SISTEMATIZACIÓN DEL DIAGRAMA MUSICAL A PARTIR DE LA EXPERIMENTACIÓN CON INSTRUMENTO (PIANO)

AUTORES: CAROLINA CEDEÑO NIÑO & KELLY DE ARCO JIMÉNEZ
DIRECTOR TRABAJO DE GRADO: EDWIN CARRANZA VARGAS.

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Año 2016

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se pretende identificar la relación entre las figuras musicales y la matemática, haciendo todo un análisis proporcional de los conceptos utilizados en la música para comprender y manejar dichas figuras. La característica principal de éstas, se basa en la relación proporcional que se encuentra entre ellas, muchos libros de educación matemática utilizan su representación para la enseñanza de la proporcionalidad, y lo que se busca con el trabajo es hacer explícita dicha relación, que no sólo está en su representación sino en cada uno de los conceptos utilizados en la música.

Como en algunas ocasiones se considera que la música esta desligada de la matemática, se pretende evidenciar esta estrecha e importante relación, resaltando el estudio implícito de un músico en matemática bajo una investigación con metodología analítica del concepto proporción con modalidad documental, para la interpretación de un registro pictórico de las notas musicales en el pentagrama haciendo uso del instrumento Piano como herramienta para lograr la sistematización. Pero, para llegar a hablar de representación musical se hace necesario estudiar cada uno de los términos utilizados en la música, por lo cual el trabajo contiene 4 apartados.

En el primero se realiza una breve descripción y caracterización del instrumento piano, que servirá de referencia para el desarrollo de la sistematización y análisis.

El segundo se divide en dos: a) Se muestra cómo gráficamente se identifica la proporcionalidad a partir de las frecuencias de la nota LA desde las relaciones numéricas establecidas por Pitágoras, y cómo la representación de dicho sonido cambia dependiendo del instrumento utilizado, en este caso emitido desde el Piano; y b) se analiza desde las relaciones de las frecuencias las construcciones de cada uno de los intervalos y escalas musicales; teniendo en cuenta las relaciones numéricas que se establecen entre las notas musicales; desde las cuales se logra establecer una correspondencia con dichas construcciones y de las medias, aritmética y armónica.

En el tercero, se comparan las relaciones numéricas haciendo uso de teoremas establecidos en el estudio de lo armónico, denominado como cuaterna armónica. Utilizando dichas relaciones como abscisas de puntos, permitiendo entender y justificar por qué las notas musicales están ordenadas de cierta manera en la escala pitagórica y en el piano, determinando así relaciones proporcionales entre ellas; además se logra explicar de forma matemática la relación entre tonos y semitonos, característica esencial al momento de utilizar el piano.

En el cuarto, se realiza un estudio y análisis de lo proporcional inmerso en la representación pictórica, o diagrama musical, en el que se da conocer el vínculo existente entre las distintas figuras y notas musicales utilizando los componentes musicales anteriormente estudiados.

Se hace necesario resaltar que el trabajo de grado se realizó sobre este tema por el interés de elaborar a futuro una propuesta didáctica que permita trabajar la proporcionalidad desde los conceptos musicales, con población entre los 7 y 12 años.

Contenido

1) PRELIMINARES ... 3

ANTECEDENTES ... 3

JUSTIFICACIÓN ... 3

MARCO TEÓRICO ... 4

OBJETIVOS ... 4

OBJETIVO GENERAL: ... 4

OBJETIVOS ESPECÍFICO: ... 4

2) CARACTERIZACIÓN DEL PIANO ... 5

3) VÍNCULO PROPORCIONAL ENTRE LAS FRECUENCIAS ... 7

A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN SENOIDAL DE LAS ONDAS SONORAS (NOTAS MUSICALES) ... 7

CONSTRUCCIÓN DE LOS INTERVALOS QUINTA, CUARTA Y TERCERA ... 17

Intervalo a partir de quintas ... 17

Intervalo a partir de cuartas: ... 23

Intervalo de tercera: ... 25

4) CUATERNA ARMÓNICA ENTRE LAS NOTAS A PARTIR DE SUS RELACIONES NUMÉRICAS ... 26

Justificación de tonos y semitonos ... 40

5) VÍNCULO PROPORCIONAL ENTRE LAS FIGURAS MUSICALES Y SU RELACIÓN E INTERPRETACIÓN CON LAS NOTAS ... 42

Evaluación del proceso y desarrollo de la sistematización ... 50

6) CONCLUSIONES ... 57

7) BIBLIOGRAFIA ... 59

1) PRELIMINARES

ANTECEDENTES

El ser humano en sus intentos por describir lo que sucede a su alrededor ha hecho uso de la matemática como herramienta, en la Grecia antigua se evidencia esta actividad presentada en distintas situaciones, entre ellas culturales, dando origen a tratados geométricos establecidos desde la relación entre el ejercicio racional y experimental que posibilitaron el nacimiento de la arquitectura, la evolución de la cerámica y pintura griega, y un sistema musical basado en la proporcionalidad; siendo este último, objeto de estudio del filósofo, músico, y matemático Pitágoras, emergente de su idea fundamental del número como base de todas las cosas y el estudio de las propiedades numéricas en relación con los intervalos musicales.

Dado a que los intervalos musicales tienen una estrecha relación con el número, pues resulta de comparación entre magnitudes o entre cantidades, el concepto de proporción se convierte en objeto de estudio que fundamenta la constitución de la escala musical trabajado en un primer momento, desde lo discreto conmensurable o conjunto numérico natural (Pitágoras), y seguido a ello desde lo continuo inconmensurable o conjunto numérico real (Euclides).

JUSTIFICACIÓN

Filósofos como Aristóteles y Boecio a partir del estudio matemático realizado por Pitágoras en la música, la establecieron como ciencia: "*ciencia de toda proporción y toda relación como tal*" y "*Ciencia que permitía al hombre alcanzar la sabiduría*" respectivamente. Es por esto, que se pretende identificar la fundamentación matemática implícita en la música siendo el diagrama musical objeto de estudio a partir de la proporcionalidad, relacionando el lenguaje musical como un lenguaje matemático. En el intento de comprender su estructura presentada como una relación de equivalencia entre figuras se establece como hipótesis el desarrollo proporcional de figuras, notas

En el marco de la educación matemática se han identificado dificultades por parte de los estudiantes al trabajar situaciones de proporcionalidad, como docentes se pretende desde una perspectiva histórica proponer la proporcionalidad como un concepto articulador, integrador y fundamental en la educación matemática permitiendo destacar y reconocer la interdisciplinariedad de esta, desde el contexto musical que socialmente se ha perdido, generado por el desconocimiento del desarrollo y naturaleza de estas, contradiciendo la característica de la matemática como ciencia de desarrollo integral.

MARCO TEÓRICO

Para Pitágoras *"El número es la esencia de todas las cosas"* filosofía establecida a partir de la relación entre el número y la figura geométrica, sustentada a partir de la corriente mística (religiosa): *"los números con un carácter sagrado cargado de propiedades cabalísticas y virtudes mágicas"* y científica (racional): *"los números con propiedades aritméticas y relaciones numéricas elementales"*; uno de estos números, el 10, denominado por ellos como la tretractys de la década (fundamento del todo) era un número triangular compuesto por diez puntos dispuestos en forma de triángulo equilátero. Este número estaba compuesto por la suma de los primeros 4 números (1, 2, 3, 4); que al establecer relaciones entre estos se determinaba: 1/1, 2/1, 3/2, 4/3 -relación mayor a menor- que representaban consonancias perfectas, siendo la proporcionalidad una relación de armonía entre dichos números, y definida por Euclides como: la relación entre un grupo de magnitudes, números o cantidades.

Dichas relaciones entre los 4 primeros números establecen dentro del desarrollo musical toda su estructura, siendo estas denominadas como: unísono, octava, quinta y cuarta, respectivamente, dando lugar a las actuales notas musicales (do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do), que se representan con figuras o símbolos musicales en el pentagrama (redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa), según su posición en este.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL: Identificar los conceptos matemáticos relacionados con la proporcionalidad, implícitos en la representación musical (Diagrama musical).

OBJETIVOS ESPECÍFICO:

- Referenciar la relación entre el concepto de proporcionalidad en el contexto matemático y su uso en el contexto musical.
- Experimentar con el piano las relaciones encontradas en los contextos matemático y musical.
- Sistematizar la experiencia a partir del uso de herramientas tecnológicas.
- Reportar la experiencia como un análisis del concepto proporcionalidad implícita en la música.
- Utilizar un lenguaje matemático para la comprensión del lenguaje musical.

2) CARACTERIZACIÓN DEL PIANO

El piano es un instrumento musical que consta de dos tipos de teclas, blancas y negras, las cuales al ser oprimidas emiten un sonido que se relaciona con una nota musical, este puede ser agudo o grave según el lugar que ocupan en el teclado. (Ilustración 1).

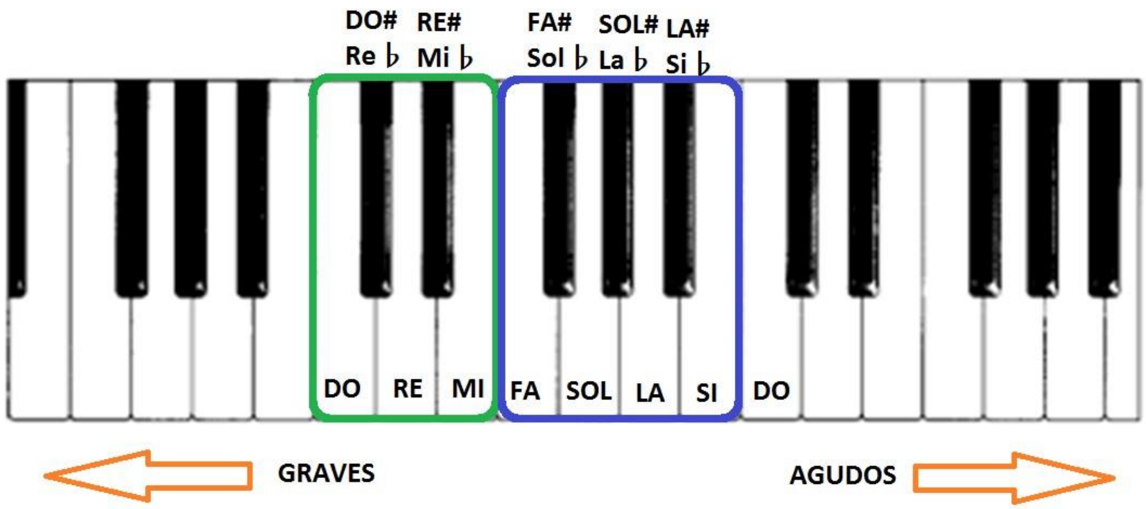


Ilustración 1

Las teclas correspondientes a las notas más graves se disponen a la izquierda, mientras que a la derecha se encuentran las más agudas.

Si se detalla la imagen, se identifica que el teclado se divide en dos grupos que se repiten de manera alterna; estos grupos están compuestos de la siguiente manera; el primero, contiene 5 teclas, dos negras -Do#, Re#- y tres blancas -DO, RE, MI- y el segundo, 7 teclas, tres negras -Fa#, Sol#, La# y cuatro blancas -Fa, Sol, La, Si-. Lo que corresponde a un intervalo de 7 teclas blancas y 5 negras que conformarían lo que se denomina una octava. Las notas sostenidas (#) o bemoles (♭) se indican según como se esté ubicado en el piano y hacia donde se desee ir, es decir, que, si se desea tocar de DO a SI en la octava descrita en la **Ilustración 1**, las teclas negras se indicaran como sostenidas, pero si se desea tocar de SI a DO las teclas negras se indicaran como bemoles.

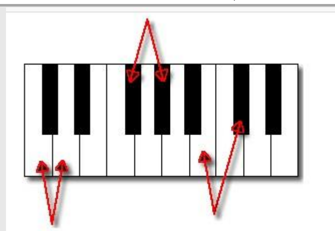
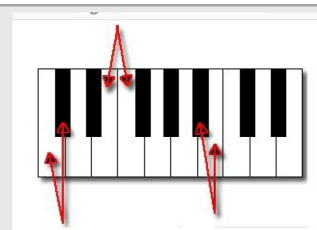
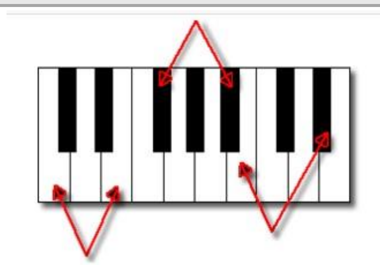
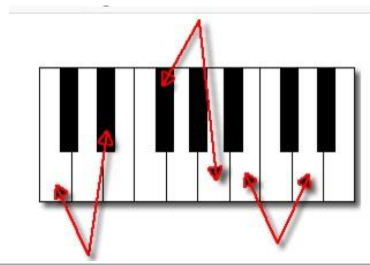
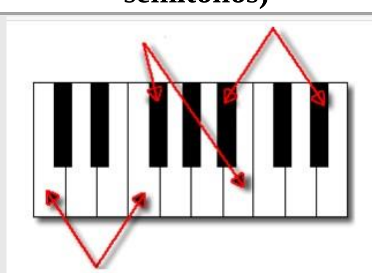
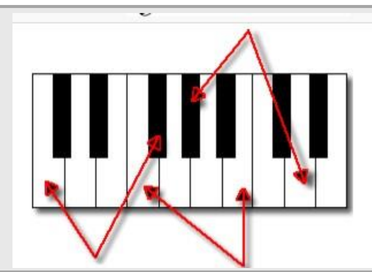
La característica de la nota musical de ser aguda o grave viene a ser establecida por su frecuencia, que la identifica del resto. Cada una de estas se encuentra separada de otra por una distancia llamada intervalo, que puede ser interpretado desde la distancia musical que hay entre estas (cantidad de notas por las que hay que pasar de una a otra, teniendo en cuenta el sentido del recorrido), o desde la distancia numérica haciendo uso de la comparación proporcional de las frecuencias, que será detallado y estudiado más adelante

Por ahora se describirán los intervalos desde la distancia musical, los cuales se clasifican en mayores, menores o justos según la cantidad de semitonos o tonos que contienen, cabe aclarar que no todos los intervalos con el mismo nombre tienen el mismo tamaño, lo que se detallara con exactitud en la Tabla 1. Pero antes es necesario precisar la caracterización de los tonos y semitonos en el piano, los cuales se encuentran en medio de las ocho notas de una octava como sigue:

$$1.\ do \cap re \cap mi - fa \cap sol \cap la \cap si - Do$$

$$2.\ do - (do\,\#, reb) - re - (re\,\#, mib) - mi - fa - (fa\,\#, solb) - sol - (sol\,\#, \quad lab) - la - (la\,\#, sib) - si - Do$$

Donde (∩**)** hace referencia a un tono y (-) a un semitono, identificando que: **1** en una octava se encuentran 5 tonos y 2 semitonos con solo las notas principales; y **2** en una octava se encuentran 12 semitonos con las notas de sostenidos (#) y bemoles ($\flat$).

