IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE (GEOGEBRA) EN EL AULA DE CLASE COMO HERRAMIENTA DE REPRESENTACIÓN PARA EL TEOREMA DE PITÁGORAS

AUTORAS:

MABEL YESENIA SIERRA AGUILLÓN

LAURA YINETH GIRALDO ÁVILA

DIRECTOR:

JOSÉ TORRES DUARTE

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2016

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Dios, quien nos ha permitido llegar a este punto de nuestro proyecto de vida, nos ha ayudado a salir adelante superando obstáculos presentes tanto en el desarrollo de la carrera como en la culminación de este gran trabajo.

Agradecemos enormemente a los estudiantes del grado 802 J.T. del Colegio Atanasio Girardot I.E.D. y la docente Yolanda Rodríguez por permitirnos implementar nuestra propuesta de actividades, a pesar de las molestias causadas por la interrupción de sus únicas clases de informática con este grupo.

Al director del trabajo de grado, el docente José Torres quien ha quedado marcado en nuestros corazones, como un docente extrovertido, soñador, dispuesto a ayudar a quien lo necesite, risueño y sobre todo, por tenernos paciencia y llenarnos de sabiduría para la culminación de este trabajo.

Por último agradecemos a nuestros familiares y compañeros que estuvieron pendientes del desarrollo de este trabajo, llenándonos de paciencia y fortaleza, apoyándonos en las dificultades que nos presentaron.

Mabel Y. Sierra

Laura Y. Giraldo

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

1. INTRODUCCIÓN

El presente es el informe final de trabajo de grado, que se desarrolló en la modalidad monografía, según acuerdo 038 de 2015. Este tuvo como pretensión ser el registro de la experiencia en el aula desarrollada con los estudiantes de grado octavo del colegio I.E.D. Atanasio Girardot en la comprensión del teorema de Pitágoras, haciendo uso de una herramienta tecnológica como es el caso del software GeoGebra.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: En el primer capítulo se observa una presentación de las dificultades encontradas en distintas unidades didácticas con sus respectivas evidencias, que fueron desarrolladas por estudiantes de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en años anteriores, en las que se trabajó el Teorema de Pitágoras.

En el segundo capítulo se encuentra la respectiva pregunta que orientó el desarrollo de este trabajo, el objetivo general y cuatro objetivos específicos a los cuales se les quiso dar abordaje con el desarrollo del mismo.

En el tercer capítulo se realiza un análisis teórico donde se estable el objeto matemático a trabajar encontrado en el marco matemático, es decir el Teorema de Pitágoras y las diferentes representaciones, también se observa un marco didáctico donde se estable el uso de TIC en el aula de clase y errores y dificultades que se podían presentar en aprendizaje de esta noción.

En el cuarto capítulo se encuentra la planeación y diseño de las respectivas actividades realizadas, seguidas de su análisis.

En el quinto capítulo se encuentran las conclusiones a las que llego luego de desarrollar la secuencia de actividades.

Finalizando con las referencias bibliográficas utilizadas.

2. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

En este apartado se encuentra la explicitación del problema de investigación y los antecedentes que ayudaron a delimitarlo. A continuación se exponen cada uno de los elementos.

DESCRIPCIÓN Y ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

Durante el proceso de investigación que realizamos a diferentes documentos, como Unidades Didácticas y tesis realizadas por estudiantes de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, se observó que en el desarrollo de las secuencias de actividades para el trabajo con el objeto matemático, (Teorema de Pitágoras) se presentaron diferentes errores y obstáculos:

- Una de las Unidades Didácticas investigadas, fue la de Rodríguez (2013) donde se menciona: *"… es evidente en cierto modo la demostración algebraica del Teorema de Pitágoras, pero al realizar la demostración geométrica se presentaron inconvenientes que a medida de la solución se iban resolviendo con la docente en formación, puesto que para los alumnos fue fácil determinar a partir de valores dados aleatoriamente la demostración del Teorema de Pitágoras remplazando a y b para hallar el valor de c (geométricamente la docente incluía ciertas preguntas como: ¿si dices que c es la hipotenusa, entonces quién es* c^2*?"* (Rodríguez, 2013, pp. 67)

  Observando en esta una dificultad del lenguaje, al analizar la relación con áreas como un valor ajeno a la magnitud de la longitud de los catetos del triángulo. Estas dificultades pueden deberse al uso inadecuado de símbolos y términos matemáticos, que se deben a una comprensión semántica errónea del lenguaje matemático.

Al plantear la ecuación olvidan que los valores deben estar elevados al cuadrado.

Evidencia:

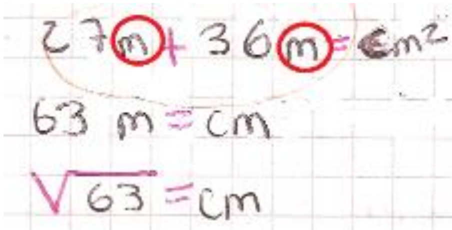


Ilustración 1. Evidencia de un error por comprensión semántica. Encontrado en Rodríguez (2013)

Análisis: *En este caso el estudiante olvida que el teorema de Pitágoras relaciona a los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo con el cuadrado de la hipotenusa y no simplemente a la medida de estos.*

- Acero (2013, pp. 140-141) en el análisis que realizó de una de sus actividades planteadas, observo que los estudiantes no tienen claridad de las operaciones con longitudes (lo que guía el trabajo al área) ocasionando que al aparecer las expresiones con potenciación, se evidencia que el trabajo con las medidas de longitud de los lados del triángulo sea erróneo.

No se encuentran familiarizados con operaciones como potenciación y radicación y esto hace que los resultados hallados sean erróneos.

Evidencia:

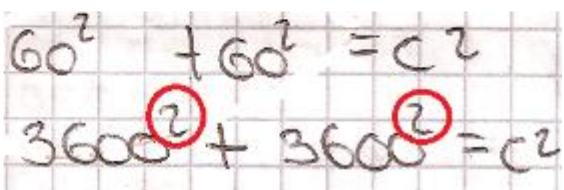


Ilustración 2. Evidencia de un error por conocimientos previos. Encontrado en Acero (2013)

Análisis: *aunque el estudiante plantea bien la ecuación, al operar muestra una idea errónea de potenciación.*

- (De Razones a Funciones Trigonométricas, 2013, pp. 20) Igual que la cita anterior, se menciona el error en la relación de la potenciación, pues no evidenció que *"el elevado al cuadrado"* sea una relación con el área de los cuadrados de la longitud de los lados del triángulo, sino que evidencia una simple multiplicación por 2. Aquí se observa una dificultad en la falta de dominio de los contenidos matemáticos previos, pues la potenciación es un contenido trabajado con anterioridad.

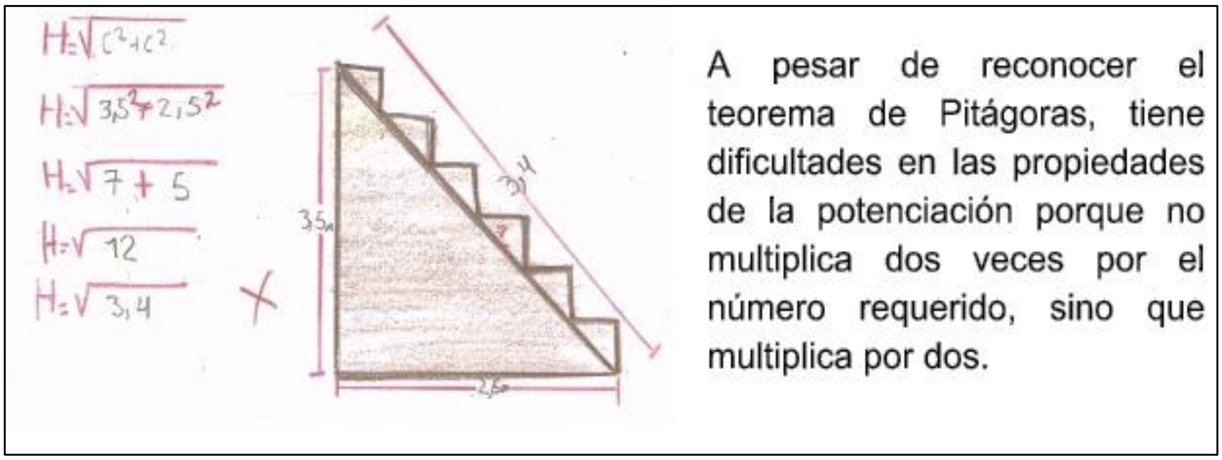


Ilustración 3. Evidencia de un error por conocimientos previos. Encontrado en De Razones a Funciones Trigonométricas, (2013)

- En la unidad didáctica realizada por Pinzón & Rodríguez (2004) se evidenció que en medio de todas las actividades realizadas, donde se tiene como objetivo *"Interpretar la noción del Teorema de Pitágoras",* aunque planteaban situaciones fundamentales se encontraban siempre con la falta de atención de los estudiantes al momento de querer implementarlas, pues recurrían en varias de estas al apoyo de guías como evidencia de lo aprendido, es decir que podemos hablar de una dificultad desencadenada por la secuencia de actividades implementadas, concluyendo que para el estudiante la guía utilizada no fue significativa, ocasionando en él la falta de motivación en el desarrollo de las actividades. También se observó que en los resultados se realice una relación entre los valores de los segmentos de unos triángulos rectángulos, más no se evidencia que hallen una relación entre los cuadrados creados por las medidas de estos segmentos.

- Quizás, el error se da por hecho desde que se les presenta a los estudiantes el teorema textualmente, por ejemplo, en la unidad didáctica de León & Sarmiento (2004) , y más sí se espera que se resuelvan las situaciones propuestas por medio de este "teorema": *"... el Teorema de Pitágoras relaciona los dos catetos con la hipotenusa…",* es aquí que se evidencia que no se hizo la debida relación, pues no se menciona los cuadrados que se forman por cada cateto y la hipotenusa, y se empieza a trabajar desde un error de interpretación por parte de los estudiantes, donde no observa ninguna relación con el área, evidenciando el trabajo desde un error de lenguaje, pues se expresa un contenido matemático de forma incorrecta dando paso a una mala comprensión.

- Otra fue la Unidad Didáctica realizada por Mendoza, Bernal, Morales, Bogotá & Cuervo Lagos (2010), quienes buscaban que por medio del teorema de Pitágoras los estudiantes hallaran el lado de un triángulo propuesto en una situación, pero los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM) muestran de forma tradicional como se halla la longitud del cateto del triángulo, más no dejaron que los estudiantes hallarán la forma por sí mismo de cómo dar respuesta a la situación propuesta, pero a pesar de esto el análisis que realizó termina siendo que los estudiantes no tenían el correcto manejo del teorema. La solución que se halla a esto es de manera tradicional, pasar al tablero y realizar diferentes triángulos que orientados por preguntas como: ¿Cuál es el valor de h?, conociendo los valores de los catetos, y como se observa en el siguiente diálogo, los EPM optan por explicar de forma común, mas no siguiendo la situación planteada.

E: Profesor, ¿los catetos deben ser sumados o multiplicados?
P: deben ser sumados.
E: ahh, gracias.
P: Pero si en caso es hallar la longitud de un cateto, que se debe hacer.
E: Mmm, no sabemos.
P: tenemos que la ecuación para hallar la hipotenusa es $h^2 = c^2 + c^2$. *¿Cierto?*
E: Si
P: y si queremos hallar el valor de este cateto (señalando con el dedo una de las dos incógnitas "c^2*") que se debe hacer.*

E: ahh, se debe dejar esta letra.

P: Exacto entonces cómo se resolvería.

E: la otra c^2 *pasa al otro lado a restar, quedando de esta manera:* $-c^2 + h^2 =$.

P: mm sí, pero esto se puede organizar así, $h^2 - c^2 = c^2$ *y de esta manera se resuelve igual que cuando se quiere hallar la hipotenusa.*

E: ¿O sea que también se debe sacar raíz cuadrada?

P: si la "c" queda al cuadrado, como se quita el cuadrado.

E: con la raíz cuadrada.

P: Entonces…

E: Pues también se saca la raíz.

P: Exacto.

Se observa también que repitieron muchas veces este ejercicio, por tanto al final concluyen que el estudiante sabe utilizar el teorema de Pitágoras porque replican el siguiente procedimiento dicho por un estudiante, como un algoritmo, más no como una relación que hayan encontrado:

E: … (Escriben el proceso de en el tablero), entonces este lado mide 7 y este otro lado mide 14, elevamos esos dos números al cuadrado y los sumamos y después le sacamos raíz, y nos dio 12,84. (Mendoza Bernal, Morales, Bogotá, & Cuervo, 2010, Pág. 127)

Debido a estas evidencias y por interés propio, creamos una serie de actividades donde se involucró el uso de una tecnologías computacional como una herramienta de apoyo para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras, más estas no fueron actividades para desarrollar en un curso completo, más bien fueron como complemento de las clases que los estudiantes tenían, realizándolas fuera del horario de la materia (matemáticas) y en un salón distinto al cotidiano (sala computación); Por lo cual, estas se realizaron más con la idea mencionada por Giroux citado por Orozco (2003) se realiza un reconocimiento desde la autocrítica, donde se puede crecer como maestro y como trabajadores de la cultura; desarrollando con esto un proceso para identificar problemas en la enseñanza, produciendo como consecuencia la necesidad de buscar respuestas para solucionar estas dificultades.

3. PREGUNTA ORIENTADORA

¿Qué elementos se deben tener en cuenta para diseñar una propuesta didáctica que use el software GeoGebra como herramienta para superar obstáculos y/ dificultades encontradas en el proceso enseñanza-aprendizaje del objeto matemático el teorema de Pitágoras?

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar una propuesta didáctica apoyada en el software GeoGebra, para la representación del Teorema de Pitágoras.

4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconocer las funciones que cumple el software (GeoGebra) en la representación del teorema de Pitágoras.
- Diseñar e implementar actividades apoyadas con el software GeoGebra.
- Identificar obstáculos y/o dificultades que se en el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta el entendimiento de un teorema generalizado como lo es el Teorema de Pitágoras.
- Identificar las posibles construcciones y/o representaciones que se pueden dar del teorema de Pitágoras.

5. MARCO TEÓRICO

INCORPORACIÓN DE LAS TECNOLOGÍA COMPUTACIONALES COMO INSTRUMENTO MEDIADOR EN EL AULA

Si algo nos enseñó el siglo XX, es a ser cautos con la palabra 'imposible'.
Charles Platt, Wired

Tener una simple visión en la enseñanza sobre el método clásico o de sobre las clases catedráticas brinda una pauta, en grandes rasgos, para poder hablar sobre los cambios que han existido en la educación al otorgarle cada vez más importancia al uso de las herramientas, recursos o instrumentos en el salón de clases como mediadores del aprendizaje.

