ALGUNOS APUNTES SOBRE LA NOCIÓN DE INFINITO EN LOS REFERENTES CURRICULARES PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS DE COLOMBIA EN EL CICLO DÉCIMO-UNDÉCIMO

Autor:

Juan David Díaz López

Director:

Juan Pablo Albadan

UNIVERSIDAD FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

LIC. EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2016

CONTENIDO

PORTADA

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

1. PRELIMINARES

1.1. Justificación

Históricamente, el objeto matemático infinito ha actuado como soporte sobre el cual se han generado y construido objetos matemáticos del cálculo como el de límite, número real y continuidad entre otros. Dichos sucesos han acontecido de manera implícita, en un primer momento, y con el avanzar del tiempo su resolución ha sido explicita. Tal objeto, como se puede inferir de la génesis del cálculo presenta un carácter contra-intuitivo como lo expresa Arrigo et al (2011) que dificulta el aprendizaje de tales objetos matemáticos sustentados en él como lo argumenta a su vez Sierpinska (1995) citada en Neira (2012), quien caracteriza la noción de infinito como uno de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza-aprendizaje del cálculo.

Por su parte, García (2003) menciona que como respuesta a la exigencia de significatividad del aprendizaje propuesto en las reformas curriculares, desde la década del 70, las investigaciones en didáctica de las matemáticas han apostado por la interconexión entre los saberes escolares, es así, como se reconoció la ruptura numérico/algebraica que arguye Artigue (1995) citado en Neira (2012) promovió diversas investigaciones cuyos resultados establecieron unos básicos o mínimos didácticos con los cuales posibilitar el tránsito *aritmética-algebra* en el proceso educativo.

A pesar de este avance en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no ha sucedido algo similar con el tránsito *algebra-cálculo*, donde el concepto matemático seleccionado para esta investigación está presente en los procesos y objetos propios del cálculo. Sin embargo, como indica Neira (2012), aunque existen numerosos estudios que han aportado valiosos resultados al respecto, no hay un convenio entre los investigadores para establecer unos mínimos didácticos que favorezcan el aprendizaje del objeto matemático infinito que a su vez contribuya a entender algunas particularidades del cálculo;

no obstante, se han expuesto algunos caminos para continuar esta reflexión que conllevarán en algún punto de la investigación en educación matemática a establecer tales mínimos.

Aunque este trabajo de grado no trata de abordar la difícil tarea de establecer los mínimos didácticos para la enseñanza-aprendizaje del infinito matemático como uno de los elementos del puente que posibilita el tránsito del algebra al cálculo como se infiere de lo argüido por Neira (2012), no obstante, si busca develar la presencia o ausencia del objeto matemático infinito en los referentes curriculares nacionales para el área de matemáticas, particularmente, en Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (en adelante EBCM) y en los Derechos Básicos de Aprendizaje (en adelante DBAM) puesto que en alusión a lo descrito, el infinito matemático es uno de esos saberes que podrían ser un tratamiento para la ruptura *algebra/cálculo*.

De cara a los hallazgos de esta investigación, se espera aportar algunas claridades respecto a la presencia o ausencia del infinito matemático en los referentes curriculares colombianos para la construcción de planeaciones que tengan como saber central tal objeto para que con ello se posibilite en los estudiantes algo significatividad de los objetos matemáticos del cálculo que por lo común como lo expresa Artigue (1995) citado en Neira (2012), se reducen a su parte algebraica.

1.2. Antecedentes

En el ámbito de la investigación en educación matemática existen múltiples trabajos que han tomado como su centro de estudio el infinito matemático en el proceso de enseñanza-aprendizaje a nivel de primaria, básica, media y profesional, analizando sobre tal objeto entre la variedad de perspectivas del acto educativo algunos tales como, obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, contradicciones, intuiciones, modelos tácitos, dificultades, concepciones etc.

Sin embargo, en cuanto a lo que pretende indagar esta monografía no son variadas las investigaciones que hayan puesto como tópico central el análisis sobre la presencia del infinito matemático en los referentes curriculares colombianos para la transformación del saber a enseñar en saber didáctizado o por lo menos, no se encuentran de forma directa trabajos de investigación publicados respecto a tal énfasis.

En ese sentido, para la presente monografía se produce una situación particular que se debe clarificar, esto es, aunque las investigaciones en educación matemática que hacen énfasis sobre las perspectivas del primer párrafo de este apartado han contribuido con sus resultados a la construcción del marco teórico en el que se contemplan algunas de la variadas problemáticas y aciertos que tienen algunas teorías, metodologías y registros semióticos entre otros, tales investigaciones no son un referente directo para develar la presencia del concepto de infinito matemático en los referentes curriculares colombianos, no obstante, se resalta el hecho de que proveen de directrices a considerar en el desarrollo de esta empresa para el póstumo análisis de contenido propuesto como método de desarrollo para la obtención de resultados que posibiliten una respuesta particular a la pregunta de investigación.

En ese sentido, las investigaciones que se han apropiado a esta monografía respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje del infinito matemático se encuentran los trabajos de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) que han analizado y recopilado una cantidad considerable de investigaciones de diversas partes del mundo que inician desde la aparición de la teoría Piagetiana hasta la teoría APOE.

Por su parte, Belmonte (2009) que indaga sobre los modelos intuitivos y el esquema conceptual del infinito ha contribuido a esta monografía respecto a algunos aspectos a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de infinito y a la selección de categorías para el análisis de contenido que se realizará para configurar una posible respuesta a la pregunta problema de esta monografía; en su investigación recorre un número considerable de teorías que sincopa en cinco grandes títulos, a saber:

- Intuición e infinito
- Contextos e incoherencias en el esquema conceptual
- Cardinalidad y equivalencia de conjuntos. Infinito actual.
- Lenguaje e infinito
- Teoría APOE e infinito

De los anteriores cinco títulos, se apropiaron para la presente los primeros tres, debido a que suministran argumentos tales como la dualidad potencial-actual de donde, prevalece la acepción potencial del infinito matemático debido a su cercanía con la intuición de los sujetos; también, abastece de argumentos sobre las inconsistencias en el aprendizaje y la enseñanza del infinito matemático debido a que, algunos contextos matemáticos y extramatemático al igual que algunos registros semióticos, promueven incoherencias en los razonamientos de sujetos enfrentados a dicho objeto matemático y por último surte de argumentos sobre cómo el infinito actual se convierte en un hincapié para la construcción del objeto matemático infinito en el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que, el infinito actual no posee un contexto de referencia directo, lo cual, promueve priorizar el infinito potencial sobre el infinito actual, no obstante, cabe aclarar que esta priorización hace parte del proceso de enseñanza-aprendizaje del infinito matemático.

Por los argumentos anteriores se arguye que el infinito actual es contraintuitivo, lo cual, conduce a contradicciones que hacen que los sujetos enfrentados a problemáticas sobre el infinito en sus dos acepciones no guarden coherencia en sus respuestas, nieguen el infinito actual y se aferren a la intuición prevaleciendo el infinito potencial impidiendo la construcción del infinito tanto a temprana edad como a nivel profesional.

En la misma línea de contribuciones se encuentra la investigación de D'Amore, Arrigo y Sbaragli (2011), quienes aseveran que las investigaciones en educación matemática sobre el infinito matemático por lo común se han centrado en las dificultades que posiblemente se pueden encontrar en los estudiantes y profesores en el proceso de enseñanza-aprendizaje manifestando que éstas, permiten dilucidar, que tanto desde la perspectiva histórica como desde el aprendizaje del infinito, la evolución de este objeto matemático es lenta y comúnmente tiene lugar de manera contradictoria en la mente humana, omitiendo el hecho de que el aprendizaje del infinito se gestiona sólo por medio de la sistematización y maduración cognitiva como lo expresan D'Amore et al (2011), la cual, afecta a un número limitado de sujetos.