Intervalos	
Segunda	
Mayor si tiene 1 tono (2 semitonos)	**Menor si tiene 1 semitono**
	
Tercera	
Mayor si tiene 2 tonos (4 semitonos)	**Menor si tiene 1 tono y medio (3 semitonos)**
	
Cuarta	
Justas si tiene 2 tonos y medio (5 semitonos)	**Aumentadas si tiene 3 tonos (6 semitonos)**
	
Quinta	

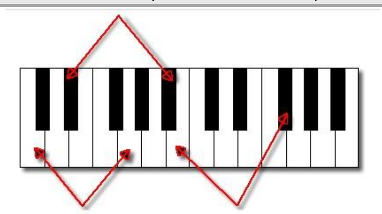
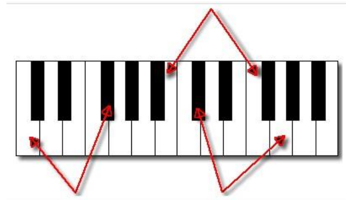
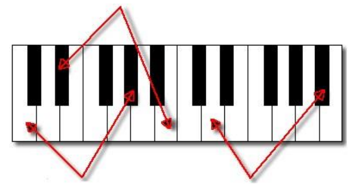
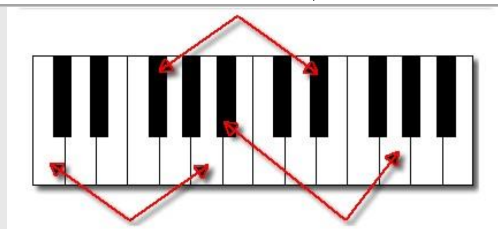
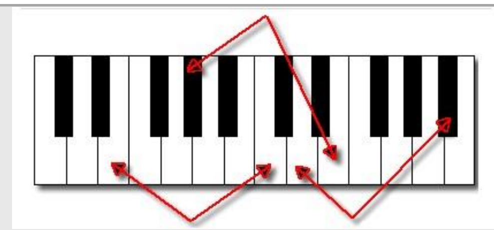
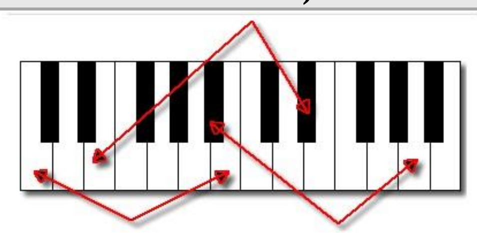
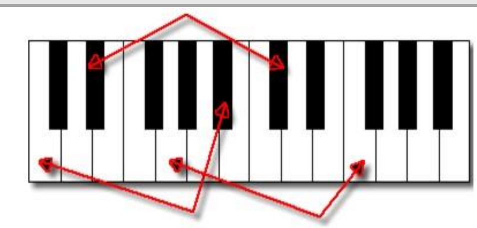
<table>
<tr><td colspan="2">Justa si tiene 3 tonos y medio (7 semitonos)</td><td colspan="2">Disminuida si tiene 3 tonos (6 semitonos)</td><td colspan="2">Aumentada si tiene 4 tonos (8 semitonos)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Sexta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mayor si tiene 4 tonos y medio (9 semitonos)</td><td colspan="3">Menor si tiene 4 tonos (8 semitonos)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Séptima</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mayor si tiene 5 tonos y medio (11 semitonos)</td><td colspan="3">Menor si tiene 5 tonos (10 semitonos)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Octava</td></tr>
<tr><td colspan="6">si tiene 6 tonos (12 semitonos)</td></tr>
</table>

Tabla 1

3) VÍNCULO PROPORCIONAL ENTRE LAS FRECUENCIAS

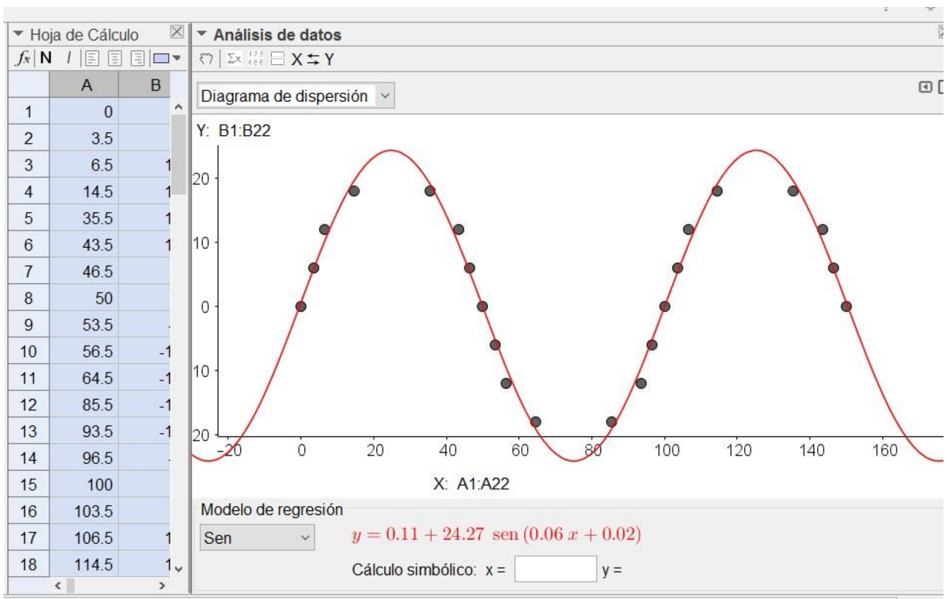
A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN SENOIDAL DE LAS ONDAS SONORAS (NOTAS MUSICALES)

Por medio del programa WavePad y Geogebra se realiza un análisis de la nota La, designada como el tono de referencia en la Segunda Conferencia Internacional para el Diapasón en el año 1939, con una frecuencia de 440Hz; con el fin de encontrar algunos puntos que permitan describir su representación funcional, dados por el tiempo y los decibelios (dB) alcanzados. Los puntos hallados son aproximaciones al relacionar las dos dimensiones, siendo modificados los dB en negatividad para representarlos en Geogebra (Tabla 2).

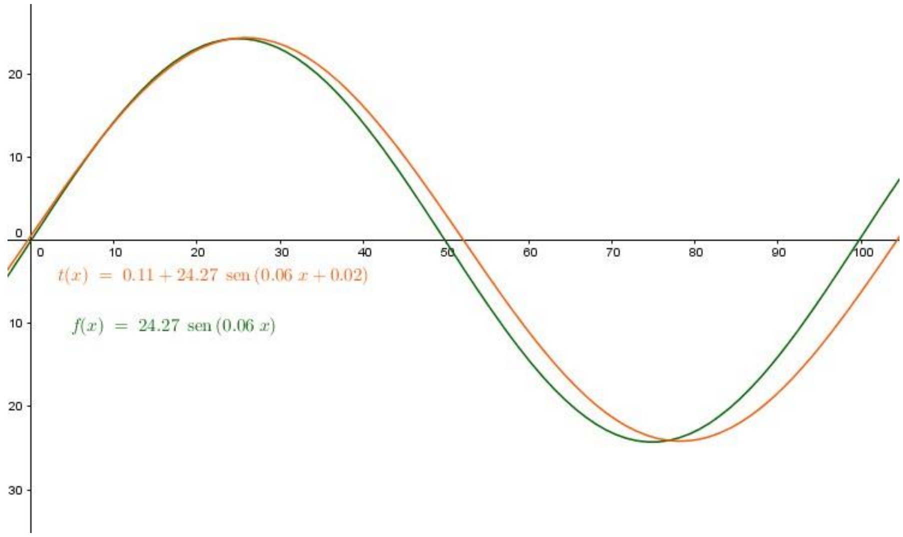
Tiempo (milisegundos)	Decibelios (dB)	Decibelios (dB) Geogebra
0	0	0
3.5	-6	6
6.5	-12	12
14.5	-18	18
35.5	-18	18
43.5	-12	12
46.5	-6	6
50	0	0

Tabla 2

Para lograr una modelización y acercamiento a la función que se desea encontrar se añaden a la tabla más puntos y por medio de una regresión de dos variables se encuentra la representación senoidal (Gráfica 1), encontrando una posible función $y = 0.11 + 24.27sen(0.06x + 0.02)$ que se modifica para que los puntos llamados nodos en la gráfica coincidan o se acerquen a los dados en la tabla 2, resultando $y = 24.27sen(0.06x)$ visible en la Gráfica 2.



Gráfica 1

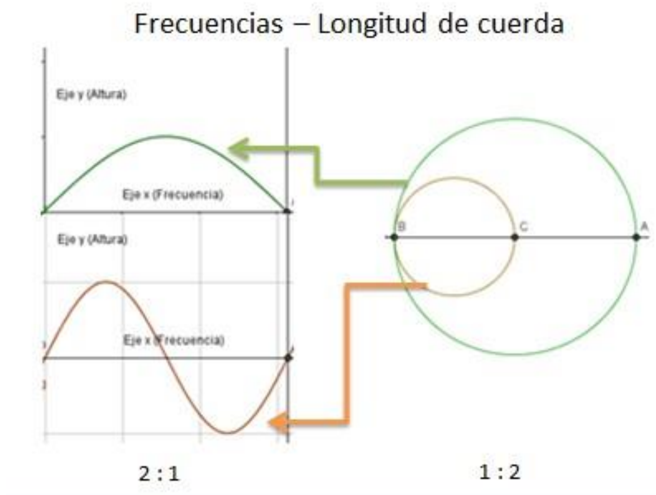


Gráfica 2

La Función resultante será el objeto que permitirá hacer el análisis y encontrar el vínculo proporcional entre las frecuencias de las notas musicales, para ello es necesario tener presente las tres variables dentro de su caracterización, siendo estas: **Altura** *"viene dada por la frecuencia de oscilación… a una baja frecuencia de oscilación le corresponden tonos graves, y a una alta frecuencia de oscilación, tonos agudos"*; **Intensidad** *"energía acústica que desarrolla una onda longitudinal por unidad de tiempo, depende de la amplitud… a mayor volumen, mayor amplitud de la onda"*; **Timbre** *"otorga personalidad al sonido…permite discriminar los sonidos emitidos por instrumentos diferentes, aunque éste tenga la misma intensidad y la misma altura".* (Arbonés J & Milrud P. 2011)

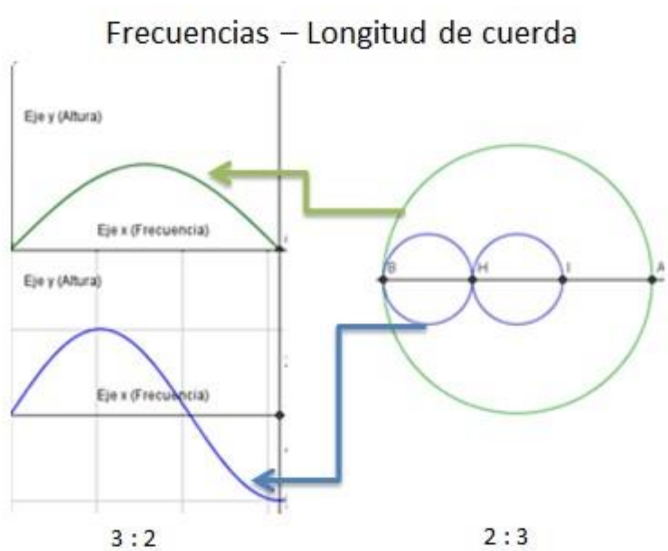
Debido a la observación que se desea hacer, la característica a estudiar del sonido o nota será la altura, pues tiene que ver con la frecuencia de oscilación de la misma, donde la intensidad se conserva para las demás notas y el timbre será basado en la emisión del sonido de la nota La, por el diapasón (único, no variará). De esta manera se irán encontrando las representaciones de las demás notas teniendo a esta como referencia, como se evidencian en las siguientes ilustraciones, haciendo uso de las proporciones numéricas encontradas por Pitágoras a partir de cuerdas (que serán utilizadas para encontrar los distintos intervalos más adelante), y unas posibles relaciones entre estas con respecto a la función original, tomando como referencia un ciclo de ésta. El trabajo realizado por Pitágoras se describe como

1. Tomar una cuerda de longitud L y dividirla en dos partes iguales, justamente en la mitad de la cuerda obteniendo una relación numérica 1:2 considerada razón, entendida como el cociente de un número por otro. Lo que en la música podemos relacionar con un intervalo de octava (do-Do, ocho notas entre el intervalo), donde su frecuencia se establece desde una relación de 2:1, una relación inversa (Gráfica 3)



Gráfica 3

2. Tomar la cuerda de longitud L y dividirla en tres partes iguales, estableciendo una relación numérica 2:3, que en lo musical estaría dada por un intervalo de quintas (do-sol, cinco notas entre el intervalo), y una relación entre sus frecuencias a partir de la relación 3:2. (Gráfica 4).

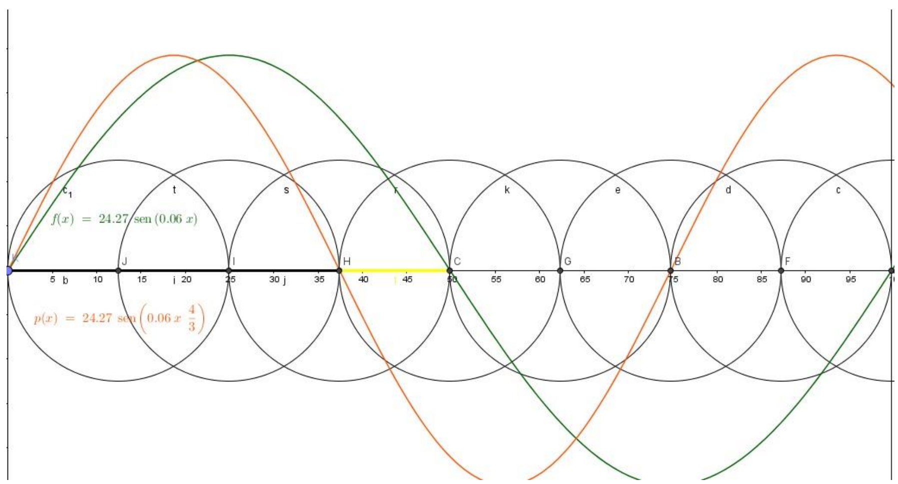


Gráfica 4

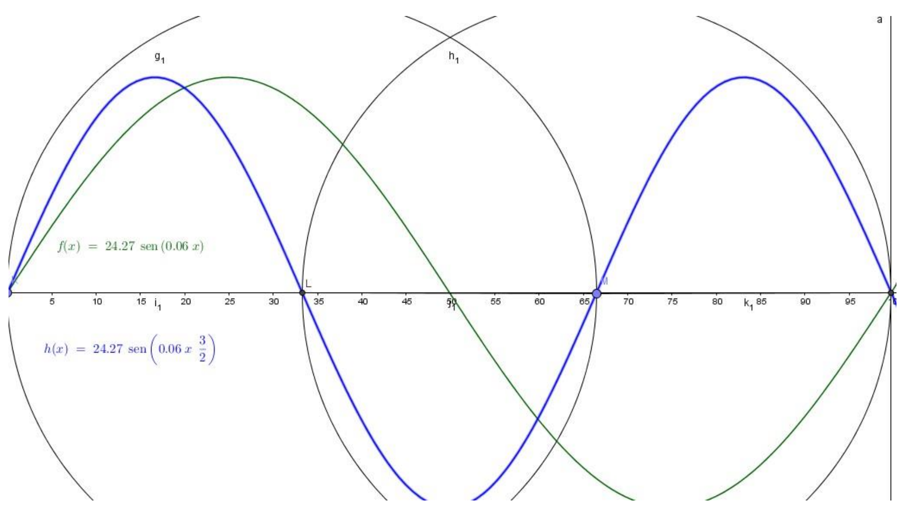
Así sucesivamente con cada uno de los intervalos (Cuarta y tercera), que se ejemplifica a continuación con la representación senoidal de la nota La encontrada.

- La función naranja, en la mitad del ciclo de la función original, está a una relación de 3/4; lo que observando en su representación simbólica corresponde al 4/3 que se multiplica dentro del paréntesis correspondiendo a una relación o intervalo de cuarta, pues según Arbonés J & Milrud P (2011 Pág. 18) *"la relación entre las longitudes de dos cuerdas es la inversa de la relación de las frecuencias de esas cuerdas"*. Además, ésta cumple 1 ciclo y 2/4 respecto al ciclo de la original (Gráfica 5).

En la función azul sucede algo similar variando la proporcionalidad en el ciclo, donde se identifica que está a 2/3 de la original en cuanto a medio ciclo, correspondiendo a la relación o intervalo de quinta coincidiendo con el 3/2 que multiplica dentro del paréntesis siendo su representación inversa (Gráfica 6).

