ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN EL ÁLGEBRA DE BALDOR

ALVARO RAÚL CÓRDOBA BELALCÁZAR

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2008

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN EL ÁLGEBRA DE BALDOR

ALVARO RAÚL CÓRDOBA BELALCÁZAR

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director
Mg. GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2008

Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de su autor.

Art 1º del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanada del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

.

Nota de aceptación

____

____

____

.

Director

.

Jurado

.

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2008.

DEDICATORIA

A mi Dios…
A mi madre Esperanza Belalcázar
A mi padre Alvaro Córdoba
A mi Hermano Edisón Córdoba
A mi abuela Visitación Torres.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN 12

1. UN ACERCAMIENTO A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DESDE EL PUNTO DE VISTA SEMIÓTICO

1.1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO CAMPO DE CONOCIMIENTO INTERDISCIPLINAR 14

1.2. LOS OBJETOS MATEMÁTICOS Y SUS REPRESENTACIONES 16

1.3. LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA 18

1.4. EL FENÓMENO DE NO CONGRUENCIA 23

2. ARTICULACIÓN ENTRE EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. TRATAMIENTO Y DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES EN EL REGISTRO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS 26

2.2. TRATAMIENTO Y DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES EN EL REGISTRO DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS 27

2.3. COORDINACIÓN ENTRE EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y LOS GRÁFICOS CARTESIANOS 33

3. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN EL ÁLGEBRA DE BALDOR DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES Y ANÁLISIS DE CONGRUENCIA 41

3.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS 51

4. CONCLUSIONES . 53

5. BIBLIOGRAFÍA 54

RESUMEN

Este trabajo centra su atención en la complejidad que subyace al aprendizaje de dos de los registros semióticos de mayor uso al abordar el tema de la función lineal, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de los gráficos cartesianos, diferenciar el objeto matemático aquí representado de sus diferentes representaciones, la coordinación de estos dos registros e identificar los fenómenos que hacen que esta acción no se desarrolle, como lo es el fenómeno de no congruencia. Esto es necesario para que haya un aprendizaje significativo del objeto matemático “función lineal”.

El objeto de análisis en el desarrollo de este trabajo es el Álgebra de Baldor, uno de los libros de consulta por educadores matemáticos al momento de enseñar el álgebra elemental de grados octavo y noveno de la educación básica, este análisis se hizo de acuerdo con el modelo teórico que propone Raymond Duval, en relación con la actividad cognitiva vinculada con el cambio de registros semióticos de representación.

ABSTRACT

This Project was focused in the complexity which appears inner the learning of two semiotic registers of the major use in accessing the theme about lineal function, the register of algebraic expressions and the register of the Cartesian graphics, differing the mathematical object which is represented in its different representations, the coordination of these two registers and identifying the two phenomena what do that this action does not develop, such the congruency phenomenon. It is needed the above mentioned to get a meaningful learning about the mathematical object “lineal function”.

The object of analysis in the development of this project is the Baldor Algebrae, one of the consult book by mathematics teachers during the time of teaching the elemental algebra at eight and nine degree in the basic education, this analysis was done according with the theoretical model which is proposed by Raymond Duval, in relation with the cognitive activity associated with the semiotic registers of representation.

INTRODUCCIÓN

La semiótica es un campo de estudio, una metodología de análisis y una estrategia crítica que comenzó hace dos mil quinientos años atrás en la India y la Antigua Grecia, como una indagación en el conocimiento, en el lenguaje y en la problemática específica de los signos.

La semiótica tuvo una fundación presocrática y una continuidad durante el período medieval. Posteriormente, la semiótica moderna se autonomiza cada vez más, en una problemática de la definición y clasificación de los signos, hasta llegar a un renacimiento generalizado en el ámbito académico. Esta renovación, a comienzos del siglo XX, de la actitud semiótica, la deja así establecida, como una disciplina, como un campo de estudio y como un método de análisis, y la hace emerger como la conciencia de todas las ciencias, como una metateoría, que se basa inicialmente en estudios del lenguaje y la comunicación.

Esta disciplina es ineludible en la Educación Matemática porque todo objeto matemático cobra vida por medio de sus representaciones, la función lineal es un aspecto sobre los cuales la enseñanza de las matemáticas en los grados octavo y noveno de la educación básica dedica grandes espacios de tiempo para su reflexión. Sin embargo, es común ver en estudiantes de dichos grados que no saben diferenciar la expresión algebraica que representa a una línea recta que pasa por el origen de otra que no lo hace. Lo mismo sucede para el caso de tener que diferenciar la representación en escritura algebraica de una línea recta de pendiente positiva y una de pendiente negativa.[1]

Los registros de representación de los gráficos cartesianos y de la escritura algebraica juegan un papel determinante en la movilización del objeto matemático referenciado en el párrafo anterior, tomando en cuenta simultáneamente estos dos registros de representación y no cada uno de manera aislada, es como se puede analizar la importancia de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva matemática. Así, el estudio de los fenómenos que se encuentran en la conversión de un registro al otro explican muchas de las dificultades que viven los estudiantes al aprender la función lineal.

El objetivo general de este trabajo es analizar los fenómenos de no congruencia presentes en el texto Algebra de Baldor donde se ponen en acto la conversión del registro semiótico de los gráficos cartesianos hacia el registro de la escritura algebraica y viceversa, teniendo en cuenta los siguientes objetivos específicos:

[1]Duval, R. Semiosis y pensamiento humano. Traducción de Miriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 45.

- Discriminar las unidades significantes del registro semiótico de lo gráficos cartesianos.

- Discriminar las unidades significantes del registro semiótico de la escritura algebraica.

- Identificar entre las unidades significantes de los registros de representación de los gráficos cartesianos y del registro de representación de la escritura algebraica aquellas que son pertinentes al cambio de registro.

Este trabajo se desarrollará en tres capítulos, en el primero se analizará aspectos generales sobre las representaciones semióticas, las actividades que éstas deben cumplir para ser consideradas como tal, y el fenómeno de no congruencia; en el segundo se centrará la atención en la articulación de los dos registros de interés y finalmente se hará un análisis de congruencia de los mismos tomando como objeto de análisis ejercicios del Álgebra de Baldor.

1. UN ACERCAMIENTO A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DESDE EL PUNTO DE VISTA SEMIÓTICO

1.1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO CAMPO DE CONOCIMIENTO INTERDISCIPLINAR

Dar cuenta del objetivo fundamental que se propone la Educación Matemática, exige el concurso de múltiples disciplinas, dada la naturaleza eminentemente social de su objeto de estudio. Esto hace que la investigación en Educación Matemática sea de carácter interdisciplinario. Pero no es cualquier tipo de interdisciplinariedad, sino aquella en la cual, al abordarse un problema de investigación aporta elementos desde su especialidad, para resolver el problema propuesto de una manera integrada. No se trata pues de una simple suma de esfuerzos, sino de un trabajo integrado en el cual todas las disciplinas implicadas en el desarrollo de la investigación abordan el problema de una manera global a través de una interacción constante en el que cada una alimenta el proceso de las demás.

Vasco[2] para explicar la interdisciplinariedad de las matemáticas propone un octógono de disciplinas que son ineludibles al momento de realizar una investigación en Educación Matemática, las cuales se presentan a continuación:

[2] Vasco, Carlos E., "Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas". volumen I y II, en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1994, pág. 63.

La más básica es la biología, en particular la neurología que tiene que ver con el funcionamiento de nuestro cerebro, el dónde y cómo se almacena y procesa la información que percibimos. En el otro extremo del octógono esta la filosofía que viene influyendo cada vez más en la investigación en educación matemática al tratar de responder interrogantes sobre el por qué y para qué de aprender matemáticas. La lógica que alcanza los niveles más altos de la mente al inferir los procesos formales.

“La informática es de gran ayuda porque las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar[3]."

[3] Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Santa Fé de Bogotá, 1998.p.18.

El conocimiento de la historia de las matemáticas proporciona una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevo conocimiento[4].

Por otro lado se ubican las disciplinas clásicas que se requieren para hacer investigaciones serias sobre las matemáticas, como prácticas sociales de sujetos humanos, como son la antropología, la sociología y la psicología.

Dentro del octógono aparece la lingüística, en particular la semiótica que tiene que ver con el estudio de los signos, que mas que una disciplina es un campo de estudio, un método de análisis del cual no se escapa ninguna ciencia y por ende dentro de las matemáticas su estudio es ineludible por el hecho de que los objetos matemáticos viven por medio de sus representaciones y el comportamiento de estas es lo que se pretende estudiar para el caso de la función lineal.

1.2. LOS OBJETOS MATEMÁTICOS Y SUS REPRESENTACIONES

Un aspecto importante que se debe resaltar y tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas tiene que ver con una particularidad de los objetos matemáticos, sus propiedades y sus relaciones. Unos y otros tienen una característica completamente particular que los hacen diferentes de aquellas propiedades, relaciones y objetos que estudian las otras ciencias, como las ciencias sociales, la química, la biología, entre otras.

Los objetos matemáticos no son accesibles de forma sensorial, no se puede ver un objeto matemático, un profesor no les puede mostrar a sus estudiantes un objeto matemático, no es factible tocar la propiedad arquimediana de los números reales, tampoco la propiedad transitiva, etc. La única manera de poder acceder a los objetos matemáticos, a sus propiedades y relaciones e intervenir sobre ellos, es a través de representaciones semióticas.

Son muchas las representaciones que se trabajan en matemáticas: la escritura aritmética es una de ellas, por lo general se utiliza en los cursos de aritmética desde preescolar hasta el grado séptimo. Otro tipo de representación de gran uso en los últimos grados de la educación básica y en toda la educación media es la escritura algebraica. Otro tipo de representaciones igualmente importantes son las figuras geométricas, las de dos dimensiones y tres dimensiones, los gráficos, las tablas también se destacan; y entre todas las anteriores la lengua natural se constituye en

[4] Ibid, p.15.

un tipo de representación ineludible no sólo en el aprendizaje de las matemáticas sino en todas las disciplinas. Cada una de estas representaciones se denominará registro de representación.