D'Amore et al (2011) expresan que la dualidad potencial-actual es uno de los factores de mayor influencia en las problemáticas presentes en el aprendizaje del objeto matemático infinito y al igual que Belmonte (2009), arguyen cómo los contextos de los problemas así como también los registros semióticos tienen un efecto que genera inconsistencias. De todo el análisis realizado por estos autores, se establecen tres problemáticas recurrentes en la literatura analizada por estos autores sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del infinito matemático las cuales sincopan en tres categorías, que son: los fenómenos de *aplastamiento, dependencia* y *deslizamiento* que se deben considerar al momento de construir y plantear una unidad didáctica o una secuencia de actividades sobre el objeto matemático en cuestión.

En conformidad a las anteriores investigaciones otra que aportó directrices para la construcción y desarrollo de esta monografía es la de D'Amore (2011), en donde este autor trata de clarificar el fenómeno de *dependencia* y *deslizamiento* que tienen un origen común sustentado en la mayoría de los resultados de las investigaciones puesto que, es usual que los sujetos extrapolen las propiedades y relaciones propias de conjuntos finitos a conjuntos infinitos convirtiéndose este hecho en un impedimento para póstumos aprendizajes de conceptos tales como la teoría de conjuntos y los números transfinitos.

A su vez, el mismo autor presenta un artículo del cual no se posee la fecha, el cual se denomina *Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor*, donde presenta como su nombre lo sugiere problemáticas alrededor del infinito actual que proveen para esta monografía algunos argumentos del porqué es necesario vincular en la enseñanza-aprendizaje de futuros docentes la teoría de conjuntos y por ende la construcción del infinito de Cantor para que se generen cimientos con los cuales a nivel profesional se logren comprender tanto el infinito actual como los cardinales transfinitos recomendando, que se deben promover reformas en los pensamientos numérico y geométrico desde la escuela básica y media que propicien los cimientos necesarios para la construcción del infinito en matemáticas.

En coherencia y teniendo en cuenta lo expresado en la investigación mencionada a lo último del párrafo anterior, el director de esta monografía contribuyó con un aporte teórico que no había sido contemplado en el proceso de desarrollo de esta pesquisa investigativa pero que provee de argumentos que dan razón del porqué se incluye la teoría de conjuntos en el currículo de los futuros profesores de matemáticas debido a que como lo argumenta Aponte (2014), un concepto que atraviesa todos los pensamientos en los referentes curriculares colombianos para el área de matemáticas es el de infinito de forma implícita o tal vez explicita que es lo que aquí se busca develar.

Para hacer especifico lo expresado, el documento que se presenta a continuación es una tesis para adquirir el título de magister en educación con énfasis en educación matemática realizado por Aponte (2014), que en el intervalo de páginas 122-127 menciona que con la revolución de la matemática moderna la cual, afectó el currículo colombiano y que conllevó a una exagerada formalización de los conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, razón por la cual fue abolida, no pudo ser retirada del currículo colombiano en su totalidad ya que desde la construcción de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas se puede evidenciar cómo se recurre a algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos para la presentación de directrices que contribuyeran a la construcción de planeaciones de clase, planes de aula, unidades didácticas y diseños curriculares de forma abierta.

Esta misma tesista manifiesta que en los estándares curriculares para el área de matemáticas aunque no se especifica la enseñanza de la teoría de conjuntos de manera formal y en consecuencia la enseñanza de los números transfinitos, en estos, se presenta que en su estructura conforme se avanza en la coherencia vertical y horizontal se van complejizando los conceptos, gestionando el tránsito de lo intuitivo a lo abstracto, induciéndose la construcción por ejemplo del concepto de número que necesita extenderse para pasar de los naturales a los racionales y póstumo a los reales en donde se entrecruzan algunos conceptos de la teoría de conjuntos, donde la autora argumenta que estos hechos sustentan el porqué de enseñar la teoría de conjuntos a futuros profesores para que en sus prácticas se promuevan esos cimientos de los que habla D'Amore (s.f) para la comprensión póstuma del infinito matemático.

Aparte de lo anterior, se debe añadir a los anteriores otro antecedente que ha contribuido a esta investigación pero que centra sus esfuerzos en la ruptura *algebra-cálculo*, en este artículo Neira (2012) presenta cómo del algebra al cálculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la básica a la media y de la media a la profesional no hay un puente conector evidente debido a que, al igual que en el transito *aritmética-algebra* algunos conceptos deben ser reinterpretados o reificados, lo cual, se ha logrado teóricamente en el transito *aritmética-algebra,* sin embargo, del algebra al cálculo no se ha logrado, conllevando a aducir que contrario a un tránsito se tiene una ruptura, un obstáculo o una problemática etc. Lo anterior sembró las bases para vislumbrar que no solo entre ramas de la matemática existen tránsitos sino que en el proceso de enseñanza-aprendizaje que implica la construcción, planeación y reflexión por parte del docente entre otros aspectos también existen tránsitos y que en lo particular del presente se seleccionó el transito del *saber a enseñar* y el *saber didáctizado*.

Conjugando todo lo mencionado hasta el momento, se debe mencionar que cada uno de estos documentos y otros no explicitados han contribuido a configurar tanto el anteproyecto como el desarrollo de esta monografía la cual no tiene referencias explicitas y que puede sugerir un contexto investigativo innovador dentro del campo de la investigación en educación matemática respecto al infinito matemático en el ámbito colombiano.

1.3. Situación problema

Artigue (1995) citado en Neira (2012) manifiesta que no existe un paso natural del algebra al cálculo, en otras palabras, no existe un progreso constante y regular del conocimiento matemático que propicie este tránsito ya que, tanto el álgebra como el cálculo tienen bases epistemológicas diferentes que al momento del acto educativo, contrario a un tránsito se presenta una ruptura frente a la cual expresa Neira (2012), se deben emprender investigaciones que se ubiquen en el trabajo inicial que lleve del algebra al cálculo y que impacte positivamente los conceptos básicos de éste, debido a que como expresa esta autora, se han abordado las problemáticas de incomprensión de los conceptos del cálculo con reformas e innovaciones al interior del mismo más no desde el tránsito que tienda un puente del pensamiento algebraico al pensamiento analítico.

Algunas de las problemáticas en la enseñanza-aprendizaje del cálculo detectadas por múltiples investigadores y que impiden la construcción de tal puente como se constata en Belmonte (2009), Arrigo et al (2011), Hitt (s.f), Neira (2012) y Mena-Lorca et al (2015) son los obstáculos epistemológicos, los obstáculos didácticos, las problemáticas en la semiosis y en la semántica etc. Es así como dentro de los obstáculos epistemológicos detectados por Sierpinska (1995) citada en Neira (2012) se encuentra el obstáculo denominado horror al infinito, el cual, rechaza el estatuto de operación matemática para el paso al límite, éste, es decir, el concepto de límite como expresan variados autores como Blázquez & Ortega (2001) es fundamental para el cálculo, pues sobre él se edifican los conceptos de derivada e integral. Sin embargo, el concepto de límite, epistemológicamente tiene como una de sus bases el infinito matemático, que al ser un obstáculo epistemológico gestiona problemáticas de aprendizaje persistentes y en muchos casos resistentes a la instrucción como segura Mena-Lorca et al (2015).

Conforme a lo expuesto, se puede inferir que para una mejor comprensión del concepto de límite y por ende de los conceptos del cálculo, parte del proceso de enseñanza-aprendizaje debe realizar un tratamiento del obstáculo epistemológico horror al infinito o por lo menos como lo sugiere Artigue (1995) citado en Mena-Lorca (2015) proceder a través de aproximaciones provisionales del objeto que sienten las bases para que en lo póstumo pueda comprenderse, esto implica para el profesor de matemáticas, identificar tal obstáculo en el proceso de transposición didáctica y a su vez la construcción de sesiones de clase centradas en el infinito matemático que faculte de sentido y significado los conceptos del cálculo que por lo común, tienden a reducirse a la manipulación de algoritmos como lo expresa Artigue (1995) citado en Neira (2012).

De este fenómeno de algebrización de los conceptos del cálculo detectado por Artigue (1995) asevera Neira (2012) surge un fundamental interés por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por la significatividad y el sentido de tales prácticas que permean a su vez el ámbito didáctico y matemático, esto implica, que para enfocar los esfuerzos en la construcción de sesiones de clase centradas en el concepto de infinito, el acto educativo a configurar en el aula de las instituciones educativas como lo expresa Chevallard (1999), debe conjugar una coherencia entre la institucionalidad establecida a nivel científico, a nivel global, a nivel social y local en lo que compete particularmente a los saberes a ser enseñados.

