivariado dependiendo de la carrera universitaria a la que hayan ingresado.

10.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

Se emplea una serie de ejercicios (talleres) (ver anexo # 1) que incluyen varios conjuntos numéricos y también se implementan problemas matemáticos para poder de esta forma mirar, identificar y analizar cuáles son exactamente las falencias que estos estudiantes presentan y poder así darles solución por medio de refuerzos tanto en la clase como en la casa a través de problemas de aplicación para poder de esta forma lograr un excelente resultado en la propuesta que conlleva este Proyecto de Investigación.

Toda investigación nace a partir de una situación observada o sentida que genera una serie de inquietudes o preguntas que no se pueden responder inmediatamente, sino que requiere establecer

un proceso de desarrollo para dar solución. Este Proyecto de Investigación utiliza el método deductivo ya que parte de fenómenos generales para llegar a uno particulares pues se aplican principios, teorías o leyes a casos particulares. Así mismo la investigación de este proyecto es una investigación explicativa ya que orienta a dar respuesta a las causas de eventos y situaciones de tipo social explicando a su vez por qué ocurre y las condiciones en que se presentan. En cuanto al enfoque se trata entonces de un enfoque cualitativo con metodología mixta, pues se parte de un estudio de análisis de datos numéricos para dar finalmente una solución o para verificar una hipótesis que en este caso es la aceptación y el impacto que causa entre los estudiantes de grado noveno el implementarles los cuatro pasos básicos creados por Polya en la resolución de problemas matemáticos, que en este caso se refiere a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 .

Las fases metodológicas son aquellas que se llevaron a cabo siguiendo un orden específico para poder llevar de manera clara, directa y objetiva la presente investigación. Jhon Elliot (1990) presenta ciertas características de la investigación-acción que permiten conocer indicar en que consiste ésta. Algunas de ellas son: 1. La investigación-acción en las escuelas analiza las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores; 2. El propósito de la investigación-acción consiste en profundizar la comprensión del profesor de su problema; 3. La investigación-acción adopta una postura teórica según la cual la acción emprendida para cambiar la situación se suspende temporalmente para conseguir una comprensión más profunda del problema práctico; 4. Al explicar lo que sucede, la investigación-acción construye un guion sobre el hecho en cuestión y lo relaciona con un texto de contingencias mutuamente independientes; 5. La investigación-acción interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema; 6. La investigación-acción al considerar la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará lo que sucede con el mismo lenguaje utilizado por ellos.

La investigación-acción relaciona activamente a los participantes en la autorreflexión sobre su situación por tanto los participantes deben tener libre acceso a los datos del investigados, a sus investigaciones, relatos, etc., y a su vez, el investigados también debe tener libre acceso a los que sucede y a las interpretaciones y relatos que se hagan sobre ello. Por tal motivo es imposible que

la investigación-acción se lleve a cabo si falta credibilidad en el marco teórico. La investigación-acción es una práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella, por tal motivo y al ser una práctica social en ella intervienen docentes y estudiantes que deben de trabajar junto con el fin de que se logren los resultados que se esperan.

10.3. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

Para el desarrollo de esta investigación fue necesario realizar diversas pruebas en los estudiantes que permitieran conocer más a fondo la problemática o dificultades por las que atraviesa cada uno de ellos con el fin de obtener una amplia información de ésta. Para tal fin las pruebas que se hicieron son talleres grupales, talleres individuales, evaluaciones individuales y evaluaciones en pareja, también en algunas oportunidades se empleó la salida al tablero por parte de dos estudiantes al mismo tiempo pero cada uno de ellos realizando un ejercicio o un problema diferente.

Estas pruebas son simplemente para saber cuáles son los temas que se les deben reforzar en comunidad para poder aplicar la metodología propia del presente proyecto de investigación pero no se tomará en cuenta para valorar el cuarto período de clase aunque al aplicar la metodología aquí expuesta se espera claramente que los estudiantes logren comprender la forma de cómo plantear y resolver problemas de aplicación a las diferentes funciones y obtener así de esta forma resultados positivos y excelentes calificaciones para su cuarto periodo de clase pudiendo servir esto para recuperar períodos perdidos durante el presente año lectivo.

10.4. POBLACIÓN Y MUESTRA.

La población y muestra respectivamente que sirvió como objeto de estudio e investigación fueron los estudiantes del grado noveno del Liceo Napolitano el cual está conformado por 31 alumnos de los cuales 18 son mujeres y 13 son hombres. Todos los estudiantes participaron en el presente proyecto de investigación porque aunque en ocasiones algunos faltaron a clases por diferentes motivos de igual forma debieron presentar todas las actividades propuestas para las clases y estas actividades las deben resolver.