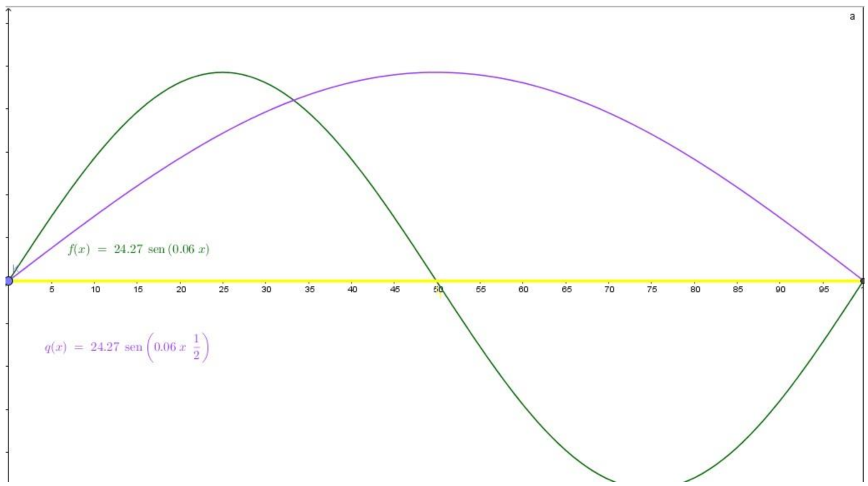


Gráfica 5

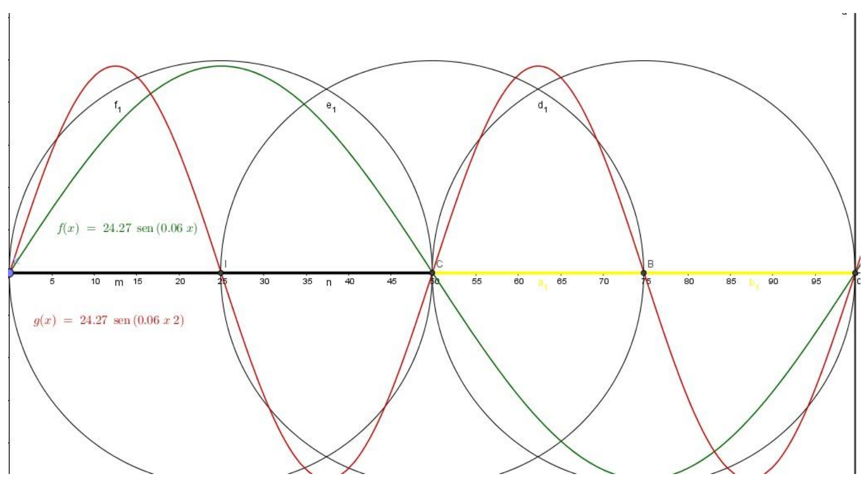


Gráfica 6

- La función de color morado presenta una modificación en el período siendo el doble respecto a la original (Gráfica 7); lo que sucede de manera contraria con la función de color rojo que presenta una modificación de ser 2 veces menor a la original (Gráfica 8). Lo que hace corresponder a un intervalo de octava para ambas donde la roja expresaría una octava mayor y la morada una octava menor respecto a la original, asociándolas a tonos agudos y graves respectivamente como lo habíamos hablado anteriormente según la característica de la altura en relación con su frecuencia.



Gráfica 7



Gráfica 8

Si se llevase este análisis a un contexto musical, se puede decir que las notas encontradas respecto a la nota La de 440 Hz son las siguientes:

Nota Mi de la octava siguiente en la que está La, con frecuencia de 660 Hz
Nota Re de la octava siguiente en la que está La, con frecuencia de 587.30 Hz
Nota La de la octava anterior en la que se encuentra La original, con frecuencia de 220 Hz

Nota La de la octava siguiente en la que se encuentra La original, con frecuencia de 880 Hz

Estas relaciones establecidas se han realizado bajo un sonido puro de la nota La, pero si se tuviera que analizar el sonido de una nota emitido por un instrumento musical, su representación no es de tipo senoidal en su visualización inicial, pero puede ser descompuesto en varias de éstas por sus numerosas ondas parciales (Ver Gráfica 9), y sus frecuencias se podrían determinar utilizando el principio de Fourier desde el cual resulta un análisis donde se determinan los llamados "armónicos", definidos como serie de tonos de menor intensidad que se suman a un tono principal y que el oído percibe hasta cierto punto - hasta el armónico 16- y determinan la personalidad sonora o el timbre del sonido emitido según la cantidad de estas ondas, sus fases y amplitudes relativas.

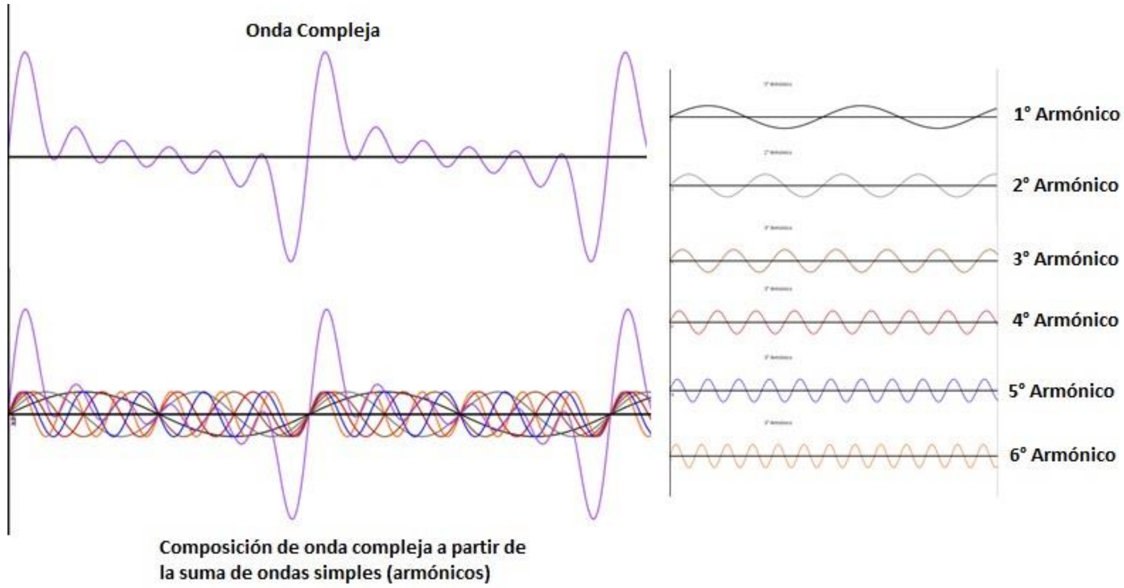
> *"Toda onda compleja puede ser descompuesta en las oscilaciones simples que la forman. Cuando esto se hace, aparece una serie de ondas de diferentes frecuencias, amplitudes*[1] *y fases relativas. Las frecuencias de las ondas complejas se dividen en dos:* ***Frecuencia fundamental****, que por ser la más baja determina la tonalidad del sonido; y los* ***armónicos pares o impares****, según sean o no múltiplos de la frecuencia fundamental" (Labrado, J.)*

Los armónicos se pueden ejemplificar cuando al momento de hacer vibrar una cuerda, las frecuencias correspondientes a estos serán dados por las siguientes relaciones 1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, …, y así sucesivamente hasta que el sonido emitido por la cuerda y su vibración se relajen. Es importante tener en cuenta que "el sonido real emitido por un instrumento presenta cuatro características que se relacionan con el desarrollo temporal de la emisión:

- El ‹‹ataque››, esto es, el tiempo que transcurre entre que el instrumento es ejecutado y el momento en que el sonido alcanza su máxima amplitud.
- El ‹‹decaimiento››, el tiempo que transcurre entre el punto de máxima amplitud y el instante en que se estabiliza la emisión.
- El ‹‹sostenimiento››, el tiempo en que el sonido mantiene su amplitud mientras continua la emisión.
- La ‹‹relajación››, el tiempo que tarda en caer la amplitud al suspender la emisión." Arbonés & Milrud (pág.180), para tener presente que cada una de ellas corresponde a un momento preciso en la emisión que detallarán al mismo tiempo el armónico en el que se encuentra y la intensidad del mismo sonido. (Gráfica 10).

---

[1] Las amplitudes de los armónicos pueden ser o no iguales en la descripción de un sonido, según la caracterización de este en cuánto a su intensidad.



Gráfica 9

Ahora, se intenta detallar lo anteriormente enunciado a partir de la misma nota La con frecuencia 440 Hz trabajada hasta el momento, pero desde su emisión o sonido dado por el instrumento musical que se utiliza como herramienta en el trabajo, el Piano. Para ello se utilizan de nuevo los programas WavePad y Geogebra para describir la onda generada, pero al momento de importar el sonido al programa de audio, la intensidad de éste no permite identificar los decibelios (dB) en algunas partes de la representación, además no se alcanza a detallar los puntos de corte con el eje simétrico de ésta, atascando el proceso de encontrar dicha onda.

Dado al inconveniente se opta por utilizar el programa Audactity, el cual, describe una onda donde pueden detallarse los puntos de corte con el eje simétrico logrando identificar una función de tipo senoidal (Ilustración 3). Al igual que con el anterior programa no se logran establecer puntos que ayuden a detallar un acercamiento a la función para determinar los armónicos que la componen, por esta razón realizamos una aproximación utilizando el programa de Geogebra: se toma un pantallazo de la función y se lleva al programa ubicando puntos sobre el contorno de la onda determinando tres funciones (Ilustración 4):

1. $g(x) = -0.01 + 0.27sen(6.66x - 3.14)$
2. $h(x) = 0.01 + 0.14sen(9.29x + 3.12)$
3. $p(x) = 0.01 + 0.09sen(13.73x - 1.23)$

Que al ser sumadas determinarán una nueva función que se aproxima a la que se está buscando en cuanto a su representación gráfica y no simbólica (Ilustración 5), dado a que los datos no pudieron ser tomados. Esta función, con los datos de las anteriores será:

$$\boldsymbol{q(x) = g(x) + h(x) + p(x) = -0.01 + 0.27sen(6.66x - 3.14) + 0.14sen(9.29x + 3.12)0.01 + 0.09sen(13.73x - 1.23) + 0.01}.$$

Ilustración 2

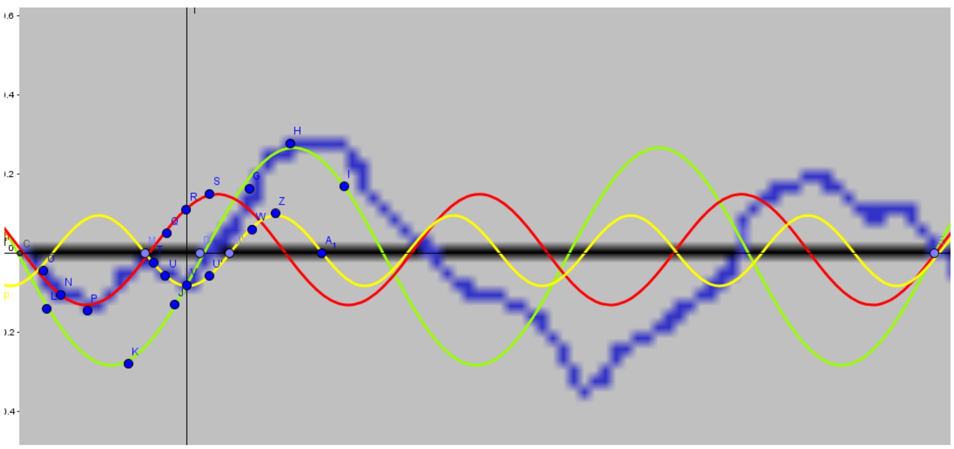


Ilustración 3

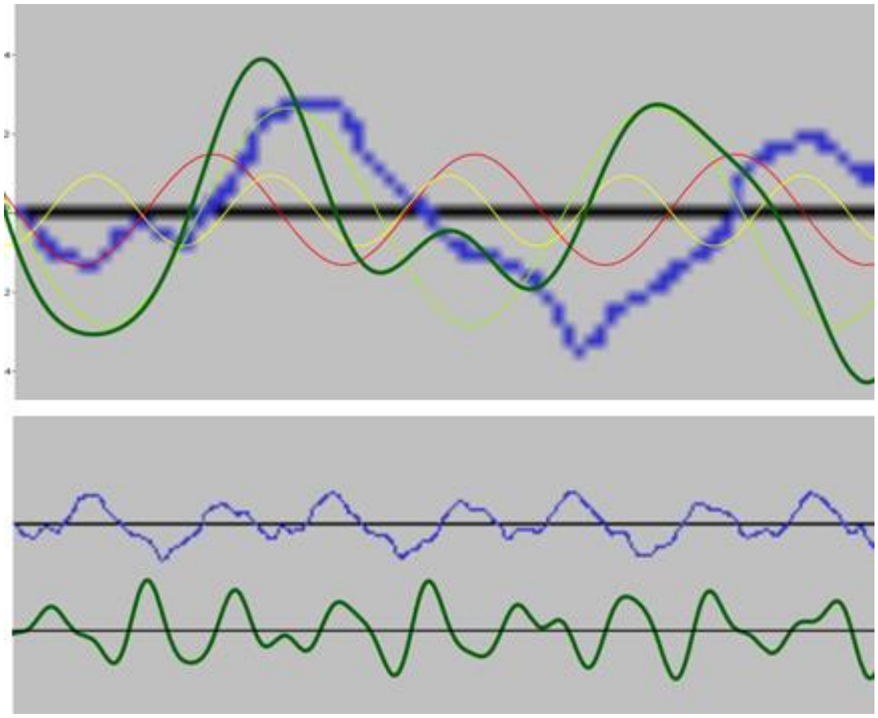


Ilustración 4

La serie que se ejemplifica de los 16 armónicos en lo musical, se realiza por lo general para el caso de un instrumento que toca un *do* determinando diferentes frecuencias en relación con la nota que representa. En este caso se determinará la relación desde el instrumento Piano que toca un *la*, haciendo una pequeña comparación entre las dos escalas (Tabla 3), que se relacionará con lo anteriormente enunciado a partir de su emisión y representación senoidal.

DO						LA					
N° de Armónico	Frecuencia	Nota	N° de Armónico	Frecuencia	Nota	N° de Armónico	Frecuencia	Nota	N° de Armónico	Frecuencia	Nota
1°	33 Hz	*Do 1*	9°	297 Hz	*Re 4*	1°	55 Hz	*La 1*	9°	495 Hz	*Si4*
2°	66 Hz	*Do 2*	10°	330 Hz	*Mi 4*	2°	110 Hz	*La 2*	10°	550 Hz	*Do #5*
3°	99 Hz	*Sol 2*	11°	363 Hz	*Fa 4#*	3°	165 Hz	*Mi 3*	11°	605 Hz	*Re5*

4°	132 Hz	*Do 3*	12°	396 Hz	*Sol 4*
5°	165 Hz	*Mi 3*	13°	429 Hz	*La 4*
6°	198 Hz	*Sol 3*	14°	462 Hz	*Si♭ 4*
7°	231 Hz	*Si♭ 3*	15°	495 Hz	*Si4*
8°	264 Hz	*Do 4*	16°	528 Hz	*Do 5*

4°	220 Hz	*La 3*	12°	660 Hz	*Mi 5*
5°	275 Hz	*Do 4*	13°	715 Hz	*Fa 5*
6°	330 Hz	*Mi 4*	14°	770 Hz	*Fa #*$_5$
7°	385 Hz	*Sol 4*	15°	825 Hz	*Sol #*$_5$
8°	440 Hz	*La 4*	16°	880 Hz	*La5*

Tabla 3

Se identifica de las dos escalas que entre: Do$_1$ -Do$_2$ *y* La$_1$- La$_2$ *hay 8 notas, lo que determina un intervalo de octava;* Do$_2$- Sol$_2$ *y* La$_2$- Mi$_3$ *hay 5 notas, lo que determinaría un intervalo de quinta;* Do$_2$- Do$_3$ *y* La$_2$- La$_3$ *hay 8 notas, intervalo de octavo;* Do$_3$- Mi$_3$ *y* La$_3$- Do$_4$ *hay tres notas, intervalo de tercera;* Do$_3$- Sol$_3$ *y* La$_3$- Mi$_4$ *hay 5 notas, intervalo de quinta. Si llegásemos a realizar todas las comparaciones entre estas dos tablas se podría seguir encontrando conexión o alguna que otra diferenciando a los intervalos estudiados.*

Dado a que ya se han encontrado algunas relaciones desde las frecuencias de las notas, se detallará en este segundo momento las relaciones a partir de lo establecido por Pitágoras que vendrán a determinar los distintos intervalos, escalas y afinaciones musicales para lograr hacer su interpretación y validación en la comprensión de lo armónico; el cual será dividido en dos apartados: 1) Construcción de los intervalos cuarta, quinta y tercera 2) Cuaterna armónica entre las notas a partir de sus relaciones numéricas.