Esta coherencia con la institucionalidad, se ve reflejada en los referentes educativos curriculares que cada país construye y establece de forma escrita; en estos, se decretan unos mínimos pedagógicos, didácticos, filosóficos, temáticos-conceptuales etc. para cada área del conocimiento que harán las veces de reguladores y guía del acto educativo donde culmina parte del proceso de transposición didáctica, deduciéndose, teniendo en cuenta lo expresado en el párrafo anterior, que una de las formas de analizar las prácticas educativas en este caso respecto al infinito matemático es a través de los referentes educativos curriculares.

Lo precedente se sustenta como lo expresa Rico (1997), en el hecho de que para la planeación de clase, el primer organizador curricular que acciona el profesor de matemáticas es el de remitirse a unos referentes educativos curriculares, ya que es en estos donde se ha puesto en coherencia el saber sabio y el saber a enseñar. Este primer organizador curricular, en términos del análisis realizado por Bertoni (2009) al proceso de transposición didáctica propuesto por Chevallard (1991) revela una relación docente-currículo que provoca un saber propio del docente al que la autora denomina saber didáctizado.

Para esclarecer lo expuesto, Bertoni (2009) establece que para configurar el acto educativo existen cuatro saberes que interactúan constantemente y que provocan transformaciones que lo posibilitan que son: el saber del alumno, el saber académico, el saber a enseñar y el saber didáctizado. Este saber didáctizado que será el corazón de este trabajo, es producto del proceso de despersonalización según Chevallard (1991) que realiza el docente para la planeación de su clase donde se distancia del *saber sabio* para una adaptación pertinente de tal saber a las necesidades de un grupo de aprendizaje en coherencia con las indicaciones del *saber a enseñar*.

En razón de lo anterior, es necesario que el docente se remita a los referentes educativos curriculares y produzca a través de estas indicaciones legales el saber didáctizado o las sesiones de clase respecto a un concepto matemático, no obstante, como expresa Rico (1997), tales referentes curriculares al ser generales no cobijan todos los saberes a ser enseñados en el aula y es al docente al que le corresponde a través de su conocimiento profesional realizar una lectura reflexiva de estos para vincular o desvincular ciertos saberes a ser enseñados con el objetivo de propiciar un aprendizaje conexo y significativo, esto implica para el profesor de matemática, ver más allá de lo que superficialmente se vislumbra en tales referentes, pues como lo arguyen Bertoni (2009) y Rico (1997), ya sea por condicionamientos de las instituciones educativas, por voluntad propia o falta de conocimiento, algunos docentes replican las indicaciones curriculares asumiendo que en ellas están contenidos todos los saberes a ser enseñados en las aulas.

De lo expuesto, emerge una problemática para la labor docente y para los procesos de transposición didáctica en la matemática escolar, en otras palabras, emerge un problema de ausencia, ya que para la construcción de sesiones de clase centradas en este caso en la superación del obstáculo epistemológico horror al infinito se requiere, que los referentes educativos curriculares particularmente colombianos, tengan alusiones explicitas sobre el infinito matemático que permitan a los docentes de matemáticas justificar y producir el saber didáctizado pertinente para realizar un tratamiento al obstáculo horror al infinito.

Esta problemática de naturaleza curricular y didáctica de ausencia de contenidos, ha inspirado esta pesquisa investigativa ya que para la construcción del saber didáctizado centrado en el tratamiento del obstáculo epistemológico horror al infinito se debe identificar, como parte del proceso de transposición didáctica, si existen alusiones explicitas del infinito matemático en los referentes educativos colombianos que promuevan en los profesores la transformación del saber a enseñar en saber didáctizado para la construcción de un puente que faculte el tránsito del algebra al cálculo. En razón de lo anterior, surge como directriz de esta monografía la siguiente pregunta de investigación:

1.4. Pregunta de investigación

¿Cuentan los (EBCM) y los (DBAM) con alusiones explicitas sobre el objeto matemático *infinito* con las cuales promover conversiones del *saber a enseñar* en *saber didáctizado* para el tránsito *algebra-cálculo* en los grados décimo-undécimo?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general.

- Develar la existencia de especificidad del objeto matemático "*infinito*" y su tipología en los EBCM y DBAM respecto a la unidad de análisis ciclo V (décimo-undécimo) conforme a los resultados del análisis de contenido realizado.

1.5.2. Objetivos específicos.

- Construir un marco teórico referencial para describir y caracterizar el objeto matemático infinito que permita a su vez definir categorías y objetivos de referencia para el análisis de contenido de los EBCM y DBAM en el ciclo V (décimo-undécimo).
- Realizar un análisis de contenido a los EBCM y DBAM en la unidad de análisis ciclo V (décimo-undécimo) desde la apuesta teórica de Rico (2013).
- Identificar los registros semióticos del objeto matemático infinito de acuerdo a los resultados del análisis de contenido en los EBCM y DBAM para el ciclo V (décimo-undécimo).
- Determinar si existe relación entre los EBCM y DBAM respecto a los tipos de representación del objeto matemático infinito.

2. REFERENTE TEÓRICO

Coherente a la relación *docente-currículo* en la fase de diseño de actividades, el conocimiento didáctico es una parte fundamental en ésta, Gómez (2001) menciona al respecto que el diseño, la puesta en práctica y evaluación de carácter ideal que tendrán lugar en el aula de clase hace parte de una estructura curricular más amplia que tiene predeterminados unos propósitos que se desean lograr, a partir de esos propósitos y el estado cognitivo de los estudiantes, el profesor debe determinar unos objetivos para la actividad.

A su vez expresa Gómez (2001), que coetáneo con la delimitación de objetivos el profesor reconoce un contenido matemático que estará en parte determinado por el currículo prescrito, en otras palabras, los objetivos, el contenido y el estado cognitivo de los estudiantes son el punto de partida para la fase de diseño. Conforme a lo descrito, el diseño, la puesta en práctica y evaluación de una actividad requiere de cuatro categorías de análisis que se denominan en conjunto análisis didáctico, que son según (Gómez, 2001):

- Análisis cognitivo: Alude a la identificación de dificultades y errores que pueden tener los estudiantes una vez realizadas la actividad.
- Análisis de contenido: El docente busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático de acuerdo a la perspectiva didáctica, para tal fin, el docente debe construir la estructura conceptual del contenido identificando los conceptos, procedimientos y sistemas de representación, aunado a un análisis fenomenológico identificando los modelos que representa dicha estructura matemática.
- Análisis de instrucción: El docente debe tener en cuenta los recursos y materiales para la actividad.

- Análisis de actuación: El docente analiza las actuaciones recientes de los estudiantes reconociendo el estado cognitivo. (p. 12)

Aunado a lo descrito, Gómez (2001) establece que el diseño, la puesta en práctica y la evaluación de actividades de enseñanza dentro de una perspectiva constructivista del aprendizaje es un proceso complejo, dinámico y cíclico donde el conocimiento didáctico es el que se acciona y que es propio del análisis didáctico con un carácter general en lo que respecta a las características de las herramientas conceptuales y con un carácter particular en lo referido al uso de dichas herramientas. Para el caso específico de este trabajo de grado, a continuación se presenta un esquema que permite vislumbrar el proceso de planificación de acuerdo a la propuesta de Rico (1997) sobre dimensiones del currículo, a saber:

Figura 1 Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

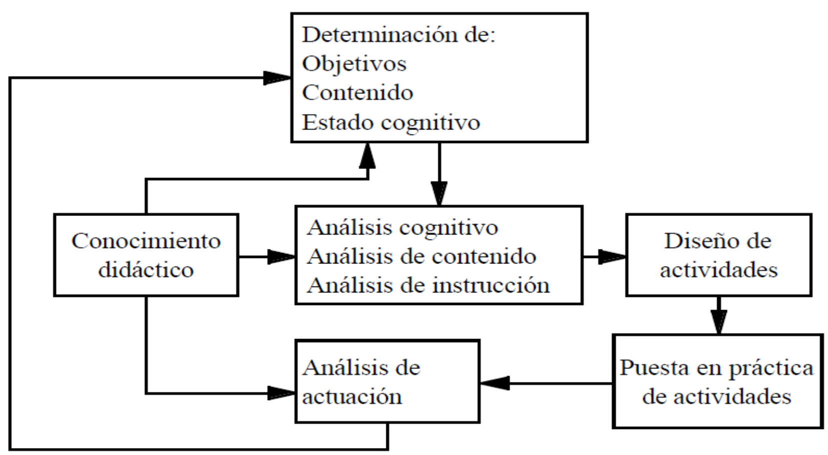


Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

Describe el proceso de diseño de actividades y a su vez permite la posición que ocupa el análisis de contenido dentro del análisis didáctico.