10.5. FASES METODOLÓGICAS.

Las fases metodológicas son aquellas que se llevaron a cabo siguiendo un orden específico para poder llevar de manera clara, directa y objetiva la presente investigación. Estas fases metodológicas son las siguientes:

10.5.1. FASE I: PLAN DE ACCIÓN

Esta fase se basa en la recopilación de datos obtenidos acerca de la solución de ejercicios matemáticos que abarcan diversos conjuntos numéricos los cuales son: números enteros, números racionales y números decimales. Para esta primera fase se les presentó un taller con esta clase de ejercicios el cual deberá de presentar resuelto en su totalidad, cada uno de los 31 estudiantes que conforman el grado noveno, para la siguiente clase y del cual se tendrán en cuenta los errores cometidos por los estudiantes para su posterior corrección y fortalecer así de esta forma la resolución de estos ejercicios. El objetivo principal del primer taller es verificar la forma de cómo resuelven ejercicios y problemas aplicados a las operaciones con números

enteros y racionales para poder realizar las posteriores correcciones resolviendo en clase de la resolución aquellos ejercicios y problemas que les hayan quedado mal resueltos. Los resultados obtenidos después de estas correcciones se podrán observar más adelante. (Ver anexo # 1)

10.5.2. FASE II: LA ACCIÓN

Esta fase se basa en la recopilación de datos obtenidos acerca de la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 y ecuaciones de segundo grado o cuadráticas. Para esta segunda fase se les presentó un taller (Ver anexos # 5 y 6) con los temas anteriormente mencionados el cual deberá resolver cada estudiante con el fin de conocer cuáles son sus fortalezas y cuáles son los errores cometidos para poder corregirlos. El objetivo principal es poder identificar la forma en que cada uno de los estudiantes plantea y resuelve, por cualquier método aprendido, cada problema propuesto.

10.5.3. FASE III: LA OBSERVACIÓN

En esta fase se les presentó a cada uno de los estudiantes un taller de ejercicios y problemas que se resuelven por medio de ecuaciones cuadráticas, ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas (ver anexos # 3, 4 y 7) con el objetivo de que lo resuelvan completamente para poder así conocer cuáles son sus fortalezas y determinar también cuáles son las falencias con estos temas y poder corregirlas para que las puedan comprender, de ser posible, en su totalidad.

En la medida que se va desarrollando cada una de las fases se pondrá en marcha la metodología del presente proyecto de investigación para poder obtener resultados positivos. La gran ventaja de este proyecto investigativo es que no sólo se aplica en los estudiantes del grado noveno del Liceo Napolitano sino que también se puede aplicar perfectamente en los estudiantes del grado noveno de cualquier institución educativa ya sea privada o pública.

10.5.4. FASE IV: LA REFLEXIÓN O ANÁLISIS DE DATOS

En esta cuarta fase se presentan los resultados obtenidos en las tres fases anteriores por medio de tablas estadísticas que muestran las calificaciones que obtuvieron los estudiantes en cada uno de los talleres (anexos) que se les propuso. En esta fase (fase IV) se analizan los resultados obtenidos para poder sacar conclusiones y realizar las respectivas recomendaciones con el fin de lograr mejores resultados en pruebas posteriores.

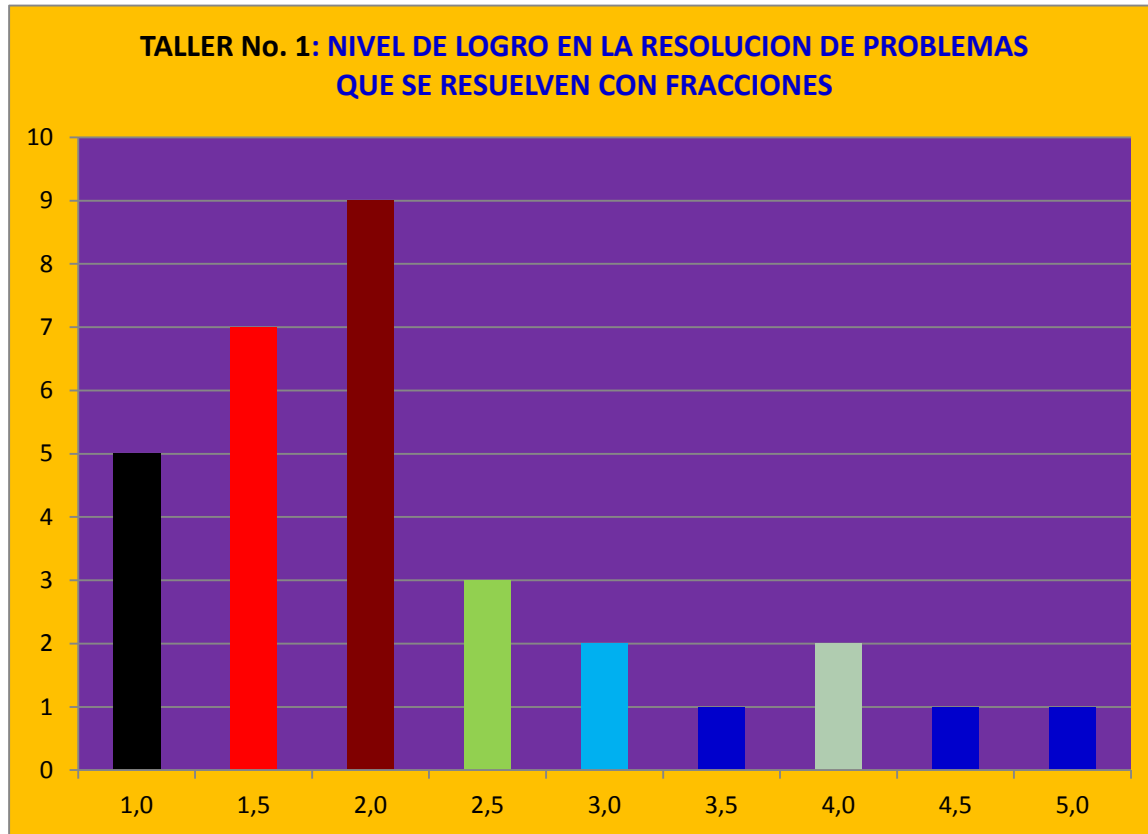
10.6. RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS APLICACIONES DE LAS TRES FASES