Las representaciones tienen dos aspectos: su forma (el representante) y su contenido, (lo representado), en otras palabras, las diferentes formas como se puede presentar un objeto matemático y el objeto matemático en cuestión.[5] La forma del objeto matemático cambia según el registro semiótico utilizado, constátese esto con los siguientes ejemplos,

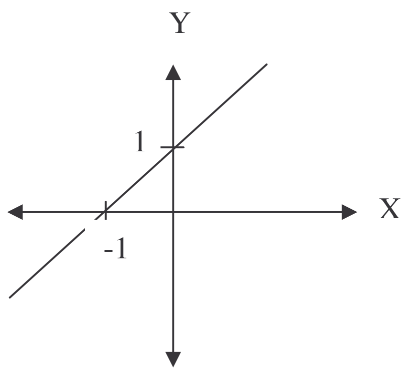
Cuatro representaciones de una misma recta son:

a) La recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(0,1)$. b) $y = x + 1$

x	$\ldots$	-1	0	1	$\ldots$
y	$\ldots$	0	1	2	$\ldots$

c)

d)



La primera representación (a) presenta la recta en el registro de la lengua natural, también puede designarse como la recta que tiene como pendiente 1 y corta al eje de las ordenadas en 1, la función idéntica corrida una unidad hacia la izquierda, son varias las formas como se puede enunciar esta misma recta dentro de este registro, en cada caso una y otra llama la atención sobre aspectos diferentes sobre el objeto que se quiere representar; b) representa el contenido de la misma recta en el registro de la escritura algebraica; c) representa la recta en el registro de las tablas por medio de una tabulación, y finalmente la recta representada en el registro de los gráficos cartesianos. Estos son los cuatro registros de mayor uso en la educación básica y media en aras de representar la función lineal.

Cada una de estas representaciones responde a una pregunta diferente, por ejemplo, la representación de la función lineal en el registro gráfico permite visualizar de manera clara si la función es creciente ó decreciente, donde corta al eje de las ordenadas y las abscisas, algo que no es fácil identificar en el registro de la lengua

[5] Duval, R. Las representaciones gráficas: Funcionamiento y condiciones de su aprendizaje. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Cali Universidad del Valle, 1988. p. 1.

natural, al momento de operar sobre la recta realizando en ella una rotación, reflexión u otras operaciones de transformación, el registro algebraico junto con el registro gráfico cobran importancia porque no se puede realizar estas operaciones de transformación en los otros registros; si es necesario identificar un punto cualquiera de la gráfica, recurrir a la tabulación solucionaría de inmediato el problema, porque es más fácil leer las coordenadas de un punto consignadas en una tabla que ubicarlo en el plano cartesiano. El hecho de que cada registro permite desarrollar un determinado tipo de actividad obliga al estudiante a trabajar en un registro diferente al que fue dado el problema, es decir el cambio de registro es una tarea necesaria.

Un segundo ejemplo que pone en relieve el hecho de que los objetos matemáticos se pueden expresar de diferente forma, son los números, por ejemplo la representación del número "4", este número se puede representar como: "$2*2$" es decir el producto de dos por dos, "IV" en números romanos, "$5-1$" la diferencia entre cinco y uno, "2^2" en forma de potencia como dos elevado a la dos, esto en el registro de la escritura aritmética, también como el doble del doble de la unidad o como el doble de dos, en el registro de la lengua natural.

Citando los anteriores registros, el registro de la lengua natural no ayuda en nada al momento de realizar cualquiera de las cuatro operaciones elementales de la aritmética, es imposible explicar cómo se elabora el cálculo, pero este registro cobra importancia cuando se requiere establecer procedimientos y aplicar algoritmos o mejorar la fluidez verbal y la competencia argumentativa.

Uno de los problemas de mayor arraigo en la enseñanza de las matemáticas, tiene que ver con el hecho de que no se presta la suficiente atención a esta dualidad forma/contenido de las representaciones semióticas, ni a la variedad de los registros de representación que son utilizados. La razón para que esto sea así es muy simple, la convicción de que las representaciones son los mismos objetos representados; el desconocimiento de que un objeto matemático se puede representar de diferentes maneras y el hecho de que esas representaciones permiten responder a problemáticas particulares y otras no (Lémonidis, 1990).

1.3. LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Dentro del mundo de las representaciones existen dos actividades cognitivas que explican su comportamiento. Una de ellas es la Semiosis ligada a la aprehensión o la producción y transformación de una representación semiótica; y la otra es la Noesis que tiene que ver con los actos cognitivos que desarrolla el ser humano como la aprehensión conceptual de un objeto, el razonamiento y la visualización entre otras.
Por otro lado hay tres funciones que deben cumplir todas las representaciones semióticas y que son inherentes a la semiosis, la primera es la conformación.

1. CONFORMACIÓN

Esta actividad tiene que ver con la formación de representaciones en un registro semiótico particular, ya sea para "expresar" una representación mental, o bien para "evocar" un objeto real. Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se "quiere" representar. El registro de la escritura aritmética es un buen lugar para mostrar el funcionamiento de esta actividad, por ejemplo para representar todos los números se necesita sólo diez símbolos, de ahí que nuestro sistema se denomine “sistema de numeración decimal.” La posición es un aspecto importante que se debe tener en cuenta, esto radica en el hecho de que nuestro sistema de numeración es “posicional”, luego no es lo mismo 59 que 95, en el primer caso el 9 ocupa la posición de las décimas y 5 el lugar de las centésimas en el segundo caso ocurre lo contrario, si al momento de representar un número no se tiene en cuenta estas reglas de conformación los signos que constituyen un número no expresarán nada; en el registro de la lengua natural una de las reglas de conformación son las reglas ortográficas al momento de escribir una palabra, si se desea construir una frase las palabras deben respetar un orden y de la misma forma para escribir un párrafo las oraciones deben llevar una secuencia lógica para que este contenido pueda comunicar algo.

Las otras dos actividades están directamente ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas; su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien sólo una parte de ese contenido. Estas son, el tratamiento y la conversión.

2. EL TRATAMIENTO

El tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. Esta actividad es una transformación estrictamente interna a un registro, utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema; así, las paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de números, las anamorfosis con las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas; son ejemplos de tratamiento.

La siguiente simplificación de una expresión aritmética pone en relieve la aplicación de este tipo de actividad.

Simplificar la siguiente expresión conduce a realizar el proceso,

$$\frac{9}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{9}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+\frac{1}{4} &= \frac{9}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\\ &= \frac{9}{3}+\left(-\frac{6}{2}\right)+\left(-\frac{2}{4}\right)\\ &= \frac{9}{3}-\frac{6}{2}-\frac{2}{4}\\ &= 3-3-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Al momento de desarrollar esta actividad se ve que la expresión original es transformada en otra, esta última en otra y así sucesivamente hasta obtener $-1/2$, que es el número representado y las otras son representaciones del mismo.

Para realizar este conjunto de transformaciones se respetan reglas que le son propias al registro, en el caso anterior se ve que para pasar de una representación a otra fue necesario introducir propiedades, leyes, algoritmos, como la propiedad asociativa, el algoritmo de la sustracción para fracciones, ley de signos, simplificación y el inverso aditivo respectivamente, las anteriores operaciones no se pueden aplicar en otro registro como en el registro de las figuras geométricas al momento de representar las fracciones. Se puede evidenciar en esta al igual que en la anterior que cada registro maneja sus propias reglas.

3. LA CONVERSIÓN

La conversión es una transformación de la representación de un objeto dado en un registro, en otra representación del mismo objeto, en otro registro. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. En este sentido la representación del objeto del registro de llegada no tendrá el mismo contenido que su representación en el registro de partida[6].
La importancia de esta actividad radica en el hecho de que al momento de resolver un ejercicio, la conversión del contenido de una representación a otro registro permite tratar de manera más fácil una situación planteada. Por ejemplo, en el estudio de las ecuaciones literales de primer gado con una incógnita, por lo general se suele proponer ejercicios el registro de la lengua natural y para dar solución a esta

[6] Duval, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 44-45.

situación se hace necesario e irremediablemente pasar el contenido del registro de lengua natural al registro de la escritura algebraica porque es ahí donde se puede aplicar operaciones, propiedades propias al registro para dar solución a dicho problema algo que no se puede hacer en el registro de la lengua natural.

Un ejemplo de una actividad de conversión es el siguiente,

Luís tenia 8 canicas jugando ganó algunas más y ahora tiene 12, ¿Cuántas canicas ganó?[7]

Si X representa el número de canicas que ganó, la igualdad correcta es:

a. $8+12=X$
b. $8+X=12$
c. $X-12=8$
d. $X-8=12$

La anterior pone en evidencia de manera clara una tarea de conversión, para resolver la problemática planteada es necesario pasar de una representación en el registro de lengua natural a una representación del registro de la escritura algebraica. Para esta conversión es necesario una estricta correspondencia entre la secuencia narrativa del enunciado dado en lengua natural y las diferentes opciones de respuesta.

Otro ejemplo, en el cual, la conversión se da en sentido contrario, del registro de la escritura algebraica hacia el registro de la lengua natural, es el siguiente:

Camilo en su clase de matemáticas, plantea el siguiente procedimiento: $X+7=11$
¿Cuál de los siguientes problemas NO se resuelve con ese procedimiento?[8]

a. Julio tiene 11 dulces, si se come 7, ¿Cuántos dulces le quedan?

b. Julio tiene en el bolsillo algunos dulces, compró 7 dulces más y ahora tiene 11, ¿Cuántos dulces tenía en el bolsillo?

c. ¿Cuántos dulces le quedan a Julio, si se come 7 y se sabe que tenía 11?

d. Julio compró 11 dulces; si su tía le regala 7 más, ¿Cuántos dulces tiene ahora?

---

[7] Marmolejo, G, y otros. Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Educación de la Educación en Santiago de Cali: Hacia un Proyecto Educativo de Ciudad, 2005. p. 16-17.
[8] Ibid, p. 17.

Las cuestiones de articulación que los estudiantes tienen que hacer al momento de pasar de un registro a otro son completamente diferentes, en el primer caso el estudiante debe identificar que palabras o frases del enunciado corresponden a cada parte de la expresión algebraica, en este caso la correspondencia a seguir es la siguiente: “Luis tenia 8 canias” con “8”, “jugando ganó” con “+”, “algunas mas” con “X”, “y ahora” con “$=$”, “tiene 12” con “12”, así de esta manera el podrá pasar del registro de la lengua natural al registro de la escritura algebraica. En el segundo caso la correspondencia entre las partes constituyentes de cada registro no es clara, porque el registro de partida admite tratamientos y se puede reescribir como $X = 11 - 7$ y en este caso la correspondencia de las unidades constituyentes de este registro es difícil de identificar, analizado este ejemplo sólo la opción b) respeta la misma estructura del contenido del enunciado en el registro de la escritura algebraica estableciéndose la siguiente correspondencia: “X” con “Julio tiene en el bolsillo algunos dulces”, “+” con ”compró”, “7” con “7 dulces más”, “$=$” con “y ahora”, “11” con “tiene 11” que da lugar al cambio de registro.

Estas dos situaciones dejan ver que la conversión en un sentido es de una manera y en sentido contrario es de otra, a diferencia de las actividades de conformación tratamiento aquí no existen reglas, lo que hace mas complicado y complejo que los estudiante puedan de manera espontánea realizar este tipo de actividad.