Fuente: Gómez, 2001, p. 3

Así mismo Gómez (2001) expresa que en la fase de diseño, los docentes ponen en acción diferentes tipos de conocimientos de la didáctica de las matemáticas, esto es, en el nivel de planificación tiene en cuenta los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación que son los componentes de la noción de currículo, de igual forma al nivel de análisis, los docentes deben realizar análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis instruccional y el análisis de actuación. Para tal desarrollo, se ponen en acción simultáneamente los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997) de los cuales el primero alude a la relación *docente-currículo*.

Dado que la indagación responde a un análisis de contenido de referentes curriculares colombianos, el esquema del marco teórico responderá a las perspectivas propias del análisis de contenido que pertenece a la dimensión conceptual del análisis de didáctico como particularidad del mismo. En ese sentido, seguidamente se presenta un esquema que permite delimitar el presente marco teórico, a saber:

Figura 2 Dimensiones del currículo, análisis didáctico y conocimiento del profesor

		Dimensiones del currículo			
		Conceptual	**Cognitiva**	**Formativa**	**Social**
Niveles	Planificación	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
	Análisis	De contenido	Cognitivo	De instrucción	De actuación
	Conocimientos generales	Estructura conceptual - procedimental; sistemas de representación; fenomenología y modelización	Aprendizaje y comprensión en matemáticas; errores y dificultades	Materiales y recursos; resolución de problemas	Análisis de tareas; evaluación formativa
	Conocimientos específicos	Aplicación de las herramientas a la estructura matemática particular			

Tabla 1. Dimensiones del currículo, análisis didáctico y conocimiento del profesor

Caracteriza cada aspecto a tener en cuenta en el análisis didáctico, donde se puede vislumbrar la dimisión de análisis de contenido en qué consiste.

Fuente: Gómez, 2001, p. 4

Conforme a lo anterior y para especificar las perspectivas que estructurarán este marco según (Rico, 2013) son:

a) Perspectiva conceptual: Que considera el considera el momento histórico y el marco poblacional (el quién comunica y a quién comunica) donde se insertan.

b) Perspectiva formal y estructural: Que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos junto con la estructura formal que proporcionan referencia a los contenidos utilizados.

c) Perspectiva representacional: Que comprende las notaciones gráficas, simbólicas y sistemas de signos involucrados.

d) Perspectiva fenomenológica: Que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan aquellas situaciones en las que se presenta y en las cuales se aplica, que dotan de sentido a los contenidos en estudio. (p. 8).

Para esclarecer lo expuesto y como esquema representacional para tal desarrollo, el marco teórico girará en torno a las cuatro perspectivas expuestas anteriormente, con el propósito de generar un soporte para la póstuma construcción de categorías de análisis que doten de sentido y significados el análisis de contenido de dos de los referentes curriculares nacionales, a saber:

Figura 3 Referente teórico

Expone los autores que se utilizarán en cada una de las cuatro perspectivas.

Dado que este proyecto tiene su centro en la transformación del *saber a enseñar* en *saber didáctizado*, se hace necesario realizar un preámbulo sobre algunos aspectos didácticos que pueden darse en la enseñanza-aprendizaje del infinito que otorguen directrices y posiciones pedagógicas a tener en cuenta para tal proceso. Para ello, se realizó una lectura y recopilación de algunos apartados de las investigaciones de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) quienes han recopilado y analizado a su vez una variedad de investigaciones representativas en el tema que es meritorio resaltar.

2.1. Elementos didácticos a tener en cuenta en la enseñanza-aprendizaje del infinito matemático

Un aspecto que se presenta con frecuencia en las teorías recopiladas en la tesis doctoral de Belmonte (2009) y a su vez en la apuesta teórica Arrigo et al (2011) tienen su núcleo en la naturaleza contradictoria del infinito matemático puesto que, desde el inicio de la vida escolar se presentan algunos conceptos numéricos y geométricos en conexión con la realidad que enfrentada con la teoría formal promueven obstáculos cognitivos y epistemológicos generados algunas veces por los docentes, transformándose tales obstáculos en obstáculos didácticos resistentes a la instrucción como lo ha expresado Mena-Lorca et al (2015).

A su vez, se vislumbra frecuentemente en lo expuesto por Belmonte (2009) que conforme avanza la edad existe mayor oportunidad de comprender el objeto de infinito o de construirlo paulatinamente desde las interpretaciones intuitivas de tal objeto que poseen los estudiantes, particularmente se expresa que, a partir de los 11 años o inicio de las operaciones formales los sujetos comienzan a tener una percepción contradictoria del infinito que puede servir como recurso a-didáctico para la construcción de situaciones didácticas y lograr el desequilibrio cognitivo necesario para la adquisición o establecimiento de nuevas concepciones, conceptos y reconceptualizaciones.

Aunado a lo descrito, del análisis a priori de las investigaciones de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) se pudo extraer que en la didáctica del infinito matemático existen algunos tópicos recurrentes a tener en cuenta para la construcción de actividades y para la adquisición del objeto por parte de los estudiantes que pueden aprovecharse para propiciar situaciones problema coherentes con una metodología constructivista del proceso de aprendizaje, a saber:

- Contradicción de la relación parte-todo, esto es, el todo no puede ser igual que una de sus partes.
- Modelos intuitivos: Pictórico-figurativo, esto es, las representaciones pictóricas son obstáculos para comprender el infinito en específico el modelo punto-marca, segmento como un collar de perlas, intervalos cerrados finitud etc. Son modelos que contribuyen a hacer resistentes los obstáculos epistemológicos y didácticos sobre la teoría formal de infinito en matemáticas.
- Fenómeno del aplastamiento: Todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal para esclarecer, al no poder aceptar que el todo puede ser igual en magnitud que una de sus partes la imagen y respuesta del cerebro para resolver tal contradicción es asumir que todos los cardinales infinitos son iguales negándose el criterio de la biyección como herramienta para la numerabilidad o no-numerabilidad de conjuntos infinitos.
- Fenómeno del deslizamiento: Para Duval (1983) desdoblamiento, hace referencia a un obstáculo para comprender la idea de biyección o correspondencia uno a uno para la equivalencia de conjuntos infinitos, debido a que no se le asigna a dos conjuntos interpretaciones diferentes sino la misma, esto es, el conjunto de los enteros positivos y el

subconjunto propio de los enteros pares son un mismo conjunto y en consecuencia éste último está contenido en el primero pues sus números son enteros positivos también.

- ❖ Fenómeno de la dependencia: la dependencia hace referencia a las imágenes intuitivas que se evocan a la hora de enfrentarse a cuestiones sobre el infinito matemático y su influencia negativa sobre la teoría formal.
- ❖ Contradicción entre el aspecto intuitivo del infinito y la teoría formal, una particularidad de la realidad de la humanidad es que lo perceptible por los sentidos en su mayoría refuerza la noción común de que el todo es mayor que la parte, lo cual proporciona mínimas referencias sobre las cuales establecer y construir el concepto formal de infinito en matemáticas.
- ❖ Dualidad infinito proceso-objeto: al igual que la dependencia que se menciona anteriormente, dependiendo de la situación el infinito es un objeto por ejemplo un número muy grande o por lo contrario un proceso sin fin bajo concepciones de inagotabilidad del infinito o recurrencia indefinida.
- ❖ Dificultades asociadas a las representaciones simbólicas y a los guarismos utilizados para representar y operar el infinito puesto que, dependiendo del registro semiótico utilizado para representar una situación problema cuyo centro es el concepto formal de infinito la interpretación de los estudiantes varía.