10.6.1. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA FASE I

Los resultados que se obtuvieron en esta primera fase fueron muy variados pero se puede decir que con un buen grado de aceptación ya que previamente se les habían dado las explicaciones necesarias para que pudieran abordar estos temas sin mayor complicaciones. Estas complicaciones se presentaron especialmente en la resolución de ejercicios con números racionales sobre todo en las adiciones, sustracciones y con signos de agrupación ya que aún siguen teniendo inconvenientes en la forma de desarrollarlas. Veamos algunos de los ejercicios que se les presentaron a los estudiantes de grado noveno con el objetivo de realizar una observación previa acerca de la forma en que este grupo aborda estos ejercicios y los resuelve para posteriormente proceder a realizar las respectivas correcciones y explicaciones:

Para mejorar esta situación se realizaron, en varias clases de matemática, diferentes ejercicios con el único propósito de afianzar estos conocimientos. Después de realizar, una vez más, los refuerzos de estos temas se propusieron nuevos ejercicios de aplicación para que los resolvieran en clase en presencia del docente con el ánimo de hacer las respectivas correcciones y lograr de esta forma un acierto por parte de los estudiantes por lo menos en un 90% o 95% de su comprensión. Esta vez el resultado obtenido fue mucho mejor que el anterior, es decir que se pudo obtener un 90% de resultados positivos por parte de los estudiantes lo que indica que lograron comprender casi en su totalidad la forma de realizar esta clase de ejercicios, pero no por esta razón se debe bajar la guardia. Al contrario. Es decir que se debe aprovechar al máximo estos resultados para que cada uno de los estudiantes continúe reforzando lo aprendido.

10.6.2. GRÁFICA NO. 1: NIVEL DE LOGRO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FRACCIONES.



10.6.3. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA FASE II.

La situación más frecuente y a la vez más preocupante en esta fase fue la interpretación que le dio cada estudiante a cada uno de los problemas, pues si bien es cierto que lograron comprender los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 , en un comienzo no les quedó muy claro la forma en que se debe plantear un determinado problema para posteriormente resolverlo aplicando los métodos de solución. Por esta misma razón es que

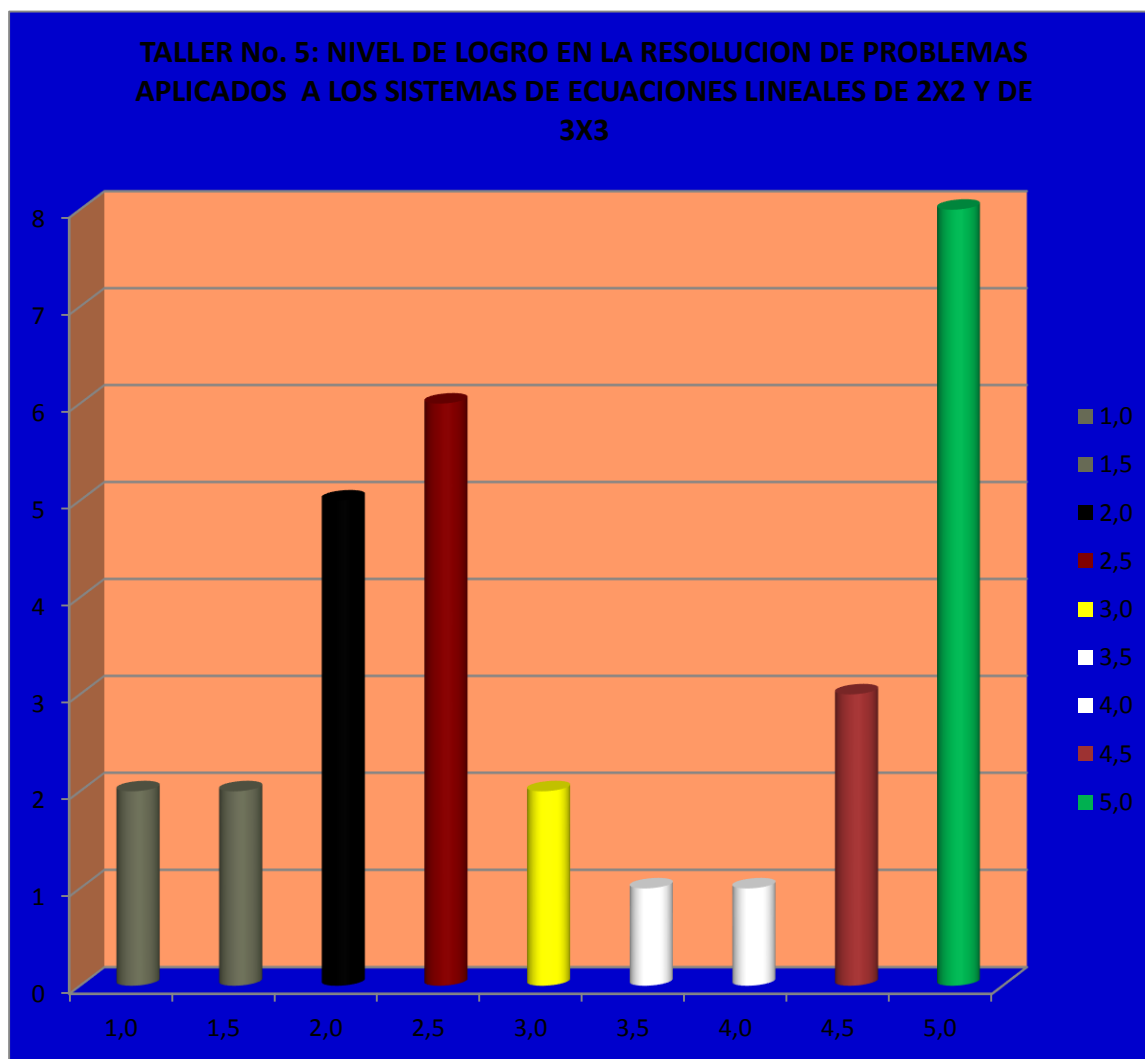
se debió hacer un refuerzo en la interpretación de los datos que presentan los problemas. Estos datos también se conocen como magnitudes conocidas y magnitudes incógnitas. Una vez explicado esto se procedió a informarles la forma de cómo plantear la ecuación para luego aplicar el método respectivo.