Moreno (2002c) demarca la importancia de este cambio de visión al mencionar el conflicto producido en las demostraciones realizadas por Arquímedes, en las cuales utiliza lo que él llamo "método mecánico", dando como resultado dos posiciones divergentes: una visión clásica donde "se debe" trabajar toda demostración desde una axiomática demostrativa basándose netamente en la razón o una teoría conceptual, contrastando con la idea en la que es válido tomar en consideración para apoyar *el producto del intelecto* en los objetos materiales y en la perspectiva sensorial de los mismos. La opción de procedimiento otorgada por Arquímedes trata de *Describir, Explicar y Modelizar* un fenómeno por medio de lo que se entiende como "realidad", traspasándolo a diversas representaciones para así poco a poco rigorizarlo por medio de la teoría, dando apertura con esto, a una visión de "unas matemáticas visuales" las cuales se pueden entender desde el entorno, e ir pasando a un lengua más técnico, logrando en muchos casos aprender desde la experiencia, entendiendo que:

"Esta no proviene solo del mundo exterior sino, de manera central, de la actividad reflexiva que toma como base aquella confrontación". Moreno (2002b)

En la constante construcción de conocimiento el ser humano ha creado diversos signos lingüísticos como lo son: Los gestos, el lenguaje, la escritura, el conteo, los signos, entre otros, para ayudarle a comunicar el pensamiento y facilitar la interacción con otras personas, construyendo así un conocimiento social; un aspecto que es referido por Bartolino y Mariotti (2008) al citar a Vygosky (1981) en la idea que el aprendizaje tiene una característica de pragmático o experimental, el cual se da en un tipo de experiencia reflexiva donde el estudiante interactúa con el ambiente (contexto social) por medio de los signos y artefactos, los cuales ayudan a reconstruir su pensamiento y a interiorizarlo. Enfatizando la idea que el aprendizaje no solo consta de una “transmisión” de conocimientos que se realiza del docente al estudiante, sino que en esta intervienen varios factores.

Ilustración 4. Interacción de un aprendizaje experimental.

Esta interacción se asemeja a “una espiral interminable”, ya que sucede constantemente en el trascurso de la vida y de las experiencias, en la cual parece ser que el único intermediario entre el sujeto y el ambiente sería lo que es llamado “signos”. Aunque se debe tener en cuenta que estos no se limitan a simples conectores lingüísticos, sino que se expande al uso de artefactos o de objetos, los cuales son definidos como: “cualquier objeto fabricado con cierta técnica para desempeñar alguna función específica”, la cual es similar a los signos en esta comunicación continua, “el signo actúa como un instrumento de la psicología, de manera análoga a la función que tiene un artefacto como herramienta de trabajo” (Vygosky, 1981, citado por Bartolino & Mariotti, 2008)

Por lo tanto se puede considerar que el hombre ha construido diversos artefactos en el trascurso del tiempo, tanto para cumplir una función de comunicación como el simple hecho de ser resultado de su ingenio para resolver distintas necesidades. Es así como Bartolino & Mariotti (2008) explican algunos de estos, como lo fue el lápiz y el papel para cuestiones de registro y de memoria, instrumentos médicos, musicales o simplemente científicos, en respuesta a diferentes ciencias, y las computadoras o calculadoras para la agilización en procedimientos técnicos.

Entender que estos artefactos son simples “objetos neutros” y que es del mismo ser humano el que le otorga una funcionalidad es la idea que Rabardel (2011) pone en juego, considerando que los artefactos son resultado de la evolución y reflejan un momento histórico, además no cumplen simplemente con una funcionalidad técnica, sino que en la práctica, la importancia se centra en el significado que le da el sujeto en su utilización, convirtiéndolo así en un instrumento. Por lo tanto, en la enseñanza está bien mencionar el uso de diversos artefactos o recursos como instrumentos mediadores para el conocimiento, pero dependiendo de la mediación que le otorgue el docente.

Bartolino & Mariotti (2008) realizan un símil de la mediación del profesor en el aula, con algo llamado Orquestación Instrumental (OI), la cual ejemplifica al imaginar a un director de orquesta el cual tiene al frente una filarmónica con músicos principiantes como profesionales, los cuales siguen sus indicaciones y tocan sus instrumentos, de acuerdo a las indicaciones que el director basa en su partituras, con las que puede improvisar, pero teniendo en cuenta que debe concluir perfectamente la pieza.

La pieza debe estar monitoreada todo el tiempo, como el profesor vigila el proceso del estudiante, tanto de una forma individual como colectiva dándole sentido a la Génesis Instrumental. Esta orquestación debe estar previamente planeada, en la que el docente visualice los tiempos de trabajo, los cuales deben ser flexibles, y otorgar una didáctica, la cual debe tener un aspecto riguroso, esto se da en dos tiempos tanto en una preparación previa como en el momento de acción.

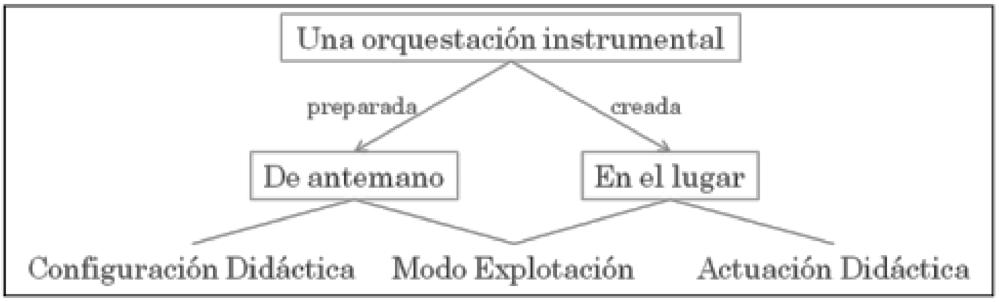


Ilustración 5. Dimensión temporal de una orquestación instrumental. Bartolini & Mariotti (2008)

Elementos a tener en cuenta para una OI:

- *Configuración didáctica:* Es la ambientación de la enseñanza y el arreglo del artefacto que interviene en ella.
- *Modo explotación:* Es la configuración en que la tarea es introducida, los posibles roles que va tener el artefacto, los esquemas y técnicas a desarrollar.
- *Actuación didáctica:* Involucra las decisiones tomadas sobre la didáctica y en el trascurso de dicha clase.

Por lo cual, todo se reduce a como el docente vaya dirigiendo la clase con base en el instrumento a utilizar, el cual permitirá al estudiante pensar o aprender, recordando que el instrumento tiene como característica ser flexible, pues podrá ser usado en diferentes conocimientos y técnicas, todo dependerá de la potencialidad que el docente fomente en la relación entre el estudiante, el instrumento y el conocimiento matemático. (Bartolini & Mariotti, 2008).

Es en la *Instrumentación* que el estudiante identifica cualidades y restricciones que la herramienta otorga para la resolución de un problema, identifica la potencialidad de este en una determinada actividad la cual ejemplifica Rabardel (2011) en su metáfora de las Caja Negra y la Caja de Cristal, las cuales caracterizan las diferentes formas en que se pueden utilizar el artefacto, si la actividad está dirigida a la comprensión del artefacto, cómo es su funcionamiento, la forma en que se puede utilizar, o lo qué se llega construir a base de este, el artefacto tomará una importancia relevante, lo cual no le permitirá al estudiante nada más que dirigir su atención en el artefacto en sí, pero si el estudiante supera esta etapa y se familiariza con este, poco a poco se “trasparentará” volviéndose una caja de cristal con la se podrá visualizar más allá del objeto mismo, centrando su interés en el conocimiento que está en juego.

Sí se busca el concepto de Tecnología en el Diccionario de la Real Academia, encontraremos que lo define como “Conjunto de los instrumentos y procedimientos industriales de un determinado sector o producto”, lo cual es muy parecido al concepto de artefacto que se ha utilizado, entonces se puede tratar uno semejante al otro, esta idea es con la finalidad de también poder utilizar e identificar las Tecnologías Computacionales como una herramienta de mediación en el aula de clase.

“La herramienta computacional ha modificado profundamente la exploración con la sistematización del pensamiento matemático” (Moreno, 2002c) permitiendo al ser humano dar un gran salto en los temas como comunicación, entretenimiento, avances científicos, entre otros. Considerando a su vez que, la forma de emplear las tecnologías pasa por dos procesos en cualquier ámbito, en primera medida por un proceso de Ampliación y posteriormente uno de Reorganización, lo que quiere decir y es explicado por Moreno (2002b):

- Un proceso de Ampliación: Cuando pasa hacer lo de antes mejor.
- Un proceso de Reorganización: Cuando se piensa en que otras cosas se puede hacer, y como reorganizar las funciones nuevas halladas.

Por consiguiente para el ámbito de la enseñanza estas Tecnologías Computacionales han ayudado al alcance de una nueva dimensión en la virtualidad de objetos y en una nueva forma de manipulación, por ejemplo, cuando se introduce unos ciertos datos a la máquina, esta hace unos procesos para dar una respuesta, como resultado de una operación o el graficar una función, pero no solo es un dispositivo que registra la información como soporte de una representación externa como lo es el papel, además posibilita acceder a la información de una manera diferente y diversa. (Moreno, 2002a)

LA GEOMETRÍA DINÁMICA COMO PRODUCTOR DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La tecnología actualmente da pasos sobresalientes en su desarrollo, y con este vienen innovaciones cada vez más prácticas. En el tema de la educación matemática se requiere un despertar rápido por el lado de los docentes, para poder aprovechar estos recursos computacionales en el aula de clases, a los que cada día se les puede sacar un mejor provecho. Actualmente existen software que dinamizan las representaciones de algunos objetos matemáticos (equivalencias, inecuaciones, funciones, matrices, objetos geométricos, entre otros) los cuales permiten al educador trabajar otro tipo de "realidad matemática" como lo es la Geometría Dinámica (GD), algunos de los programas que se pueden encontrar en el mercado son: Cabri, Slis work, Auto Cad o Geogebra.

Estos objetos virtuales que aparecen en la pantalla al trabajar dichos programas, son productos de un "*Universo interno*" de una herramienta computacional, equivalente a la matemática instalada en el procesador central de la computadora, y desde allí son controlados, es así que se puede llegar a decir "que estos objetos que aparecen en la pantalla son modelos manipulables de los objetos matemáticos", modelos que contribuyen a la interrelación de estos objetos virtuales y ayudan a la sistematización del concepto para el explorador, en este caso el estudiante. (Moreno, 2002c)

Se puede presentar y usar de dos formas distintas estos programas que trabajan la GD, como lo es GeoGebra, en el aula de clase:

- Como *Aplicación:* Para asegurar el cumplimiento de las propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción, que hasta ahora ha otorgado el usar instrumentos como el lápiz, el compás y la regla.
- Como *Hoja dinámica*: Esto no sólo para construir una representación visual, además para ir legitimando ciertas conclusiones que se pueden dar al finalizar las construcciones, ya que estas no salen al azar, sino que fueron construidas de manera explícita con unos pasos dados previamente, o por la ayuda de herramientas propias del programa como lo son: Polígono regular, Paralela, Perpendicular, entre otros. Por lo tanto el mismo estudiante por medio de diversos pasos y herramientas llega realizar

> su propia construcción, debido a esto y en muchos casos a la exactitud que el programa le otorga al estudiante, llega a formar su propia estructura de argumentos, alcanzando así a estructurar su propia construcción axiomática semejante a la Geometría Euclidiana.(MEN, 2004)

“Todo constructo que realiza el estudiante por medio de un ambiente computacional, otorga para este objeto una existencia casi material” (Moreno, 2002a), considerando que estos software no solo otorga al estudiante el poder construir objetos con una Geometría Euclidiana, de igual manera le permite interactuar con el objeto construido moviéndolo o produciendo una acción de “*arrastre*” y/o una acción de modificación en un “tiempo real”, posibilitando que al realizar estas transformaciones en el plano pueda identificar las propiedades variantes e invariantes de los objetos en cada uno de estas, y posibilita la construcción de un sistema de representaciones que guardan unas características generales entre sí. (MEN, 2004)

No obstante, para la construcción de una noción matemática D’Amore (2004) nos indica que todo proceso de construcción de dicha noción pasa de una “Práctica personal” en la cual se mira la concepción individual del objeto, donde internamente el estudiante empieza precisar y hacer operativo ese entendimiento o esa concepción que tiene sobre el objeto, para así encontrarlo, enfrentarlo y/o relacionarlo con los aspectos sociológicos, o concepciones de acuerdo al contexto histórico-cultural.

Agregado a lo anterior, se tiene en cuenta el uso de diversas representaciones semióticas, pues estas son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, a los objetos no tangibles, por medio de sistemas de representaciones como: algebraica, geométrica, grafica, simbólica, esquemas e imágenes. Para esto Mansilla (2011), cita a Duval (2004) en tres actividades cognitivas que realiza el estudiante para la comprensión e interpretación de las representaciones:

- **Actividad de formación:** Donde se ven representaciones de un registro semiótico particular, conjunto de marcas perceptibles e identificables.
- **Actividad de tratamiento:** Se observan las transformaciones propias de cada registro, de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema.

- **Actividad de conversión:** Como su nombre lo indica, se busca convertir las representaciones producidas en un sistema a otro sistema de representaciones.

Otorgando así tanto la importancia a la conversión de un registro a otro para representar un mismo objeto, en el que se utilizan elementos como: transposiciones, ilustraciones, traducciones, interpretaciones, etc., concretar una noción matemática se da al enfrentar esta "Práctica personal" con "Una concepción social" de los cuales se forma un lenguaje general en la comunidad.

TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras "tiene la propiedad de entrelazar y unificar gran número de proporciones de la matemática general (geometría, trigonometría, álgebra y cálculo, entre otras)" (Garciadiego, 2002), por dicha razón, se le dio importancia al papel que juegan las diferentes representaciones semióticas en el aprendizaje del mismo, y como en la conceptualización se podría identificar y trabajar desde los diferentes registros semióticos que los estudiantes llegasen a utilizar, como lo puede ser: registro oral o las expresiones verbalizadas, registro gestual o el registro de la escritura, es decir lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos, …). (D'Amore, 2004)

Otorgando así la posibilidad no solo de diseñar una Unidad en torno a este objeto matemático, a su vez permitiendo el registro posible en las diferentes fases y determinando con mayor facilidad el papel que puede tener un software dinámico como herramienta en la construcción de un sistema de representación semiótica. El Teorema permite entonces, trabajar de acuerdo a las acciones que menciona Duval (1999) citado por Rojas (2012), en la construcción de una noción:

- Representación en un registro.
- Transformación de la representación interna en el mismo registro.
- Conversión de la representación de un registro a otro. (Contrastar la representación gráfica con otras, como lo es la verbal o algebraica)

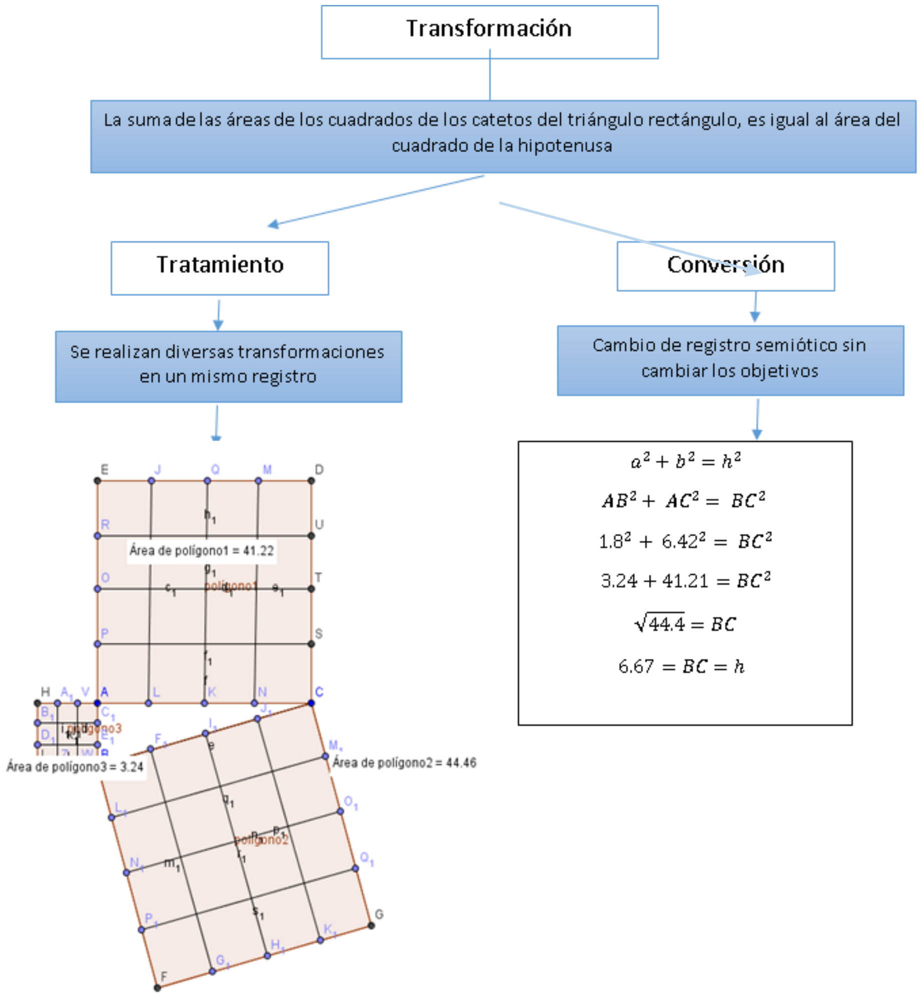


Ilustración 6. Transformación de representaciones semióticas del Teorema de Pitágoras

Rojas (2012) afirma que en las matemáticas se trabaja desde un realismo ingenuo, pues a estas solo nos podemos remitir por unos “no – objetos”, o representaciones, los cuales no son ajenos a un sistema semiótico de representaciones. Teorema que se ha reformado y tratado desde diversos tipos representaciones, como lo es el de Pitágoras, idea que es perfectamente resumida por González (2008)

> *“Es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría –la fórmula cos2a + sen2a = 1 es un caso particular del Teorema de Pitágoras y el Teorema del coseno es una generalización del mismo–. La relación pitagórica x2 + y2 = z2 es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat.”*

Para hablar de este Teorema hay un sinfín de demostraciones, y un recorrido histórico amplio para llegar y fortalecer esa ecuación tan conocida por todos como $c^2 = a^2 + b^2$, González (2008) hace este recorrido el cual concluye con Pitágoras, como resultado de una investigación desarrollada desde hace mucho tiempo por diversas culturas como la Babilónica, Egipcia, China, entre otras; para dar solución a problemas de agrimensura (problemas sobre Arte de medir tierras) y para llegar a dar solución a diversos problemas en la construcción de obras, edificaciones o arquitecturas. Garciadiego (2002) da un brochazo un poco más leve a la parte histórica para centrase en la demostración realizada por Euclides en su primer libro y su última proposición (47), que menciona: *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.* Otorgándole a esta aspectos positivos para utilizarlo en la enseñanza por su estructura axiomática tan relevante para la construcción que puede hacer el estudiante en su aula.

Estructura teórica que es definida por Esteban, Ibáñez & Ortega (1998) con base a las relaciones métrica existentes entre los triángulos rectángulos, como resultados al realizar una mirada histórica sobre el Teorema, la cual no es muy distinta a las ya mencionadas, y enmarcando así las posibles relaciones que pueden usar el profesor en la enseñanza de dicho objeto, como lo es: (Triángulos semejantes, Criterios de semejanza (medidas de la altura y/o catetos) , Triángulos rectángulos (tipo de triángulos), para finalizar en el Teorema de Pitágoras.

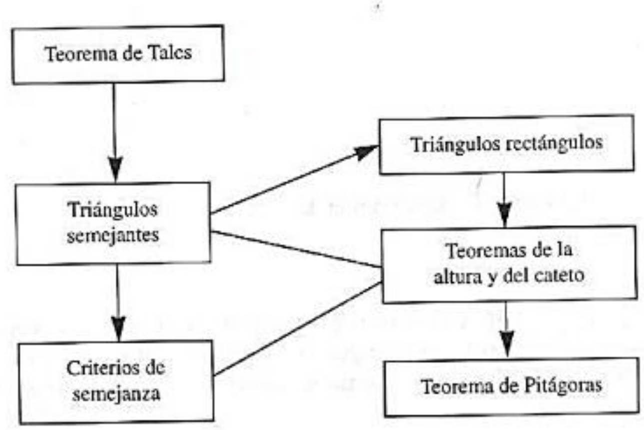
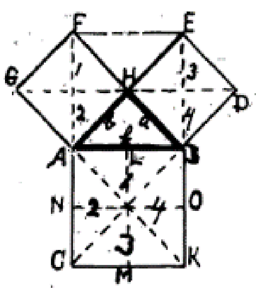


Ilustración 7. Tópicos y relaciones existentes para trabajar Teorema de Pitágoras. (Esteban, et al, 1998 pp.120)

Con más de 300 demostraciones tanto algébricas, como en geometría Euclidiana el libro *The Pythagorean proposition*, del autor Loomis (1940) otorga las representaciones (a nuestro parecer) más adecuadas para usar como construcción y aplicación en un software dinámico como herramienta mediadora en el aula, permitiendo trabajar con mayor facilidad en las fases de formación y transformación para la construcción del Teorema.

Las siguientes son traducciones exactas de las demostraciones tomadas del libro original:

Five



Another particular case is illustrated by fig. 108, in which BH = HA, showing 16 equal triangles.

Since the sq. AK contains 8 of these triangles, ∴ sq. AK = sq. HD + sq. HG. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

a. For this and many other demonstrations by dissection, see H. Perigal, in Messenger of Mathematics,

Fig. 108

Ilustración 8. Demostración "CINCO" tomada de Loomis (1940, pp.102)

Demostración "CINCO"

Otro caso particular es ilustrado por la fig. 108, en la cual BH= HA, observamos 16 triángulos iguales.

Ya que el cuadrado AK contiene 8 de estos triángulos.

Por lo tanto el cuadrado sobre AK = cuadrado sobre BH + el cuadrado sobre AH. Por lo tanto $h^2 = a^2 + b^2$.

Six

In fig. 108, omit lines AP, BE, LM and NO, and draw line FE; this gives the fig. used in "Grand Lodge Bulletin," Grand Lodge of Iowa, A.F. and A.M., Vol. 30, Feb. 1929, No. 2, p. 42. The proof is obvious, for the 4 equal isosceles rt. tri's which make up sq. FB = sq. AK. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

a. This gives another form for a folding paper proof.

Seven

In fig. 108, omit lines as in proof Six, and it is obvious that tri's 1, 2, 3 and 4, in sq's HG and HD will cover tri's 1, 2, 3 and 4 in sq. AK, or sq. AK = sq. HD + sq. HG. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

a. See Versluys (1914), fig. 1, p. 9 of his 96 proofs.

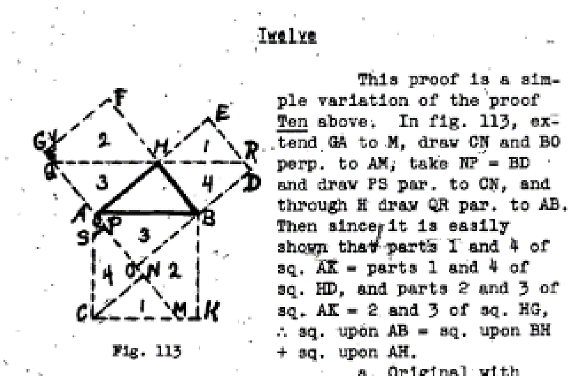
Ilustración 9. Demostraciones "SEIS" y "SIETE" tomadas de Loomis (1940, pp.103)

Demostración "SEIS"

En la fig. 108 omite las líneas AP, BE, LM y NO, y dibuja FE; así tendrás la figura usada en "Gran presentación del boletín"… La prueba es obvia, para los 4 triángulos isósceles iguales. Triángulos con los que haces que el cuadrado FB = cuadrado AK. Por lo tanto $h^2 = a^2 + b^2$.

Y la demostración "SIETE". En la figura 108, omite la líneas como en la prueba "SEIS", y es obvio que los triángulos 1, 2, 3 y 4, en los cuadrados HG y HD se cubrirán por los triángulos 1,2,3 y 4 del cuadrado AK. O el cuadrado AK = al cuadrado HD + el cuadrado HG. Por lo tanto $h^2 = a^2 + b^2$.

Demostración "DIEZ" "



Twelve

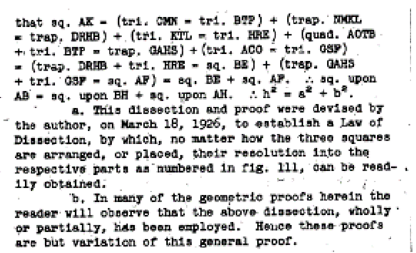
This proof is a simple variation of the proof Ten above. In fig. 113, extend GA to M, draw CN and BO perp. to AM; take NP = BD and draw PS par. to CN, and through H draw QR par. to AB. Then since it is easily shown that parts 1 and 4 of sq. AK = parts 1 and 4 of sq. HD, and parts 2 and 3 of sq. AK = 2 and 3 of sq. HG, ∴ sq. upon AB = sq. upon BH + sq. upon AH.

a. Original with

Fig. 113

Ilustración 10. Demostración "DIEZ" " tomada de Loomis (1940, pp.105, 106)

En la figura 111, en CK se construye el triángulo CKL= triángulo ABH. Prolonga CL hasta P, con haciendo que LP =BH y tomando LN = BH; dibuja NM, AO y BP siendo perpendiculares a CP; en algún ángulo del cuadrado GH construyó el triángulo GSF = triángulo ABH y en algún ángulo del cuadrado HD como H, con radio KM determina un punto R y dibuja HR, así diseccionaremos los cuadrados como la figura.



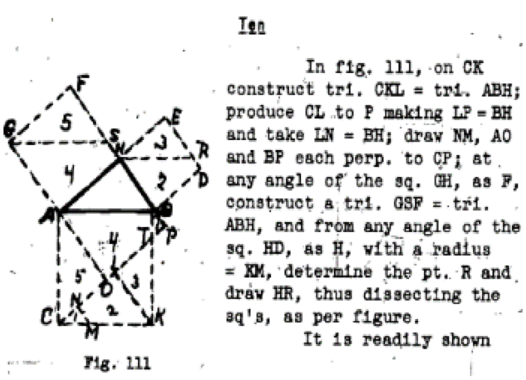
that sq. AK = (tri. CMN = tri. BTP) + (trap. NKL = trap. DRHB) + (tri. KTL = tri. HRE) + (quad. AOTB + tri. BTP = trap. GAHS) + (tri. ACO = tri. GSF) = (trap. DRHB + tri. HRE = sq. BE) + (trap. GAHS + tri. GSF = sq. AF) = sq. BE + sq. AF. ∴ sq. upon AB = sq. upon BH + sq. upon AH. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.

a. This dissection and proof were devised by the author, on March 18, 1926, to establish a Law of Dissection, by which, no matter how the three squares are arranged, or placed, their resolution into the respective parts as numbered in fig. 111, can be readily obtained.

b. In many of the geometric proofs herein the reader will observe that the above dissection, wholly or partially, has been employed. Hence these proofs are but variation of this general proof.

Es fácil mirar que el cuadrado AK = (triángulo CMN = triángulo BTP) + (trapezoide NKL = trapezoide DRHB) + (triángulo KTL = triángulo HRE) + (cuadrilátero AOTB + triángulo BTP = trapezoide GAHS)+ (triángulo ACO = triángulo GSF) = (trapezoide DTRFB + triángulo HRE = cuadrado BE) + (trapezoide GAHS + triángulo GSF = cuadrado AF) = cuadrado BE + cuadrado AF. Por lo tanto cuadrado sobre AB = cuadrado sobre BH + el cuadrado sobre AH. Por lo tanto $h^2 = a^2 + b^2$.

Demostración "VEINTE"



Ten

In fig. 111, on CK construct tri. CKL = tri. ABH; produce CL to P making LP = BH and take LN = BH; draw NM, AO and BP each perp. to CP; at any angle of the sq. GH, as F, construct a tri. GSF = tri. ABH, and from any angle of the sq. HD, as H, with a radius = KM, determine the pt. R and draw HR, thus dissecting the sq's, as per figure.

It is readily shown

Fig. 111

Ilustración 11. Demostración "VEINTE" tomada de Loomis

Esta prueba es una simple variación de la prueba 10. En la fig.113 entiende GA hasta M, dibuja CN y BO perpendiculares a AM; toma NP=BD y dibuja PS paralelo CN, mediante H dibuja QR paralelo a AB.

Entonces ya que es fácil mirar que las partes 1,4 del cuadrado AK son iguales a partes 1 y 4 del cuadrado HD, y que las partes 2,3 de AK = 2,3 del cuadrado BH. Por lo tanto el cuadrado sobre AB = cuadrado sobre BH + el cuadrado sobre AH.

ERRORES Y OBSTÁCULOS

Los errores en el aprendizaje matemático, han sido aspecto de estudio a lo largo de la historia del desarrollo del conocimiento, en estas épocas de análisis y de categorización de los errores, han sido limitadas por las ciencias de la pedagogía y la psicología, también por los objetivos y las formas de organización del currículo de matemáticas.