Habiendo expuesto algunas consideraciones didácticas relevantes, a continuación se desarrollará este marco teórico en coherencia con las cuatro perspectivas propuestas por Rico (2013), a saber:

2.2.Perspectiva fenomenológica

Conforme a las recomendaciones didácticas, Belmonte (2009) manifiesta que, los contextos en los que se puede desarrollar el objeto de infinito y que son los más usados en la mayoría de investigaciones y en la instrucción de dicho objeto son:

1) Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos: Este contexto es uno de los más utilizados para desarrollar el objeto matemático infinito, debido a que promueve contradicciones que permiten realizar el salto de lo potencial a lo actual a partir de la comparación de conjuntos a través del concepto de función.
2) Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores:

   Este contexto es uno de los más ricos es procesos algorítmicos que permiten desde la manipulación de los guarismos generar la comprensión del infinito en su doble acepción y además permite reconocer, desde la acción de los sujetos sobre esos guarismos diferenciar y relacionar un proceso infinito potencial y actual, su importancia radica en que genera facilita el concepto de cota superior e inferior y por ende diferenciar un número racional de uno irracional.
3) Series convergentes: Epistemológicamente se puede vislumbrar que hubo en la historia de un particular interés por los infinitesimales y las magnitudes inconmensurables, este contexto permite cerrar este capítulo, al hacerle comprender al aprendiz que un proceso infinito puede representar un número y a su vez contribuye a diferenciar números racionales de irracionales.
4) Operatividad e infinito: Diversas investigaciones, como se puede constatar en Belmonte (2009), han investigado las problemáticas que surgen para comprender que $0,\overline{9} = 1$ ya que el infinito se vislumbra como un proceso recurrente que no tiene fin o como una

aproximación lo cual implica un rechazo al infinito actual, en ese sentido, este contexto permite identificar diversas problemáticas ligadas a la semiosis y a la semántica de sujetos enfrentados al objeto matemático infinito.

5) Lenguaje del infinito: Diversos investigadores han puesto en evidencia como la intuición de los sujetos se convierte en un obstáculo a la hora de comprender el objeto matemático infinito, uno de los elementos que alimenta una prevalencia de la intuición por sobre lo formal se encuentra en el lenguaje ya que, el lenguaje intuitivo del infinito genera acepciones erróneas que alimentan solo el infinito potencial dificultando aún más comprender el infinito actual.

6) Inducción (sólo en el caso universitario): Este contexto el autor Belmonte (2009) lo piensa para el caso universitario pues requiere de procesos de demostración matemática formal, lo cual implica procesos más complejos de lo que se dan en algunas instituciones educativas, no obstante, permite la construcción de los números naturales de manera formal que genera comprender el comportamiento y las propiedades de los distintos conjuntos numéricos como el de los racionales y enteros que aunque con el mismo cardinal se comportan de forma distinta.

De los contextos expuestos, se escogerán particularmente para el presente trabajo de grado los siguientes:

1) Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos
2) Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores

Lo anterior, en razón de que en los trabajos de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) se vislumbra que dichos contextos son los que posiblemente se pueden encontrar en los referentes educativos curriculares colombianos y que según lo analizado en los documentos de los autores mencionados permiten el desarrollo del objeto matemático de infinito partiendo de los pre-conceptos de los estudiantes.

Sumado a lo anterior, otro argumento que sustenta esta escogencia se basa en el poco énfasis que se le da en la escuela al infinito actual y la absolutización del infinito potencial que adiciona más dificultades a la comprensión del infinito matemático, esto, sustentado en el hecho de que la acepción potencial según Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) no contradice la intuición de los aprendices, no obstante, la acepción actual del infinito le proporciona un estatus contraintuitivo, por esta razón, esta selección de contextos permite evidenciar en los referentes educativos curriculares si existen objetivos que puedan ser direccionados hacia la comprensión de esta acepción del infinito matemático ya que desde la matemática no es posible comprender el infinito sólo con una de las acepciones.

Además de lo expuesto, al realizar un análisis a cada uno de estos contextos se pudo vislumbrar que los contextos seleccionados están estrechamente relacionados con los no seleccionados, por esta razón se considera que no es necesario para este trabajo en particular retomar todos estos contextos sino los ya escogidos que como se expresó pueden ser encontrados en la matemática escolar.

Sumado a lo anterior, otro argumento que sustenta la escogencia de estos dos contextos es porque, en el contexto comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos, se puede vincular tanto el infinito potencial como el actual así como también se puede enfatizar en el trabajo con conjuntos numerables para pasar a los continuos. El contexto divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas, se seleccionó porque permite trabajar aspectos del infinito actual en relación con el infinito potencial para la construcción del concepto de infinitesimal y de completitud de los $\mathbb{R}$.

2.3. Perspectiva conceptual

Como se indicó apartados atrás, esta perspectiva denominada conceptual hace alusión a la parte histórica y epistemológica del objeto matemático de infinito, por esta razón, se retomarán los documentos de Ortiz (1994), Salat (2010) y Belmonte (2009) que ofrecen un acercamiento a dichos tópicos que encerrarán algunos aspectos relevantes del concepto en cuatro momentos históricos que se dividen en edad antigua, edad media, renacimiento y edad moderna, donde se puede vislumbrar las problemáticas que hubo con respecto al concepto que dan luces sobre por qué considerarlo un obstáculo epistemológico. Para ello, se desarrollarán cada una de estas edades en la siguiente tabla, a saber:

Tabla 1 *Desarrollo de la respectiva conceptual*

2.3.1. Edad antigua	Esta edad estuvo marcada por el rechazo al objeto matemático de infinito sobre todo en su acepción actual aunque, los babilonios de los cuales los griegos adquirieron parte de su cultura, mucho antes de los logros de Grecia habían ya calculado una aproximación al número $\sqrt{2}$ a través de iteraciones sucesivas. Póstumamente y con la creación de la escuela pitagórica en Grecia se generaron los primeros argumentos que rechazaron el infinito debido a que a través de la relación pitagórica reconocieron estos que existen números que no pueden ser medidos por un número natural o por un número racional, esto llevó a negar la existencia de las magnitudes inconmensurables y gestionó el origen de la geometría como instrumento para evadir la problemática de la inconmensurabilidad debido a que, la geometría manipulaba magnitudes continuas más funcionales para tatar de explicar el mundo que nos rodea. Aunque la geometría contribuyó a la explicación de un número de problemas que se presentaban al considerar sólo lo numérico, es válido resaltar que Euclides también rechazó la idea de infinito ya que en el postulado de las paralelas al igual que en el de la proporciones o propiedad arquimediana evitaba utilizar expresiones tales como infinitamente o al infinito para no generar contradicción con los pensamientos de Aristóteles. El pensador anterior esto es, Aristóteles, fue la principal influencia para el rechazo al infinito como concepto, debido a que para él, es posible pensar en un infinito que aumente indefinidamente al cual denominó potencial pero es imposible pensar en un infinito realizado o infinito actual, es decir, pensar que en un segmento exista una infinidad es un absurdo. Aunque Aristóteles esgrimió argumentos para el rechazo del infinito actual, éste estableció las bases para la póstuma construcción del infinito, además de lo anterior, a él se le otorga la caracterización del infinito en potencia y en acto, los cuales estableció para realizar críticas a las paradojas de Zenón y la escuela jónica. Éste último que con su método dialectico trató de expresar el absurdo de pensar en el infinito actual, contrario a su objetivo generó las bases para las póstumas construcciones que dieron solución numérica y geométrica a los procesos infinitos y al infinito desde la matemática con las cuatro paradojas denominadas dicotomía, Aquiles, la flecha y estadio en las cuales expresa cómo, pensar en los indivisibles absolutos, esto es, encontrar la partícula original de la cual están compuestas todas las cosas o por ejemplo en el caso del tiempo, pensar que éste está compuesto de instantes cuyo símil geométrico sería la línea está compuesta de puntos, generó el hecho de pensar que la continuidad no puede estar compuesta por elementos discretos ya que de serlo el movimiento sería solo una ilusión a su vez, contrariamente contribuyó a entender la naturaleza del infinito actual en tanto que un segmento contiene una infinidad lo cual para Aristóteles es absurdo y por tanto recurriendo al infinito potencial estableció que un segmento no está compuesto por una infinidad sino que es posible dividirlo indefinidamente atribuyéndole un tinte procedimental el cual no termina.