Después de varias explicaciones se pudo lograr el objetivo principal en un 90% aproximadamente. Es decir que se logró que el estudiante pudiera interpretar, plantear y por último resolver un determinado problema por medio de un sistema de ecuación lineal de 2×2 o por medio de un sistema de ecuación lineal de 3×3 .

“Al explicarle a los estudiantes la forma de plantear y resolver un problema por medio de un sistema de ecuaciones de 2×2 o de 3×3 se tuvo en cuenta la estrategia metodológica que es base fundamental para este Proyecto de Investigación, es decir que se incorporaron las ideas fundamentales de Polya.” (I.E.S. Rosa Chacel. George Polya, Estrategias para la solución de problemas, Bogotá, 2000, pág. 1.). “Pero también se tuvo en cuenta la formulación de Allan Schoenfeld quien fue uno de los matemáticos que refutó algunas de las teorías de Polya en la solución de problemas.” (Barrantes, El trabajo de Allan Schoenfeld, Bogotá, 2006, p. 50-65).

La estrategia que Polya plantea en su trabajo sobre resolución de problemas cuando menciona sus famosos 4 pasos: 1. Entender el problema; 2. Configurar un plan; 3. Ejecutar el plan; 4. Mirar hacia atrás se puede aplicar claramente para resolver cualquier clase de problema aplicado a cualquier tipo de ecuación pero se debe tener en cuenta que no necesariamente se aplica al pie de la letra pues no todos los problemas matemáticos necesitan de un dibujo o gráfico para poderlos comprender y lograr después resolverlos.

10.6.4. GRÁFICA No. 2 NIVEL DE LOGRO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS APLICADOS A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y DE 3X3.