En el Siglo XX en Alemania se dieron las primeras investigaciones de americanos y europeos sobre los errores, con su gran exponente Wiener un matemático Estadounidense, creador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores (Rico, 1995 citado por Abrate, Pochulu, y Vargas, 2006). A partir de los años 50 se dio otra fase de investigación sobre los errores, que gracias a los teóricos, Wiener, la teoría de la información de Shannon, los trabajos de Bruner y las experiencias de Newell y Simon, se abrió campo hacia diversas áreas del conocimiento dando como resultado nuevos métodos y abordajes para los problemas estudiados. Hacia finales de los años 70, Radatz (1980) realiza una revisión de distintas investigaciones donde encuentra que:

- ✓ *La aritmética constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios de errores.*
- ✓ *Los desarrollos teóricos en análisis de errores muestran cierta continuidad en Estados Unidos, mientras que en los países europeos las producciones han sido esporádicas y carecen de continuidad en el tiempo hasta fechas muy recientes.*
- ✓ *Existe una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicación de las causas de los errores.*

Rico (1995) coincide con Radatz (1980) citados por Abrate, et al, (2006) argumentando que gran parte de los estudios de errores consisten en dar cierto número de soluciones incorrectas a problemas, lo que lo llevo a clasificar para determinar ¿Cómo surgen los errores?, asi mismo define la palabra error, como un conocimiento deficiente e incompleto, una posibilidad y una realidad en el conocimiento científico, teniendo en cuenta que el objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento, y el proceso de enseñanza-aprendizaje incluye errores sistemáticos, los cuales serán explicados adelante.

Labor que se basa en la idea de Borasi sobre la constructivista del error, indicando que estos pueden ser tomados por dos vertientes: *i)* para eliminarlos o *ii)* para explorar sus potencialidades, basándose en el contenido técnico-matemático del error, en la naturaleza de la Matemática o en el proceso de aprendizaje de la propia disciplina.

"Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar." (Godino, Botanero y Font, 2003) Determinando así que el *obstáculo* no se produce necesariamente cuando el error es por falta de conocimiento, sino que el estudiante utiliza un conocimiento inadecuado en ciertas circunstancias.

La identificación de errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, permiten al docente crear estrategias para prevenir y corregir aquellos aspectos que están generando dificultades, considerando que estos errores pueden ser aceptados y superados, es aquí donde se vuelve interesante la identificación, pues gracias a esta se permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento.

Rico (1995) menciona que en diferentes investigaciones se observa una relación en cuanto a características de los errores cometidos por los alumnos, por ejemplo:

- Los errores pueden ser sorprendentes, pues de manera frecuente estos han sido ocultados para el docente.
- Los errores son persistentes, ya que estos reflejan el conocimiento de los estudiantes sobre un concepto.
- Los errores pueden ser sistemáticos o por azar, aunque con frecuencia se presentan más los mencionados primero, estos se deben a la comprensión equivocada que el estudiante considera y por tanto utiliza como correcto. Los segundos reflejan la falta de cuidado y tienen poca relevancia.
- Los errores ignoran el significado, es aquí donde las respuestas incorrectas se dejan quietas y por tanto no se ponen en cuestión lo que hace que el estudiante no comprenden el significado correcto de los símbolos o conceptos trabajados.

Es así, como varios investigadores como: Ashlock, Reisman, Robitaille, Bell, Ginsburg, Erlwanger y otros citados por Abrate, et al (2006) señalan que los errores en matemáticas no son productos accidentales sino que son resultados de estrategias y reglas empleadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así mismo Godino, et al (2003) indican que los errores y los obstáculos están asociados a causas como:

- ✓ Dificultades relacionadas en los contenidos matemáticos: Para facilitar la enseñanza de cierto contenido matemático es indispensable realizar un análisis sobre este, pues se pueden identificar variables y/o grados de dificultad que se deben tener previstos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- ✓ Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas: Puede que la propuesta de actividades realizada por el profesor no sea lo suficientemente significativa, ya sea porque el profesor no estructura bien los contenidos a enseñar, por los materiales escogidos no son los apropiados o son rutinarios, repetidos etc, o porque la presentación del conocimiento por parte del profesor no es suficientemente clara ni está organizada adecuadamente.
- ✓ Dificultades que se originan en la organización del centro: Puede suceder cuando se tiene un horario del curso inapropiado, no se dispone de materiales suficientes y eficaces etc.
- ✓ Dificultades relacionadas con la motivación del estudiante: Las actividades propuestas por el profesor pueden que no sean significativas o representantes de agrado para los estudiantes. Se pueden observar problemas como la autoestima o más a fondo un problema que emerja durante la historia escolar del estudiante.
- ✓ Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico del estudiante: Aquí se tienen en cuenta la superación de las etapas según Piaget, pues puede suceder que el niño no haya superado la etapa preoperatoria.
- ✓ Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores: Algunos estudiantes están en un nivel evolutivo adecuado pero no tienen los conocimientos necesarios previos para aprender un nuevo conocimiento

No obstante, como lo menciona Godino, et al (2003), se debe tener en cuenta que existen las dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas, y en este caso por la creación de la secuencia utilizando un software dinámico, el cual puede ser un obstáculo para el estudiante en cuanto a su uso, puesto que es un programa que se debe en primera medida entender sus herramientas y funciones, para luego construir en este y apropiarse de dicho contexto, en un determinado tiempo.

6. METODOLOGÍA

La investigación realizada tuvo una metodología cualitativa, la cual va enfatizada al registro de la experiencia y sobre todo al análisis de la misma, especificando que esta se desarrolló con un estilo de una Investigación Acción, con el que se quiso construir un marco idóneo en la práctica, que conlleve a una mejor vinculación de teoría, práctica, acciones, ideas y de quienes participan en un contexto determinado. (Colmenares & Piñero, 2008).

Uno de los objetivos puesto en práctica fue: Identificar algunos de los aspectos que se ponen en juego al diseñar y poner en práctica la implementación de un software (Geogebra) como herramienta mediadora en las clases de matemáticas; el cual se desarrolló en el proceso de la investigación, donde se tomó como base las etapas definidas por Teppa (2006) citado por Colmenares & Piñero (2008):

- Introducción diagnóstico
- Elaboración del plan: planificación
- Ejecución del plan: Observación – Acción – Producción
- Producción intelectual: Reflexión
- Re planificación

Estas etapas se relacionaron directamente con las especificaciones que podemos ver en el Acuerdo N° 029 del 2013 del Consejo Académico, para la realización del trabajo de grado con modalidad de Monografía:

FASE 1: Fundamentación (Introducción diagnóstico): Fase en que se desarrolla una investigación acerca de los temas que nos conciernen, en este caso se realizó una investigación acerca de las nuevas tecnologías que se han incorporado en el currículo de las matemáticas y sobre el pensamiento espacial y geométrico, acompañado por una recopilación de datos sobre dificultades u obstáculos que se han presentado acerca de la enseñanza del teorema de Pitágoras.

FASE 2: Construcción teórica (planificación): La selección de los datos relevantes encontrados en la fase de investigación, fueron base fundamental para la estructuración de las secciones en el aula de clase y en algunos casos la reformulación del proceso a llevar.

FASE 3: Acción (Ejecución del plan): Como lo indica su nombre es la fase en que se puso en acción las revisiones teóricas, y de acuerdo a la experiencia se analizó los resultados obtenidos para crear una propuesta dirigida a la comunidad de docentes.

FASE 4: Elaboración trabajo final (reflexión y replanteamiento): Esta última fase recopilo lo realizado en todas las anteriores, donde se sustentan los resultados obtenidos durante la investigación, además, donde se indique los posibles escenarios que se pueden dar al hacer uso de un software durante el proceso de enseñanza aprendizaje respecto al pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Una investigación de tipo Investigación Acción está configurada con una metodología para actuar en la realidad social, es decir que posee como base las acciones de *Estudiar* la situación a enfrentar, *Comprender* la mayor cantidad de aspectos que intervienen en la situación y otorgar propuestas de *Transformación*, pero para que se pueda desarrollar esto, los actores de acción y cambio no pueden ser sólo los docentes investigadores, sino que implica a más actores sociales, los cuales se definen en los aspectos mencionados por Colmenares & Piñero (2008):

- Actores sociales: No son solo los que realizan el proceso de investigación, si son todas las personas implicadas en dicho contexto (Docentes, Estudiantes, representantes, entre otros)
- Intencionalidad: Ya mencionada anteriormente, esta investigación tiene como finalidad ser un registro y experiencia para la mejora de las prácticas en la comprensión y uso de un software en las clases de matemáticas.
- Procedimiento: Basado en un sistema conformado por fases, se recolecto y analizó evidencias de la experiencia vivida para el proceso de reflexión y mejora en dicho uso.

Es por esto, que se enfatizó en la importancia que tuvo registrar la experiencia en cada una de las sesiones realizadas, para esto se utilizaron distintas técnicas de recolección de información como: Cuaderno de Notas, Rejillas, Relatos, Encuestas (entrevistas de la experiencia), Fotografías, entre otros.

- Cuaderno de Notas: Usado por los agentes externos (docentes investigadores), se tomó una bitácora informal individualmente que luego se usó como base para el registro de la experiencia.
- Rejillas: Cuadros sintéticos que ayudan a la organización de información múltiple y dispersa, los cuales ayudaron a realizar comparaciones directas.
- Relatos: Experiencias cortas que llenan de anécdotas en algunos casos graciosas, el registro de la investigación.
- Encuestas: Se tiene dos tipos de encuestas, las cuales indagaban el aspecto emocional al trabajar con un software en una clase distinta a “Tecnología o informática” y directamente a las relaciones matemáticas que se podían ver con este.
- Fotografías: Un registro visual de algunos productos en las actividades, como el desarrollo de estas.

Se debe considerar que el conjunto de estos aspectos tuvo como objetivo, ser un registro lo más próximo a la realidad, para poder realizar las dos últimas fases de la investigación lo mejor posible, Analizar y Planificar, ayudando a que la propuesta funcionará como una experiencia para la comunidad en el intento de usar un software como herramienta mediadora, tanto al mencionar los aspectos positivos del proceso como los errores a superar.

¿POR QUÉ SE UTILIZÓ EL SOTWARE GEOGEBRA?

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en los últimos años, se han venido incorporando software dinámico en algunas secuencias de actividades. En este caso el utilizado fue GeoGebra, pero ¿Por qué GeoGebra y no otro software? A continuación se observan algunos de estos, con sus características y finalmente la respuesta a la pregunta.

- **Cabri-geometry:** Fue diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) y experimentado en sus aulas.
  Es un software antiguo, lo cual permite que tenga ciertas ventajas sobre otros, pues la cantidad de usuarios de este software es mayor y por tanto su producción, pero últimamente se han presentado cambios en su codificación interna, lo que ha producido fallos.
  Este software permite construir objetos geométricos, visualizarlos de forma dinámica, manipularlos, transformarlos y realizar medidas sobre ellos; permite estudiar en el plano y ahora con Cabri 3D también en el espacio todo tipo de propiedades geométricas y lugares geométricos de forma sencilla e intuitiva. Muy fácil de utilizar para los alumnos, permitiendo realizar con el ordenador todas las construcciones que se pueden realizar con regla, compás, ya que con las herramientas habituales de dibujo se puede manipular directamente las figuras construidas en la pantalla, mediante el arrastre con el ratón de ciertas partes de ellas.

- **Sketchpad**: Es tan antiguo como Cabri y con gran difusión en Estados Unidos. Tiene todas las cualidades de Cabri y además tiene posibilidades de tratamiento y estudio de funciones, lo que permite ser utilizado también en temas distintos de los estrictamente geométricos, el principal inconveniente es que está en inglés.

- ***R y C*** **(Regla y Compás),** Está también programado en *Java*, está traducido al castellano y tiene la ventaja de ser de libre uso y gratuito, permite la exportación de ficheros a formato html para visualizarlos con cualquier navegador. Tiene prestaciones similares a *Cinderella* o *Cabri* aunque es menos versátil.

- **WinGeom**: Otro excelente programa geométrico que no tiene nada que envidiar a los programas comerciales. Permite trabajar con herramientas de construcción y medida tanto en el plano como en el espacio. Incorpora la posibilidad de trabajar con geometría esférica e hiperbólica. Forma parte de un conjunto de distintos programas conocido con el nombre de "Peanut Software" desarrollado por Rick Parris de la Phillips Exeter Academy Mathematics Department de Exeter.

- **GeoGebra:** Es un programa interactivo en el que se combinan, por partes iguales, el tratamiento geométrico y el algebraico. Fue diseñado, por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo, como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas para la enseñanza secundaria. No es un programa al uso de geometría dinámica, aunque recoge la práctica totalidad de las herramientas de los programas clásicos como Cabri. Su principal característica diferenciadora es el tratamiento algebraico de los elementos geométricos dibujados de forma clásica. Tiene implementado rutinas de animación de la función y de localización de máximos, mínimos, puntos de inflexión, función derivada, integral definida, recta tangente en un punto.

Las ventajas de GeoGebra sobre Cabri y otros programas similares son que se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente, se puede manejar con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.
En esta implementación en específico, por su facilidad de manejo y variedad de herramientas permite que el estudiante construya su propio “contexto virtual” en el cual visualice y argumente las relaciones directas propias del teorema de Pitágoras, a su vez al poseer una comunidad propia, con creaciones de diversos autores al alcance en la página https://www.geogebra.org/, nos otorga una variedad de aplicaciones y construcciones, que nos sirven como guía e instrumentos que se pueden usar para el diseño de nuestra unidad.

CATEGORÍA DE ANÁLISIS

PAPEL DEL RECURSO EN UNA SECCIÓN DE CLASE

La estructura diseñada para las clases, según Radarbel (2011) el papel que puede poseer el recurso al usar (software GeoGebra) es:

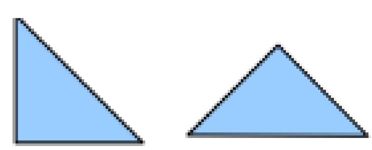
- Artefacto: Objeto (tangible o no) centro de interés en la actividad, en la cual se quiere entender su labor, su estructura, y con lo cual se llega a producir un entendimiento sobre las nociones (teóricas) inmersas en su propio funcionamiento, en sí se le otorga a este objeto una intencionalidad de existencia.
- Instrumento: Usando el artefacto el sujeto le otorga una funcionalidad, es así que este deja de ser el centro de interés para serlo su manipulación, y las representaciones del objeto matemático que se logran desarrollar con ayuda de este, otorgándole así significado al contexto de la actividad.