	Aparte de lo anterior, esta edad se puede también reconocer por el método de exahusión creado por Eudoxo y con el cual se reinterpretó la proporcionalidad y que en medio del rechazo al infinito promovió la comparación entre magnitudes con las cuales se generaron aproximaciones a problemas como el de la cuadratura de la circunferencia o la cuadratura de un segmento parabólico por Arquímedes. Para englobar lo expresado esta edad se caracterizó por la dualidad potencial-actual.
2.3.2. Edad media y renacentista	Esta edad se ve influenciada absolutamente por los pensamientos de Aristóteles en donde prevalece la dualidad potencial-actual aunada a una connotación teológica del infinito atribuyendo éste solo a la gracia de dios e incluso a algo maligno. Pero no todos los pensadores de esta edad estaban de acuerdo con las interpretaciones realizadas sobre los pensamientos de Aristóteles debido a que, otros pensadores aristotélicos como Filopón pensador cristiano de Alejandría criticaron la eternidad absoluta del mundo creado por dios, lo anterior en contra de los argumentos de Aristóteles que generaban contradicciones. A su vez Thabit ibn-Qurra es uno de los primeros pensadores que expresa que un infinito no puede ser mayor que otro y además aceptaba el infinito actual contrario a los argumentos de Aristóteles debido a la perspectiva infinitista que se opuso al absolutismo aristotélico, además de lo anterior, también estipuló argumentos que aterrizaron la forma de tratar el infinito a la naturaleza del mundo analizando éste sumado a la idea de conjunto que este pensador llamaba multiplicidad que lo condujo a reinterpretar la igualdad. En esta misma línea de pensadores que buscaban separarse de los pensamientos aristotélicos se encuentran Hipanus o Pietro Giuliano que llegó a ser papa Juan XXI y que entendía el infinito con dos acepciones denominados categoremático y sincategoremático el primero hace referencia al infinito actual y el segundo al infinito potencial quitando la ambigüedad del término “potencia” así mismo Gregorio de Rímini y Buridán aunque trataron de presentar argumentos en contra de los pensamientos aristotélicos lo único que lograron fue reafirmar el infinito potencial o sincategoremático aunque no se les puede negar el hecho de contribuir a reconocer que no existe cantidad mayor en un infinito potencial. Al igual que los últimos pensadores, en el siglo XIII Ricardo de Middleton esgrimió el primer argumento de que el universo puede expandirse sin límite sin que esto implique la existencia del infinito actual. De lo anterior y con la construcción de la cosmología moderna se generaron las ideas trasgresoras de los pensamientos aristotélicos debido a que, en la cosmología moderna se usaban el infinito y las cantidades infinitesimales en las demostraciones geométricas y aritméticas. Por otro lado y en la misma época Tomás de Aquino esgrimía argumentos en contra del infinito actual negándolo puesto que él argüía que si se pudiesen concebir todos los elementos de un supuesto conjunto de manera que formasen una totalidad actualmente definida, dichos elementos podrían ser contados uno a uno con lo que inevitablemente el conjunto sería finito lo cual es una contradicción aunque, adjudicó el infinito a la omnipresencia de dios expresando que “*dios es infinito, y*

	eterno, e incircunscribible” conduciéndolo a postular dos acepciones de infinito, la primera remisible a la idea de forma y el otro a la idea de materia por tanto para Aquino el infinito del que se encargan los matemáticos corresponde al infinito potencial o a la idea de materia que no es atribuible a dios. Aquino pensaba que el asociar el número con el concepto de medida, casi Platónicamente entendida como criterio de organización demiúrgica del mundo, indujo a éste a concebir el número infinito como noción contradictoria, carente de sentido, inútil y desorientadora para quienquiera que pretendiese captar en la perfección de la forma limitada la insondable perfección de dios. Otros argumentos en contra del infinito actual pero que diferían de las de la época eran los de Bacon quien afirmaba que el infinito matemático no era posible con la lógica ya que era antieuclidiano y por tanto antiaristotélico, así mismo, Guillermo de Occam expresaba que No es incompatible que la parte sea igual o no sea menor que el todo; esto es lo que ocurre siempre que una parte del todo sea infinita. Esto se puede comprobar en cualquier cantidad discreta o en cualquier multiplicidad cuya parte tenga unidades que no sean menores que aquellas contenidas en el todo. Así, el principio de que el todo es mayor que sus partes es válido sólo para cosas compuestas de partes enteras finitas. Otro de los pensadores escolásticos que se diferenció del resto es Duns Scotus que aceptaba la doble naturaleza del infinito en sus acepciones actual y potencial, la construcción con la cual llegó a concluir lo expresado fue a través de un conjunto de circunferencias concéntricas en donde vislumbró que a mayor longitud del radio más parecida era la circunferencia con una línea recta si sólo se vislumbra los arcos sucesivos de éstas, bajo el mismo pensamiento Nicolás de Cusa sugería cómo el infinito actual no podía ser percibido de manera directa en la realidad. Aunque muchos pensadores de la edad media planteaban ciertas críticas a los pensamientos de Aristóteles y aceptaron en ocasiones el infinito actual y el potencial, en el siglo XV fue donde la influencia aristotélica recobró su estatus de absoluto.
2.3.3. Renacimiento	Seguido de lo anterior en el renacimiento se pudo vislumbrar cómo se amplió el espectro del uso de las cantidades infinitesimales para las artes y la geometría algunos representantes de estas proezas son Piero della Francesca, Girolamo Cardano, Leonardo, Luca Valerio, Galileo Galilei, Paul Guldin, Bonaventura Cavalieri y Evangelista Torricelli. De los anteriores cabe resaltar que Galilei fue uno de los cosmólogos y pensadores que reconocieron que dos segmentos de magnitud desigual una mayor que la otra podían hacerse corresponde biunívocamente y a su vez utilizó este criterio para establecer que los números naturales y los cuadrados perfectos de éstos tenían la misma multiplicidad o cantidad de elementos plasmado en el dialogo de Simplicio y Salviati, a pesar de sus deducciones negó el infinito aunque usara la continuidad de un segmento y los infinitesimales en sus construcciones y demostraciones. Un paso importante en la actualización del objeto matemático de infinito que llevó a la siguiente etapa del desarrollo científico fue la construcción del algebra geométrica, gracias a los aportes de Fermat y Descartes entre otros que dentro de la relación algebra-geometría utilizaban implícitamente el concepto de continuidad y la asignación de una cantidad de magnitud a cada punto que conllevaba al desarrollo de sucesiones infinitas debido a que no todas las magnitudes pueden ser medidas como lo vislumbraron en la edad antigua los pitagóricos. Para Descartes el infinito tiene dos acepciones, infinito como atributo de dios e indefinido como magnitudes indefinidas en cantidad o en posibilidad.