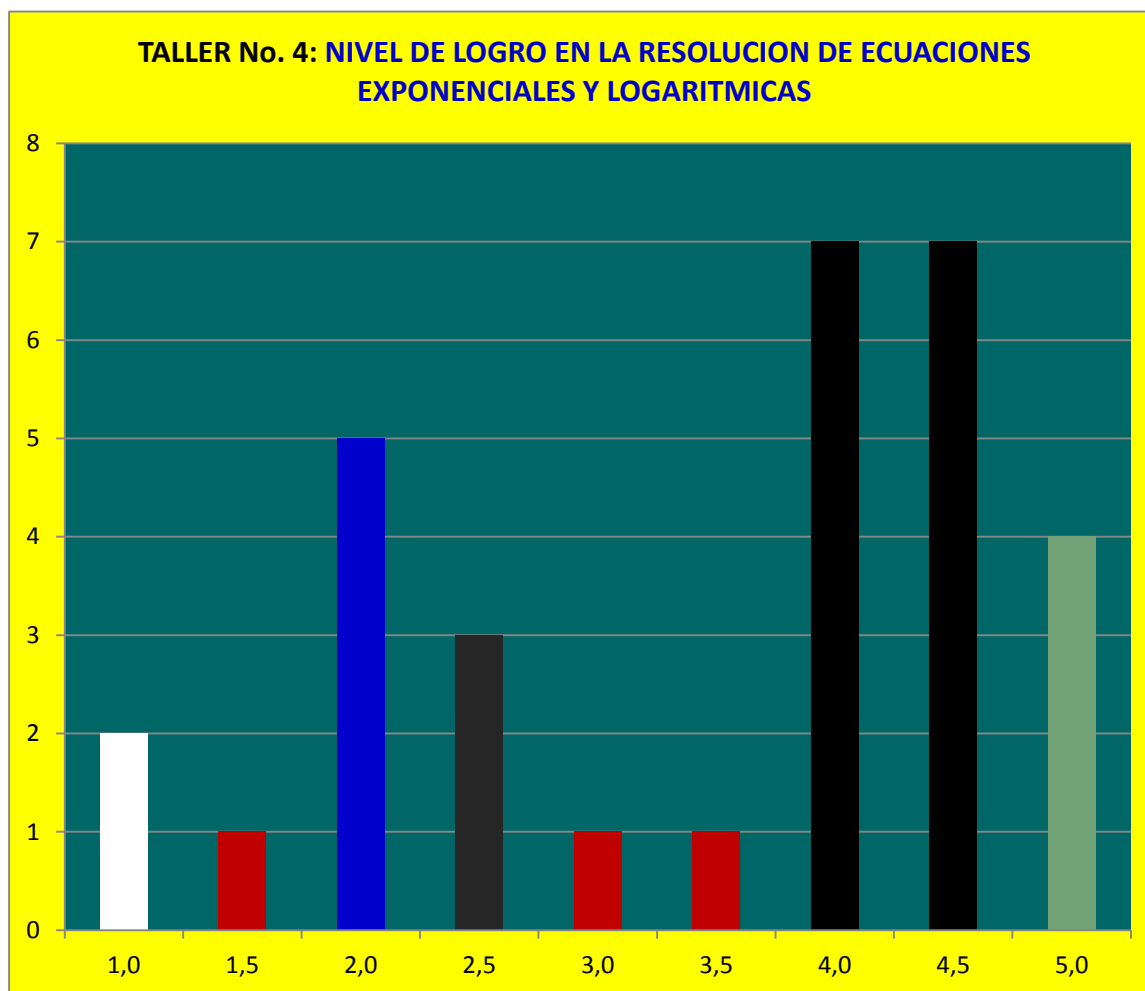


10.6.5. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA FASE III.

Los resultados obtenidos al proponérseles ecuaciones exponenciales y logarítmicas así como también los problemas de aplicación a estas dos clases de ecuaciones fueron muy variados pero dando un criterio final se puede decir que fue del 90% aproximadamente positivo ya que previamente se les explicó la forma de resolver este tipo de ecuaciones. Con respecto a la solución de problemas aplicados a estas mismas ecuaciones (exponenciales y logarítmicas) el resultado obtenido fue el esperado ya que los estudiantes aplicaron los mismos criterios basados en este proyecto de investigación, es decir que se tuvo en cuenta los cuatro pasos de Polya: 1. Entender el problema; 2. Configurar un plan; 3. Ejecutar el plan; 4. Mirar hacia atrás. Al aplicar estos cuatro pasos realizados o propuestos por George Polya, pero explicados previamente durante las clases, los estudiantes pudieron notar que en realidad plantear un problema es más sencillo de lo que pensaban inicialmente antes de la explicación y conocimiento de los 4 pasos anteriores. Pero no basta solamente con aplicarlos al pie de la letra sino que se debe comprender qué es lo indica cada paso, analizarlos uno y por uno y por último aplicarlos en la forma lo más correcta posible.

Aunque existen diversos autores que han refutado los procedimientos de Polya para resolver problemas matemáticos, lo cierto es que estos pasos aplicados funcionan perfectamente aunque debemos tener en cuenta de que no se deben aplicar al pie de la letra sino que se le deben hacer modificaciones aunque siempre guardando su esencia ya que por ejemplo no en todos los problemas matemáticos que se resuelven sin importar de qué tema se traten se pueden realizar gráficos o dibujos, pues esto sale sombrero o simplemente no tendrían sentido de hacerlos.

10.6.6. GRÁFICA No. 3. NIVEL DE LOGRO EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS



11. CONCLUSIONES

Después de que se les indicó a los estudiantes de grado noveno, del colegio Liceo Napolitano, la forma en que debían aplicar los cuatro pasos propuestos por Polya (1957) se dieron cuenta que plantear y resolver problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales simultaneas de 2×2 y de 3×3 resulta muy fácil y que además estos pasos se pueden aplicar para resolver problemas de cualquier tipo en cualquier grado del bachillerato e incluso en la universidad, aunque también se debe de tener en cuenta que no necesariamente se aplican al pie de la letra en todos los problemas pues como se vio anteriormente, no todos los problemas requieren de un gráfico aunque estos ayudan mucho pero en ciertos problemas resultan siendo innecesarios.