Esto lleva a centrar la atención en dos aspectos: primero, cuando se hace una actividad de conversión esta es orientada, por tanto, siempre es necesario precisar cual es el registro de partida y cual es el registro de llegada, porque la conversión en un sentido es diferente a la conversión en sentido contrario como quedó evidenciado en los ejemplos anteriores. Un segundo aspecto tiene que ver, si la conversión es congruente o no congruente. Esto quiere decir que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en el otro. En algunos casos, el pasaje de un registro a otro se hace de manera casi espontánea. Se hablará entonces de congruencia cuando la representación del registro de partida es transparente a la representación del registro de llegada. En otros casos, la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada, se hablara entonces de no congruencia. [9]

La distinción de estas tres actividades ligadas a la semiosis es esencial tanto para el análisis cognitivo de las tareas como para el de las condiciones de un aprendizaje conceptual. Es importante separarlas bien y no mezclar las reglas que aseguran su funcionamiento, cuando estos tres tipos de actividad intervienen explícita o implícitamente, en las macro-tareas de producción o de comprensión que habitualmente se requieren en el marco de la enseñanza de las matemáticas.

[9] Duval, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 44-45.

Por lo general, en las clases de matemáticas no se dedica tiempo a reflexionar en torno a la manera como se coordinan los diferentes registros de representación, en los que viven los objetos que se estudian en las matemáticas escolares. Por el contrario, la atención recae en las transformaciones que permite una representación al interior de un sólo registro de representación, lo anterior suscita un encapsulamiento en un sólo registro de representación, en consecuencia, la no comprensión del contenido representado.

Diferentes investigaciones han puesto en evidencia que un aprendizaje de las matemáticas (Egret, 1989; Duval, 1991b) centrado en la conversión y en la coordinación de los diferentes registros de representación, produce efectos espectaculares al momento que los estudiantes realizan tareas de producción y de comprensión. También, se ha observado que se aumenta el interés por la realización de las mismas. Así, si se pide una producción discursiva a los alumnos, se obtienen textos radicalmente diferentes, según ellos, previamente hayan tenido o no, la oportunidad de descubrir en otro registro la representación de la situación o acción a expresar. Igualmente, el cambio explícito de registro se constituye en un medio potente y a la vez necesario para la comprensión de textos (Duval, 1986, 1990c).[10]

1.4. EL FENÓMENO DE NO CONGRUENCIA

Las dificultades que se tienen por la no-congruencia de la conversión se deben en parte al desconocimiento de uno de los dos registros de representación. Tal es el caso de los diferentes registros bi-dimensionales como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas o incluso las tablas; es decir, para todos los registros en los que muy fácilmente se admite que es suficiente "ver" lo que las curvas o los dibujos muestran.

Es evidente en la enseñanza el desconocimiento de la actividad de conversión entre del registro de representación de los gráficos cartesianos y el de la escritura algebraica. Esto se evidencia de manera muy marcada cuando los alumnos de manera muy rápida muestran que saben construir una recta o una curva en un plano marcado, en virtud de la regla de punteo donde a una dupla de números le hace corresponder un punto en el plano. En efecto, cuando la conversión se efectúa en el sentido escritura algebraica de una ecuación hacia el gráfico, no parece surgir ninguna dificultad específica. Pero todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa, incluso después de la enseñanza de las funciones lineales.[11] En realidad, las unidades significantes del gráfico (recta, curva...) no están de ninguna manera determinados por la relación con los puntos marcados en un fondo cuadriculado. Esas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la recta (o de. la curva...), que están separados del fondo constituido por los dos ejes

[10] Duval, R. Semiosis y pensamiento humano. Traducción de Miriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 46-47.
[11] Ibid., p. 57.

orientados. Las unidades significantes de un gráfico corresponden a los valores de diferentes variables visuales. El alumno que no discrimina estas variables, es como si fuera ciego para la conversión inversa aquella que se enseña habitualmente. Esto quiere decir que él tiene pocas oportunidades para hacer una lectura correcta de los gráficos.

Este problema induce a los estudiantes a quedarse en el caso donde se presenta congruencia entre los registros porque la conversión es trivial y transparente, pero los casos de conversión entre representaciones congruentes son quizás tan frecuentes como los de conversión entre representaciones no-congruentes, se podría pues creer que las dificultades debidas a la no-congruencia son un fenómeno secundario. En realidad, tal visión es engañosa puesto que los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un encerramiento de los registros de representación. Este encerramiento persiste incluso después de que la enseñanza aparentemente haya movilizado diferentes registros de representación.

Como se ve, la coordinación de los diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión de un contenido matemático.[12]

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Esta comparación puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera "codifique" las representaciones que se quieren comparar. Luego se debe examinar si cumplen con los tres criterios de congruencia citados a continuación:

El primero es la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes, a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro. El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal, a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada. El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones.

[12] Ibid., p. 53-54.

Estos tres criterios permiten determinar la congruencia entre dos representaciones semióticamente diferentes y que, al menos parcialmente, representan el mismo contenido. Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, hay univocidad semántica terminal y hay el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones. Naturalmente, puede no haber correspondencia porque no se cumple ninguno, dos o solo uno de los tres criterios. La no-congruencia entre dos representaciones, por tanto, puede ser más o menos grande. La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada.[13]

El siguiente ejemplo muestra la conversión de la expresión en lengua natural al registro de la escritura algebraica:

"el conjunto de puntos cuya ordenada sea superior a la abscisa"

$$y > x$$

Se prevé que para efectuar la conversión es suficiente con una correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas de la siguiente manera a la unidad significante "el conjunto de puntos cuya ordenada" se hace corresponder con la variable "y"; "sea superior" con el signo relacional ">"; "a la abscisa" con "x" evidenciando de esta manera el cumplimiento de los tres criterios de congruencia y en este caso, la conversión permite volver a encontrar la expresión inicial del registro de partida, es decir el ejercicio es congruente. Sea ahora la expresión:

"el conjunto de puntos que tenga una abscisa positiva"

$$x > 0$$

Realizando el análisis de congruencia entre estos registros se ve que en la escritura algebraica no hay unidad significante que corresponda a "positivo"; entonces, para mitigar esta carencia, es necesario recurrir a la paráfrasis ">0" que es la combinación de dos unidades significantes. En este caso no se cumple el segundo criterio de congruencia porque a la unidad significante "positivo" le corresponde dos unidades significantes que son: ">" y "0", luego este ejercicio es no congruente.

La distancia que se debe sobrepasar para efectuar la conversión es más amplia en la siguiente expresión:

"el conjunto de puntos cuya abscisa y ordenada tengan el mismo signo"

$$xy > 0$$

---

[13] Ibid, p. 50-51.

Aquí no hay correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas de las dos expresiones: es necesaria una reorganización de la expresión dada en el registro de partida para obtener la expresión correspondiente en el registro de llegada. Además, la paráfrasis “>0” expresa tanto de mismo signo” como positivo. La conversión inversa no permite encontrar la expresión inicial ”$xy >0$” espontáneamente se puede expresar como “el producto de la abscisa y de la ordenada es superior a 0 (es positivo)”, y no como ”el conjunto de puntos cuya abscisa y ordenada tienen el mismo signo” [14]

2. ARTICULACIÓN ENTRE EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Este capítulo examina los elementos teóricos necesarios para realizar el análisis de congruencia entre los registros semióticos de interés, se tiene en cuenta en primer lugar las actividades de tratamiento y discriminación de cada uno de los registros, para luego entrar en la actividad de conversión entre estos y finalmente hacer el análisis de congruencia.

2.1. TRATAMIENTO Y DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES EN EL REGISTRO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La actividad de tratamiento en este registro se dedica a procesos algorítmicos, donde se debe despejar una variable generalmente la variable dependiente “y” con el fin de llevar una expresión algebraica a la ecuación general de una recta $y = ax + b$.

Un ejemplo de tratamiento es el siguiente:

Graficar la ecuación $\frac{5}{4}x + \frac{2}{3}y = 4$

Para realizar este ejercicio y hacer un paralelo con la forma general de la ecuación de una recta se debe despejar la variable “y” así:

[14] Ibid, p. 47-48.

$$\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y=4$$
$$\frac{2}{3}y=-\frac{5}{4}x+4$$
$$y=\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{4}x+4\right)$$
$$y=-\frac{15}{8}x+\frac{12}{2}$$
$$y=-\frac{15}{8}x+6$$

Se ve que la acción de tratamiento dentro de este registro es una actividad fácil y elemental, el estudiante simplemente debe tener en cuenta reglas de transposición de términos en una igualdad para despejar la variable " y ".

En la escritura de la forma general de una recta $y=ax+b$ donde "a" es el coeficiente director y "b" una constante añadida, la discriminación de las unidades significantes propias a esta expresión algebraica es relativamente evidente y son:

- Los signos relacionados (¨<,>, $=$),
- Los símbolos de operación o de signo (+,-)
- Los símbolos de variable,
- Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.

En una expresión algebraica, cada símbolo corresponde generalmente a una unidad significativa. Hay sin embargo, unidades significativas en las que los símbolos se omiten, el coeficiente 1 , el carácter "positivo" de los coeficientes mayores que 0. Así, no se escribe $y=+1x$, pero en cambio si se escribe $y=-2x$.

Recordar esta trivialidad es importante cuando se trata de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y de las unidades significativas de la escritura algebraica.[15]

2.2. TRATAMIENTO Y DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES EN EL REGISTRO DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Las representaciones gráficas, tienen un uso relativamente extendido, se encuentran no sólo en los libros de matemáticas sino en libros de todas las ciencias, en las revistas, periódicos, etc. En éstos, aparecen para mostrar una tendencia no visible en una enumeración de datos cifrados. Están, por ejemplo los datos que representan la

[15] Duval, R. Graficas y ecuaciones, la articulación de dos registros. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, 1988. p. 127.

evolución de los precios en el transcurso de uno o varios años, el crecimiento demográfico, etc.

Estas representaciones son mas complejas que la simple representación "geométrica" de una recta graduada, ellas permiten visualizar aquello que se estudia, y por tanto posibilitan tratamientos mas intuitivos, mas rápidos, mas accesibles a quienes no dominan su presentación en otros registros; permitiendo así la conversión, que no sólo se hace a la escritura decimal o fraccionaria de números sino a la escritura algebraica de relaciones, su funcionamiento se basa en la relación entre dos figuras, la figura-fondo y la figura-forma, la primera hace referencia al sistema de ejes coordenados, la segunda al trazo que está sobre estos ejes. Teniendo en cuenta esta relación, el registro de las representaciones graficas permite tres tipos de tratamiento, también se puede decir tres formas de ver que son:

1. Una localización de posiciones por selección de puntos en los que la figura-forma coincide con los puntos de intersección del campo cuadriculado, esto permite una lectura de duplas de números. Esta forma de ver es común en la enseñanza de la función lineal, se evidencia cuando al estudiante se le pide leer una pareja ordenada de números consignada en el plano, o se le pide hacer el proceso contrario, es decir, trasladar una dupla de números al plano.

2. Una aprehensión global de los valores visuales de la figura-forma, Este tipo de tratamiento es esencialmente cualitativo, permite al estudiante identificar qué tipo de trazo es, si es recto o curvo, si es creciente o decreciente, dónde corta a los ejes coordenados, si es cóncavo o convexo, dónde tiene puntos de inflexión, en conclusión es esta aprehensión perceptiva global lo que da a la representación gráfica su poder intuitivo o heurístico.