	Contrario a Descartes, Pascal parecía defender el infinito actual aseverando que, la unidad añadida al infinito no lo hace mayor; lo finito es aniquilado por lo infinito y se convierte en pura nada; se sabe que existe un infinito pero se ignora su naturaleza. Conocemos la existencia y naturaleza de lo finito porque nosotros mismos somos extensos y finitos pero el infinito tiene extensión como nosotros pero no tiene fronteras por eso no conocemos ni la existencia ni la naturaleza de Dios. A su vez, es relevante resaltar que en esta época es donde se pone en discusión el concepto de conjunto infinito, en ese sentido Descartes aunque sugiere cierta oposición al concepto de conjunto infinito y del infinito actual, en realidad lo que trataba de expresar es que la naturaleza del infinito es contradictoria por esta razón es que las operaciones con conjuntos finitos no son las mismas que las de los conjuntos infinitos.
2.3.4. Edad moderna	Dentro de los grandes pensadores influyentes de la época se encuentra Cauchy, quien postuló que para que existiera el infinito actual, necesariamente éste debía ser finito. En esta época se pudo evidenciar una vinculación del infinito pero restringido a la operatividad o cálculo debido a que, con la invención del análisis infinitesimal se hacía uso implícito del objeto matemático de infinito para dar sentido a las relaciones y operaciones que en esta rama se proponían y que dieron paso a los conceptos de deriva a e integral. Conforme a lo anterior, se puede expresar que el siglo XVII representó un siglo de grandes avances en la ciencia de la cual la ciencia moderna es fruto, es por esta razón que a este siglo se le otorga el título de la revolución científica, que pasó de observar la matemática desde un contexto discreto a una concepción infinita con la aparición de cálculo infinitesimal que al igual que siglos anteriores sustentó posturas divergentes llevando a enfrentamientos a algunos físicos y matemáticos como Newton y Leibniz. Por otro lado en el siglo XIX, Kant al igual que Aristóteles rechazaba el infinito actual ya que desde una postura finitista intuitiva, este tipo de infinito es imperceptible desde la experiencia lo que implica que nunca se puede llegar a alcanzarlo, a su vez Gauss también rechazó el infinito actual arguyendo: *"Protesto contra el uso de una cantidad infinita como una entidad actual; ésta nunca se puede permitir en matemáticas. El infinito es sólo una forma de hablar, cuando en realidad deberíamos hablar de límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente."* (p.63) Como ya se expresó, otro matemático en oposición a la idea de infinito actual fue Cauchy, quien al igual que Galileo no aceptaba la idea de una colección de objetos infinita referenciada en la biyección entre dos segmentos de recta de magnitud desigual, ya que como consecuencia de esto se rechaza el postulado de Euclides de que el todo es mayor que la parte. En contraposición Bernhard Bolzano teólogo y matemático checo, fue el primero en tratar de fundamentar el infinito actual arguyendo que no rayaba con la matemática el considerar la equivalencia entre un conjunto y un subconjunto propio, por esta razón defendió al infinito actual de cuya teoría Dedekind y Cantor hicieron uso para aseverar sus resultados, así mismo es memorable mencionar que a Bolzano se le atribuye el hecho de presentar las bases para la teoría de conjuntos. A finales del siglo XIX Georg Cantor desarrollo una teoría formal sobre el infinito actual, manifestando que los argumentos dados en contra de dicho infinito han sido insensatos, ya que, consideran a los números infinitos como una extensión de los números finitos, omitiendo el hecho de que los números infinitos pueden responder a una aritmética distinta, puesto que según expresa en su obra Grundlagen, los conjuntos infinitos se comportan de forma distinta a como se comportan los conjuntos finitos lo que no implica que los conjuntos sean inconsistentes.

	Dentro de las demostraciones que propuso se encuentra una en contra de la aniquilación de los números finitos por los infinitos, es así como establece la distinción entre ω y ω+1 llegando a establecer que los números finitos pueden ser sumados a los infinitos sin ser absorbidos por éstos últimos, rechazando además otra paradoja de las presentadas por Aristóteles que distinguía entre infinito actual e infinito potencial, llegando a argüir Cantor que no era posible concebir a los números infinitos sin los finitos, estos es, todo infinito potencial supone la existencia de un infinito actual. Como se mencionó anteriormente Cantor tomó como base las ideas expuestas por Bolzano para construir su teoría de los cardinales transfinitos, la principal idea que tuvo relevancia fue la de biyección entre conjuntos, debido a que si se podían hacer corresponder biunívocamente dos conjuntos esto implica que tales conjuntos son equipolentes o que tienen la misma potencia en consecuencia, esta idea de potencia de un conjunto conjugó la idea de número cardinal de un conjunto. Para vislumbrar esta relación entre Bolzano y Cantor se tiene que el primero propuso: Un conjunto no vacío (A) es finito si para algún entero positivo n, (A) es equipolente a {0,1,2,3,…,n}; de otra forma (A) es infinito. Un conjunto (A) es infinito si existe un subconjunto propio B de (A) equipolente a (A); en cualquier otro caso (A) es finito. Por otro lado Cantor y Dedekind tomando esta idea propusieron: Canto (1878): Un conjunto finito es uno cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto todo subconjunto propio tiene una potencia menor, mientras que un conjunto infinito A tiene la misma potencia que algún subconjunto propio de A. (Implícitamente dio estas propiedades cuando demostró que R y R^n tenían la misma potencia). Cantor (1882): Por un conjunto finito entendemos un conjunto (M), el cual surge a partir de un elemento original a través de la adición sucesiva de nuevos elementos de tal forma que el elemento original puede ser obtenido a partir de (M) eliminando sucesivamente los elementos añadidos en el orden reverso. (Esta es la primera definición explícita de un conjunto finito dada por Cantor). Cantor (1883, Grundlagen): Mientras que un conjunto finito siempre retiene el mismo número ordinal, independientemente de la forma en que estén ordenados sus elementos, un conjunto infinito puede ser reordenado de tal forma que tenga más de un ordinal. Dedekind (1882): Un conjunto (A) es Dedekind-infinito si algún subconjunto propio (B) de (A) es equipolente a (A); en cualquier otro caso (A) es Dedekind-finito. (Carta de Dedekind a Cantor, 1882). Cabe aclarar que aunque Cantor y Dedekind consensuaban en algunas ideas, diferían al considerar la correspondencia biyectiva entre conjuntos infinitos, debido a que Dedekind argumentaba que no era suficiente dicha correspondencia para aducir que dos conjuntos infinitos eran equipolentes con respecto a la multiplicidad de sus miembros, en contraste Cantor argumentaba lo contrario, es decir: "*La razón por la cual la definición de Cantor y sus consecuencias han sido aceptadas no es porque estén, ciertamente, más cerca del uso común sino más bien porque son más útiles para la matemática. Aún hoy en día tendemos a pensar que existen más números naturales que números pares.*" (Wang, p. 70). (p. 67)

2.4.Perspectiva formal y estructural

Esta perspectiva hace referencia al carácter formal de los conceptos matemáticos aceptados tanto por la comunidad matemática como por la sociedad laica, en otras palabras, hace referencia al *saber sabio* de donde se extraen parte de estos conceptos para ser vinculados a un currículo o *saber a enseñar*. Dado lo vasto de los diversos desarrollos teóricos, metodológicos, estructurales y filosóficos que se pueden encontrar en libros de texto ya sea para acompañamiento del aprendizaje universitario o escolar, es necesario acotar la gama de libros de los cuales se extraerán las definiciones de los conceptos seleccionados para esta empresa; a su vez, se tendrán en cuenta los contextos seleccionados para desarrollar esta perspectiva.

2.4.1. Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos

Para iniciar con la estructuración de este fenómeno desde lo formal en matemáticas, es necesario presentar una introducción a la teoría de conjuntos ya que es común en la bibliografía científica representar el desde el registro semiótico de la teoría de conjuntos haciendo uso del concepto de función como operador que permite comparar dos conjuntos ya sean discretos o continuos para determinar su numerabilidad o cardinal.