CONSTRUCCIÓN DE LOS INTERVALOS QUINTA, CUARTA Y TERCERA

La construcción de los intervalos se hará desde un encadenamiento y cancelación de octavas explicado por Arbonés & Milrud, y el uso de las medias (aritmética y armónica) para generalizar.

Intervalo a partir de quintas

(Referenciada la escala pitagórica): Se realiza un paralelo entre el encadenamiento de quintas, y la relación de la media aritmética para el encuentro del intervalo.

“el valor de las frecuencias relativas se encuentra siempre entre 1 (la relación que mantiene el *do* consigo mismo) y 2 (la relación que mantiene el *do* de la siguiente octava)”

Primero se determina el *sol* que se encuentra a una quinta del *do*

$$sol=\frac{3}{2}$$

Por media aritmética se tendría

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}}{2}$$

Donde ***a*** es la nota de la que se parte, ***c*** la nota ***a*** en la siguiente octava y ***b*** la quinta siguiente

$$sol = \frac{1+2}{2}$$

$$sol = \frac{3}{2}$$

Luego el *re* a una quinta del *sol*, en la que se deberá multiplicar por la relación numérica o razón 3/2, cancelando una octava que corresponderá a multiplicar por la razón ½ para que la nota se mantenga en la misma escala.

$$re = sol * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$$

$$re = \frac{3}{2} * \frac{3}{4}$$

$$re = \frac{9}{8}$$

Esta operación establecería una relación entre las notas *do-sol, sol-re*, siendo esta la misma. Pues, *do-sol* están a una quinta o a una razón de 3/2, y *re-sol* presenta la misma sin la cancelación de octava:

$$sol\colon do :: re\colon sol$$

$$1\colon\frac{3}{2} :: \frac{3}{2}\colon\frac{9}{4} \rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{18}{12} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Siendo el cociente entre las divisiones de fracciones igual a 3/2, lo que matemáticamente se relaciona con la proporcionalidad definida por Euclides como la relación entre un grupo de magnitudes, números o cantidades, que en una noción aritmética se traduciría a la igualdad entre dos razones, y que en la música representaría un intervalo de quinta.

La definición de proporcionalidad numérica puede evidenciarse textualmente en el libro VII Definición 21 de Los Elementos de Euclides. Edición de J. L. Heiberg & H. Mengue, *Euclidis Opera omnia (1883-1886)*:

> *"Unos números son proporcionales cuando el primer es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto"*

Con la media aritmética se toma $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{2}$ como la nota de la que se parte y se suma un $\boldsymbol{d}$ que es la misma nota en la octava siguiente (como se tiene nota base la nota *sol* al multiplicarla por 2 para saber el valor de la misma nota en la siguiente octava):

$$\boldsymbol{d} = sol * 2$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{3}{2} * 2$$

$$\boldsymbol{d} = 3$$

es este caso también se debe multiplicar por ½ para mantenerla en la misma octava.

$$re = \frac{(sol + \boldsymbol{d}) * \frac{1}{2}}{2}$$

$$re = \frac{\left(\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}}{2}\right) + \boldsymbol{d}\right) * \frac{1}{2}}{2}$$

$$re = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}}{2}\right) * \frac{1}{2}}{2}$$

$$re = \frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}}{4}}{2}$$

$$re = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}}{8}$$

Reemplazando:

$$re = \frac{1 + 2 + 2(3)}{8}$$

$$re = \frac{9}{8}$$

Ahora *la* a una quinta del *re*

$$la = re * \frac{3}{2}$$

$$la = \frac{9}{8} * \frac{3}{2}$$

$$la = \frac{27}{16}$$

Tomamos ahora la media aritmética como lo hicimos anteriormente sumándole un $\boldsymbol{e}$ a la ecuación encontrada en *re*; dicho *e* será el mismo *re* en la octava siguiente:

$$\boldsymbol{e} = re * 2$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{9}{8} * 2$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{9}{4}$$

Media aritmética encontrada más *e* para encontrar *la:*

$$la = \frac{re + \boldsymbol{e}}{2}$$

$$la = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}}{8}\right) + \boldsymbol{e}}{2}$$

$$la = \frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e}}{8}}{2}$$

$$la = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e}}{16}$$

Reemplazando

$$la = \frac{1 + 2 + 2(3) + 8(\frac{9}{4})}{16}$$

$$la = \frac{27}{16}$$

mi a una quinta de *la* y por estar en la octava siguiente se debe cancelar una octava (multiplicando por ½)

$$mi = la * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$$

$$mi = \frac{27}{16} * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$$

$$mi = \frac{81}{64}$$

A la media aritmética encontrada en *la* se le suma un $\boldsymbol{f}$ que equivale a *la* en la siguiente octava

$$\boldsymbol{f} = la * 2$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{27}{16} * 2$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{27}{8}$$

Se toma lo encontrado y se multiplica por ½ para mantenerlo en la misma octava

$$mi = \left(\frac{la + \boldsymbol{f}}{2}\right) * \frac{1}{2}$$

$$mi = \left(\frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e}}{16} + \boldsymbol{f}}{2}\right) * \frac{1}{2}$$

$$mi = \left(\frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f}}{16}}{2}\right) * \frac{1}{2}$$

$$mi = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f}}{32} * \frac{1}{2}$$

$$mi = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f}}{64}$$

Reemplazando:

$$mi = \frac{1 + 2 + 2(3) + 8\left(\frac{9}{4}\right) + 16(\frac{27}{8})}{64}$$

$$mi = \frac{81}{64}$$

si a una quinta de *mi*

$$si = mi * \frac{3}{2}$$

$$si = \frac{81}{64} * \frac{3}{2}$$

$$si = \frac{243}{128}$$

A la siguiente media aritmética se le suma un g que es mi en la siguiente octava

$$g = mi * 2$$

$$g = \frac{81}{64} * 2$$

$$g = \frac{81}{32}$$

Ahora hallamos *si* por media aritmética

$$si = \frac{mi + \boldsymbol{g}}{2}$$

$$si = \frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f}}{64} + \boldsymbol{g}}{2}$$

$$si = \frac{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f} + 64\boldsymbol{g}}{64}}{2}$$

$$si = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 8\boldsymbol{e} + 16\boldsymbol{f} + 64\boldsymbol{g}}{128}$$

Reemplazando

$$si = \frac{1 + 2 + 2(3) + 8\left(\frac{9}{4}\right) + 16\left(\frac{27}{8}\right) + 64(\frac{81}{32})}{128}$$

$$si = \frac{243}{128}$$

Al igual como se estableció entre las primera tres notas relacionadas en un intervalo de quintas (*do, sol, re)* el vínculo proporcional, se verificará para las demás; y se establecerá relaciones entre algunas de ellas donde se utiliza lo que se denomina cancelación de octavas.

$$re: sol :: la: re$$

$$\frac{9}{4}:\frac{3}{2} :: \frac{27}{8}:\frac{9}{4} \rightarrow \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{4}} \rightarrow \frac{18}{12} = \frac{108}{72} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$la: re :: mi: la$$

$$\frac{27}{8}:\frac{9}{4} :: \frac{81}{16}:\frac{27}{8} \rightarrow \frac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{81}{16}}{\frac{27}{8}} \rightarrow \frac{108}{72} = \frac{648}{432} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$mi: la :: si: mi$$

$$\frac{81}{16}:\frac{27}{8}::\frac{243}{32}:\frac{81}{16}\rightarrow\frac{\frac{81}{16}}{\frac{27}{8}}=\frac{\frac{243}{32}}{\frac{81}{16}}\rightarrow\frac{108}{72}=\frac{3888}{2592}\rightarrow\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Se verifica que $do-sol-re-la-si-mi$ se encuentran relacionadas, todas a una razón de 3/2, intervalo de quinta, siendo de esta manera proporcionales tomadas la anterior de la que sigue, es decir, en el orden en que van encontrándose.

Ahora, si las cancelaciones de octava se realizan, con la intención de que todas las relaciones se establezcan en la misma octava, la proporcionalidad podría ser vista bajo las relaciones de

$$do;sol;re;la;mi;si=1;\frac{3}{2};\frac{9}{8};\frac{27}{16};\frac{81}{64};\frac{243}{128}$$

$$sol:do::la:re=1:\frac{3}{2}::\frac{27}{16}:\frac{9}{8}=\frac{\frac{3}{2}}{1}=\frac{\frac{27}{16}}{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$re:sol::mi:la=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{8}}=\frac{\frac{27}{16}}{\frac{81}{64}}=\frac{24}{18}=\frac{1728}{1296}=\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Rrightarrow dado\ a\ la\ cancelacion\ de\ octavas\ en\ estas\ notas.$$

Intervalo a partir de cuartas:

Paralelo entre el encadenamiento de cuartas y la relación de la media armónica.

Al igual que en el anterior intervalo hallamos a partir de *do* la cuarta pura *fa* resultando

$$fa=\frac{4}{3}$$

Luego *si* que está a una cuarta de *fa*

$$si=\frac{4}{3}*\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$$

mi a una cuarta de *si*

$$mi=\frac{16}{9}*\frac{4}{3}=\frac{64}{27}$$

la a una cuarta de *mi*

$$la=\frac{64}{27}*\frac{4}{3}=\frac{256}{81}$$

re a una cuarta de *la*

$$re=\frac{256}{81}*\frac{4}{3}=\frac{1024}{243}$$

y por último se hallaría a *sol* a una cuarta de *la*

$$sol=\frac{1024}{243}*\frac{4}{3}=\frac{4096}{729}$$

Como la medía armónica es expresada como ${2ab}/{a+b}$, donde a y b corresponden, en este caso a do y Do respectivamente. Se decide colocar todas las notas en términos de esta relación como se muestra a continuación:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

$$\frac{2\left(\left(\frac{2ab}{a+b}\right)*\left(2\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right)\right)}{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\left(2\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right)}=\frac{\left(\frac{4ab}{a+b}\right)*\left(\frac{4ab}{a+b}\right)}{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\left(\frac{4ab}{a+b}\right)}=\frac{\frac{16a^2b^2}{(a+b)^2}}{\frac{2ab+4ab}{a+b}}=\frac{\frac{16a^2b^2}{(a+b)^2}}{\frac{6ab}{a+b}}$$

$$=\frac{16a^2b^2}{6ab(a+b)}=\frac{8ab}{3(a+b)}$$

$$\frac{2\left(\left(\frac{8ab}{3(a+b)}\right)*\left(2\left(\frac{8ab}{3(a+b)}\right)\right)\right)}{\left(\frac{8ab}{3(a+b)}\right)+\left(2\left(\frac{8ab}{3(a+b)}\right)\right)}=\frac{\left(\frac{16ab}{3(a+b)}\right)*\left(\frac{16ab}{3(a+b)}\right)}{\left(\frac{8ab}{3(a+b)}\right)+\left(\frac{16ab}{3(a+b)}\right)}=\frac{\frac{256a^2b^2}{(3(a+b))^2}}{\frac{24ab}{3(a+b)}}$$

$$=\frac{256a^2b^2}{72ab(a+b)}=\frac{32ab}{9(a+b)}$$

$$\frac{2\left(\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)*\left(2\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)\right)\right)}{\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)+\left(2\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)\right)}=\frac{\left(\frac{64ab}{9(a+b)}\right)*\left(\frac{64ab}{9(a+b)}\right)}{\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)+\left(\frac{64ab}{9(a+b)}\right)}=\frac{\frac{4096a^2b^2}{(9(a+b))^2}}{\frac{96ab}{9(a+b)}}=\frac{4096a^2b^2}{864ab(a+b)}=\frac{128ab}{27(a+b)}$$

Observando en las ultimas expresiones a partir del proceso se podría generalizar de la siguiente manera, hallando así las expresiones de las dos notas faltantes:

$$\frac{2ab}{a+b};\frac{8ab}{3(a+b)};\frac{32ab}{9(a+b)};\frac{128ab}{27(a+b)};\frac{512ab}{81(a+b)};\frac{2048ab}{243(a+b)}$$

$$\frac{4}{3};\frac{16}{9};\frac{64}{27};\frac{256}{81};\frac{1024}{243};\frac{4096}{729}$$

Que podría resumirse en $\frac{2^{2n+1}(ab)}{3^n(a+b)}$ siendo $n=0,1,2,3,4,5$; obteniendo las notas en orden *fa, si, mi, la, re, sol* a partir de las notas *do* y *Do*, con una relación proporcional que en las notas como *sol*, *re* difieren en la relación numérica establecida. Aunque si a este proceso le anexamos el hecho de cancelar octavas se obtendría que:

$$\frac{2ab}{a+b};\frac{8ab}{3(a+b)};\left(\left(\frac{32ab}{9(a+b)}\right)*\left(\frac{1}{2}\right)\right);\left(\left(\frac{128ab}{27(a+b)}\right)*\left(\frac{1}{2}\right)\right);\left(\left(\frac{512ab}{81(a+b)}\right)*\left(\frac{1}{4}\right)\right);\left(\left(\frac{2048ab}{243(a+b)}\right)*\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\frac{4}{3};\frac{16}{9};\frac{32}{27};\frac{128}{81};\frac{256}{243};\frac{1024}{729}$$

Que corresponden a las afinaciones de las teclas negras bemoles y sostenidos $fa, si_b, mi_b, la_b, re_b, y\ sol_b$; en el orden encontrado. Los números ½ y ¼ corresponden a la cancelación de una octava y cancelación de dos octavas respectivamente, ya que mi y la al contar 4 notas de la anterior caen sobre la segunda octava y re y sol sobre la tercera octava.

Sin embargo, tanto en las primeras relaciones establecidas y en las segundas con la cancelación de octavas, se evidencia que la proporcionalidad entre estas sigue siendo la misma de 4/3, tomando 4 relaciones numéricas de las notas en el orden que fueron encontradas se verifica.

$$si{:}\,fa :: la{:}\,mi = \frac{16}{9}:\frac{4}{3}::\frac{128}{81}:\frac{32}{27} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{256}{81}}{\frac{64}{27}} = \frac{48}{36} = \frac{6912}{5184} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$si_b{:}\,fa :: la_b{:}\,mi_b = \frac{16}{9}:\frac{4}{3}::= \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{128}{81}}{\frac{32}{27}} = \frac{48}{36} = \frac{3456}{2592} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Intervalo de tercera:

Este intervalo a diferencia de los dos anteriores, no se le asigna ninguna media ni encadenamientos de una sola relación numérica como quintas o cuartas, pues no resulta viable para llegar a una afinación correcta, considerando este intervalo de terceras el más puro. A continuación, se explicará su construcción sólo desde el trabajo realizado por Arbonés & Milrud:

a) Se determinan las notas *fa* y *la* por encadenamientos de quintas partiendo del *do*, las cuales se consideran las notas más importantes dentro de la escala por permitir encontrar las demás en relación a ellas.

$$fa = \frac{4}{3}; sol = \frac{3}{2}$$

b) A partir de *do* se calcula *mi*, comprendiendo un intervalo de tercera a una distancia de 5/4

$$mi = do * \frac{5}{4}$$

$$mi = 1 * \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

c) A partir de *fa* se calcula *la*, comprendiendo un intervalo de tercera a una distancia de 5/4

$$la = fa * \frac{5}{4}$$
$$la = \frac{4}{3} * \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

d) A partir de *sol* se calcula *si*, comprendiendo un intervalo de tercera a una distancia de 5/4

$$si = sol * \frac{5}{4}$$
$$si = \frac{3}{2} * \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

e) A partir de *sol* se calcula *re*, comprendiendo un intervalo de quinta a una distancia de 3/2

$$re = sol * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}$$
$$re = \frac{3}{2} * \frac{3}{2} * \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Como se han encontrado relaciones numéricas que dependiendo el intervalo se mantienen o varían, se verificará si dichas relaciones se encuentran separadas armónicamente. Para este proceso, se tendrán en cuenta las relaciones aritméticas encontradas por medio del encadenamiento de quintas, y los puntos conjugados armónicos donde, para determinar si 4 puntos se encuentran en armonía el uno del otro, se establecen los teoremas de razones dobles a partir de lo geométrico.