Después de analizar los resultados obtenidos en cada uno de los talleres que se les propuso a los estudiantes de grado noveno del Liceo Napolitano se puede observar que hubo un progreso notable en los resultados que obtuvieron pues sus notas presentan progreso con respecto a la calificación anterior. Estas calificaciones podrán ir mejorando progresivamente con el paso del tiempo a medida que se vaya implementando la metodología propuesta en la resolución de problemas aplicados a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 . Se puede notar, según las tablas estadísticas, que una de las mayores dificultades que presentan estos estudiantes es la resolución de problemas aplicados a los números racionales pues las notas obtenidas fueron muy bajas, lo que no ocurrió tanto con el taller sobre problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 . En el taller aplicado a las ecuaciones exponenciales y logarítmicas se puede ver claramente que más de la mitad de los estudiantes lograron aprobarlo aunque se debe trabajar fuertemente para que sea más del 90% de los estudiantes que logren aprobar los talleres que se les propongan.

12. RECOMENDACIONES

Lo primero que deben hacer los docentes de matemática antes de enseñar a resolver problemas matemáticos es identificar las necesidades comunes y generales del estudiante para que ellos se sientan a gusto con lo que están aprendiendo y que se den cuenta que la matemática no es tan complicada como ellos falsamente creen sino que se puede tratar de un juego fácil de aprender y que lo más importante es tener la disposición para aprenderla. Así mismo, es el docente de matemática el encargado de hacer que el estudiante se interese por aprender no sólo los ejercicios básicos propuestos para cada gado sino también las aplicaciones que se le dan a estos ejercicios por medio de problemas de aplicación.

Otro factor, no menos importante, es la forma en que se les enseña ya que si logramos que ellos se interesen por aprender con el diálogo entonces debemos aprovechar ese momento para hacer todo o que esté a nuestro alcance con el fin de enseñarles de una forma dinámica y amena para no perder todo el terreno que ya tenemos ganado. Si es cierto que la matemática se aprende practicándola, no debemos olvidar que ellos son estudiantes abriéndose al mundo y al aprendizaje y que no podemos exagerar al proponerles tantos ejercicios y problemas.

13. BIBLIOGRAFÍA

Cardona Márquez (2007). Desarrollando el Pensamiento Algebraico en Alumnos de Octavo Grado a través de la resolución de problemas. Honduras

Astola P, Salvador A, Vera G, (2012). Efectividad del programa “Gpa – Resol” en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis. Perú

Barrantes, Hugo. (2006). El Trabajo de Allan Schoenfeld. México.

Baldor. (1987). Algebra de Baldor. Preludio. México.

Blasco, Josefa. (2010). La investigación – acción. España

Caicedo J. (2013). Guía matemática de grado séptimo. Colombia.

Caicedo J. (2013). Guía matemática de grado octavo. Colombia.

Caicedo J. (2013). Guía matemática de grado noveno. Colombia.

Elliot, Jhon. (1980). El carácter ético de la pedagogía. Reino Unido

Elliot, Jhon. (1982). La investigación – acción educativa. Reino Unido

Ministerio de Educación Nacional. Colombia.

Obonaga E, Pérez J, Caro V. (1984). Aritmética y geometría. Matemática 2. Editorial Pime. Colombia

Obonaga E, Pérez J, Caro V. (1984). Algebra y geometría. Matemática 3. Editorial Pime. Colombia

Obonaga E, Pérez J, Caro V. (1984). Algebra y geometría. Matemática 4. Editorial Pime. Colombia

Polya, George. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. Estados Unidos.

Polya, George. (1996). Matemáticas y razonamiento plausible. Estados Unidos.

Schoenfeld, Allan. (1985). Resolución de problemas matemáticos. Estados Unidos

Vitutor. Problemas con fracciones. P. 1. Colombia

Vitutor. Ecuaciones cuadráticas. P. 1. Colombia

Vitutor. Problemas que se resuelven con ecuaciones cuadráticas. P. 2. Colombia

Vitutor. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. P. 1. Colombia

Vitutor. Problemas que se resuelven con ecuaciones exponenciales y logarítmicas. P. 2. Colombia

Vitutor. Ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 . Colombia

Vitutor. Problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3 . Colombia

Zill, Dennis. (1992). Algebra y trigonometría. México

14. ANEXOS

ANEXO No. 1. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FRACCIONES

LICEO NAPOLITANO

TALLER No. 1 DE MATEMÁTICA

GRADO: NOVENO

DOCENTE : JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

PERÍODO: 3

TEMA: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FRACCIONES.

1. Calcula qué fracción de la unidad se representa en cada uno de los siguientes ejercicios:

1.1. La mitad de la mitad.

1.2. La mitad de la tercera parte.

1.3. La tercera parte de la mitad.

1.4. La mitad de la cuarta parte.

2. Elena va de compras con 180 €. Se gasta $\frac{3}{5}$ de esa cantidad. ¿Cuánto le queda?
3. Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos los $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el B ha recorrido los $\frac{6}{13}$ del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?
4. Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los $\frac{2}{3}$ de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?
5. En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ para el partido B, $\frac{5}{14}$ para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15 400. Calcular:
- 5.1. El número de votos obtenidos por cada partido.
- 5.2. El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa $\frac{5}{8}$ del censo electoral.
6. Un padre reparte entre sus hijos 1 800 €. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?,

(Vitutor, problemas con fracciones, p. 1).