3. Una modificación de la figura-forma que cambia la aprehensión global de los valores visuales, jugando con los grados de libertad que da la figura-fondo. Se puede modificar la figura-forma no tomando, por ejemplo, la misma unidad de graduación en los dos ejes. Igualmente se puede modificar la figura-forma efectuando un "zoom" sobre una de sus partes, esto hace que se divida localmente la unidad de graduación y que la cuadrícula sea más fina.

Como se ve, el primer y el tercer tipo de tratamiento dependen directamente de la regla de codificación. La segunda no depende de esta regla pero si de las leyes de la organización gestaltista de la percepción. Para este tratamiento cualitativo sólo importa la orientación bi-dimensional determinada para los dos ejes de la figura-fondo; la escogencia de la unidad de graduación queda neutra a condición de que se guarde la misma escala en los dos ejes de la figura-fondo. La segunda forma de ver, es importante y se debe tener en cuenta al momento de abordar el tema de la función lineal, porque corresponde con la manera útil de ver desde un punto de vista matemático, es decir, con la manera de ver que permita visualizar una relación entre dos conjuntos de valores.[16]

En matemáticas los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros, luego para esto se hace necesario identificar en ellos sus respectivas unidades significantes. La discriminación de las propiedades de las figuras de una representación gráfica, es por el contrario, menos evidente que en registro de las expresiones algebraicas. Retomando ciertas variables visuales definidas por Bertín (1977,186-189), y precisando otras, se distingue las variables generales y las variables relativas a los casos donde la gráfica es un trazo simple (recta o parábola).

Las dos variables son:

- La implantación de la tarea, es decir, lo que se desprende como figura sobre fondo: un trazo o una zona.
- La forma de la tarea: el trazo realizado, que delimite o no una zona, es recto o es curvo. Si es curvo, es abierto o cerrado.

Las tres variables particulares que corresponden a una simple modificación de la configuración trazo-realizado/ejes orientados. Se tratará el caso en el que el trazo realizado es una recta. Un análisis totalmente similar puede efectuarse para el caso en el que el trazo realizado es una curva abierta como la parábola. Las tres variables particulares son:

VARIABLES VISUALES	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES
El sentido de la inclinación del trazo:	▪ El trazo sube de izquierda a derecha. ▪ El trazo *desciende* de izquierda a derecha.
Los ángulos del trazo con los ejes:	▪ Hay una *partición simétrica* del cuadrante atravesado. ▪ El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical. ▪ El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.

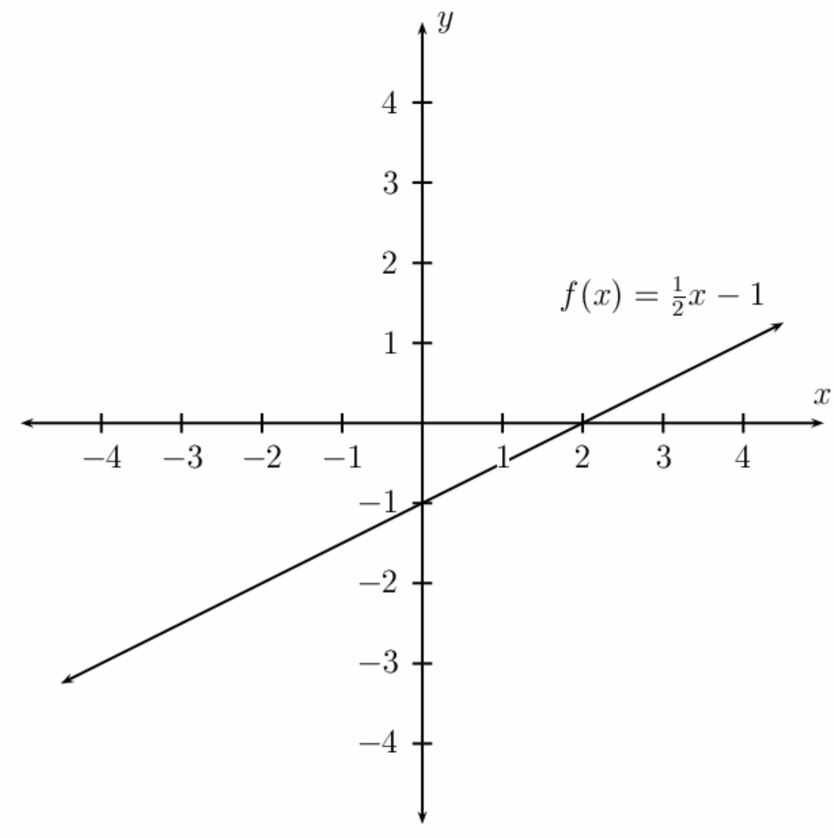
[16] Duval, R. Las representaciones gráficas: Funcionamiento y condiciones de su aprendizaje. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Cali Universidad del Valle, 1988. p. 5-6.

La posición del trazo respecto al origen del eje vertical:	▪ El trazo corta al eje y arriba del origen. ▪ El trazo corta el eje y abajo del origen. ▪ El trazo corta al eje y en el origen.

La primera de las tres variables visuales particulares puede entonces tomar dos valores, la segunda puede tomar tres y la tercera otros tres. Se omite dos casos, aquellos en los cuales la recta es paralela a uno de los dos ejes así ya no hay que tener en cuenta los valores de las variables precedentes, es suficiente con leer el valor del punto de intersección de la recta con el otro eje.[17]

Los siguientes ejemplos muestran cómo discriminar las unidades significantes dentro de este registro.

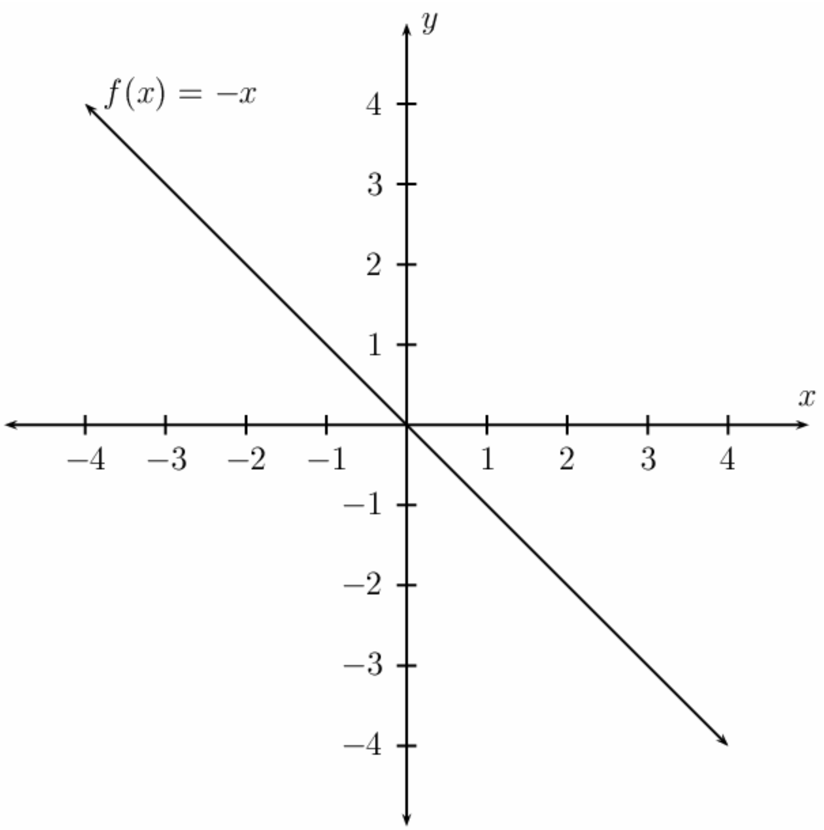
Ejemplo 1.



[17] Duval, R. Graficas y ecuaciones, la articulación de dos registros. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, 1988. p. 128.

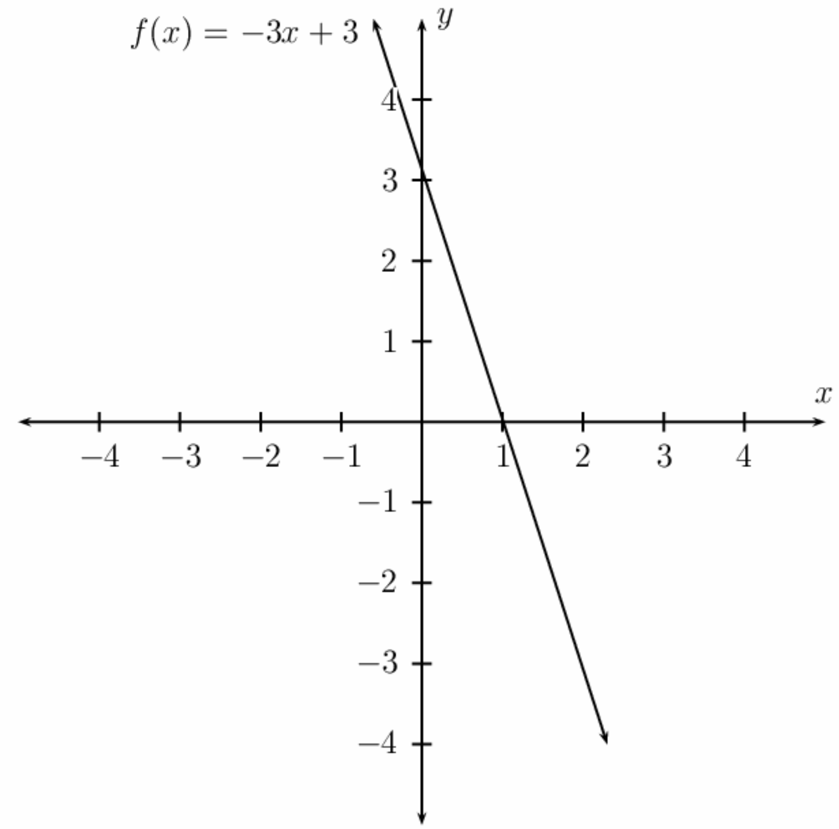
Teniendo en cuenta las tres variables visuales en este ejemplo, se ve que el sentido de inclinación del trazo es ascendente de izquierda a derecha, el ángulo que forma el trazo con el eje de las abscisas es menor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas y finalmente teniendo en cuenta la tercera variable visual se ve que el trazo corta al eje de las ordenadas por debajo del origen.

Ejemplo 2.



En este ejemplo el sentido de inclinación del trazo es descendente de izquierda a derecha, hay una partición simétrica del cuadrante atravesado es decir el ángulo que forma el trazo con el eje de las abscisas es igual que el ángulo formado con el eje de las ordenadas, y finalmente teniendo en cuenta la tercera variable visual se ve que el trazo corta al eje de las ordenadas por en el origen.