4) CUATERNA ARMÓNICA ENTRE LAS NOTAS A PARTIR DE SUS RELACIONES NUMÉRICAS

Hernando Castillo (1993) en su libro Lecciones de geometría Euclidiana, menciona la razón doble como una razón de dos razones simples, y con esto afirman que en una misma recta se pueden encontrar dos o más puntos que tienen una misma razón entre ellos.

Si a, b, c, d son las abscisas respectivas de los puntos A, B, C, D, teniendo en cuenta que dichas abscisas son las relaciones numéricas que encontramos de cada una de las notas, es decir, serán referencias de los puntos de la cuerda y las distancias establecidas entre ellas, entonces:

$$(ABCD) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

El orden en se consideren los puntos de una razón doble, es importante, es por esto que se toma la escala musical en el orden establecido (DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO_1)

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación de frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2

Entonces:

A_1 = DO $\quad a_1 = 1$ $\qquad$ A_2 = Sol $\quad a_1 = \frac{3}{2}$

B_1 = Re $\quad b_1 = \frac{9}{8}$ $\qquad$ B_2 = La $\quad b_1 = \frac{27}{16}$

C_1 = Mi $\quad c_1 = \frac{81}{64}$ $\qquad$ C_2 = Si $\quad c_1 = \frac{243}{128}$

D_1 = Fa $\quad d_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ D_2 = Do_1 $\quad d_1 = 2$

Empezaremos a demostrar que las relaciones numéricas (A_1, B_1, C_1, D_1) cumplen con los teoremas establecidos para las razones dobles.

> ***Teorema 94***[2]*: Si en una razón doble se intercambian el orden entre los dos primeros elementos y simultáneamente entre los dos últimos, o si se intercambia el orden entre los dos primeros y los dos últimos elementos, el valor de dicha razón doble, no cambia.*

(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)

Verificación:

$A_1B_1C_1D_1 = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{81}{64}\right)\left(\frac{9}{8}-\frac{4}{3}\right)}{\left(1-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{9}{8}-\frac{81}{64}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-17}{64}\right)\left(-\frac{5}{24}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{9}{64}\right)}$$

$$= \frac{\frac{85}{1536}}{\frac{9}{192}} = \frac{16320}{13824} = \frac{255}{216}$$

$B_1A_1D_1C_1 = \frac{(b-d)(a-c)}{(b-c)(a-d)}$

$$= \frac{\left(\frac{9}{8} - \frac{4}{3}\right)\left(1 - \frac{81}{64}\right)}{\left(\frac{9}{8} - \frac{81}{64}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-5}{24}\right)\left(\frac{-17}{64}\right)}{\left(\frac{-9}{64}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{85}{1536}}{\frac{9}{192}} = \frac{16320}{13824} = \frac{255}{216}$$

$C_1D_1A_1B_1 = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$

$$= \frac{\left(\frac{81}{64} - 1\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{8}\right)}{\left(\frac{81}{64} - \frac{9}{8}\right)\left(\frac{4}{3} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{17}{64}\right)\left(\frac{5}{24}\right)}{\left(\frac{9}{64}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{85}{1536}}{\frac{9}{192}} = \frac{16320}{13824} = \frac{255}{216}$$

$D_1C_1B_1A_1 = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{8}\right)\left(\frac{81}{64} - 1\right)}{\left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(\frac{81}{64} - \frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{24}\right)\left(\frac{17}{64}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{64}\right)}$$

$$= \frac{\frac{85}{1536}}{\frac{9}{192}} = \frac{16320}{13824} = \frac{255}{216}$$

Queda verificado que:

(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)

Teorema 95[3]*: El teorema siguiente precisa más cuántos valores se pueden esperar al permutar lo elementos de una razón doble.*

Si (ABCD) = r entonces:

(BACD) = $\frac{1}{r}$

(ACBD) = 1 – r

(ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$

(DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$

(CABD)= $\frac{1}{(1-r)}$

Como (ABCD) = r y (BACD) = $\frac{1}{r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$(BACD) = $\frac{1}{\frac{255}{216}} = \frac{216}{255}$

Comprobando:

(BACD) = $\frac{(b-c)(a-d)}{(b-d)(a-c)}$

$$= \frac{\left(\frac{9}{8} - \frac{81}{64}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\right)}{(\frac{9}{8} - \frac{4}{3})(1 - \frac{81}{64})}$$

$$= \frac{(\frac{-9}{64})(\frac{-1}{3})}{(\frac{-5}{24})(\frac{-17}{64})}$$

$$\frac{\frac{9}{192}}{\frac{85}{1536}} = \frac{13824}{16320} = \frac{216}{255}$$

Queda verificado que (BACD) = $\frac{1}{r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ACBD) = 1 – r

Entonces:

---

[3] Castillo, H. (1993). Lecciones de geometría Euclidiana

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ACBD) = 1 - $\frac{255}{216} = \frac{-39}{216}$

Comprobando:

(ACBD) = $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{9}{8}\right)\left(\frac{81}{64}-\frac{4}{3}\right)}{\left(1-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{81}{64}-\frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-13}{192}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{64}\right)}$$

$$= \frac{\frac{13}{1536}}{\frac{-9}{192}} = -\frac{2496}{13824} = -\frac{39}{216}$$

Queda verificado que (ACBD) = 1 – r con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ADBC) = $\frac{\frac{255}{216}-1}{\frac{255}{216}} = \frac{\frac{39}{216}}{\frac{255}{216}} = \frac{39}{255} = \frac{13}{85}$

Comprobando:

(ADBC)=$\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{9}{8}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{81}{64}\right)}{\left(1-\frac{81}{64}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{(\frac{-1}{8})(\frac{13}{192)}}{\left(\frac{-17}{64}\right)\left(\frac{5}{24}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-13}{1536}}{\frac{-85}{1536}} = \frac{13}{85}$$

Queda verificado que (ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Con (ABCD) = 1 y (DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ADBC) = $\frac{\frac{255}{216}}{\frac{255}{216}-1} = \frac{\frac{255}{216}}{\frac{39}{216}} = \frac{255}{39} = \frac{39}{255}$

Comprobando

(ADBC) = $\frac{(d-b)(a-c)}{(d-c)(a-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{9}{8}\right)\left(1-\frac{81}{64}\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{81}{64}\right)\left(1-\frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{24}\right)\left(\frac{-17}{64}\right)}{\left(\frac{13}{192}\right)\left(\frac{-1}{8}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-85}{1536}}{\frac{-13}{1536}} = \frac{85}{13}$$

Queda verificado que (DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$ con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ACBD) = $\frac{1}{1 - r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ACBD) = $\frac{1}{1-\frac{255}{216}} = \frac{-216}{39}$

Comprobando:

(ACBD)=$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{81}{64}-\frac{9}{8}\right)\left(1-\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{81}{64}-\frac{4}{3}\right)\left(1-\frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{(\frac{9}{64})(\frac{-1}{3})}{(\frac{-13}{192})(\frac{-1}{8})}$$

$$= \frac{\frac{-9}{192}}{\frac{13}{1536}} = \frac{-13824}{2496} = \frac{-216}{39}$$

Queda verificado que (ACBD) = $\frac{1}{1-r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Los dos teoremas anteriores permiten concluir que las 24 ordenaciones de los elementos de una razón doble, se pueden clasificar en 6 clases, cada una con 4 expresiones de la misma razón doble:

r = (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).
1/r = (BACD) = (ABDC) = (CDBA) = (DCAB).
1 - r = (ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA).
(r - 1)/r = (CBDA) = (BCAD) = (ADBC) = (DACB).
r/(r - 1) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = (ADCB).
1/(1 - r) = (BDCA) = (DBAC) = (CABD) = (ACDB).

Ilustración 5

A continuación, se hará lo mismo con las cuatro relaciones consecutivas de la escala pitagórica (A_2, B_2, C_2, D_2); se verificará que también cumplen con los teoremas establecidos para las razones dobles.

> ***Teorema 94**[4]: Si en una razón doble se intercambian el orden entre los dos primeros elementos y simultáneamente entre los dos últimos, o si se intercambia el orden entre los dos primeros y los dos últimos elementos, el valor de dicha razón doble, no cambia.*

(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)

Verificación:

$A_2B_2C_2D_2 = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{243}{128}\right)\left(\frac{27}{16} - 2\right)}{\left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{27}{16} - \frac{243}{128}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-51}{128}\right)\left(-\frac{5}{16}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{27}{128}\right)}$$

[4] Castillo, H. (1993). Lecciones de geometría Euclidiana

$$=\frac{\frac{255}{2048}}{\frac{27}{256}}=\frac{65280}{55296}=\frac{255}{216}$$

$B_2A_2D_2C_2=\frac{(b-d)(a-c)}{(b-c)(a-d)}$

$$=\frac{\left(\frac{27}{16}-2\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{243}{128}\right)}{\left(\frac{27}{16}-\frac{243}{128}\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{-5}{16}\right)\left(\frac{-51}{128}\right)}{\left(\frac{-27}{128}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{255}{2048}}{\frac{27}{256}}=\frac{65280}{55296}=\frac{255}{216}$$

$C_2D_2A_2B_2=\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$

$$=\frac{\left(\frac{243}{128}-\frac{3}{2}\right)\left(2-\frac{27}{16}\right)}{\left(\frac{243}{128}-\frac{27}{16}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{51}{128}\right)\left(\frac{5}{16}\right)}{\left(\frac{27}{128}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{255}{2048}}{\frac{27}{256}}=\frac{65280}{55296}=\frac{255}{216}$$

$D_2C_2B_2A_2=\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}$

$$=\frac{\left(2-\frac{27}{16}\right)\left(\frac{243}{128}-\frac{3}{2}\right)}{\left(2-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{243}{128}-\frac{27}{16}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{16}\right)\left(\frac{51}{128}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{27}{128}\right)}$$

$$=\frac{\frac{255}{2048}}{\frac{27}{256}}=\frac{65280}{55296}=\frac{255}{216}$$

Comprobando que el teorema se cumple:

(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)

Teorema 95[5]*: El teorema siguiente precisa más cuántos valores se pueden esperar al permutar lo elementos de una razón doble.*

Si (ABCD) = r entonces:

(BACD) = $\frac{1}{r}$

(ACBD) = 1 – r

(ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$

(DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$

(CABD)= $\frac{1}{(1-r)}$

Como (ABCD) = r y (BACD) = $\frac{1}{r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$(BACD) = $\frac{1}{\frac{255}{216}}=\frac{216}{255}$

Comprobando:

($B_2A_2C_2D_2$) = $\frac{(b-c)(a-d)}{(b-d)(a-c)}$

$$=\frac{\left(\frac{27}{16}-\frac{243}{128}\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{(\frac{27}{16}-2)(\frac{3}{2}-\frac{243}{128})}$$

$$=\frac{(\frac{-27}{128})(\frac{-1}{2})}{(\frac{-5}{16})(\frac{-51}{128})}$$

[5] Castillo, H. (1993). Lecciones de geometría Euclidiana

$$\frac{\frac{27}{256}}{\frac{255}{2048}} = \frac{55296}{65280} = \frac{216}{255}$$

Queda verificado que $(B_2A_2C_2D_2) = \frac{1}{r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ACBD) = 1 – r

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ACBD) = 1 - $\frac{255}{216} = \frac{-39}{216}$

Comprobando:

$(A_2C_2B_2D_2) = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{27}{16}\right)\left(\frac{243}{128} - 2\right)}{\left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{243}{128} - \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-3}{16}\right)\left(\frac{-13}{128}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{27}{128}\right)}$$

$$= \frac{\frac{39}{2048}}{\frac{-27}{256}} = -\frac{9984}{55296} = -\frac{39}{216}$$

Queda verificado que (ACBD) = 1 – r con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ADBC) = $\frac{\frac{255}{216}-1}{\frac{255}{216}} = \frac{\frac{39}{216}}{\frac{255}{216}} = \frac{39}{255} = \frac{13}{85}$

Comprobando:

$(A_2D_2B_2C_2) = \frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{27}{16}\right)\left(2 - \frac{243}{128}\right)}{\left(\frac{3}{2} - \frac{243}{128}\right)\left(2 - \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \frac{(\frac{-3}{16})(\frac{13}{128})}{\left(\frac{-51}{128}\right)\left(\frac{5}{16}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-39}{2048}}{\frac{-255}{2048}} = \frac{13}{85}$$

Queda verificado que (ADBC) = $\frac{(r-1)}{r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Con (ABCD) = 1 y (DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ADBC) = $\frac{\frac{255}{216}}{\frac{255}{216}-1} = \frac{\frac{255}{216}}{\frac{39}{216}} = \frac{255}{39} = \frac{85}{13}$

Comprobando

($D_2A_2B_2C_2$) = $\frac{(d-b)(a-c)}{(d-c)(a-b)}$

$$= \frac{\left(2 - \frac{27}{16}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{243}{128}\right)}{\left(2 - \frac{243}{128}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{16}\right)\left(\frac{-51}{128}\right)}{\left(\frac{13}{128}\right)\left(\frac{-3}{16}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-255}{2048}}{\frac{-39}{2048}} = \frac{85}{13}$$

Queda verificado que (DABC) =$\frac{r}{(r-1)}$ con r = $\frac{255}{216}$

Como (ABCD) = r y (ACBD) = $\frac{1}{1 - r}$

Entonces:

(ABCD) = $\frac{255}{216}$ (ACBD) = $\frac{1}{1 - \frac{255}{216}} = \frac{-216}{39}$

Comprobando:

($A_2C_2D_2B_2$) =$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{27}{16}\right)\left(\frac{243}{128} - 2\right)}{\left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{243}{128} - \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \frac{(\frac{-3}{16})(\frac{-13}{128})}{(\frac{-1}{2})(\frac{27}{128})}$$

$$= \frac{\frac{-9}{192}}{\frac{13}{1536}} = \frac{-2496}{13824} = \frac{-216}{39}$$

Queda verificado que (ACBD) = $\frac{1}{1-r}$ con r = $\frac{255}{216}$

Se puede concluir de este primer apartado que las parejas (A_1, B_1) Y (C_1, D_1) y las parejas (A_2 ,B_2) Y (C_2,D_2) se separan armónicamente; Al comparar los resultados del primer teorema en el cual ($A_1B_1C_1D_1$) = ($B_1A_1D_1C_1$) = ($C_1D_1A_1B_1$) = ($D_1C_1B_1A_1$) y esta a su vez es igual a ($A_2B_2C_2D_2$) = ($B_2A_2D_2C_2$) = ($C_2D_2A_2B_2$) = ($D_2C_2B_2A_2$) se planteará la siguiente hipótesis:

“Si se toman cuatro relaciones numéricas consecutivas de la escala pitagórica siempre el resultado de la razón que divide a dichas relaciones será la misma”

Verificando, lo que se va a mostrar es que $A_1B_1C_1D_1$= $A_2B_2C_2D_2$= $A_3B_3C_3D_3$= $A_4B_4C_4D_4$= $A_5B_5C_5D_5$, con