ANEXO No. 2. ECUACIONES CUADRÁTICAS

LICEO NAPOLITANO

TALLER No. 2 DE MATEMÁTICA

GRADO: NOVENO

DOCENTE : JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

PERÍODO: 3

TEMA: ECUACIONES CUADRÁTICAS

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
3. $-x^2 + 7x - 10 = 0$
4. $x^2 - 2x + 1 = 0$
5. $x^2 + x + 1 = 0$
6. $x^2 - 4x + 4 = 0$
7. $2x^2 - 3 = 1 - 2x + x^2$
8. $x^2 + (7 - x)^2 = 25$
9. $7x^2 + 21x - 28 = 0$
10. $-x^2 + 4x - 7 = 0$
11. $18 = 6x + x(x - 13)$
12. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
13. $x^2 + (x + 2)^2 = 580$
14. $x^2 - 5x - 84 = 0$
15. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

ANEXO No. 3. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES CUADRÁTICAS

LICEO NAPOLITANO

TALLER No. 3 DE MATEMÁTICA

GRADO: NOVENO

DOCENTE : JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

PERÍODO: 3

TEMA: PROBLEMA QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES CUADRÁTICAS.

1. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y -2.
2. Factorizar: $x^2 - 5x + 6 = 0$
3. Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ sean iguales.
4. La suma de dos números es 5 y su producto es -84. Halla dichos números.

5. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.
6. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.
7. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2 .
8. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2 .
9. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.
10. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $26/5$.
11. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?
12. Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda a cada uno separadamente?
13. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.
14. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

15. Un caño tarda dos horas más que otro en llenar un depósito y abriendo los dos juntos se llena en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?,

(Vitutor, problemas con ecuaciones cuadráticas, p.1).

ANEXO No. 4. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

LICEO NAPOLITANO

TALLER No. 4 DE MATEMÁTICA

GRADO: NOVENO

DOCENTE : JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

PERÍODO: 3

TEMA: ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1.1. $2^{1-x} = 1/8$

1.2. $\sqrt{(3 \cdot 8^x)} = 65.536$

1.3. $43^{x-6} = 16.348$

1.4. $4^{x-1} - 22^{x+8} = 0$

1.5. $35^{x-15} = 134$

1.6. $22^x \cdot 2 = 3^x \cdot 35$

2. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

2.1. $\log_2(5x-10) = 3$

2.2. $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

2.3. $\log x = (2 - \log x) / \log x$

$$2.4. \log(25-x^3) - 3\log(4-x) = 0$$

$$2.5. \log(35-x^3) / \log(5-x) = 3,$$

(Vitutor, ejercicios de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, p. 1).

ANEXO No. 5. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y 3X3

LICEO NAPOLITANO

TALLER No. 5 DE MATEMÁTICA

GRADO: NOVENO

DOCENTE : JULIO CÉSAR CAICEDO RUIZ

PERÍODO: 3

TEMA: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y 3X3.

1. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es 60 € menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4 €, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

2. Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

	Níquel (%)	Cobre (%)	Hierro (%)
Mina A	1	2	3
Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18

de cobre y 16 de hierro?

3. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

4. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo:
Cada volumen de trigo se vende por 4 €, el de la cebada por 2 € y el de mijo por 0.5
Si se vende 100 volúmenes en total y si obtiene por la venta 100 €, ¿cuántos volúmenes de cada especie se venden?

5. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:
El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.
El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.
El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.
Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

6. Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

7. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

8. Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

9. Antonio le dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

10. En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

11. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

12. Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

ANEXO No. 6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS APLICADOS A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2x2 Y DE 3x3

TALLER No. 6

**EJERCICIOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y 3X3.
PROBLEMAS APLICADOS A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 Y DE 3X3**

1. Solucione los siguientes sistemas por el método de sustitución:

A. $\{10x + 9y = 19, 7x - y = 8$

B. $\{3x - 8y = -10, -12x + 7y = -10$

C. $\{8x + 20y = 236, 6x + 9y = 123$

D. $\{7x - 5y = 61, -9x + 11y = -115$

E. $\{x + 4y = 6, 3x - 2y = 1$

F. $\{x + y = 100, x - y = 30$

G. $\{9x - 7y = -19, 8x + 6y = -14$

H. $\{34x - 56y = -380, -29x + 75y = 542$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{x-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

3. Solucione cada sistema por determinantes:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

4. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$\text{a) } \begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$$

5. Solucione cada sistema por cualquier método aprendido en clase:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$$

6. Halla el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones de 3x3 por cualquier método:

A. $\{x + 2y + 3z = 6, 3x + 5y - 7z = 1, 2x - 9y + 12z = 5\}$

B. $\{7x + 9y - 10z = 38, 5x - y + 4z = 16, x - y - z = -7\}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. La suma de dos números es 18 y su diferencia es 6. ¿Hallar los números?
2. Un rectángulo es 4 veces más largo que ancho. Encontrar lo largo y lo. Ancho si su perímetro es 50m.
3. 15 perros y 6 gatos hacen un total de 14700 quetzales 4 perros y 10 gatos hacen 7700 cada perro y gato tienen el mismo precio según su clase. ¿Hallar el precio de cada uno?
4. la diferencia de 2 números es 45 y su tercera parte de su suma es 18 ¿hallar los números?
5. Si Juan tuviera el doble de su edad sería 19 años mayor que Pedro y la suma de las dos edades será 41 años. ¿Qué edad tiene cada una?
6. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?
7. Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?
8. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase?
9. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?
10. Se quieren mezclar vino de 60 ptas. con otro de 35 ptas., de modo que resulte vino con un precio de 50 ptas. el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?
11. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 l de leche, 6 kg de

jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l de aceite más 4 l de leche.

12. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas. El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más el 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

13. Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Con centro en cada vértice se dibujan tres de conferencias, tangente entre sí dos a dos. Calcular las longitudes de los radios de las circunferencias.

14. El costo total de 5 libros de texto y 4 lapiceros es de \$32.00; el costo total de otros 6 libros de texto iguales y 3 lapiceros es de \$33.00. Hallar el costo de cada artículo.

15. Hallar dos números tales que la suma de sus recíprocos sea 5, y que la diferencia de sus recíprocos sea 1.

16. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es 60 € menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por El vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4 €, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

17. Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

	Níquel (%)	Cobre (%)	Hierro (%)
Mina A	1	2	3

Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

18. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

ANEXO No. 7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS APLICADOS A LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

TALLER No. 7.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS APLICADOS A LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una función cuadrática?

$$f(x) = x^2 + 5 - (x^2 + 2x)$$

$$f(t) = -3t + 2t^3$$

$$f(p) = \frac{1}{2}p + 4$$

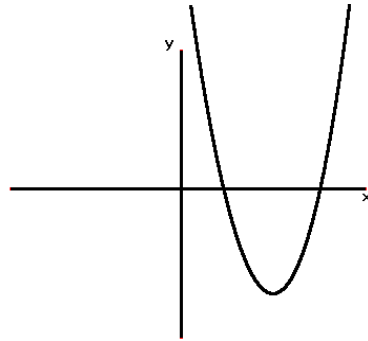
$$f(a) = (a+2)(a-2) - a^2$$

$$f(m) = (-2m+1)^2$$

2. Dada las funciones $y(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = 1 - 4x - x^2$. Calcula

$$f(-2) + g(2) =$$

10
-32
-10
32



3. Del siguiente gráfico, se puede afirmar que:

Tiene soluciones imaginarias
Tiene una raíz negativa
Tiene varias raíces iguales
Tiene raíces reales y distintas
No tiene solución

4. Las coordenadas del punto en que la parábola asociada a la función

$f(x) = 5x^2 - 7x + 9$, interseca con el eje Y son:

(-9 , 0)
(0 , -9)
(9 , 0)
(0 , 9)

no se puede determinar

5. Al simplificar la función cuadrática: $y = 3(x-2)^2 - (2-x)^2 + 1$, en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ¿cuál es el valor de **a**?
- a) 8
 - b) 2
 - c) 5/9
 - d) 1
 - e) 2/9
6. Con respecto a la función $f(x) = 3x^2 + 13x - 10$. ¿Cuál (es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)?
- I. Su concavidad está orientada hacia arriba
 - II. El punto de intersección con el eje y es (0,-10)
 - III. $f(-2) = -24$
- a) Sólo I
 - b) Sólo I y II
 - c) Sólo I y III
 - d) Sólo II y III
 - e) Todas ellas
7. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera con respecto del discriminante de la ecuación asociada a la función $y = x^2 + x - 6$?
- a) Es mayor o igual a cero

- b) Es menor que cero
- c) Sólo es igual a cero
- d) No es una potencia de cinco
- e) No es un cuadrado perfecto

8. La trayectoria de un proyectil está dada por la función $y(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura $y(t)$ se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 420 metros de altura sobre el nivel del suelo?

- I. 6 segundos
- II. 10 segundos
- III. 14 segundos

- a) Sólo en I
- b) Sólo en II
- c) Sólo en III
- d) Sólo en I y II
- e) Sólo en I y III

9. La suma de las raíces de la ecuación $10 = 6x + x^2$ es:

- a) -6
- b) $\frac{3}{5}$
- c) $\frac{5}{3}$
- d) 4
- e) 6

10. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $3x^2 + 4x - 4 = 0$, entonces el valor de $x_1 * x_2$ es:

a) $\frac{-4}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{-3}{4}$

e) ninguna de las anteriores

11. La ecuación $x^2 - 17x + 25 = 0$ tiene:

- I. Dos raíces reales e iguales
- II. Dos raíces reales y distintas
- III. Dos raíces imaginarias

De estas afirmaciones, es (son) verdaderas:

- a) Solo i
- b) Solo ii
- c) Solo iii
- d) i y ii

12. Calcular el largo de la sombra que proyecta un edificio de 150 m de alto cuando el sol se encuentra a 30° por encima del horizonte.

- a) 3,84 cm
- b) 3,84 m
- c) 250 cm
- d) 259,81 m
- e) 259,81 cm

13. Desde lo alto de un faro de 120 m sobre el nivel del mar, el ángulo de elevación desde un bote es de 15° . ¿A qué distancia está el bote del faro?

- a) 447,84 cm
- b) 447,84 m
- c) 447 cm
- d) 447m
- e) 446 m