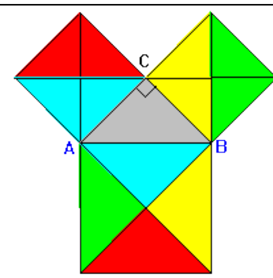
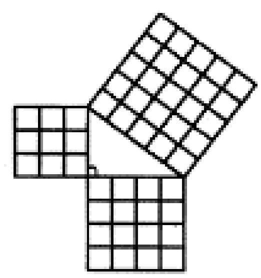
ESTRUCTURACIÓN DE UN SISTEMA DE REPRESENTACIONES

Duval (1999) citado por Rojas (2012) menciona las tres acciones que debe realizar el estudiante para la construcción de una noción:

- Representación en un registro. (Este caso en específico será en la construcción de un caso particular del teorema utilizando la” Vista gráfica” del software Geogebra, es decir el registro gráfico).
- Transformación de la representación interna en el mismo registro. (Aplicación realizada en el software que permita la trasformación de la representación, dejando visualizar al estudiante las características variables y las que no de la misma).
- Conversión de la representación de un registro a otro. (Contrastar la representación gráfica con otras, como lo es la verbal o algebraica).

El aprendizaje o el entendimiento de un objeto matemático es complejo, al hablar del proceso cognitivo que esto conlleva, si este posee el debido proceso por parte del docente, será trabajado desde los conocimientos previos, para que con estos tenga un conflicto cognitivo, por lo cual se ocasione un aprendizaje. Este proceso puede tener algunas dificultades relacionadas con diversos aspectos, estos pueden ser desde: el pensamiento matemático, el método de enseñanza, el objeto matemático o desde el aspecto emocional; Utilizando algunas dificultades mencionadas por Radatz (1980) citado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y enfatizándolas al teorema de Pitágoras, se obtiene que el estudiante puede poseer.

Tipo error según la causa	Descripción	Ejemplo
Dificultades del lenguaje	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.	No relaciona que las variables “elevadas al cuadrado” como a^2 se refiere al cuadrado formado sobre el segmento a.
Dificultad para obtener información espacial	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas inadecuadas en las situaciones matemáticas.	 Interpreta que el teorema funciona para cualquier tipo de triángulo ya que no identifica que el tipo de este no cambia así la figura sea rotada.

Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	Errores cometidos por la deficiencia en el manejo del concepto, contenidos en los procedimientos de alguna tarea matemáticas.	No identifica que el "polígono 5"puede poseer área cero y seguirse mencionando en la operación. (En la suma de las áreas de los polígonos para igualarlas con el área del cuadrado de la hipotenusa)
Por rigidez de pensamiento (por perseveración)	Demostrar una propiedad usando un caso particular.	 Considerar que la única representación del teorema es cuando el triángulo es isósceles y se representa de esta forma.
Por rigidez de pensamiento (de asociación)	Asociar incorrectamente elementos singulares.	 Relacionar que al existir tres enteros seguidos que cumplen con la propiedad (triada pitagórica) como lo es el 3, 4, 5. Cualquier triada cumplirá con la propiedad.

Por rigidez de pensamiento (de inferencia)	Cuando un concepto u operación infieren unos de otros.	Ya que este teorema cumple en la familia de triángulos Rectángulos, se cumple para cualquier tipo de triángulo.
Por rigidez de pensamiento (por asimilación)	Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.	No identifica los segmentos que conforman un triángulo rectángulo, por lo cual no identifica que segmento es al que se llama “hipotenusa”.
Datos mal utilizados	Casos en que se añaden datos extraños, se olvidan algunos datos necesarios para la solución, se contesta algo innecesario, se utilizan los valores de una variable distinta, o se hace una lectura incorrecta del enunciado.	Al mencionar que el teorema es una suma, refiere que la igualdad se da al sumar la medida de los catetos con la medida de la hipotenusa.
Errores técnicos	Errores de cálculo, tomar un dato mal o manipular los signos erróneamente.	No saber interpretar las representaciones que le otorga el software, por medio de las transformaciones de la figura, por lo que no difiere las relaciones que en ellas existe.

7. FASES DE IMPLEMENTACIÓN

La implementación de las actividades se llevó a cabo en cuatro sesiones, a continuación se evidencia el objetivo, la experiencia y el análisis de cada una de estas.

7.1. SESIÓN 1: FAMILIARIZACIÓN CON EL SOFTWARE GEOGEBRA

7.1.1. OBJETIVO Y METODOLOGÍA

En la primera sesión se desarrolló la familiarización con el software GeoGebra, conociendo con esto sus diferentes herramientas (botones correspondiente de la barra de herramientas del programa) y las diversas trasformaciones que con este se pueden hacer a un objeto (representación), para esto la sesión se dividió en dos partes:

La primera parte fue la observación de los estudiantes de cada una de las herramientas (Puntos, Rectas, Trazados, Polígonos, Circunferencia, Secciones cónicas, Transformaciones, Incorporaciones, entre otros) donde se identificaron las funciones y propiedades que allí se tienen. Los estudiantes evidenciaron su observación por medio de una actividad libre, a su vez que se aclararon dudas por medio de un video que dio algunas indicaciones sobre el uso de dichas herramientas.

La segunda parte consistió en que el estudiante observara actividades y construcciones que otras personas han diseñado y realizado con el programa, para esto se les mostro las siguientes aplicaciones encontradas en la página del software GeoGebra:

- Tangram
- Efecto-Visual
- Caleidoscopio
- Cancha-básquet
- Carro en 3D
- Torre-Eiffel

7.1.2. ANÁLISIS

La primera sesión se desarrolló el 5 de abril de 2016 con 32 estudiantes. Esta tuvo como fin la familiarización con el software GeoGebra, puntualizando en el uso de las herramientas y/o botones que se pueden observar en el programa. Este primer acercamiento se realizó de manera autónoma, donde cada estudiante fue dando clic en los distintos botones y observando lo que iba sucediendo en la Vista Gráfica al interactuar con este “activo” la interacción del mouse sobre la pantalla, por ejemplo: El trazo de segmentos, cambios de color, cambios de trazos de línea, circunferencias, polígonos y otras herramientas exclusivas al trabajar en Vista 3D como puede observar en el video en ANEXO 1. Es aquí donde se cumple lo dicho por Guzmán (2001) sobre la introducción ya sea de un juego o de cualquier objeto que sirva como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo primero que se debe realizar es una familiarización con estos, pues es importante que se conozcan las reglas, las técnicas y elementos importantes para su uso.

Ilustración 12. La estudiante está utilizando una de las propiedades, utilizando distintos colores para decorar su trabajo.

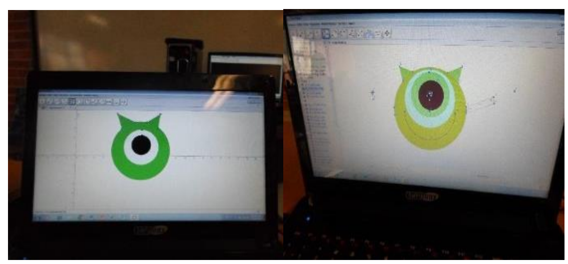


Ilustración 13. El estudiante realiza su dibujo utilizando la herramienta de la circunferencia y propiedades de colores.

Ilustración 14. Observación del video de apoyo

En la primera parte los estudiantes tuvieron ciertas dudas sobre el manejo de algunas herramientas propias del sotfware, que luego, por medio del video pudieron aclarar, para así proceder a realizar un trabajo de forma libre. Concluyendo a su desarrollo que gran parte de los estudiantes lograron identificar funciones y/o herramientas tales como: cambiar de color a una figura, rectas o polígonos (ver figura 12 y 13), llegaron a diferenciar entre realizar segmentos y rectas y segmentos, introducir figuras geométricas como polígonos regulares e irregulares como se observa en las figuras 15 y 16, donde los estudiantes utilizaron diversas propiedades para crear sus dibujos.

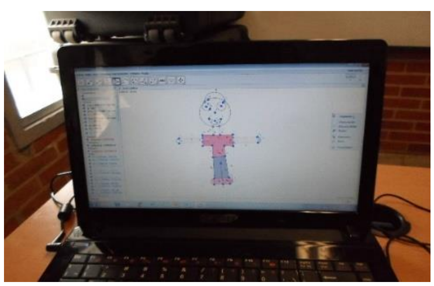


Ilustración 15. La estudiante realiza su dibujo utilizando segmentos, circunferencias, propiedades de colores entre otras herramientas.

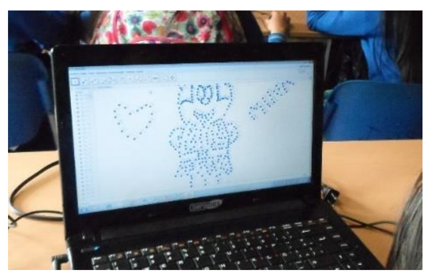
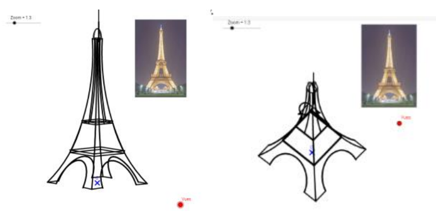
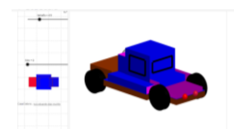
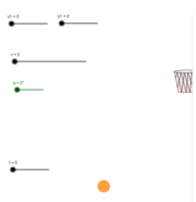
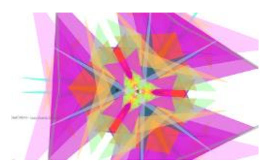


Ilustración 16. La estudiante realiza su dibujo utilizando propiedades como circunferencias, puntos y colores.

Luego de la actividad libre se les presentaron las construcciones hechas por otras personas en el programa, esto con el fin de incentivar su curiosidad a este y motivarlos positivamente para el trabajo que vendría con este en próximas secciones.

 *Ilustración 17. Aplicación Torre Eiffel (varias vistas).* Aplicación en la que por medio del movimiento de un punto, se ven las diversas vistas de la construcción en 3D de la torre. Tomada: https://www.geogebra.org/m/bvYK6Tqr	 *Ilustración 18. Aplicación Carro en 3D.* Aplicación que permite visualizar una posibilidad en hacer construcciones en 3D, más una animación sencilla que muestre la traslación de este en el plano. Tomado: https://www.geogebra.org/m/JPYzbtMK
 *Ilustración 19.Aplicación Virtual basketball* Aplicación en la que los estudiantes ajustaban por medio de deslizadores el ángulo y fuerza de lanzamiento. NOTA. Fue la aplicación que mejor acogida tuvo entre los estudiantes. Tomado: https://www.geogebra.org/m/RsjGVet4	 *Ilustración 20.Aplicación Caleidoscopio.* Animación en la que los estudiantes pudieron divisar distintos polígonos y trasformaciones de estos, acompañados por el cambio de sus colores. Tomado: https://www.geogebra.org/m/A78m88VD

7.2. SESIÓN 2 ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

7.2.1. OBJETIVO Y METODOLOGÍA

Luego de la familiarización y la creación de objetos por parte de los estudiantes, se realizó una prueba diagnóstica utilizando un sólido propio creado. Pues se tiene claro que para implementar una actividad en el aula de clase, es importante identificar si el estudiante tiene claridad de algunas nociones necesarios que se van a utilizar durante el desarrollo de esta. Para la construcción de una de las representaciones del teorema de Pitágoras, era necesario que los estudiantes tuvieran presentes las nociones básicas de la geometría:

- Paralelismo.
- Perpendicularidad.
- Clasificación y propiedades de triángulos.
- Ángulos internos de un triángulo.
- Figuras básicas (triángulo, rectángulo, cuadrado, circunferencia)

Por esto para el desarrollo de esta sesión se dieron las siguientes indicaciones, que debían seguir teniendo en cuenta las propiedades vistas la sesión anterior.

- De color ROJO se identificarían las rectas paralelas.
- De color AZUL se identificarían las rectas perpendiculares.
- De color VERDE se identificarían los ángulos rectos.
- De color MORADO se identificarían las circunferencias.
- De color AMARILLO se identificarían los triángulos.
- De color NARANJA se identificarían los cuadrados.
- De color GRIS OSCURO se identificarían los rectángulos.

7.2.2. ANÁLISIS

Esta sesión se desarrolló el día 12 de abril de 2016 con 34 estudiantes ubicados en 30 computadores, donde se realizó una prueba diagnóstica para identificar conocimientos previos de los estudiantes frente a las nociones básicas de geometría. Para esto se construyó un polígono en vista 3D[1] el cual se pone en cada uno de los computadores de la sala de sistemas donde los estudiantes tienen acceso, como se observa en la Ilustración 21.

Ilustración 21. Instalación de la aplicación en cada computador.

En las *Ilustraciones 22 y 23, s*e observa el desarrollo hecho por dos estudiantes, que gracias a la construcción de una rejilla (ANEXO 2) se pueden contrastar los resultados, pues en la *Ilustración 22, s*e observan algunas de las dificultades mencionadas por Radatz (1980): El *aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* ya que el estudiante no identifica la circunferencia, pero también se observa que el estudiante identificó 3 ángulos rectos en el polígono y además coloca de color rojo las rectas paralelas; se observaron algunos puntos de color azul, donde al preguntar al estudiante expone que son las rectas perpendiculares pero que no puede colocar dos colores en una misma recta, es aquí donde se observa un obstáculo metodológico desde el uso del software GeoGebra, lo que quiere decir que este no fue utilizado de forma correcta o que el software no permitió realizar esta función.

---

[1] Se encuentra en el link: http://www.geogebra.org/m/wxZhBP6D

En la Ilustración 23, se observa que el estudiante no identificó ningún ángulo recto, ninguna recta perpendicular, pero el estudiante identifica las figuras geométricas, es aquí donde se observaron dificultades en la falta de dominio del contenido matemático.

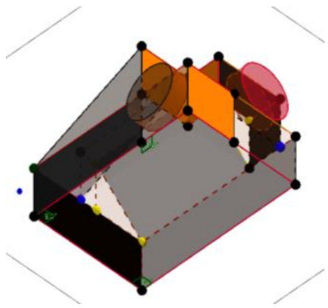


Ilustración 22. Identificación de nociones básicas en el sólido. Estudiante 1.

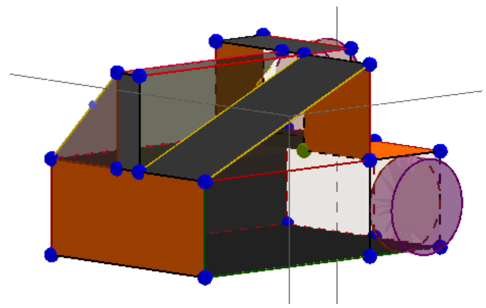


Ilustración 23. Identificación de nociones básicas en el sólido. Estudiante 2.