$A_3 = \frac{9}{8}$ $A_4=\frac{81}{64}$ $A_5=\frac{4}{3}$

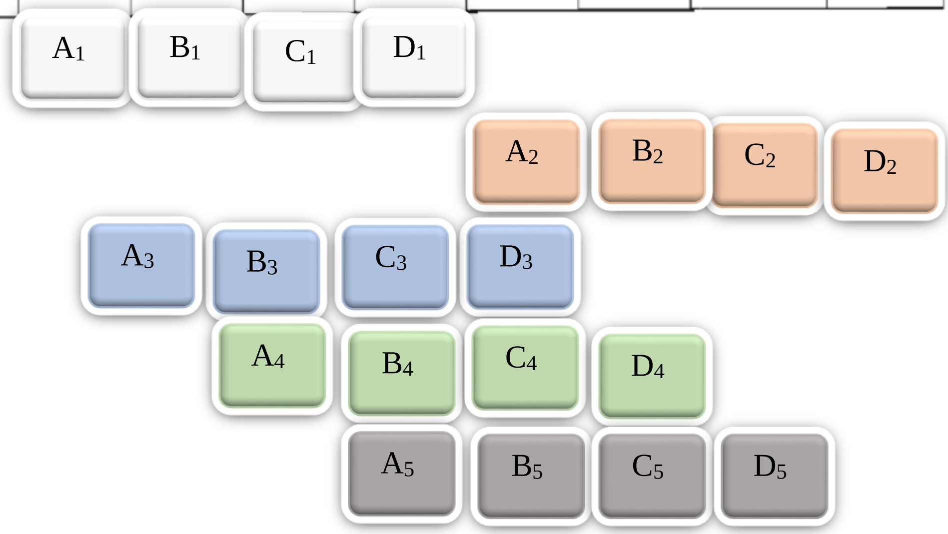
$B_3=\frac{81}{64}$ $B_4=\frac{4}{3}$ $B_5=\frac{3}{2}$

$C_3=\frac{4}{3}$ $C_4=\frac{3}{2}$ $C_5=\frac{27}{16}$

$D_3=\frac{3}{2}$ $D_4=\frac{27}{16}$ $D_5=\frac{243}{128}$

Es decir, se tomarán las relaciones numéricas en la escala pitagórica de la siguiente manera:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación de frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2



$(A_3B_3C_3D_3) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

$$= \frac{\left(\frac{9}{8}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{81}{64}-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{81}{64}-\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-5}{24}\right)\left(-\frac{15}{64}\right)}{\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{13}{192}\right)}$$

$$= \frac{\frac{75}{1536}}{\frac{39}{1536}} = \frac{75}{39} = \frac{25}{13}$$

$(A_4B_4C_4D_4) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

$$= \frac{\left(\frac{81}{64}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{27}{16}\right)}{\left(\frac{81}{64}-\frac{27}{16}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-15}{64}\right)\left(-\frac{17}{48}\right)}{\left(-\frac{27}{64}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{255}{3072}}{\frac{27}{324}} = \frac{97920}{82944} = \frac{5375}{5184}$$

$(A_5B_5C_5D_5) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

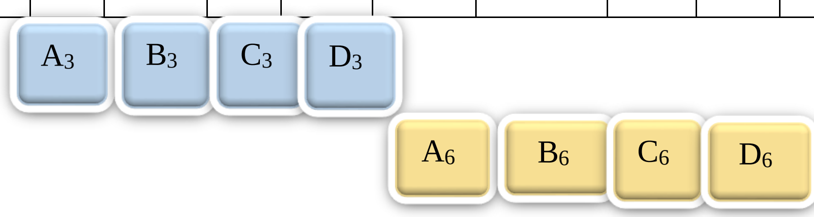
$$= \frac{\left(\frac{4}{3} - \frac{27}{16}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{243}{128}\right)}{\left(\frac{4}{3} - \frac{243}{128}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-17}{48}\right)\left(-\frac{51}{128}\right)}{\left(-\frac{217}{384}\right)\left(-\frac{3}{16}\right)}$$

$$= \frac{\frac{867}{6144}}{\frac{651}{6144}} = \frac{867}{651} = \frac{289}{217}$$

La hipótesis es falsa, no todas las relaciones en el orden que se tomen tendrán la misma razón, pero como las relaciones que se tomaron como ejemplo y las cuales tenían la característica de tener la misma razón entre ellas, son cuaternas amónicas consecutivas, entonces lo que se hará a continuación es tomar otras cuatro relaciones pero que cumplan la característica de ser consecutivas y comprobar que tienen la misma razón:

NOTA	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO_1	RE_1	MI_1	FA_1
Relación de frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2	9/4	81/32	8/3



Se tiene que la razón entre las relaciones $(A_3B_3C_3D_3)$ es 25/13, ahora vamos a encontrar la razón entre las relaciones $(A_6B_6C_6D_6)$

$(A_6B_6C_6D_6) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$

$$= \frac{\left(\frac{27}{16} - 2\right)\left(\frac{243}{128} - \frac{9}{4}\right)}{\left(\frac{27}{16} - \frac{9}{4}\right)\left(\frac{243}{128} - 2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{-5}{16}\right)\left(-\frac{45}{128}\right)}{\left(-\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{13}{128}\right)}$$

$$= \frac{\frac{255}{2048}}{\frac{117}{2048}} = \frac{225}{117} = \frac{25}{13}$$

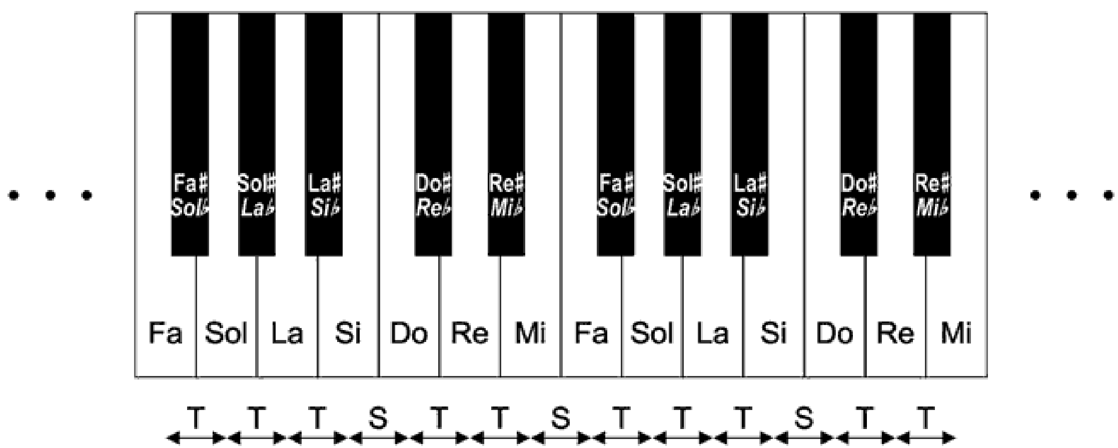
Donde encontramos que

$(A_3B_3C_3D_3) = (A_6B_6C_6D_6)$

Podemos concluir que para que dos relaciones numéricas de la escala pitagórica sean cuaternas armónicas (es decir, que tengan la misma razón) se deben tomar de manera consecutiva y en orden.

Justificación de tonos y semitonos

Ya se ha analizado mediante procesos matemáticos las relaciones entre las notas principales del Piano, las teclas blancas. A continuación, se presentarán relaciones entre las teclas negras correspondientes a los bemoles y sostenidos de la escala musical, y las blancas, explicando a continuación la ubicación y la forma de nombrar las notas en intervalos de tonos y semitonos.



Al buscar información con respecto al piano siempre se encontrará que entre las notas (DO-RE) (RE-MI) (FA-SOL) (SOL-LA) y (LA-SI) hay un tono, mientras que entre las notas (MI-FA) y (SI-DO) hay un semitono. Lo que se logra hacer para explicar esta característica es que al tomar la media armónica y aritmética y dividirlas entre sí el cociente es 9/8 que los músicos determinan como tono. Entonces se tomaron las relaciones numéricas de las notas determinadas como tonos y se dividieron entre sí llegando al siguiente resultado:

Intervalo de DO-RE

$$\frac{9}{8} \div 1 = \frac{9}{8}$$

Entre el intervalo DO-RE hay un tono

Intervalo de RE-MI

$$\frac{81}{64} \div \frac{9}{8} = \frac{648}{576} = \frac{9}{8}$$

Entre el intervalo de RE.MI hay un tono

Intervalo de FA-SOL

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

Entre el intervalo FA-SOL hay un tono

Intervalo SOL-LA

$$\frac{27}{16} \div \frac{3}{2} = \frac{54}{48} = \frac{9}{8}$$

Entre el intervalo SOL-LA hay un tono

Intervalo LA-SI

$$\frac{243}{128} \div \frac{27}{16} = \frac{243}{216} = \frac{9}{8}$$

Entre el intervalo LA-SI hay un tono

Ahora analizaremos los cocientes entre los semitonos:

Intervalo MI-FA

$$\frac{4}{3} \div \frac{81}{64} = \frac{256}{243}$$

Entre el intervalo MI-FA hay un semitono

Intervalo SI-DO

$$2 \div \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$$

La relación numérica expresada para el semitono no presenta ninguna correspondencia con la expresada para el tono, es decir, no resulta ser la división de 9/8 entre 2, que es lo que matemáticamente se asociaría a la mitad de algo. Sim embargo tiene manera de explicar de dónde resulta a parte del anterior proceso realizado.

Si se recuerda el análisis que se llevó a cabo para construir el intervalo de cuartas por medio de la media armónica, al finalizar éste se enuncia que a partir de la cancelación de octavas correspondientes se encuentran las relaciones numéricas correspondientes a notas bemoles y sostenidos (teclas negras en el piano) donde la nota *re#* corresponde a una relación de 256/243, siendo esta la distancia que hay entre la nota *do* igual a 1 y ésta.

5) VÍNCULO PROPORCIONAL ENTRE LAS FIGURAS MUSICALES Y SU RELACIÓN E INTERPRETACIÓN CON LAS NOTAS

La música dentro de su composición lleva un elemento que es destacable y que Messiaen Olivier considera parte primordial y esencial, creyendo que su existencia viene dada antes que la melodía y la armonía, el ritmo, definido como la sucesión y reiteración de acontecimientos en el tiempo y en particular la frecuencia en que se producen las articulaciones de la emisión de sonidos. (Arbonés. Pág.37); que será trabajado junto con la duración o el tiempo en este apartado, desde sus distintas agrupaciones donde empiezan a aparecer las distintas figuras musicales que ayudarán a resumir y representar la musicalidad, sustentando sus razones de ser en la relación proporcional.

Las agrupaciones rítmicas definidas hasta el momento son:

- **Pulso:** ritmo interno que puede subdividirse en binario (pulso subdividido en dos) y ternario (pulso subdividido en tres). Si llegase a darse el caso que este es subdividido en cuatro o más se entienden como la integración del binario y ternario. El pulso es el latido de la pieza musical.
- **Acento:** mayor fuerza con que se ejecuta un pulso, presentando periocidad ligado al compás.
- **Compás:** fragmento rítmico entre dos pulsos fuertes subdividido en dos en relación con el pulso binario y ternario, correspondiendo a un compás simple y compuesto respectivamente.

Agrupaciones que fueron representadas en un primer momento por cuatro figuras (longa, breve, semibreve y mínima) pertenecientes a tres tipos de proporción: Modo, relación entre longa y breve; Tiempo, relación entre breve y semibreve; Prolación, relación entre semibreve y mínima. Consideradas ternarias o binarias las dos primeras y, menor si era binaria o mayor si era ternaria para la última. Después de un tiempo la figura Longa desaparece y con ella la proporción Modo, lo que establece tres figuras que dado a sus relaciones resumen los cuatro ritmos básicos utilizados en la música como se explica a continuación en la Tabla 3.

Tiempo perfecto (1breve = 3semibreves); Tiempo Imperfecto (1breve = 2semibreves);
Prolación mayor (1semibreve = 3mínimas); Prolación menor (1semibreve = 2mínimas)

Representación de las figuras			Breve (●) Semibreve (♦) Mínima (♩)	
Representación de los ritmos			9/8 (⊙) 3/4 (○) 6/8 (Ͼ) 2/4 (C)	
Proporciones			Ritmo	Representación
Tiempo Perfecto	Prolación mayor	División o compás ternario	9/8	⊙● = ♦♦♦ = ♩♩♩ ♩♩♩ ♩♩♩
Tiempo Imperfecto	Prolación menor	División o compás binario	3/4	○● = ♦♦♦ = ♩♩ ♩♩ ♩♩
Tiempo Perfecto	Prolación mayor	División o compás ternario	6/8	Ͼ ● = ♦♦ = ♩♩♩ ♩♩♩
Tiempo Imperfecto	Prolación menor	División o compás binario	2/4	C ● = ♦♦ = ♩♩ ♩♩

Tabla 3

Estas 3 figuras fueron complementadas por 5 más en la edad media, cambiando así sus nombres, llegando a la representación que hoy conocemos como el diagrama de las figuras musicales (Ilustración 2); la breve denominada como cuadrada, la semibreve como redonda, la mínima como blanca, y las nuevas negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa, que corresponderán a la duración en el tiempo dependiendo una de la otra, todas en relación con la redonda.

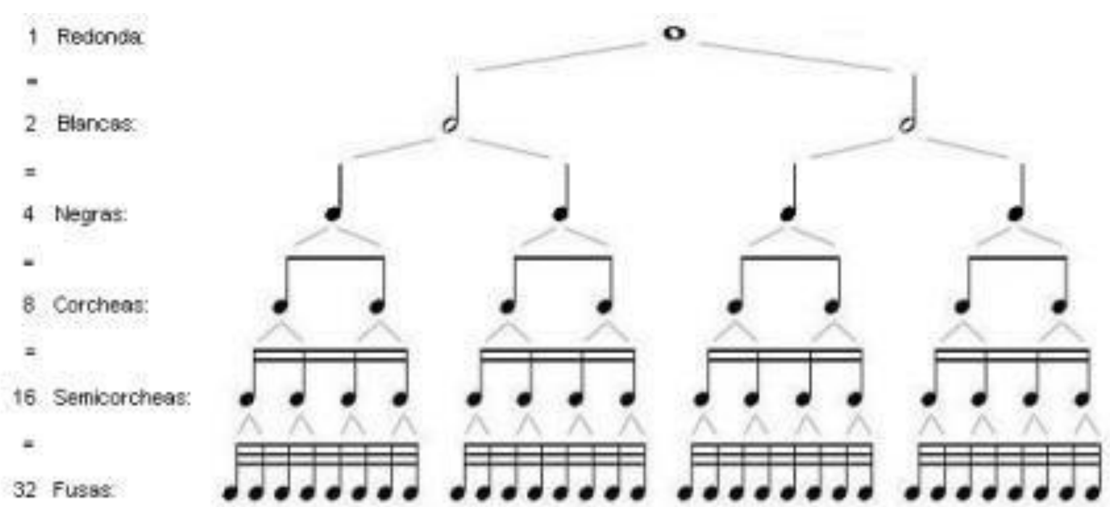


Ilustración 2

Como se puede observar en la ***Ilustración 2***, 1 redonda equivale a dos blancas, 1 redonda equivale a 4 negras, 1 redonda equivale a 8 corcheas, 1 redonda equivale a 16 semicorcheas; lo que dado a la serie se podría decir que 1 redonda equivale a 32 fusas y 1 redonda equivale a 64 semifusas, correspondiendo la divisibilidad de la figura a la expresión $2^n,\ siendo\ n = 1,2,3,4,5,6$.

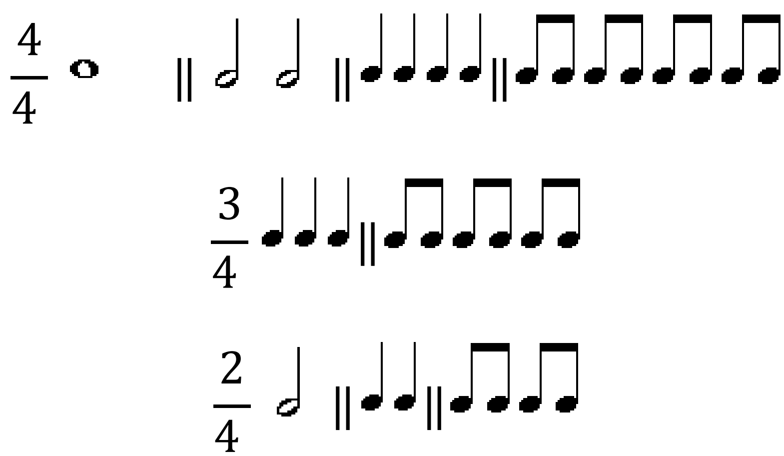
Como se había enunciado anteriormente dado a las relaciones entre las figuras resultan unos ritmos indicados mediante una fracción y, que se consideran binarios o ternarios según la cantidad de pulsos, llamados o referenciados como compás simple para el imperfecto o compuesto para el perfecto, respectivamente (se recuerda que el compás es la fragmentación entre pulsos). El numerador de la fracción indica la cantidad de pulsos y el denominador la figura que mide las unidades de pulso donde la redonda equivale a 4 unidades de pulso, blanca a 2, negra a 1, corchea 1/2, semicorchea 1/4, y así sucesivamente. Pero, para una más eficiente comprensión la figura que sirve de referencia u orientación es la que es igual a 1 pulso, es decir, la negra.