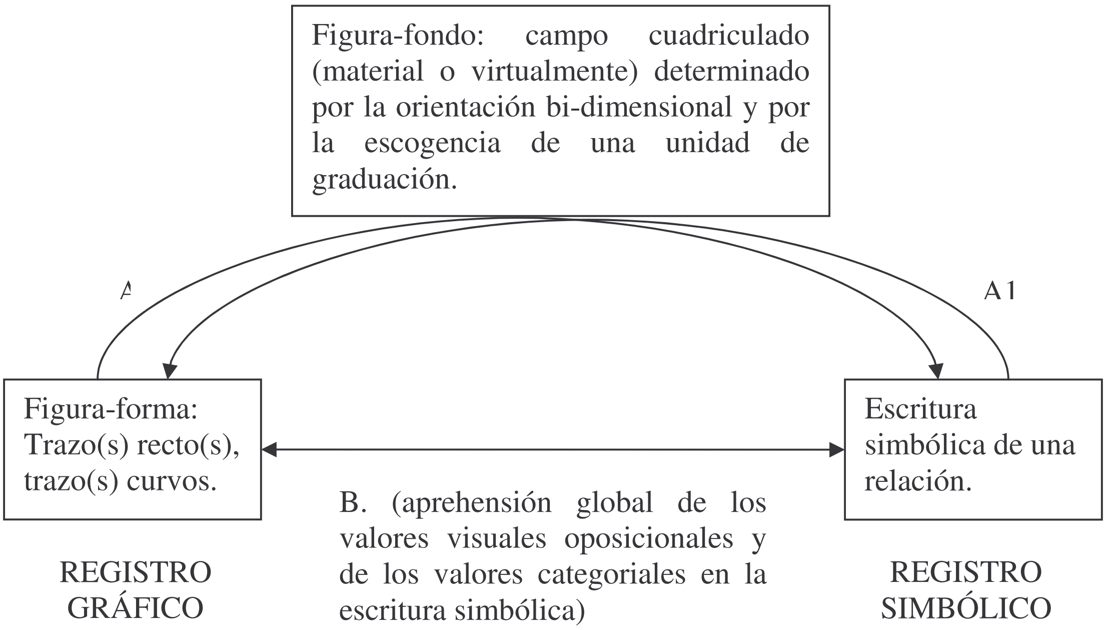
Ejemplo 3.



En este ejemplo el sentido de inclinación del trazo es descendente de izquierda a derecha, el ángulo que forma el trazo con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas, y finalmente teniendo en cuenta la tercera variable visual se ve que el trazo corta al eje de las ordenadas por encima del origen.

2.3. COORDINACIÓN ENTRE EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y LOS GRÁFICOS CARTESIANOS

Para analizar las operaciones de conversión entre estos dos registros se analizará el siguiente esquema:



Como se puede ver, la conversión puede hacerse de dos maneras diferentes que no son equivalentes cognitivamente, las conversiones A y A1 consisten en pasar por la figura-fondo. Concretamente, si se parte de una ecuación, esto quiere decir que se calculan los valores numéricos, se los traslada al campo cuadriculado según la regla de correspondencia y utilizando la ley guestaltista de reagrupamiento, se juntan los puntos trasladados para obtener la figura-forma (A) que puede ser: una recta, varios fragmentos de recta, una curva, etc. El pasaje inverso (A1) es mucho más incierto. Si el caso es simplemente localizar las posiciones y leer las duplas de valores numéricos, no se llega verdaderamente a una ecuación. Pero si de lo que se trata es de encontrar la ecuación correspondiente a la figura-forma, entonces es necesario recurrir a procedimientos de cálculo partiendo de valores numéricos leídos sobre el gráfico. Estas conversiones A y A1 quedan, pues, limitadas a una localización de posiciones y a una instanciación numérica de variables y de constantes. No permiten en absoluto coordinar estos dos registros de representación. Son conversiones que cognitivamente se efectúan a ciegas.

La conversión B olvida el campo cuadriculado de la figura-fondo. Asocia valores visuales de la figura-forma a valores categoriales de la escritura algebraica. Estos valores visuales y estos valores categoriales son valores oposicionales. Esto quiere decir que se definen por la escogencia entre dos posibilidades opuestas: la recta pasa o no pasa por el origen, en la ecuación hay o no hay constante añadida, etc. El registro gráfico juega su papel intuitivo o heurístico sólo cuando el tratamiento cualitativo de una aprehensión global de los valores visuales está asociado a este tipo de conversión.[18]

Se ve pues la complejidad semiótica de las representaciones gráficas. Es justamente esta complejidad la que permite la diversidad de tratamientos, así como también una articulación extremadamente rica con otros registros, principalmente con los de la escritura simbólica. La enseñanza privilegia las conversiones A y A', así como los tratamientos asociados a la localización de posiciones y a veces modificaciones de la figura-fondo. Y se actúa como si la conversión B prosiguiera naturalmente después de la adquisición de las conversiones A y A1. Hay dos razones que parecen justificar esta demora. De un lado, el tratamiento cualitativo es espontáneo puesto que depende de leyes de organización propias a la percepción visual. De otro lado no hay reglas precisas para ser aplicadas en esta conversión B.

En el registro de las representaciones graficas, así como en registro de las figuras, las unidades significantes, o pertinentes no son dadas por separado como en el registro de la escritura simbólica de una relación, sino que están integradas y fusionadas en una sola forma percibida. Dicho de otra manera el problema con las representaciones gráficas tiene que ver con la discriminación de las unidades visuales de la representación.

Se dijo que los valores visuales, son valores oposicionales y para su discriminación en el trazo de una recta orientada implica un anclaje, es decir, una focalización particular de la atención sobre dos puntos tomados como referencia. Estos dos datos bastan para determinar todos los valores visuales pertinentes en el tratamiento cualitativo de las gráficas, restringiéndose al caso de la representación gráfica de las funciones lineales y afines. Se pueden observar tres cosas:

- las variables visuales están determinadas en función de los anclajes,
- los valores de estas variables son oposicionales y pueden comportar, a diferencia de los valores lingüísticos, un valor neutro (alguno de los dos valores opuestos),
- los valores visuales se van a poner en correspondencia no con valores numéricos sino con valores categoriales de la escritura simbólica de una ecuación. Para el caso particular con el que nos hemos quedado ($y = ax + b$), estos valores categoriales son: coeficiente director positivo o negativo y mayor o menor que 1, constante añadida positiva, negativa o no se presenta.[19]

---

[18] Duval, R. Las representaciones gráficas: Funcionamiento y condiciones de su aprendizaje. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Cali Universidad del Valle, 1988. p. 6-7.
[19] Ibid, p. 9.

El carácter pertinente o no pertinente de una variable visual, y por tanto de un valor visual, está determinado por el siguiente hecho: la modificación de un valor visual el registro gráfico provoca una modificación del valor categorial en la escritura simbólica de la relación, concretamente se procede con diferentes variaciones figurales de una representación gráfica dada y se mira si estas variaciones acarrean una variación en la escritura simbólica correspondiente.

Las variaciones de orden figural que se pueden introducir en una representación gráfica pueden manifestarse en la figura-fondo (cambio de la unidad de graduación, misma unidad de graduación en los dos ejes o no, ...), en la figura-forma (para las rectas: variación de su orientación; variación de su inclinación en relación con los ejes evidentemente, habiendo escogido la misma unidad para los dos ejes; variación de su posición en relación con el origen). Según las variaciones introducidas puede suceder que no se produzca ninguna variación en la ecuación correspondiente, ni en los valores numéricos ni en los valores categoriales; puede suceder también que haya un cambio en los valores numéricos sin variación categorial (por ejemplo $y = 3x$ o $y = 2.5x$ en lugar de $y = 2x$); o puede que haya un cambio en el valor categorial ($y = 1/2\ x$ en lugar de $y = 2x$). Los valores visuales pertinentes son aquellos cuya variación acarrea un cambio de valor categorial en la ecuación correspondiente. El caso en que un cambio figural del gráfico no acarrea ningún cambio en la escritura de la ecuación, ni para los valores categoriales ni para los valores numéricos, es aquel en que las variaciones se realizan exclusivamente en la figura-fondo.

Como se ve los casos en que sólo hay variación de un valor numérico sin variación del valor categorial son por completo neutros para la discriminación de los valores visuales pertinentes, es decir, para la discriminación de las unidades significantes de una representación gráfica. Las variaciones figurales que provocan sólo un cambio de los valores numéricos en la ecuación correspondiente, no provienen de variables cognitivas pertinentes para el registro gráfico. Y esto por una razón simple: la discriminación de los valores visuales de la figura-forma es una operación diferente de la evaluación perceptiva del tamaño de una desviación, de una distancia o de una inclinación. Una evaluación perceptiva está sujeta a errores sistemáticos de estimación. Dicho de otra manera, hay que tener cuidado en no confundir la determinación de los valores categoriales de la ecuación de una recta a partir de un gráfico, por ejemplo y = $(a > 1)\ x$, con la determinación de los valores numéricos de una recta, por ejemplo y = $9/7\ x$. La primera determinación proviene de una aprehensión global de los valores visuales de la figura-forma y de una conversión B. La segunda determinación proviene de una simple localización de posiciones por punteo para tener las coordenadas de dos puntos, así como de un procedimiento de cálculo mas o menos complejo e independiente del registro gráfico. Es decir, se sacan del gráfico dos informaciones numéricas y la ejecución del cálculo se hace luego en otro registro. Seguramente, el gráfico puede intervenir a titulo de control de la verosimilitud de la ecuación encontrada. Pero para eso, es necesario que ser capaz de una aprehensión global de los valores visuales y de la conversión B. Ahora bien, en la enseñanza, generalmente se confunden estas dos determinaciones cuando se solicita determinar la ecuación de una recta a partir de dos puntos. Y entonces, no se está en capacidad para discernir dos tipos de error radicalmente diferentes:

- los errores que se basan solamente en los valores numéricos y no en los valores categoriales. Estos errores no afectan pues la forma de la ecuación encontrada. Provienen únicamente de los procedimientos de cálculo.

- los errores que se basan en los valores categoriales de la ecuación y afectan la forma de la ecuación encontrada. Estos provienen de un desconocimiento de las representaciones gráficas y por tanto de una imposibilidad para utilizarlas sea a titulo heurístico o a titulo de control.