- De manera general se observó que de las siete propiedades que se querían identificar, el 6.66% de los estudiantes tienen aciertos en los todos los conceptos y el 93.3% de los estudiantes no aciertan en todos los conceptos.

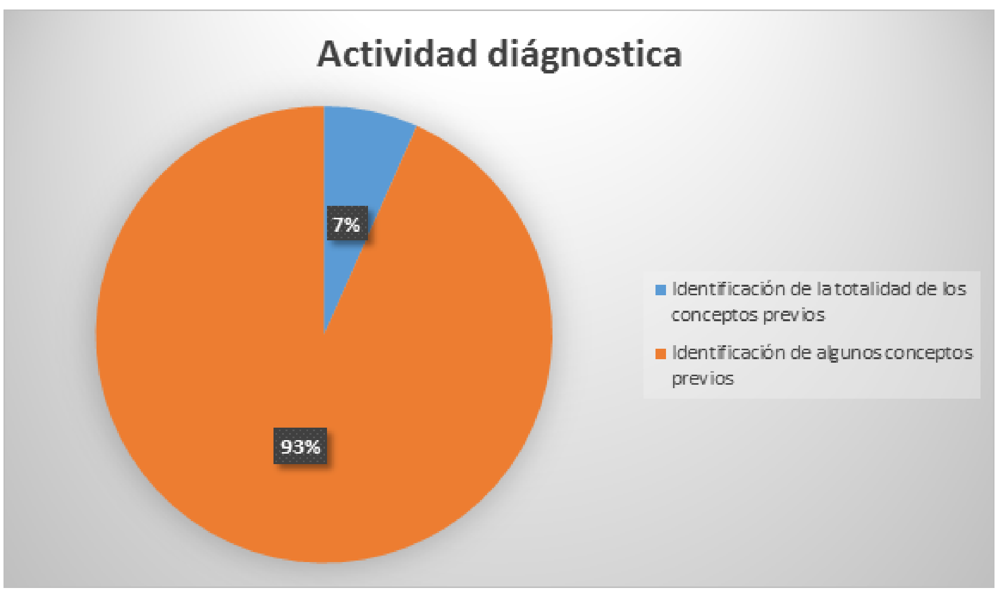


Ilustración 24. Gráfica sobre los resultados obtenidos de forma general en la actividad general.

- De los estudiantes que acertaron en algunos de los conceptos básicos se tiene que:

- Para las rectas paralelas el 35.7% de los estudiantes acertaron en la identificación y el 64.3% de los estudiantes expresaron no recordar este concepto.
- El 0% de los estudiantes acertaron en el concepto de rectas perpendiculares, expresando verbalmente que no nunca han visto esto.
- El 89.28% de los estudiantes acertaron en la identificación de la figura básica "triángulo".
- El 7.14% de los estudiantes lograron acertar en la identificación de ángulos, los que no acertaron expresaban que no sabían que era un ángulo y/o como identificarlos.
- El 96.42% de los estudiantes acertaron identificando la figura básica "rectángulo".
- El 89.28% de los estudiantes acertaron en la identificación de la figura básica "cuadrado"
- Y por último se tienen que el 71.42% identificaron correctamente la circunferencia.

Se pudo concluir que, los estudiantes presentaron mayor dificultad al identificar rectas paralelas, rectas perpendiculares y ángulos, por esto se propuso tomar una parte de una clase como extra, que permitió reforzar estas nociones, para que el estudiante pudiera realizar la construcción de la siguiente sesión.

En el desarrollo de esta sesión y otras que sigue, se pudo evidenciar que la estructura diseñada para este tipo de actividades, permite prevenir lo sucedido (En la unidad didáctica realizada por Pinzón & Rodríguez (2004) donde se probó que en medio de todas las actividades realizadas, donde se tenía como objetivo *"Interpretar la noción del Teorema de Pitágoras",* aunque planteaban situaciones fundamentales se encontraban siempre con la falta de atención de los estudiantes al momento de querer implementarlas, pues recurrían en varias de estas al apoyo de guías como evidencia de lo aprendido, es decir que podemos hablar de una dificultad desencadenada por la secuencia de actividades implementadas, concluyendo que para el estudiante la guía utilizada no fue significativa, ocasionando en él la falta de motivación en el desarrollo de las actividades)

Pues con la secuencia de actividades que involucro un nuevo software, una herramienta con la que no se había trabajado, se logró que a los estudiantes les llamara la atención esta innovación en la clase de matemáticas, por tanto se pudo observar los resultados de una manera más confiable.

Al finalizar esta sesión se realizó la primer encuesta que tuvo como finalidad conocer la percepción que tiene el estudiante durante y luego de desarrollar las sesiones con un software dinámico para la clase de matemáticas, además de identificar si ellos tenían alguna idea de finalidad de las clases.

A continuación se evidencian los resultados obtenidos y un análisis de los mismos.

Pregunta #1:

¿Cómo te han parecido las sesiones realizadas con el software? ¿Por qué?

Interesantes ______ Regulares ______ Aburridas______

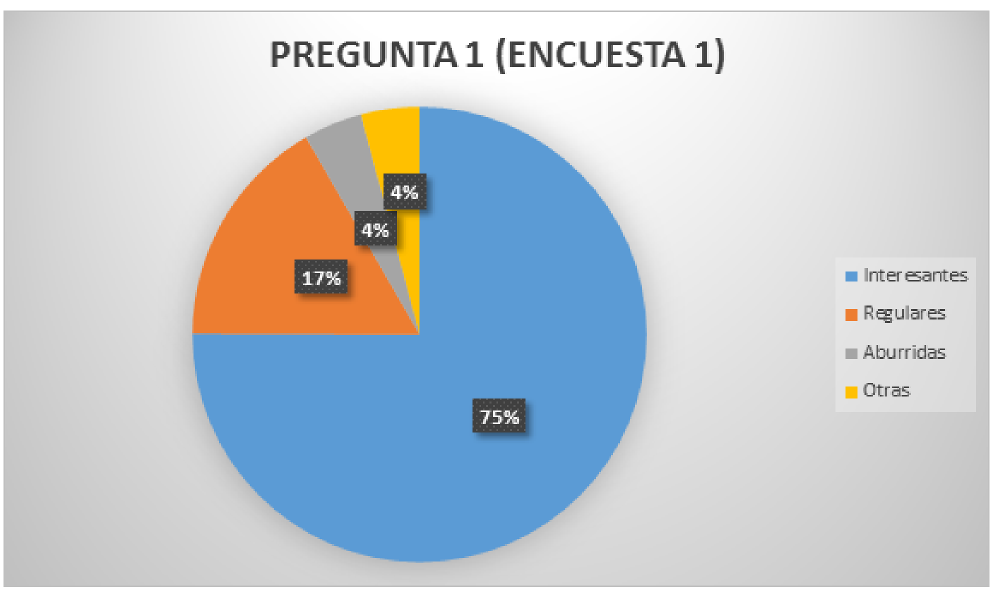


Ilustración 25. Resultado general a la pregunta ¿Cómo te han parecido las sesiones realizadas con el software?

Se tiene que el 75% de la población, indicó que las sesiones le parecieron *interesantes* porque fue un trabajo innovador, con un software que no había sido utilizado anteriormente, además porque le ven un uso más interesante al computador aparte de estar en redes sociales. El 16.6% de la población indicó *regulares* porque no hubo demasiado atención durante la sesión donde se dio paso a la exploración del software y algunas indicaciones pertinentes, por tanto en el desarrollo de las actividades no sabían cómo realizar ciertos pasos lo que llevó a que el estudiante se sintiera "perdido" y aunque intentaron no lo lograron. 4.16% de la población indicó que las sesiones le han parecido *aburridas* pues dicen que no tienen relación con las cosas que están viendo, pues cabe aclarar que las actividades se implementaron únicamente en la clase de tecnología y por último se tiene un 4.16% indicando otra opción *"hay suave"* basándose en que las sesiones les parece interesante pero a la vez aburridas.

Pregunta #2:

¿Cuál crees que es la finalidad de las 3 sesiones realizadas?

La mayoría de la población coincide en la respuesta a esta pregunta, pues indican en sus respuestas que la finalidad de las sesiones es aprender más sobre polígonos y/o en general temas específicos de la geometría. Otro grupo de la población coincide en que las sesiones realizadas tienen como finalidad aprender en programas de matemáticas, distraerse y sobre todo divertirse en sus clases. De esto podemos concluir que los estudiantes van entendiendo que las sesiones que se realizan es una alternativa para las clases de matemáticas, la cual ayuda a tener en cuenta otra metodología para desarrollar la clase y que el estudiante esté atento y le llame la atención temas como "el teorema de Pitágoras" en el cual se han presentado distintas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

7.3. SESIÓN 3: CONSTRUCCIÓN TEOREMA DE PITÁGORAS

7.3.1. OBJETIVO Y METODOLOGÍA

Para tener el primer acercamiento con el teorema, en esta sección se pretendía que los estudiantes construyeran con ayuda del software GeoGebra (sin tener conocimiento previo) una demostración geométrica de un caso particular, para esto cada uno de ellos trabajaría en su computador e iban desarrollando las indicaciones de dicha construcción, esperando con ello que al finalizar, los argumentos sobre las relaciones identificadas entre los objetos matemático, se basara en su propia construcción otorgarle así la funcionalidad de Instrumento mediador al sotfware.

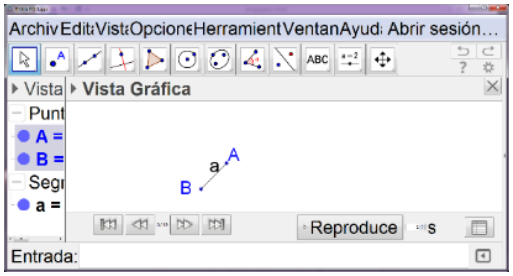
7.3.2. CONSTRUCCIÓN

Para comenzar, se de aclarar que la construcción a realizar es un caso particular de demostración de dicho teorema, pues en la literatura, se han reportado por lo menos unos 360 casos.

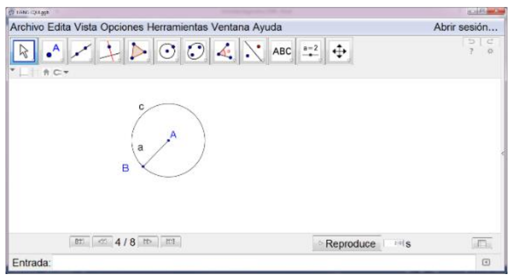
A continuación se indicarán los pasos a seguir de dicha construcción, con los cuales se tomará el caso del triángulo rectángulo isósceles.

PASOS:

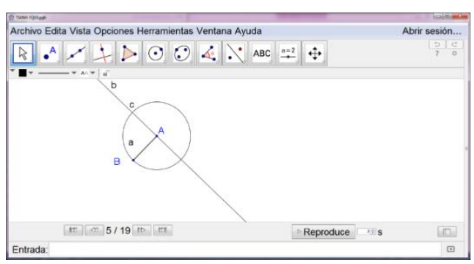
1. Trazar un primer segmento cualquiera. Con la herramienta [SEGMENTO] dando clic en dos puntos cualquiera en el espacio VISTA GRÁFICA del programa (el programa automáticamente nombra al $\overline{AB}$ como: a)



2. Construir sobre el segmento $\overline{AB}$ una circunferencia. Con la herramienta [CIRCUNFERENCIA (CENTRO, PUNTO)], se da clic en el punto A (este se pondrá en negrita) y luego se desplaza el puntero hasta que coincida con el punto B, para finalizar se da clic sobre este.

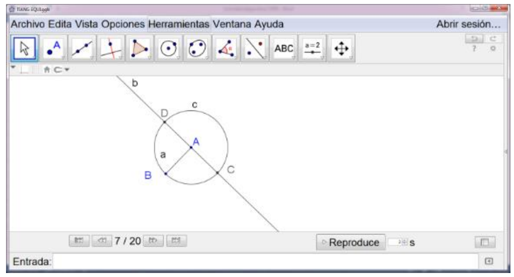


3. Trazar una recta perpendicular a $\overline{AB}$. Con la herramienta [PERPENDICULAR], se selecciona[2] dicho segmento y luego se da clic en el punto A (punto centro de la circunferencia). El programa nombra a esta recta perpendicular como:b.



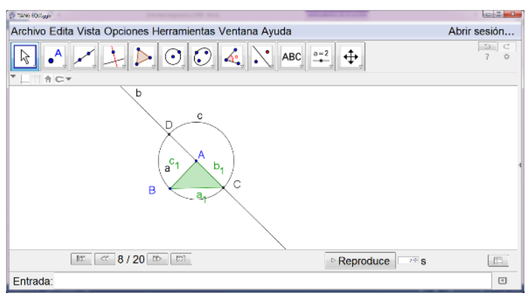
4. Nombrar los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta b. Con la herramienta [INTERSECCIÓN] se selecciona la recta b y luego la circunferencia c. El programa los nombrará como: C, D.

[2] Se puede rectificar que la acción <*selecciona*> esta correcta porque el objeto a trabajar se resalta en negrita y se mantiene al dar clic.



NOTA: Se puede ir verificando la correcta construcción con la herramienta [ELIGE y MUEVE] seleccionando alguno de los puntos ya sea B o A y moviéndolo. El punto C se moverá con la circunferencia y su color será de color negro,[3] sí este quedo correctamente puesto.

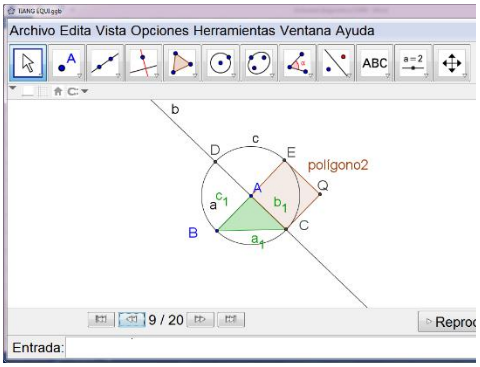
5. Formar el triángulo ABC. Con la herramienta [POLÍGONO] se selecciona punto por punto A, B, C y se retorna al punto inicial.

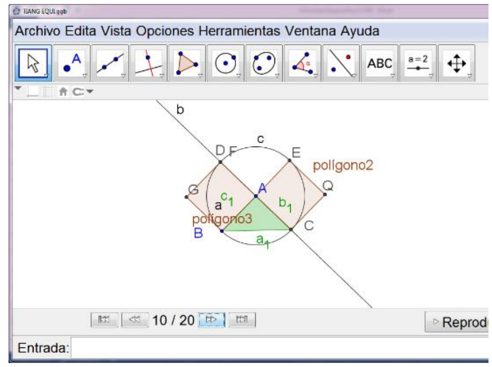


NOTA: Dando clic con el botón derecho del mouse sobre el polígono, se despliega una ventana auxiliar y se selecciona la opción [PROPIEDADES], con ella se puede personalizar el polígono (cambiar el color, bordes y opacidad).