Es necesario tener en cuenta que cada figura, así como tiene cantidad de pulsos, también tiene cantidad de silencios que se corresponden, por ejemplo, la negra tiene 1 pulso y por consiguiente 1 silencio.

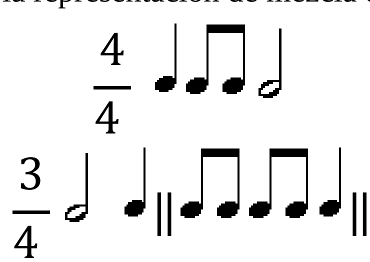
A continuación, se ejemplificarán estas relaciones y representaciones donde las líneas divisoras agrupan las figuras en compases, siendo la intención, llenar cada compás con figuras que completen la cantidad de pulsos indicada, desde la mínima figura hasta la máxima:

Compás simple: Cada tiempo se divide en mitades, como ya se ha enunciado.

- Llenando cada compás con la representación de una figura.

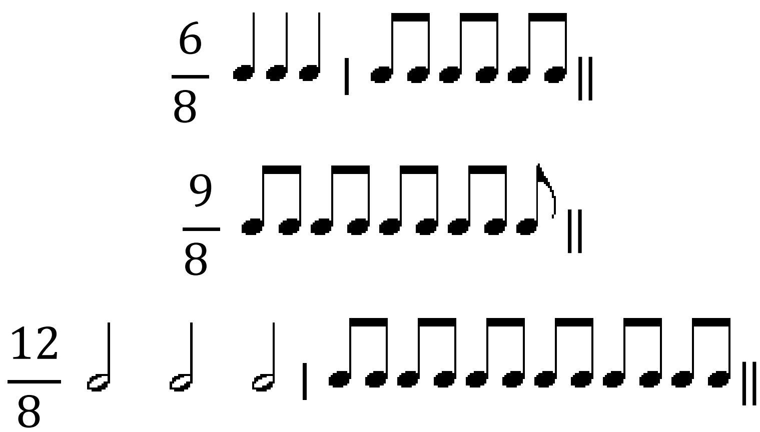


- Llenando cada compás con la representación de mezcla de figuras.



Compás compuesto: El tiempo se divide en tres, los numeradores son múltiplos de 3 y el denominador corresponde a la subdivisión de una figura que denota el pulso. Por lo general el pulso más utilizado es el de negra y su subdivisión vendría a ser la corchea.

- Llenando cada compás con la representación de una figura.



- Llenando cada compás con la representación de mezcla de figuras.

Dado a las representaciones de dichos ritmos en este compás, se observa que en el segundo de éste en el ritmo 6/8, solo hay tres negras que según lo que se ha explicado de la duración cada una equivaldría a 1 pulso, lo que permitiría decir que harían falta 3 pulsos más o tres negras, en este caso. Pero, dado a que el compás es compuesto la cantidad de tiempos a las que equivale una figura normalmente cambia de la siguiente manera:

𝅗𝅥 = 4 Tiempos

♩ = 2 Tiempos

♫ = 1 Tiempo

Que, siguiendo con la secuencia la semicorchea será igual a ½ tiempo, la fusa a ¼ tiempo, etc., deduciendo que cada una de las figuras tomará el valor de duración de la figura que lo antecede, y que en relación proporcional podría ser descrito como:

	Compuesto		**Simple o Normal**	
Razón	Duración	Figura Musical	Duración	Figura Musical
	1/2	𝅘𝅥𝅯	1/4	𝅘𝅥𝅯
1/2	1	♫ ♪	1/2	♫ ♪
1/2	2	♩	1	♩
1/2	4	𝅗𝅥	2	𝅗𝅥

Como cada una de las figuras guardan una razón de 1/2 (la cual sigue manteniéndose en los dos compases) una con otra, podría decirse que a estas se les suma la mitad de lo que equivale la figura sucesora a ellas guardando su relación proporcional, por ejemplo: $\frac{1}{16}:\frac{1}{8} \therefore \frac{1}{4}:\frac{1}{2}$, siendo analizadas u operadas desde la figura más "pequeña", fusa, hasta las más "grande" blanca, en este caso.

Además de estas figuras se habla de unas figuras con puntillo, que estarían bajo la misma relación anterior, en la que se añade a estas la mitad de su duración: redonda con puntillo será 4+2; blanca con puntillo 2+1; negra con puntillo 1+1/2, etc., con el fin de lograr representar sonidos con 3 tiempos de duración.

> *"El **puntillo** se coloca después de una nota, y aumenta el valor de esta nota la mitad de su duración primitiva. Una blanca, por ejemplo, vale dos negras; con puntillo valdrá una negra más, esto es, tres negras."* A. Danhauser *(s.f. pág.17)*

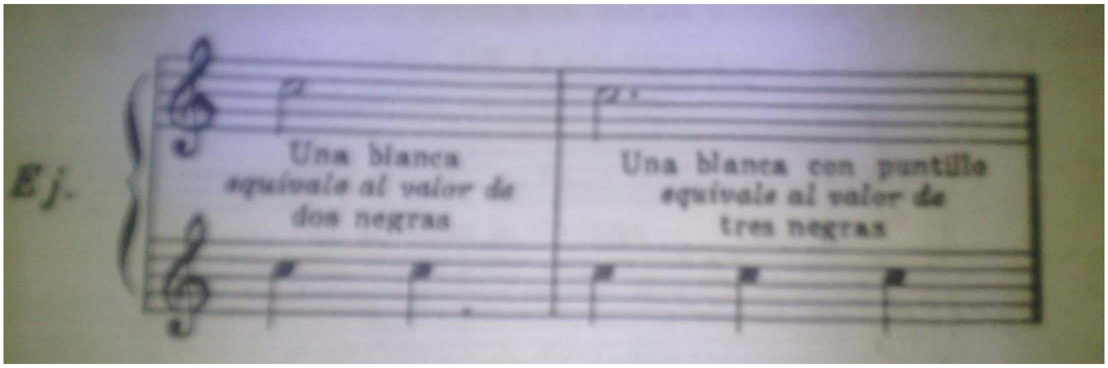


Ilustración 6

Y como cada figura corresponde a una figura según la subdivisión, las figuras con puntillo como puede verse en la Ilustración 7 corresponden a una subdivisión que ya no se hace de a dos sino de a tres, por ejemplo, una negra equivale a 3 corcheas y una fusa 3 semifusas. Lo que estructuraría el diagrama musical establecido.

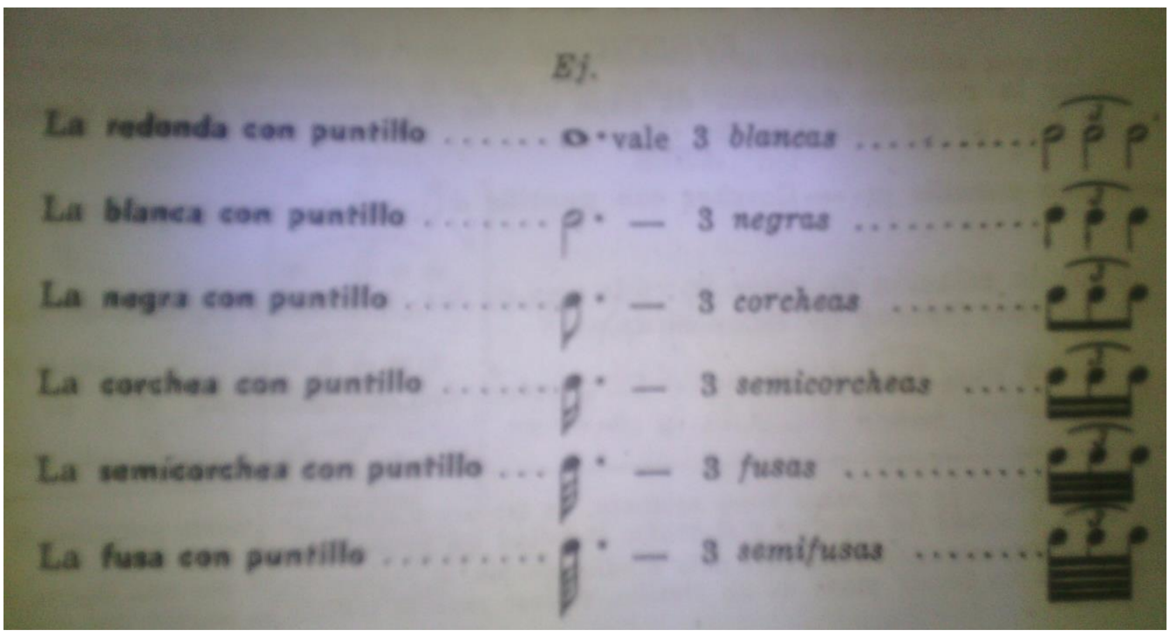
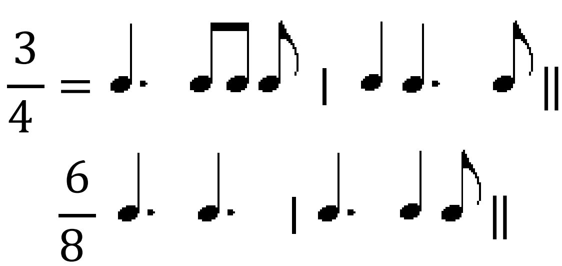
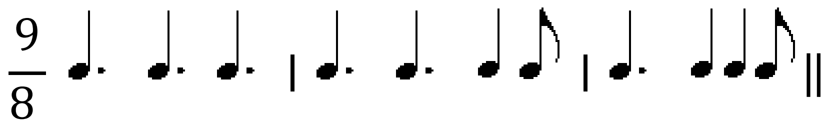


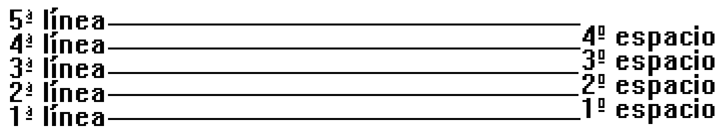
Ilustración 7

Ahora, con los ritmos anteriormente establecidos se realizará su representación haciendo uso de estas figuras:





Como se ha determinado un análisis proporcional entre las distintas figuras y su representación para la lectura musical, dado a los ritmos encontrados, se determinará ahora la relación que existe entre estas y las notas musicales desde el instrumento Piano. Para ello es necesario empezar a hablar del pentagrama, que recopila los elementos ya enunciados durante el trabajo, la altura, el tiempo, y las notas (frecuencias); que resulta del griego πεντα, penta: cinco, y γράμμα, grama: escritura, siendo el conjunto de cinco líneas horizontales paralelas y equidistantes y 4 espacios que se nombran de abajo hacia arriba, sobre el cual se escriben las notas musicales y demás signos de la notación. De manera horizontal se ubicará el tiempo y de manera vertical la altura (frecuencias crecientes de las notas).



> *"La distribución de líneas y espacios es equivalente a las teclas blancas del teclado de un piano, y su número directamente proporcional a las frecuencias de las notas. Así, sonidos de mayor frecuencia (los más agudos) se ubican en posiciones más altas en el pentagrama. Con el objeto de consignar notas más agudas o más graves se agregan líneas adicionales".* (Arbonés. Pág., 62.)

Para ubicar cada una de las notas en el pentagrama se debe escribir sobre éste una clave que permita ubicarlas en cada línea o espacio según corresponda. Siendo estas:

Clave de *Sol*: al escribir el signo de esta al inicio del pentagrama, indicará que todas las figuras que se ubican en la segunda línea corresponden a un *Sol*.

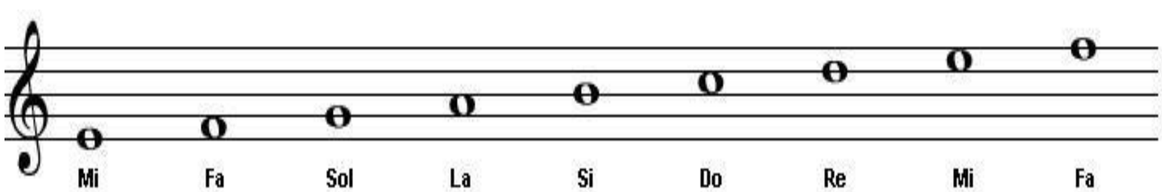


Ilustración 8: Sol en segunda línea

Clave de *fa*: al escribir el signo de esta al inicio del pentagrama, indicará que todas las figuras que se ubican en la tercera y cuarta línea corresponde a un *fa*.

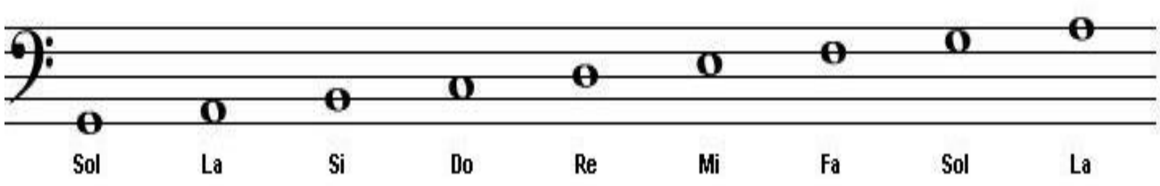


Ilustración 9: fa en cuarta línea

Clave de *Do*: al escribir el signo de esta al inicio del pentagrama, indicará que todas las figuras que se ubican en la tercera línea corresponde a un *Do.*

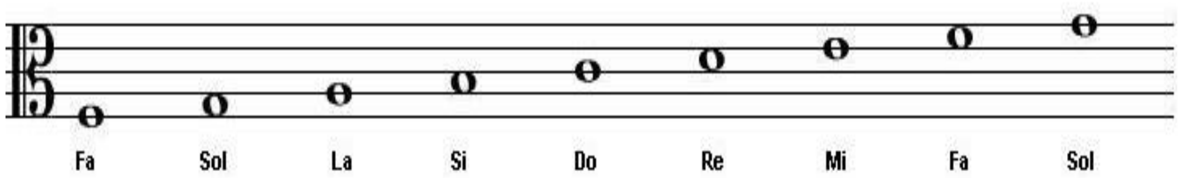


Ilustración 10: Do en tercera línea

Nota: La clave de *fa* en tercera, y la de *do* en segunda no suelen utilizarse.

Evaluación del proceso y desarrollo de la sistematización

Teniendo todo lo anterior claro será posible la construcción de cualquier melodía que permita evidenciar la relación entre las figuras y las notas musicales. Y, para ello es importante recopilar todo lo que se ha estudiado y desarrollado a lo largo de la sistematización, es decir, la caracterización del piano, los intervalos, las frecuencias y sus relaciones aritméticas, los ritmos, compases, pulsos, pentagrama y claves.

El estudio lo evaluaremos en el análisis y comprensión de la partitura o representación de la melodía de la canción infantil los pollitos (Ilustración 11), interpretada desde el Piano.

Ilustración 11

1. Se determina la clave de *sol* y el ritmo al que se va a interpretar, siendo este 4/4

2. Dado a que el ritmo es 4/4, simple, los tiempos o pulsos de las figuras serán: redonda 4, blanca 2, negra 1, corchea 1/2, etc.

3. Se evidencian 4 Compases distribuidos de la siguiente manera:

3.1. Primer Compás

- 4 corcheas y 2 negras

$Pulsos = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 4$, siendo el resultado, 4 la cantidad indicada por el denominador de la fracción que se establece al principio de la partitura.