En la organización de un tal trabajo de observación dirigido a la discriminación de unidades significantes en una representación gráfica, se deben respetar dos reglas. La primera, elemental, es la regla de todo método experimental: sólo introducir variaciones a una sola variable manteniendo constante los valores de las otras variables. Por ejemplo, modificar un gráfico que representa la recta $y = 2x$ en un gráfico que represente la recta $y = -1/2$, no respeta esta regla pues la variación figural afecta a dos variables visuales y provoca dos variaciones categoriales en la escritura de la ecuación, la primera tiene que ver con el signo del coeficiente y la segunda si el coeficiente es mayor o menor que uno. Con mucha frecuencia, en las secuencias de aprendizaje o en los cuestionarios que tienen por fin hacer un diagnóstico de las adquisiciones reales de los alumnos, se proponen tareas que mezclan de manera no controlada varias actividades cognitivas heterogéneas: tratamientos visuales, tratamientos algorítmicos, tratamientos discursivos, conversiones de sentidos diferentes. Es esencial, al contrario, poder construir tareas que movilicen sólo una actividad cognitiva. Dicho de otra manera, es necesario que la elaboración de secuencias de aprendizaje y de cuestionarios de evaluación no se haga sólo en función de un aprendizaje global de la actividad matemática y de sus objetivos, sino igualmente en función de variables cognitivas. La segunda regla es relativa a la significación de las representaciones semióticas, es decir, a la posibilidad de que tengan un "sentido": la discriminación de las unidades significantes en una representación implica que se puedan efectuar decisiones sobre la pertinencia y no solamente decisiones sobre la verdad, entre todo lo que puede ser discernido en una representación. Por eso es necesario que los alumnos hayan obtenido los medios para comparar y escoger entre las variaciones las que son cognitivamente pertinentes y las que no.

La apuesta de esta aproximación es relativa a la coordinación de los registros de representación, sin lo cual no puede haber comprensión del contenido representado, cualquiera que sea el registro de representación utilizado. La particularidad de las matemáticas en relación con otras disciplinas es que los objeto estudiados no son accesibles independientemente del recurso a un lenguaje, a unas figuras, a esquemas, a símbolos ¿cómo un individuo en situación de aprendizaje puede no confundir estos objetos con la representación que de ellos se hace si no son accesibles por fuera de esta representación? En realidad sólo hay un medio para diferenciar un objeto de su representación; es necesario disponer de otra representación semiótica del objeto representado y reconocerla como una misma representación. En breve, es necesario poder cambiar la forma de la representación, preferentemente cambiando de sistema semiótico.

Ahora bien, las observaciones que se han podido hacer de las diferentes fases del aprendizaje de las matemáticas, muestran que cambiar la forma de una representación es algo comprobadamente difícil. Todo sucede como si la comprensión que la gran mayoría de los alumnos tuvieran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada. Esto provoca que los tratamientos posibles queden reducidos a los del registro en el cual se producen inicialmente las representaciones; y también provoca la “perdida del sentido", tan frecuentemente lamentada[20].

A cada uno de los ocho valores de las variables visuales particulares corresponde una unidad significativa en la escritura algebraica de la ecuación de la recta, lo que importa en la escritura $y = ax + b$ es el coeficiente a y la constante b.

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDIENTES
Sentido de inclinación:	Trazo ascendente Trazo descendente	Coeficiente >0, ausencia del símbolo +. Coeficiente <0, presencia del símbolo -.
Angulo con los ejes	Partición simétrica Angulo menor Angulo mayor	Coeficiente $=1$ Coeficiente < 1 Coeficiente > 1
Posición sobre el eje Y.	Corta arriba Corta abajo Corta en el origen	Se añade una constante de signo +. Se sustrae una constante de signo -. No presenta.

[20] Ibid, p. 14.

A la simple lectura de esta tabla limitada al caso de las rectas, se puede hacer las siguientes observaciones,

1. El concepto de pendiente, traducido algebraicamente por el coeficiente, cubre dos unidades significativas diferentes, una definida respecto al signo y la otra respecto al entero 1. Estas dos unidades significativas corresponden a dos variables diferentes respectivamente el sentido de la inclinación y el ángulo. No hay congruencia entre la dirección de la recta en el plano de referencia y el coeficiente que determina estas expresión algebraica, porque en cualquier valor el coeficiente dado $(2, \frac{1}{2}, -2...)$ hay que desprender dos propiedades distintas, relativamente a 0 y relativamente a 1.

2. Se ve que para las rectas no paralelas a los ejes hay solamente 18 representaciones graficas que son distintas visualmente de manera significativa. A cada una de estas representaciones corresponde una ecuación particular:

SENTIDO DE INCLINACIÓN.	ANGULO	POSICIÓN	EJEMPLOS
>0	$=1$	Nada	$y = x$
		+	$y = x+1$
		-	$y = x-1$
	>1	Nada	$y = 3x$
		+	$y = 3x+1$
		-	$y = 3x-1$
	<1	Nada	$y = \frac{1}{3}x$
		+	$y = \frac{1}{3}x+1$
		-	$y = \frac{1}{3}x-1$
<0	$=1$	Nada	$y = -x$
		+	$y = -x+1$
		-	$y = -x-1$
	>1	Nada	$y = -3x$
		+	$y = -3x+1$
		-	$y = -3x-1$
	<1	Nada	$y = -\frac{1}{3}x$
		+	$y = -\frac{1}{3}x+1$
		-	$y = -\frac{1}{3}x-1$

En el caso de paralelismo a uno de los ejes, hay desaparición de la variable que se refiere a este eje.

Una representación explícita y sistemática de las variaciones visuales significativas no solamente centra la atención sobre la correspondencia entre representación gráfica y escritura algebraica, si no que permite encontrar directamente la expresión algebraica de las propiedades geométricas de perpendicularidad o paralelismo de dos rectas; por ejemplo, basta practicar la vía experimental más clásica, haciendo variar una unidad significativa de la escritura manteniendo constantes todas las otras y ver qué es lo que sucede con el otro registro (o hacer variar cada variable visual manteniendo constantes las otras dos y ver las modificaciones de la escritura). Así, por ejemplo la oposición entre $y = x$ y $y = -x$ se articula en la unidad de una imagen visual, y esta imagen se presta a modificaciones que tienen su contraparte algebraica inmediata, el producto de las pendientes es -1, es decir las dos rectas son perpendiculares.

Dicho de otro modo la discriminación de las variables visuales y supuesta en relación con las unidades simbólicas correspondientes ofrece un potente medio para el estudio de la función lineal sus propiedades y relaciones, pero esta acción es ignorada, la escritura general $y = ax + b$ se utiliza como la base inicial de trabajo y no como el termino de una integración cognitiva que resulta de la vía experimental que evocamos anteriormente.[21]

[21] Duval, R. Graficas y ecuaciones, la articulación de dos registros. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, 1988. p. 129,…,131.

3. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN EL ÁLGEBRA DE BALDOR

Este capítulo presenta el desarrollo del objetivo propuesto, para lo cual se hace un análisis de textos, realizando el análisis de congruencia en los ejercicios donde se ponga en acto el paso del registro semiótico de los gráficos cartesianos hacia el registro de la escritura algebraica y viceversa.

El análisis de esta información se hace de acuerdo con el modelo teórico que propone Raymond Duval, en relación con la actividad cognitiva vinculada con el cambio de registros semióticos de representación.

3.1. DISCRIMINACIÓN DE UNIDADES SIGNIFICANTES Y ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

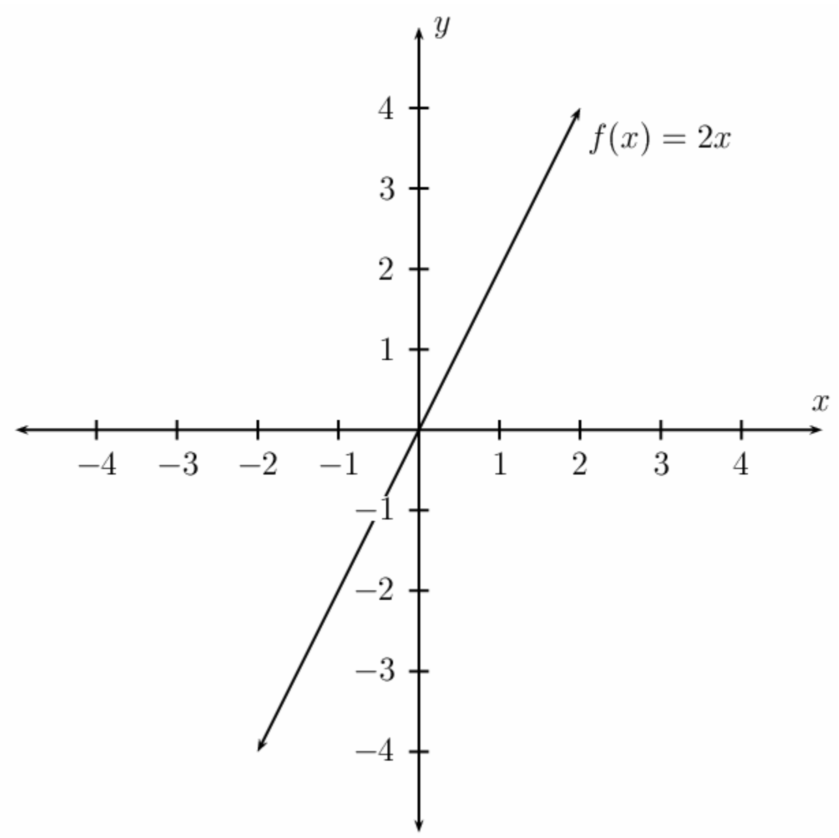
Ejercicio 1.

Representar gráficamente la función $y = 2x$.

Dando valores a x obtendremos una serie de valores correspondientes de y:

$$\begin{array}{lll}
Para & x = 0, & y = 0, \quad el\ origen\ es\ un\ punto\ del\ gráfico. \\
 & x = 1, & y = 2 \\
 & x = 2, & y = 4 \\
 & x = 3, & y = 6,\ etc. \\
Para & x = -1, & y = -2 \\
 & x = -2, & y = -4 \\
 & x = -3, & y = -6,\ etc.
\end{array}$$

Representando los valores de x como abscisas y los valores de y como ordenadas, obtenemos la serie de puntos que aparecen en el siguiente gráfico.



Unidades significantes del registro algebraico

- Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$,
- Coeficiente >1,
- No presenta constante añadida.

Unidades significantes del registro gráfico

- Trazo ascendente,
- El ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas,
- El trazo corta en el origen.

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Para el signo relacional “$=$” el trazo recto y no una zona, se asume como su correspondiente unidad significante, a la unidad significante “Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$” le corresponde “Trazo ascendente”, a “coeficiente >1 ” le corresponde “el ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas” y a “no presenta constante añadida” le corresponde “el trazo corta en el origen”.
ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

Para pasar del registro algebraico al registro grafico, se recurre a otro registro semiótico de la función lineal, la tabulación, luego se consignan en la figura-fondo estas parejas ordenadas obteniendo la gráfica.