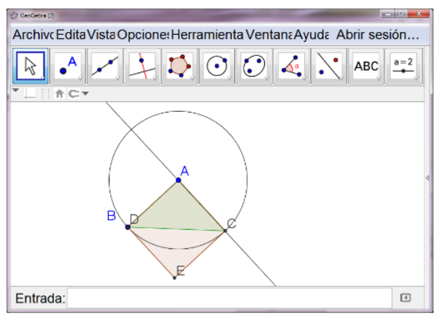
6. Construir los cuadrados sobre cada uno de los catetos del triángulo. Con la herramienta [POLÍGONO REGULAR] se seleccionan los puntos extremos de los segmentos CA y AB. Al seleccionarlos, se abre una ventana auxiliar preguntando el número de vértices del polígono que se va a formar, en este caso “4” que corresponden a los lados del cuadrado.

[3] GeoGebra posee dos tipos de puntos: Los puntos libres o de color Azul, Su posición o valor no depende de ningún otro objeto. Suelen crearse por ingreso directo en la Barra de Entrada o con alguna herramienta apropiada básicamente, la herramienta Punto. Los puntos auxiliares o de color Negro, Dependen de algún otro objeto u objetos, sea que hayan sido creados con cualquiera de las herramientas o de los comandos disponibles: Punto Intersección, Medio o Centro, Segmento de longitud dada, Polígono regular, etc.

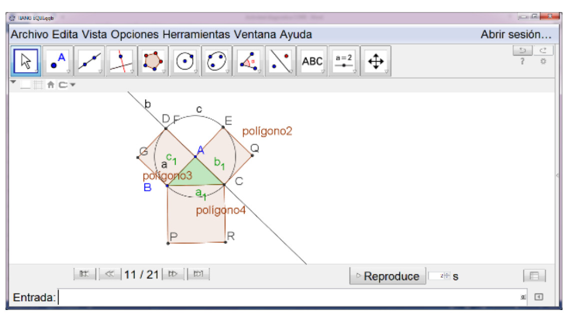




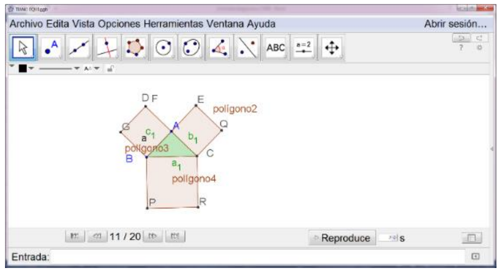
NOTA: Sí se construye el cuadrado y este se sobrepone al triángulo, se puede corregir este paso oprimiendo las teclas Ctrl + z, y vuelve a seleccionar los puntos en el sentido contrario que se realizó inicialmente.



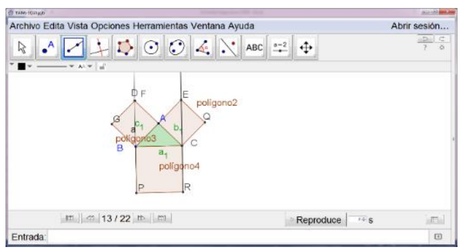
7. Construir el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo. Se construye con la herramienta [POLÍGONO REGULAR], siguiendo las instrucciones del paso anterior y la respectiva nota.



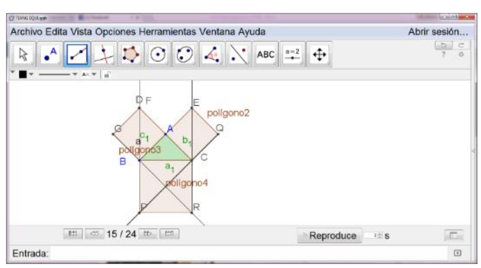
NOTA: Se pueden ocultar objetos que visualmente no nos ayudarán con la demostración del teorema. Por ejemplo, dando clic con el botón derecho a la circunferencia *c*, se despliega la ventana auxiliar y en ella se da clic [Objeto visible] y este ya no se podrá seguir viendo, ahora se hace lo mismo como la recta *b*.



8. Proyectar los lados del cuadrado de la hipotenusa sobre los cuadrados de los catetos. Seleccionando la herramienta [SEMIRECTA] da clic en un vértice del cuadrado de la hipotenusa que no pertenezca al triángulo, puede ser P o R, luego se desplaza el puntero hasta que coincida con el vértice colineal que pertenece al triángulo, pueden ser B o C respectivamente, para finalizar se da clic sobre este.



9. Proyectar los lados de los cuadrados de los catetos hacia el cuadrado de la hipotenusa. Seleccionando la herramienta [SEMIRECTA] da clic en los vértices Q ó G. Proyectando el lado Q ó G del cuadrado hacia los vértices del cuadrado de la hipotenusa P, ó R, respectivamente sin cambiar su sentido.



Para finalizar esta construcción, se les paso a los estudiantes con una guía en la que se les hacia una pregunta:

- ¿Qué relación se puede observar entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo?

7.3.3. ANÁLISIS

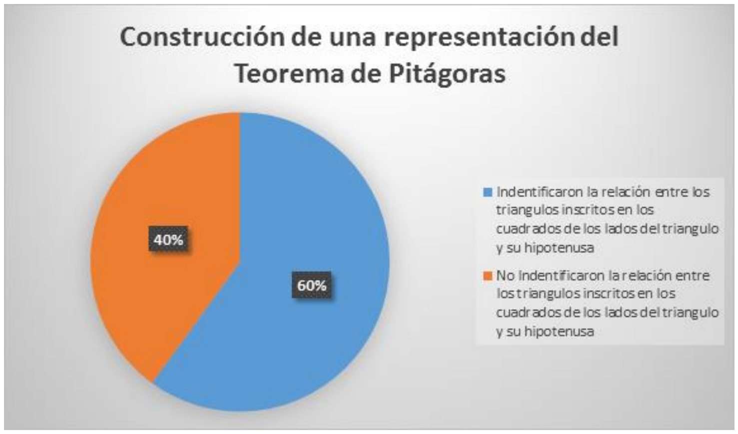
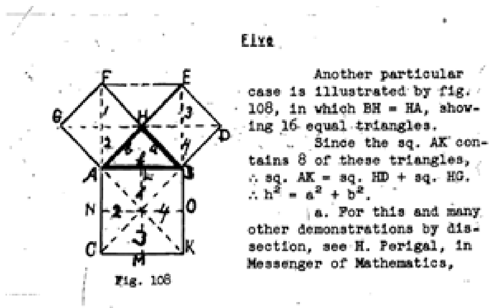


Ilustración 26. Gráfica sobre los resultados obtenidos de forma general en visualizar las relaciones existentes en el teorema de Pitágoras.

Esta sesión se desarrolló el día 19 de Abril con la presencia de 28 estudiantes ubicados en 25 computadores. Luego de realizar la construcción del Teorema de Pitágoras con las indicaciones paso a paso, se observó que el 60% de los estudiantes lograron realizar la relación entre los triángulos inscritos en el cuadrado de la hipotenusa y los triángulos inscritos en los cuadrados de cada uno de los catetos del triángulo, identificando con los respectivos colores como se observa en la Ilustración 28.

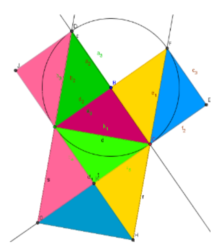
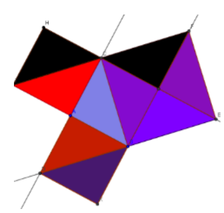
Se obtuvo que el 40% de los estudiantes no lograron ver claramente la relación existente entre los triángulos inscritos en los cuadrados de los lados del triángulo y los triángulos inscritos en el cuadrado de la hipotenusa, esto, debido a que una parte de los estudiantes no realizaron correctamente la construcción y al momento de clasificar con colores los triángulos inscritos, presentaron una dificultad por rigidez de pensamiento (por perseverancia) para identificarlos (Ilustración 29) , es decir que no realizaron la relación de la demostración “CINCO” tomada de Loomis (1940, pp.102):



En la Ilustración 27, se observa BH= HA, 16 triángulos iguales. Ya que el cuadrado AK contiene 8 de estos triángulos. Por lo tanto el cuadrado sobre AB = cuadrado sobre BH + el cuadrado sobre AH.

Ilustración 27. Demostración CINCO" tomada de Loomis (1940, pp.102)

También se observa una dificultad en algunos estudiantes por rigidez de pensamiento (de asociación) el cual consiste en asociar incorrectamente elementos singulares, en este caso como se observa en la Ilustración 29, no asocia correctamente los colores para cumplir el teorema. (Radatz, 1980 citado por Abrate, Pochulu y Vargas, 2006)

 *Ilustración 28. Identifica que los triángulos inscritos en los cuadrados de los catetos son los mismos que se inscriben en el cuadrado de la hipotenusa.*	 *Ilustración 29. No Identifica que los triángulos inscritos en los cuadrados de los catetos son los mismos que se inscriben en el cuadrado de la hipotenusa.*

En esta sesión se pudo observar que queríamos que la evidencia de las dificultades encontradas en la revisión de las unidades didácticas, donde en una secuencia de actividades ponen en juego al Teorema de Pitágoras como: *"… el Teorema de Pitágoras relaciona los dos catetos con la hipotenusa…",* , fuera superada, pues no se quería que el estudiante tuviera esta noción del teorema de Pitágoras, sino que aparte de que él mismo la creara, el dijera como es la relación encontrada, como se puede evidenciar en el análisis de la siguiente sesión.

En esta sesión se realiza otra encuesta, la que tenía como preguntas:

Pregunta #1: Esta pregunta fue diseñada con el fin de conocer la opinión de los estudiantes acerca del trabajo con un software en la clase de matemáticas, esto debido a las implementaciones que se están realizando de las TIC'S.

¿Te gustaría que tus clases de matemáticas tuvieran presente un software? ¿Por qué?

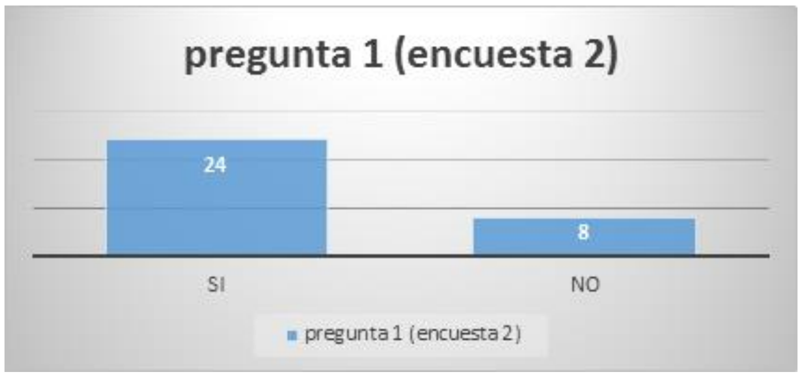


Ilustración 30 Gráfica de los resultados a la encuesta sobre el gusto de trabajar con un software.

Para la cual se tiene que 24 estudiantes indicaron que "SI" les gustaría que sus clases de matemáticas tuvieran presente un software sin importar cual fuera, ya que influirá en el nivel de aprendizaje de la clase y la haría más divertida, cosa que hace que dejen de pensar la clase de matemáticas como una clase aburrida, además indican que les agradaría realizar las actividades dejadas para la casa en un software, pues no sería aburrido y además entenderían mucho mejor provocando más interés por la clase.

Y 8 estudiantes indican que no les gustaría que en sus clases de matemáticas tuvieran presente un software, pues algunos de ellos coinciden en que si no aprender y no pueden manejar el software no les serviría para nada, otros estudiantes indican el no, debido a su costumbre de utilizar siempre el cuaderno y por tanto se les hace más fácil.

Pregunta #2: Esta pregunta se realizó con el fin de conocer si los estudiantes se familiarizaron con el software y por tanto pueden implementarlo para distintos temas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

¿Para qué temas, crees qué se podría implementar un software como GeoGebra ?

Las respuestas se categorizaron de la siguiente manera:

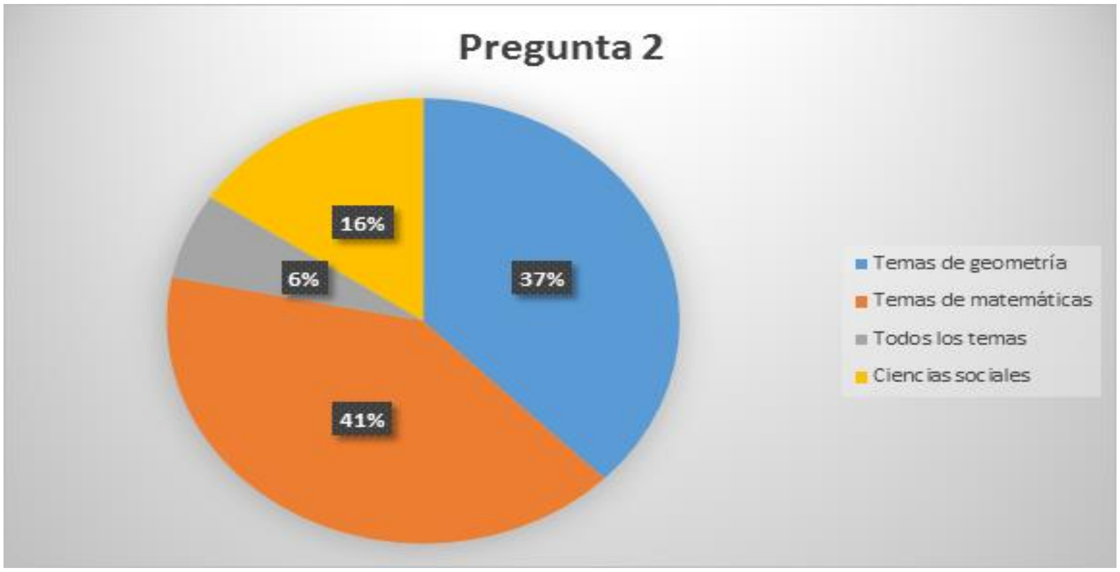


Ilustración 31 Gráfica de los resultados de la encuesta sobre para que temas se podria utilziar un software

· **Temas de geometría**: El 37.5 % de los estudiantes coincidieron en su respuesta, que en los temas que se podría implementar el software, son referentes a la geometría, poniendo ejemplos como: *" ..para hacer diferentes figuras.." "...dibujos…" "juegos con figuras geométricas"*

· **Temas de matemáticas:** Se observó que el 40.6% de los estudiantes indican que el software es de gran ayuda para aclarar temas relacionados directamente con matemáticas.