Lo anterior permite hacer en relación en que la nota Do (corchea) junto con la Re (corchea) constituyen un pulso, así como las notas Mi (corchea) y Fa (corchea); la nota Sol (negra) como se observa indica un pulso, y todas se encuentran organizadas de izquierda a derecha en la partitura en cada una de las líneas, en el orden establecido en la escala musical. Como las notas se encuentran en el mismo intervalo, en este caso se podría decir que la melodía se está interpretando desde el tercer intervalo del piano, es decir desde la tercera parte, como lo enseña la Ilustración 12.

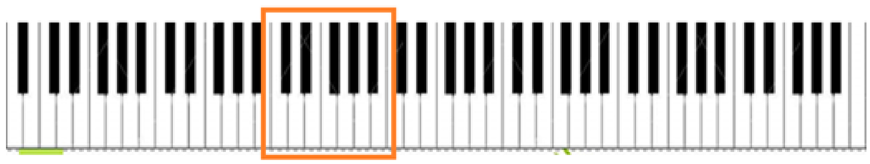


Ilustración 12

Como cada nota se encuentra en relación aritmética, tomándola desde la escala pitagórica, se relaciona en el siguiente cuadro estas junto con sus respectivas frecuencias, en comparación con las del primer intervalo del piano.

Nota Musical	Relación aritmética	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)
Do_1	1	33	Do_3	132
Re_1	9/8	37.12	Re_3	148
Mi_1	5/4	41.25	Mi_3	165
Fa_1	4/3	44	Fa_3	176
Sol_1	3/2	49.5	Sol_3	198

Los procesos realizados para encontrar estos valores, se realizan a partir del estudio realizado anteriormente con las elaciones aritméticas y por consiguiente con las frecuencias; conociendo la frecuencia de la Nota Do_1 = 33 Hz se determinarán las demás:

$$Do_3 = (Do_1 * 2) * 2$$
$$Do_3 = Do_1 * 4$$
$$Do_3 = 33\ Hz * 4 = 132\ Hz$$

- Para hallar Mi_3 se busca la relación que ésta tiene con la nota Do_1, encontrando que se encuentran a un intervalo de 5/4, es decir de tercera, pues entre ellas hay tres notas (Do, Re, Mi)

$$Mi_3 = \left(Do_1 * \frac{5}{4}\right) * 2$$
$$Mi_3 = 41.25\ Hz * 2 = 165\ Hz$$

- Para hallar Sol_3 se busca la relación que ésta tiene con la nota Do_1, encontrando que se encuentran a un intervalo de 3/2, es decir de quinta, pues entre ellas hay cinco notas (Do, Re, Mi, Fa, Sol)

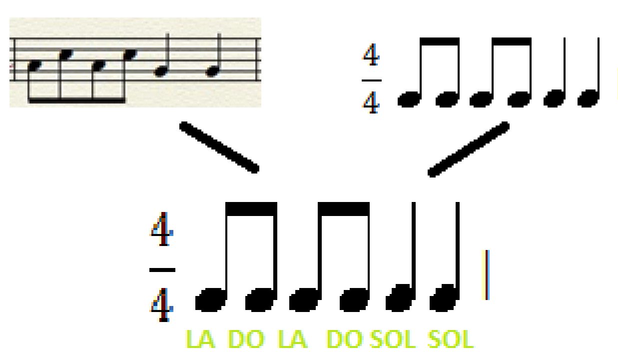
$$Sol_3 = \left(Do_1 * \frac{3}{2}\right) * 2$$

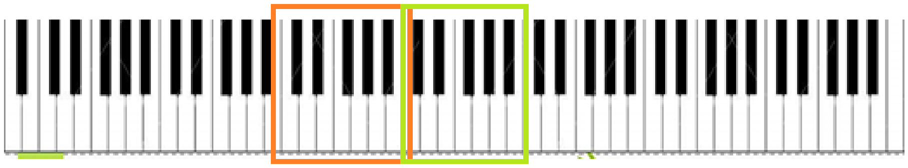
$$Sol_3 = 49.5\ Hz * 2 = 198\ Hz$$

El mismo proceso se realiza para encontrar las demás; los nombres de los intervalos entre las notas se pueden asignar mediante las relaciones numéricas o cantidad de notas entre estas, y también según la cantidad de semitonos entre estas: **Nombre del intervalo por relaciones numéricas o cantidad de notas entre dos de estas:** De *do-re* intervalo de tono; de *mi-fa* intervalo de semitono; de *fa-sol* intervalo de tono; **Nombre del intervalo según la cantidad de semitonos entre notas:** De *do-re* se tiene un intervalo de segunda mayor porque entre ellas hay 2 semitonos o un 1 tono; de *re-mi* intervalo de segunda mayor; de *mi-fa* intervalo de segunda menor porque solo hay 1/2 tono; de *fa-sol* intervalo de segunda mayor; de *sol-sol* intervalo unísono porque no hay 0 tonos y semitonos.

Los tres compases que restan pueden ser analizados a partir de lo anteriormente realizado entre las frecuencias haciendo uso de las relaciones numéricas.

3.2. Segundo Compás: 2 corcheas y 2 negras





Cuarta octava

Nota Musical	Relación aritmética	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)
Do_1	1	33	Do_3	132	Do_4	264
Sol_1	3/2	49.5	Sol_3	198	Sol_4	396
La_1	5/3	55	La_3	220	La_4	440

Se detallan las notas *la (corchea), Do de la siguiente octava (corchea), la (corchea), Do de la siguiente octava (corchea),* ***sol*** *(negra),* ***sol*** *(negra).*

Nombre del intervalo por relaciones numéricas o cantidad de notas entre dos de estas: De *la -Do* intervalo de tercera; de *Do-la intervalo* de tercera por debajo, descendente; de *Do-sol* intervalo de cuarta descendiendo.

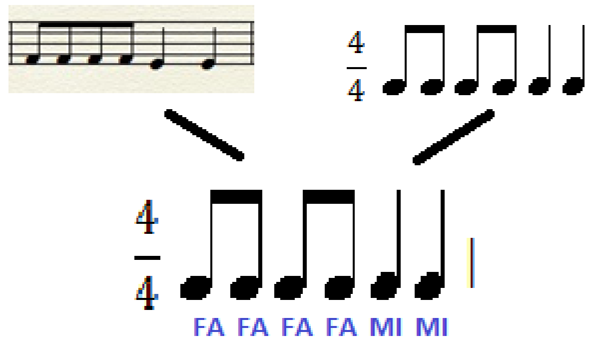
- **Nombre del intervalo según la cantidad de semitonos entre notas:** De *la-Do* intervalo de tercera menor porque entre ellas hay 3 semitonos; de *Do-la* intervalo de sexta mayor porque tiene 9 semitonos; de *la-Do* intervalo de tercera; de *Do-sol* intervalo de cuarta justa porque tiene 5 semitonos; de *sol-sol* intervalo unísono.

Lo que se logra evidenciar en este compás es la alternancia que se hace entre las notas, pues en el primero la manera de digitarlas era progresiva, es decir en el orden establecido en el piano.

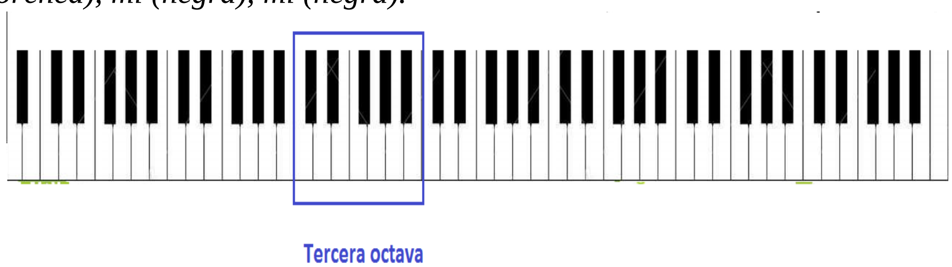
$$La_3 - \ Do_4 - La_4 - Do_4 - Sol_3 - Sol_3$$

3.3.Tercer Compás

- 2 corcheas y 2 negras



- De izquierda a derecha se detallan las notas *fa (corchea), fa (corchea), fa (corchea), fa (corchea), mi (negra), mi (negra).*



Nota Musical	Relación aritmética	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)
Mi_1	27/16	55	Mi_3	220	Mi_4	440
Fa_1	4/3	44	Fa_3	176	Fa_1	4/3

- **Nombre del intervalo por relaciones numéricas o cantidad de notas entre dos de estas:** De *fa*-*mi* intervalo de semitono descendente.
- **Nombre del intervalo según la cantidad de semitonos entre notas:** De *fa*-*fa* intervalo unísono; de *fa*-*mi* intervalo de segunda menor porque tiene 1 semitono; de *mi*-*mi* intervalo unísono.

3.4. Cuarto Compás

- 2 corcheas y 2 negras

- De izquierda a derecha se detallan las notas *re (corchea), re (corchea), re (corchea), mi (corchea), do (negra), do (negra).*

Nota Musical	Relación aritmética	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)	Nota Musical	Frecuencia (Hz)
Do$_1$	1	33	Do$_3$	132	Do$_4$	264
Re$_1$	3/2	49.5	Re$_3$	198	Rel$_4$	396
Mi$_1$	27/16	55	Mi$_3$	220	Mi$_4$	440

- **Nombre del intervalo por relaciones numéricas o cantidad de notas entre dos de estas:** De *re-mi* intervalo de tono; de *mi-do* intervalo de tercera descendente.
- **Nombre del intervalo según la cantidad de semitonos entre notas:** De *re-re* intervalo unísono; de *re-mi* intervalo de segunda mayor porque hay 2 semitonos; de *mi-do* intervalo tercera mayor porque hay 4 semitonos; de *do-do* intervalo unísono.

4. Se puede identificar la relación existente que hay entre los compases donde:

- Al dividir la frecuencia de cada nota de la tercera octava por la de la primera correspondiente, el cociente será igual a 4, estableciendo que dichas relaciones son de 4:1 y por consiguiente las notas resultan ser proporcionales entre sí.

$$\frac{132}{33}=\frac{148}{37}=\frac{165}{41.25}=\frac{176}{44}=\frac{198}{49.5}=4=\frac{Do_3}{Do_1}=\frac{Re_3}{Re_1}=\frac{Mi_3}{Mi_1}=\frac{Fa_3}{Fa_1}=\frac{Sol_3}{Sol_1}$$

Algo similar resulta al dividir la frecuencia de cada nota de la cuarta octava por la de primera o la tercera, donde lo único que cambiaría es la relación dado al cociente resultante:

$$\frac{264}{33} = \frac{396}{49.5} = \frac{440}{55} = 8 = \frac{Do_4}{Do_1} = \frac{Sol_4}{Sol_1} = \frac{La_4}{La_1}$$

$$\frac{264}{132} = \frac{396}{198} = \frac{440}{110} = 2 = \frac{Do_4}{Do_3} = \frac{Sol_4}{Sol_3} = \frac{La_4}{La_3}$$

- Al relacionar la frecuencia de la última nota musical de cada compás con la primera nota musical del compás consecutivo se identifica que la relación entre Sol_3 y Fa_3 es igual a 9/8, lo que correspondería a una relación de tono entre estos.

$$\frac{198}{110}; \frac{198}{176} \rightarrow \frac{Sol_3}{La_3}; \frac{Sol_3}{Fa_3}$$

$$\frac{9}{5}; \frac{9}{8} \rightarrow \frac{Sol_3}{La_3}; \frac{Sol_3}{Fa_3}$$

6) CONCLUSIONES

En este trabajo se logró evidenciar conceptos de proporcionalidad entre las frecuencias de las notas a través de su representación; la característica que se utilizó para estudiar el comportamiento del sonido de la nota LA fue la altura. De esta manera se encontraron las representaciones de las demás notas teniendo a ésta como referencia, como se evidenció en las gráficas; haciendo uso de las proporciones numéricas encontradas por Pitágoras a partir de cuerdas se encontraron los distintos intervalos y las relaciones con respecto a la función original; teniendo en cuenta su ciclo.

Al realizar cada una de las construcciones de los intervalos (quintas, cuartas y terceras) se verifica en los intervalos de quinta que $do - sol - re - la - si - mi$ se encuentran relacionadas, todas a una razón de 3/2, intervalo de quinta, siendo de esta manera proporcionales tomadas la anterior de la que sigue, es decir, en el orden en que van encontrándose, y esto sucede también al momento de realizar los intervalos de cuartas; cada una de estas relaciones se comparan paralelamente con las medias armónica y aritmética dando como resultado una generalización que nos permite identificar las relaciones numéricas de cada nota incluyendo las relaciones entre los bemoles y sostenidos. Al momento de trabajar con el intervalo de terceras no se logra realizar una generalización por medio de las medias, ya que para este intervalo es necesario realizar una construcción a partir de quintas y terceras lo que no nos permitió encontrar relación alguna entre alguna media en especial.

Al realizar la investigación se logra encontrar que las relaciones numéricas de las notas son cuaternas armónicas porque al tomar cuatro relaciones consecutivas se obtiene la misma razón entre ellas; lo que nos permite hablar de armonía en la música a partir del concepto de longitudes de cuerda y su relación entre ellas.

El uso de las herramientas WavePad, Audacity y Geogebra permite realizar el análisis de la nota LA y la interpretación de sus distintos comportamientos, teniendo en cuenta el cambio que realiza el sonido al aumentar o disminuir su frecuencia.

En el piano se logra evidenciar las relaciones proporcionales encontradas al ver el orden en que están ubicadas las notas musicales, como ya vimos antes, este orden de la escala pitagórica no es aleatorio ya que cada cuatro notas consecutivas se encuentran a una misma razón que las siguientes cuatro; además dichas relaciones numéricas también nos permiten encontrar lo que musicalmente llaman tono y semitono, lo que se hace para explicar estas conceptos es que al tomar la media armónica y geométrica y dividirlas entre sí el cociente es 9/8 que los músicos determinan como tono y al realizar los cocientes entre las notas logramos encontrar esta relación; en algunas notas esta relación no es de 9/8 la característica de estas es que son las llamadas semitono, las cuales matemáticamente podríamos creer que son la mitad de un tono, pero en este trabajo se evidenció que no tiene ninguna correspondencia de mitad con dicha relación numérica.

Para finalizar se logró evidenciar que en la música el lenguaje matemático es amplio y que teniendo en cuenta cada una de las características asociadas a la música se podrían encontrar un sinfín de relaciones matemáticas que abarquen una explicación de cada fenómeno y herramienta comprendida en dicha armonía.

Con una visión a futuro del trabajo, pensada en una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad a partir de la música, se puede expresar como posible ruta el proceso que se llevó a cabo en la sistematización, empezando por la caracterización del piano, pasando por la construcción de intervalos y escalas musicales, desde el estudio realizado por Pitágoras con las cuerdas, la interpretación de las figuras musicales y su relación con las diferentes notas.

7) BIBLIOGRAFIA

Atilano, D. (2012). *"Pitágoras: número, música y proporción".* Universidad Central de Venezuela. Grupo de Investigación en Matemática del Colegio Integral el Avila.

Peralta, J. (s.f). *"Las matemáticas en el arte, la música y la literatura".* Universidad Autónoma de Madrid.

Tomasini, M. (s.f.). *"El fundamento matemático en la escala musical y sus raíces pitagóricas".*

Hurtado de Barrera, J. (2010). *"Metodología de la investigación".* Editorial Quiron S.A. Bogotá-Caracas.

Arbonés, J. & Milrud, P. (2011). *"La armonía es numérica. Música y Matemáticas".* Editorial RBA

Hall, A. (1989). *"Studying rhythm".* United States of America.

Dabhauser, A. (s.f). *"Teoría de la música".* EDITORIAL JULIO KORN S. R. L. Buenos Aires. Argentina.

Castillo, H. (1993). *"Lecciones de geometría Euclidiana".*

Correa, G. (2006). *"Teoría de la proporción Pitagórica".* Universidad Pontificia Bolivariana.

Labrado, J. (1987). *"El registro sonoro".* Editorial Voluntad