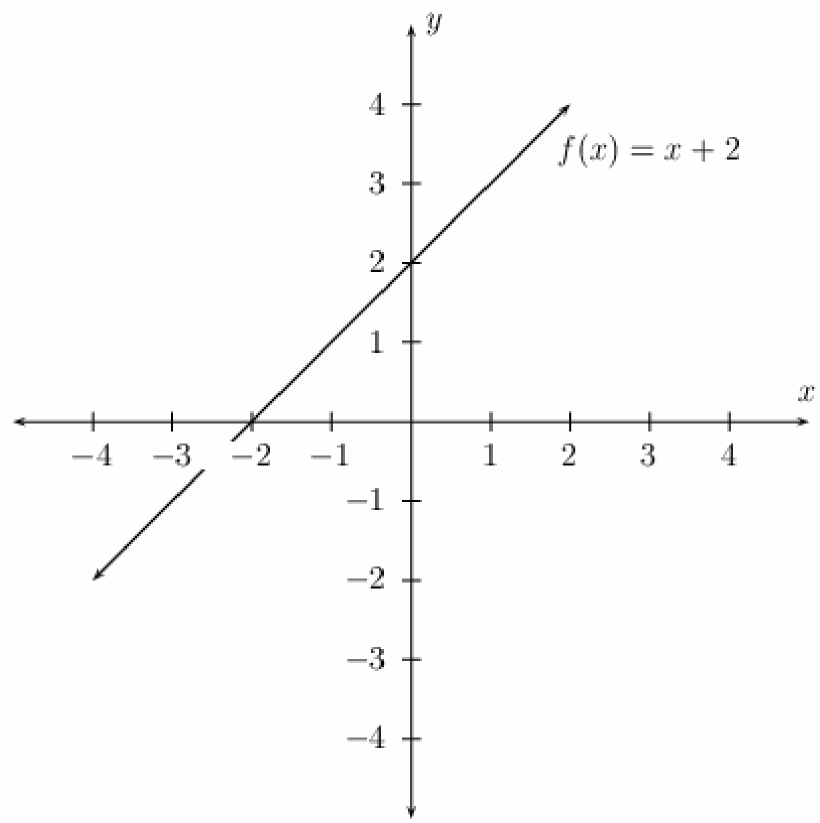
El ejercicio es congruente, cumple los tres criterios de congruencia. Para realizar la correspondencia entre las respectivas unidades significantes se debe identificar en el registro de partida dos unidades significantes simples, estas son el signo “$+$” que no parece pero se asume su existencia y el número “2”. Estas dos unidades simples se encuentran consignadas en una sola unidad significante, se ve que es necesario realizar su discriminación para que cada una tenga su respectiva unidad correspondiente en el registro de llegada.

Ejercicio 2.

Representar gráficamente la función $y = x + 2$.

Los valores de x y los correspondientes de y suelen disponerse en una tabla como se indica a continuación, escribiendo debajo de cada valor de x el valor correspondiente de y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\ldots$
y	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$



Unidades significantes del registro algebraico

- Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$,
- Coeficiente $=1$,
- Constante añadida de signo +.

Unidades significantes del registro gráfico

- Trazo ascendente,
- Partición simétrica del cuadrante atravesado,
- El trazo corta arriba del origen.

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Para el signo relacional "$=$" el trazo recto y no una zona, se asume como su correspondiente unidad significante, a la unidad significante "Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$" le corresponde "Trazo ascendente", a "coeficiente $=1$ " le corresponde "el ángulo formado con el eje de las abscisas es igual al ángulo formado con el eje de las ordenadas" y a "constante añadida de signo +" le corresponde "el trazo corta arriba del origen"

ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

Para pasar del registro algebraico al registro grafico, se recurre a otro registro semiótico de la función lineal, la tabulación, luego se consignan en la figura-fondo estas parejas ordenadas obteniendo la gráfica.

El ejercicio es congruente, cumple los tres criterios de congruencia. Para realizar la correspondencia entre las respectivas unidades significantes se debe identificar en el registro de partida dos unidades significantes simples, estas son el signo "$+$"y el número "1" que no parece pero se asume su existencia. Estas dos unidades simples se encuentran consignadas en una sola unidad significante, se ve que es necesario realizar su discriminación para que cada una tenga su respectiva unidad correspondiente en el registro de llegada.

Ejercicio 3.

Representar gráficamente la función $y=3x$ y la función $y=2x+4$.

En la función $y=3x$ se tiene:

x	-2	-1	0	1	2	$\dots$
y	-6	-3	0	3	6	$\dots$

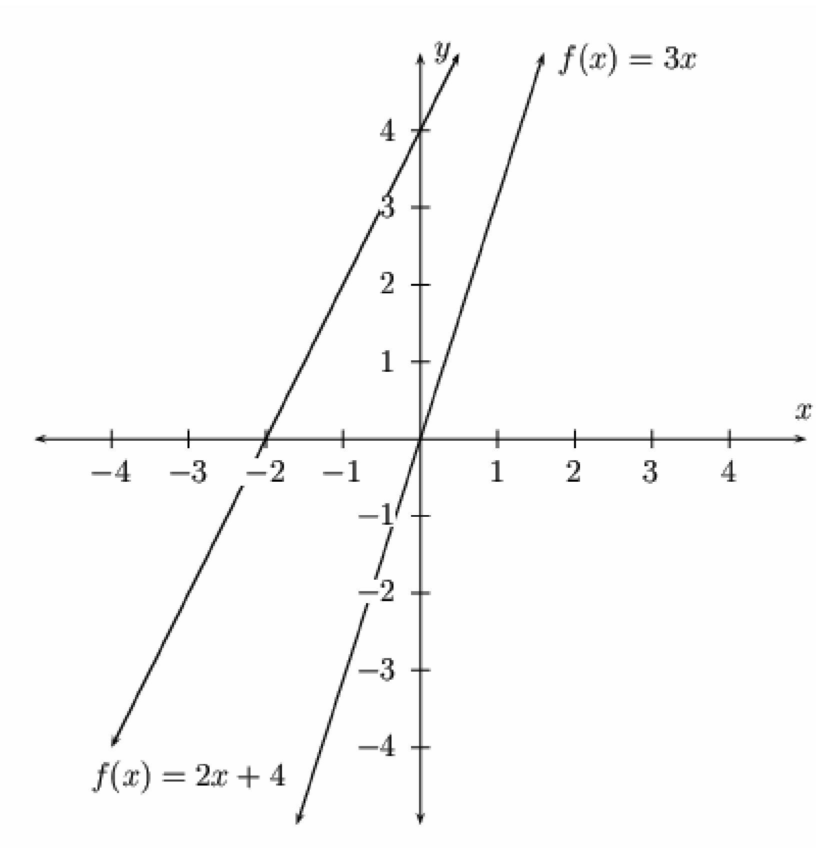
El gráfico es la línea que pasa por el origen.

En la función $y=2x+4$, tendremos:

x	-2	-1	0	1	2	$\dots$
y	0	2	4	6	8	$\dots$

El gráfico es la línea que no pasa por el origen.

Los interceptos $(0,4)$ y $(-2,0)$ se obtienen haciendo $x=0$ y $y=0$ respectivamente. Obsérvese que $y=4$, término independiente de $y=2x+4$.



Unidades significantes del registro algebraico

Para $y = 3x$

- Coeficiente > 0, ausencia del símbolo $+$,
- Coeficiente > 1,
- No presenta constante añadida.

Para $y = 2x + 4$

- Coeficiente > 0, ausencia del símbolo $+$,
- Coeficiente > 1,
- Constante añadida de signo +.

Unidades significantes del registro gráfico

Para $y = 3x$

- Trazo ascendente,
- El ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas,
- El trazo corta en el origen.

Para $y = 2x + 4$

- Trazo ascendente,
- El ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas,
- El trazo corta arriba del origen.

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Para el signo relacional “$=$” el trazo recto y no una zona, se asume como su correspondiente unidad significante en los dos ejemplos. En el primer ejemplo se tiene la siguiente correspondencia de unidades significantes: “Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$” con “Trazo ascendente”, a “coeficiente >1 ” le corresponde “el ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas” y a “no presenta constante añadida” le corresponde “el trazo corta arriba del origen”. En el segundo ejemplo se tiene la siguiente correspondencia de unidades significantes: “Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$” con “Trazo ascendente”, a “coeficiente >1 ” le corresponde “el ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas” y a “constante añadida de signo +” le corresponde “el trazo corta arriba del origen”.

ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

Para pasar del registro algebraico al registro grafico, se recurre a otro registro semiótico de la función lineal, la tabulación, luego se consignan en la figura-fondo estas parejas ordenadas obteniendo la gráfica.
Los ejercicios son congruentes, cumplen los tres criterios de congruencia. Para realizar la correspondencia entre las respectivas unidades significantes se debe identificar en el registro de partida dos unidades significantes simples, estas son el signo “$+$” en los dos casos, que no parecen pero se asume su existencia y el número “1” y “2” respectivamente. Estas dos unidades simples en ambos casos se encuentran consignadas en una sola unidad significante, se ve que es necesario realizar su discriminación para que cada una tenga su respectiva unidad correspondiente en el registro de llegada.

Ejercicio 4.

Representa gráficamente la ecuación $5x - 3y = 0$.

Como la ecuación carece de término independiente el origen es un punto de la recta. Basta hallar otro punto cualquiera y unirlo con el origen.

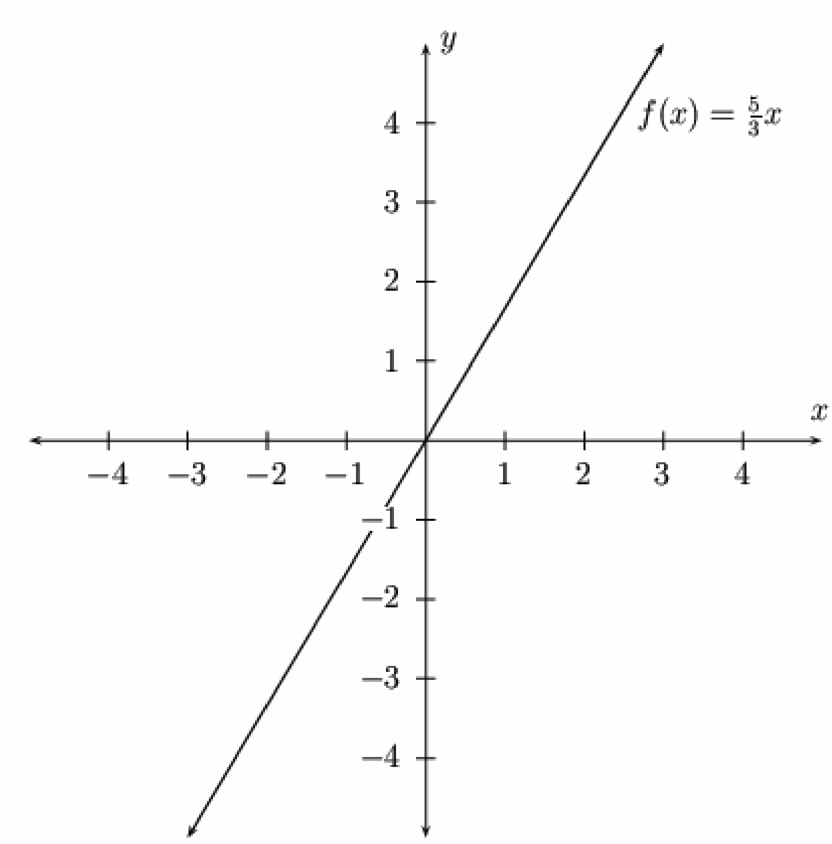
Despejando y :

$$-3y = -5x \quad o\ sea \quad 3y = 5 \quad \therefore \quad y = \frac{5}{3}x$$

Hallemos el valor de y para u valor cualquiera de x, por ejemplo:

Para $x = 3, \qquad y = 5.$

El punto $(3{,}5)$ es un punto de la recta, que unido con el origen determina la recta $5x - 3y = 0$.