· **Todos los temas:** El 6.25% de los estudiantes indicaron que este software podría implementarse en todos los temas, como ayuda podría aclarar dudas.

· **Ciencias sociales:** Y el 15.6% de los estudiantes respondieron diciendo que les gustaría que se implementará un software en el área de ciencias sociales, ya que a veces se les hace muy aburrida.

Pregunta #3: Teniendo en cuenta que el teorema de Pitágoras había sido enseñado previamente, y que los estudiantes tenían ciertas dudas frente a este, se quiso observar si luego de la implementación del software, se habían aclarado ciertas dudas, por esto se realizó esta pregunta:

¿El uso del software y la aplicación ayudó a aclarar tus dudas frente al teorema de Pitágoras? ¿Cuáles dudas?

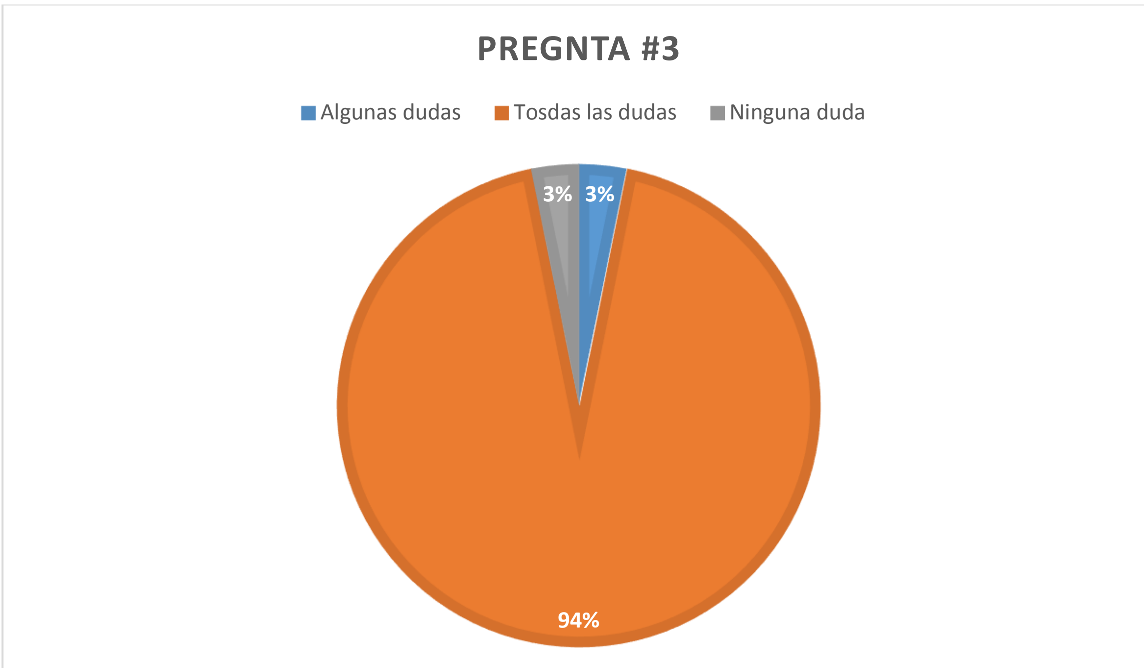
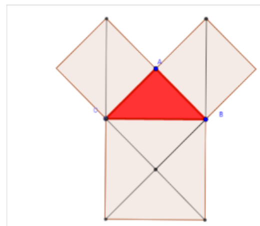


Ilustración 32 Gráfica de los resultados de la pregunta sobre la aclaración de dudas del Teorema

Las respuestas se categorizaron de la siguiente manera:

- **Algunas**: Con el 3.15%, un estudiante responde que ha aclarado algunas dudas pero que aún no entiende otras.
- **Si**: El 93.7% de los estudiantes coinciden respondiendo que *si* aclararon ciertas dudas, por ejemplo: identificación de hipotenusa y catetos, figuras geométricas básicas, áreas, ángulos, identificación de las áreas para desarrollar el teorema de Pitágoras.
- **No**: Y el 3.15% de los estudiantes indica que no tenía dudas.

7.4. SESIÓN 4: IMPLEMENTACIÓN DE LA APLICACIÓN



7.4.1. OBJETIVO Y METODOLOGÍA

Con ayuda de una aplicación creada en el software GeoGebra se quiere que los estudiantes Identifiquen que el teorema de Pitágoras se cumple para cualquier triángulo rectángulo.

7.4.2. ANÁLISIS

Esta última sesión se creó una aplicación[4], en la que como imagen inicial (primera imagen al abrir la aplicación) el estudiante encontraría la representación del caso particular del teorema trabajado la clase anterior, en este podían mover las vértices (puntos) del triángulo y transformar ese triángulo rectángulo isósceles a cualquier otro de la familia de los triángulos rectángulos, y por medio de un deslizador observar que iba sucediendo (relación) entre los polígonos (triángulos o cuadriláteros) inscritos en cada uno de los cuadrados de los lados, los cuales tomarían un mismo color, para poder que identificaran dicha relación entre dichos objetos.

Ilustración 33. Ejemplo de algunas representaciones visibles en la aplicación.

[4] http://www.geogebra.org/m/PmEVA8Qt

Para finalizar se realizó una encuesta, obteniendo que los estudiantes describen la relación encontrada como una suma de áreas, una de suma de los cuadrados de los catetos y como una composición de triángulos, (ver Ilustración 33, 34 y 35). Cuando la aplicación llega a cierto punto en el deslizador, se observa que aparece un quinto polígono que ayuda para la demostración del Teorema, pero se observa una dificultad en cuanto a un aprendizaje deficiente, pues el estudiante no se fija en este nuevo polígono de acuerdo al procedimiento realizado para esta tarea matemática.

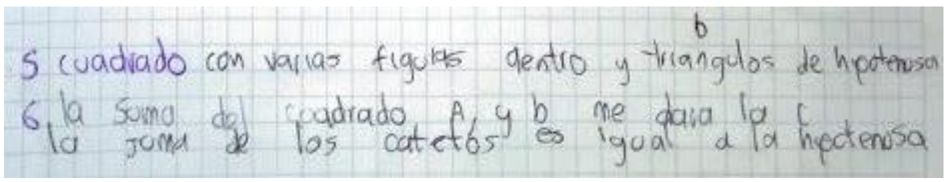

5 cuadrado con varias figuras dentro y triangulos de hipotenusa b
6 la suma del cuadrado A y b me daria la c
la suma de los catetos es igual a la hipotenusa

Ilustración 34.Relación encontrada por el estudiante 4.

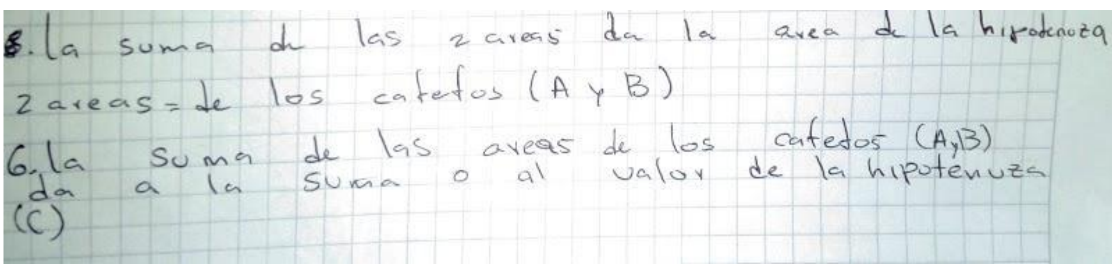

8. la suma de las 2 areas da la area de la hipotenuza
2 areas = de los catetos (A y B)
6. la suma de las areas de los catedos (A y B)
da a la suma o al valor de la hipotenuza
(C)

Ilustración 35. Relación encontrada por el estudiante 5.

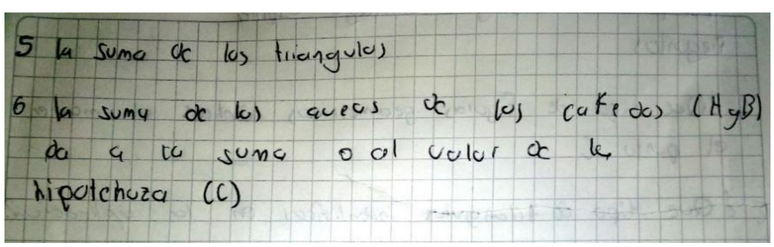

5 la suma de los triangulos
6 la suma de los areas de los catedos (A y B)
da a la suma o al valor de la
hipotenuza (C)

Ilustración 36. Relación encontrada por el estudiante 6.

8. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Durante la ejecución de cada una de las actividades propuestas, se tiene como aprendizaje profesional que no todo lo planeado es lo que se realiza, pues salen preguntas y/o frases de estudiantes que hacen que todo tome un nuevo rumbo, como nos sucedió en una de las sesiones.

Es importante mencionar que aunque el objetivo que el estudiante observara la representación y concluyera la relación en referencia a sus áreas, se logró avanzar en el conocimiento que ellos tenían acerca del Teorema de Pitágoras, pues la mayoría del curso paso de decir que éste correspondía a la suma de catetos a decir que el teorema era la relación entre áreas de los cuadrados creados por los catetos, esto se puede reflejar en expresiones como: *los triángulos que componen los cuadrados pequeños son los mismo que se encuentran en el cuadrado más grande.*

Respondiendo a la pregunta orientadora, decimos que la implementación de un software es una propuesta arriesgada, ya que conlleva a una planeación más detallada en los aspectos que se ponen en juego como, la afinidad o habilidad de los estudiantes con el manejo del programa, la facilidad del manejo del mismo, el entendimiento del objeto virtual en juego, y la guía correcta en el proceso, sin olvidar el aspecto emocional que surge al innovar con una propuesta como estas en el aula de clases, y salir de la cotidianidad de la explicación magistral, también se debe tener en cuenta todas las investigaciones realizadas sobre errores, dificultados y/o obstáculos encontrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de forma general y especificando en este caso en el teorema de Pitágoras, para poder implementar la secuencia de actividades que puedan satisfacer estas.

Podemos decir en cuanto a uno de los objetivos: Reconocer las funciones que cumple el software (GeoGebra) en la representación del teorema de Pitágoras, GeoGebra es un software que permite realizar construcciones que para los estudiantes realizar con "papel" y "lápiz" parecen ser difícil y por tanto no les resulta agradable, es aquí donde actúa el software como diferencia, como un software dinámico, lo cual, permite al estudiante visualizar en un aspecto "prácticamente" simultaneo infinidad de casos o representaciones de un teorema, permitiendo visualizar la generalidad de las relaciones entre los objetos que se ponen en juego, otorgando un dinamismo en este tipo de nociones tan generales, dejando así de lado la rigidez que constaría representar caso por caso en el papel, ayudando así que el estudiante deje de ver las matemáticas como la materia más aburrida, sino que con la incorporación de las TICS observen las matemáticas desde otro punto de vista.

Respecto a la incorporación del software cabe mencionar que se falló en cuanto a que no se sacó provecho de todas las herramientas que brinda GeoGebra, pues no se realizó un trabajo profundo en la vista algebraica, la cual permite ver un proceso más aritmético con base a las medidas específicas de cada caso, aunque es importante aclarar que el objetivo general va dirigido hacia un trabajo más geométrico, con la construcción de una representación, ya que se da relevancia a las propiedades y/o características del Teorema de Pitágoras, es decir, las relaciones que existen entre las áreas de las figuras formadas sobre los lados de un triángulo rectángulo, (por ejemplo con pentágonos) lo que es importante, es observar que con cierto de tipo de representación, se puede indagar directamente la relación que existe en los objetos matemáticos (triangulo rectángulo) identificándola gráficamente.

9. BIBLIOGRAFÍA

- Acero, E. (2013). *Propuesta para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de gravo octavo en la Institución educativa Distrital Usaquén* (Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Abrate, R; Pochulu, M.; Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática*. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires. Universidad Nacional de Villa María.
- Anónimo. (2013). *De Razones a Funciones Trigonométricas* (Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C
- Bartolini Bussi, M. G, y Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective.* [La mediación semiótica en el aula de matemáticas: Artefactos y signos después de una perspectiva de Vygotsky].Handbook of international research in mathematics education. Lawrence Erlbaum.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológicade lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, Número 2, pp. 221-266.
- Colmenares, A; Piñero, M. (2008). La investigación acción. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas. Laurus, Vol. 14, Número 27, pp. 96-114.
- D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética:* interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Barcelona, España, pp. 35, 90-106.
- Garciadiego, A. (2002). *El teorema de Pitágoras como paradigma de enseñanza de la geometría plana*: *simplificar no siempre simplifica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 5, Número 003.
- Godino, J; Botanero, C; Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada. Universidad de Granada.

- González, P. (2008). *El teorema llamado de Pitágoras.* Una historia geometría de 4000 años. Sigma. Vol. 32. Azaroa.
- Guzmán, M. (2001) *Tendencias actuales en la educación matemática.* Sigma. España.
- Esteban, M; Ibáñez, M; Ortega, T. (1998) *Trigonometría.* España. Editorial Síntesis. S.A.
- León, D. & Sarmiento, L. (2004). *Resolución de triángulos* (Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Lommis, E. (1940) *The Pythagorean Proposition, classics in Mathematics education series.* [La proposición de Pitágoras, clásicos de la serie en la educación matemática]. Washington. National council of Teachers of Matematics, INC.
- Mansilla, L. (2011). *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras*. Manizales, Colombia. Universidad Autónoma de Manizales.
- MEN. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá, D.C. Enlace Editores LTDA.
- Mendoza, J; Morales, L; Bogota, F; Cuervo, M. (2010) *La maqueta del conocimiento: la enseñanza de la geometria, a partir de una situación fundamental y la teoría de situaciones didácticas en grado noveno I.E.D. Republica de Mexico. (*Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Moreno, L. (2002a). *Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización.* Ponencia presentada en el Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Moreno, L. (2002b). *Evolución y tecnología.* Ponencia presentada en el Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Moreno, L. (2002c). *Instrumentos matemáticos computacionales.* Ponencia presentada en el Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas, Bogotá, Colombia.

- Orozco, J. (2003). *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia*. Sistematización de experiencias educativas. Bogotá D.C. Ministerio de Educación Nacional.
- Pinzón, V. & Rodríguez, B. (2004). *Estadística Vs Trigonometría* (Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Rabardel, P. (2011). *Les hommes et les technologie* [Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.], Armand Colin, Paris.
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Rodríguez, S. (2013). *¿Cuál es la importancia de la gestión del profesor al introducir en el aprendizaje razones trigonométricas a partir de la relación del teorema de Pitágoras, en estudiantes de grado décimo del colegio José Félix Restrepo?* (Trabajo académico). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Rojas, P. (2012). *Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá. D.C. Grupo MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.