Unidades significantes del registro algebraico

- Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$,
- Coeficiente >1,
- No presenta constante añadida.

Unidades significantes del registro gráfico

- Trazo ascendente,
- El ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas,
- El trazo corta en el origen.

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Para el signo relacional "$=$" el trazo recto y no una zona, se asume como su correspondiente unidad significante, a la unidad significante "Coeficiente >0, ausencia del símbolo $+$" le corresponde "Trazo ascendente", a "coeficiente >1 " le corresponde "el ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas" y a "no presenta constante añadida" le corresponde "el trazo corta en el origen".

ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

Para pasar del registro algebraico al registro grafico, se recurre a otro registro semiótico de la función lineal, la tabulación, en este caso sólo se tienen en cuenta dos puntos, se trasladan a la figura fondo y se traza la recta. A diferencia de los otros ejemplos la función lineal se presenta como una ecuación lineal por tanto es necesario realizar un tratamiento para expresar esta ecuación de la forma $y = ax + b$.

El ejercicio es congruente, cumple los tres criterios de congruencia. Para realizar la correspondencia entre las respectivas unidades significantes se debe identificar en el registro de partida dos unidades significantes simples, estas son el signo "$+$"que no parece pero se asume su existencia y el número "$5/3$". Estas dos unidades simples se encuentran consignadas en una sola unidad significante, se ve que es necesario realizar su discriminación para que cada una tenga su respectiva unidad correspondiente en el registro de llegada.

Ejercicio 5.

Gráfico de $3x + 4y = 5$.

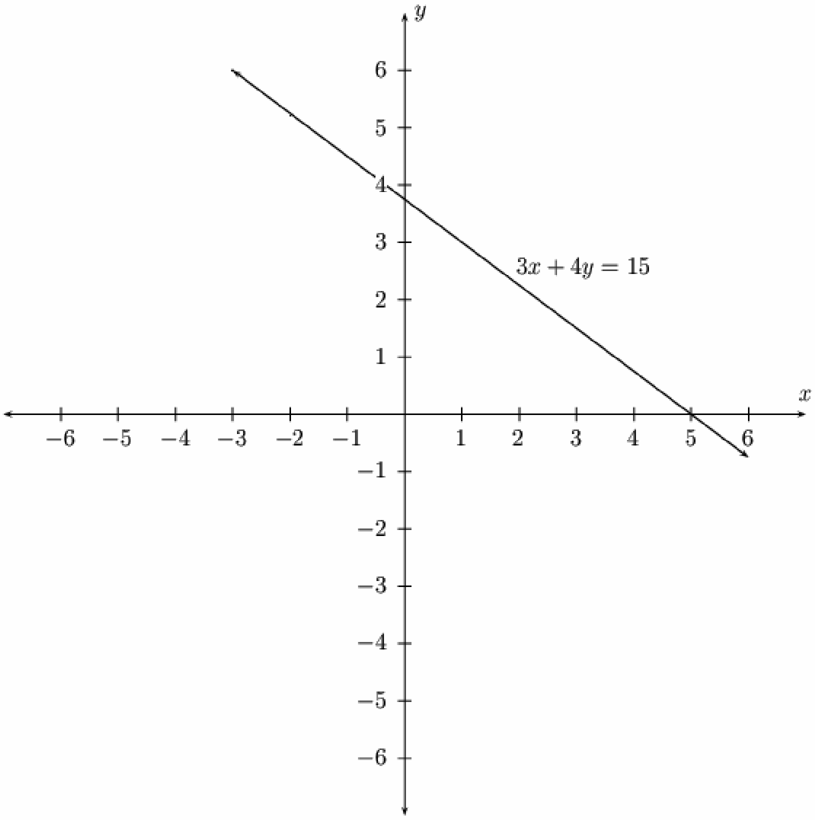
Como la ecuación tiene termino independiente la línea recta que ella representa no pasa por el origen. En este caso, lo más cómodo es hallar los interceptos sobre los ejes. El intercepto sobre el eje de las x se obtiene haciendo $y = 0$ y el intercepto sobre el eje de las y se obtiene haciendo $x = 0$.

Tenemos:

Para $y = 0, \quad x = 5$

$x = 0, \quad y = 3\tfrac{3}{4}.$

Marcando los puntos $(5,0)$ y $(0,3\tfrac{3}{4})$, y uniéndolos entre sí queda representada la recta que representa la ecuación $3x + 4y = 5.$



Unidades significantes del registro algebraico

Para identificar las unidades significantes se debe despejar la variable dependiente y así se tiene:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

Luego las unidades significantes son:

- Coeficiente <0, presencia del símbolo -,
- Coeficiente <1,
- Constante añadida de signo $+$.

Unidades significantes del registro gráfico

- Trazo descendente,
- El ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas,
- El trazo corta arriba del origen.

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Para el signo relacional "$=$" el trazo recto y no una zona, se asume como su correspondiente unidad significante, a la unidad significante "coeficiente <0, presencia del símbolo -" le corresponde "trazo descendente", a "coeficiente <1" le corresponde "el ángulo formado con el eje de las abscisas es mayor que el ángulo formado con el eje de las ordenadas" y a "se sustrae una constante de signo -" le corresponde "el trazo corta en el origen".

ANÁLISIS DE CONGRUENCIA

Para pasar del registro algebraico al registro grafico, se recurre a otro registro semiótico de la función lineal, la tabulación, en este caso sólo se tienen en cuenta dos puntos, los interceptos con los ejes coordenados, se trasladan a la figura fondo y se traza la recta. A diferencia de los otros ejemplos la función lineal se presenta como una ecuación lineal por tanto es necesario realizar un tratamiento para expresar esta ecuación de la forma $y = ax + b$.
El ejercicio es congruente, cumple los tres criterios de congruencia.

3.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se observa en todos los casos el cambio de registro se da en un sólo sentido, del registro semiótico de las expresiones algebraicas hacia el registro de los gráficos cartesianos, esta acción no ayuda en nada a la coordinación de los dos registros, simplemente desarrolla en el estudiante uno de los procesos generales que se deben tener en cuenta en cualquier acto educativo, este es la resolución de problemas, y no tiene en cuenta procesos importantes como razonamiento, modelación, comunicación, planteamiento de problemas, elaboración comparación y ejercitación de procedimientos, procesos que influyen decisivamente para un aprendizaje significativo de las matemáticas.

Al momento de enseñar la función lineal, el Álgebra de Baldor propone una serie de ejercicios en los cuales se establece una secuencia, presentando primero la estructura de la forma general de la función lineal $y = ax$ y luego la forma general $y = ax + b$ (ejercicio 3), es importante analizar este cambio que no sólo se presenta en este tópico sino que se presenta con mucha frecuencia en las secuencias de aprendizaje o en los cuestionarios al momento de enseñar la función lineal, el problema radica en proponer tareas que mezclan de manera no controlada varias actividades cognitivas heterogéneas entre las que cuentan tratamientos visuales, tratamientos algorítmicos, tratamientos discursivos, conversiones de sentidos diferentes. Dicho de otra manera, es necesario que la elaboración de secuencias de aprendizaje y de cuestionarios de evaluación no se haga sólo en función de un aprendizaje global de la actividad matemática y de sus objetivos, sino igualmente en función de variables cognitivas.

La conversión en todos los casos se hace pasando por una tabulación en ningún momento se discrimina y se coloca en correspondencia las unidades significantes entre el registro de partida y registro de llegada, así la conversión se hace a ciegas y no hay un aprendizaje significativo.

CONCLUSIONES

- El Algebra de Baldor sólo tiene en cuenta la conversión de las expresiones algebraicas hacia el registro gráfico, permitiendo desarrollar algoritmos, tratamientos dejando de lado la actividad de coordinación necesaria para un aprendizaje significativo. Además se ve que los ejercicios que se dan en este sentido son congruentes, ellos cumplen con los tres criterios de congruencia.

- La discriminación de las unidades significantes de registro de las representaciones gráficas exigen un trabajo de aprendizaje particular, para su utilización, no se puede remitir a la interpretación espontánea e inmediata que esta ligada a la percepción de las figuras y de las imágenes.

- Al enseñar la función lineal se deben proponer secuencias de aprendizaje que movilicen de manera controlada varias actividades cognitivas.

BIBLIOGRAFÍA

AURELIO, BALDOR. ALGEBRA ELEMENTAL. Cultural Colombia, Ltda. Bogotá, 1972.

DUVAL, R. GRÁFICAS Y ECUACIONES: LA ARTICULACIÓN DE DOS REGISTROS. Traducción de Myriam Vega Restrepo, Universite Louis Pasteur, Strasbourg: IREM, 1988.

DUVAL, R. LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS: FUNCIONAMIENTO Y CONDICIONES DE SU APRENDIZAJE. Documento Universitario, Traducción de Myriam Vega Restrepo, Universite Louis Pasteur, Strasbourg: IREM, 1988.

DUVAL, R. LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS FORMAS SUPERIORES EN EL DESARROLLO COGNITIVO. Cali: Universidad del Valle, 1999.

DUVAL, R. SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO. Traducción de Myriam Vega Restrepo, Cali: Universidad del Valle, 1999.

GUZMAN L, INSUATY, A. EL PAPEL DEL REGISTRO SEMIÓTICO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS. Investigación en proceso. Universidad de Nariño. 2007.

MARMOLEJO, G y OTROS. PROGRAMA DE MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN EN SANTIAGO DE CALI: HACIA UN PROYECTO EDUCATIVO DE CIUDAD. Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. 2.007.

MARMOLEJO, G. ALGUNOS TÓPICOS A TENER EN CUENTA EN EL APRENDIZAJE DEL REGISTRO SEMIÓTICO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS: PROCESOS DE VISUALIZACIÓN Y FACTORES DE VISIBILIDAD. Investigación no publicada realizada en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. 2.007.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. ESTÁNDARES PARA LA EXCELENCIA EN LA EDUCACIÓN. Santa Fé de Bogotá. 1994.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. MATEMÁTICAS: LINEAMIENTOS CURRICULARES. Santa Fé de Bogotá. Panamericana Formas e impresos. 1998.

VASCO, CARLOS E., *"UN NUEVO ENFOQUE PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS".* Volumen I y II, en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1994.