Según Lipschutz (s.f) El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de las matemáticas. Intuitivamente un conjunto es una lista, colección o clases de objetos bien definidos, dichos objetos pueden ser cualesquiera tales como números, personas, letras etc. Conforme a lo anterior, a continuación se presentarán algunos de los conceptos básicos y la notación de la teoría de conjuntos así como también una definición particular del concepto de función, a saber:

Tabla 2 *Aspectos importantes de la teoría de conjuntos*

2.4.1.1. Notación	Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas $A, B, C, D, \dots, Z$, los elementos de un conjunto se suelen representar con letras minúsculas $a, b, c, d, \dots , z$. Al definir un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos se puede utilizar la *forma tabular* en la cual se escriben los elementos del conjunto tal como $P = \{2,4,6,8,10,12, \dots\}$ o una característica común que describa dichos elementos entre tal como $\{x \mid x\ es\ un\ número\ par\}$. Ahora bien si un objeto x está contenido en un conjunto A, esto es, si A contiene x como uno de sus elementos se escribe $x \in A$ donde $\in$ se lee "pertenece" entonces para este caso particular $x \in A = x\ pertenece\ a\ A$; por el contrario, si un objeto x no pertenece a A se escribe $\notin$ que se lee "no pertenece", esto es $x \notin A = x\ no\ pertenece\ a\ A$.
2.4.1.2. Igualdad entre conjuntos	Un conjunto A es igual a un conjunto B si ambos tienen los mismos elementos es decir, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B y viceversa, se denota la igualdad de dos conjuntos con $A = B$.
2.4.1.3. Conjunto vacío	El conjunto vacío es aquel que carece de elementos, a este conjunto también suele sombrársele como *conjunto nulo* además, suele representarse con símbolo $\emptyset$.
2.4.1.4. Conjunto potencia	La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S se llama conjunto potencia de S. A este conjuntos de le designa por 2^S. Si un conjunto S es finito, digamos que S tiene n elementos, entonces el conjunto potencia tendrá 2^n elementos, es por esta razón que se denomina al conjunto potencia de S la clase de los subconjuntos de S.

2.4.1.5. Leyes de las operaciones con conjuntos	**LEYES DE OPERACIONES CON CONJUNTOS** (1.1) $(A')' = A$ (1.2) $\emptyset' = U$ (1.2') $U' = \emptyset$ (1.3) $A - A = \emptyset,\ A - \emptyset = A,\ A - B = A \cap B'$ (1.4) $A \cup \emptyset = A$ (1.4') $A \cap U = A$ (1.5) $A \cup U = U$ (1.5') $A \cap \emptyset = \emptyset$ (1.6) $A \cup A = A$ (1.6') $A \cap A = A$ (1.7) $A \cup A' = U$ (1.7') $A \cap A' = \emptyset$ A = 1 2 3 4 B = 3 4 5 A-B = 1 2 **Leyes asociativas** (1.8) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (1.8') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **Leyes conmutativas** (1.9) $A \cup B = B \cup A$ (1.9') $A \cap B = B \cap A$ **Leyes distributivas** (1.10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (1.10') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **Leyes de De Morgan** (1.11) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (1.11') $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (1.12) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (1.12') $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (Ayres, 2003, p. 5)

Ahora bien, aunque los anteriores conceptos y operaciones permiten operar conjuntos no son suficientes para la construcción del concepto de infinito ya que, para la comparación de conjuntos y la determinación de cardinales es necesario el concepto de función que se definirá a continuación:

Tabla 3 *Concepto de función*

2.4.1.6. Definición de función	Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto B, se dice que esta correspondencia es una función. Denotando esta correspondencia por f, se escribe $f: A \to B$. Que se lee "f es una función de A en B". El conjunto A se llama *dominio de definición* de la función f, y el conjunto B se llama codominio de f. Por otra parte, sí $a \in A$, el elemento de B que le corresponde a a se llama imagen de a y se denota por $f(a)$, que se lee "f de a".
2.4.1.7. Funciones inyectivas	Sea f una aplicación de A en B. Entonces f se dice inyectiva si elementos distintos de B corresponde a elementos distintos de A, es decir, si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas. Dicho brevemente, $f: A \to B$ es inyectiva si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$, o lo que es lo mismo, si $a \neq a'$ implica $f(a) \neq f(a')$.

2.4.1.8. Funciones sobreyectivas	Sea f una aplicación de A en B. El dominio de imágenes $f(A)$ de f es un subconjunto de B, esto es, $f(A) \subset B$. Si $f(A) = B$, esto es, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A, se dice entonces que "f es una función sobreyectiva de A en B" o que f es una función de A sobre B.
2.4.1.9. Función biyectiva	Si una función f de A en B es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva entonces se dice que la función biyectiva.

Establecido el concepto de función y sus clases, a continuación se expondrá la equipotencia de conjuntos discretos y continuos en cuyo proceso se vislumbra el concepto de infinito y el de cardinal de conjuntos, a saber:

Tabla 4 *Conjuntos numerables y no numerables*

2.4.1.10. Conjuntos equipotentes	Parece natural preguntarse si dos conjuntos cualesquiera tienen o no el mismo número de elementos. Para el caso de los conjuntos finitos, basta contar el número de elementos de cada conjunto. Pero cuando se trata de conjuntos infinitos, la respuesta depende de los que se entienda por conjuntos con el mismo número de elementos o, como se dirá en adelante, por conjuntos equipotentes. Antes se pensaba que todos los conjuntos infinitos eran equipotentes, pero la siguiente definición, atribuida al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), revolucionó por completo la teoría de conjuntos.
2.4.1.11. Definición 1	El conjunto A es equipotente al conjunto B, lo que se denota por $A \sim B$ si existe una función $f: A \to B$ inyectiva y sobreyectiva, esto es, biyectiva. La función f define entonces lo que se llama una correspondencia *biunívoca* entre los conjuntos A y B. De acuerdo a esta definición, no es difícil comprender que, en general, dos conjuntos finitos son equipotentes si contienen el mismo número de elementos, y solo entonces. Así, pues, para los conjuntos finitos la Definición 1 corresponde al significado usual de tener dos conjuntos el mismo número de elementos.
2.4.1.12. Definición 2	Un conjunto A es infinito si es equivalente a uno de sus subconjuntos propios. En caso contrario es finito.
2.4.1.13. Teorema 1	La relación entre conjuntos definida por $A \sim B$ es una relación de equivalencia. En efecto: (1) $A \sim A\ para\ todo\ conjunto$, (2) $Si\ A \sim B\ entonces\ B \sim A$ y (3) $Si\ A \sim B\ y\ B \sim C, entonces\ A \sim C$
2.4.1.14. Conjuntos enumerables	Sobre la base ya conocida de los números naturales, $N = \{1,2,3, \dots, n\}$
2.4.1.15. Definición 3	Si un conjunto D es equipotente al conjunto N de los números naturales, se llama enumerable y se dice que tiene cardinal $\aleph_0$ (alef cero).

2.4.1.16. Definición 4	Si un conjunto es finito también se dice enumerable por ser equipotente a un subconjunto de N. Si un subconjunto es infinito y no es equipotente a N se dice no enumerable.
2.4.1.17. Teorema 2	Todo conjunto infinito contiene algún subconjunto enumerable.
2.4.1.18. Teorema 3	Un subconjunto de un conjunto enumerable, o bien es enumerable, o bien es finito, y entonces, por extensión, se dice también enumerable (se pueden contar sus elementos, esto es, enumerarlos).
2.4.1.19. Teorema 4	Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una familia enumerable de conjuntos enumerables disjuntos dos a dos. La unión de los conjuntos $\cup_{i \in N} A_i$ es enumerable.
2.4.1.20. El continuo	No todo conjunto infinito es enumerable. El siguiente teorema presenta un ejemplo particular de extrema importancia.
2.4.1.21. Teorema 5	El intervalo unidad $[0,1]$ No es enumerable.
2.4.1.22. Definición 5	Sea un conjunto A equipotente al intervalo $[0,1]$. Se dice que A tiene la potencia del continuo y su cardinal es c.

Para vislumbrar y profundizar el uso de la teoría de conjuntos para representar y comprender el infinito se recomienda remitirse al ANEXO 1.

2.4.2. Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores

Para desarrollar este contexto, se debe advertir que como el título lo indica se debe definir la divisibilidad infinita o indefinida, la iteración y la influencia de cotas, sin embargo, no existe en la bibliografía formal de la matemática un contenido que se denomine divisibilidad indefinida, no obstante, si se tienen ejemplificaciones dentro de la matemática que dan pie al concepto de divisibilidad indefinida y es por esta razón que para acercarnos a este concepto se presentarán dos ejemplos que lo clarificarán.

A su vez es válido retomar lo expresado por Belmonte (2009) sobre la divisibilidad indefinida, ya que para este autor existen dentro de las investigaciones recopiladas y analizadas por él dos contextos comunes para este concepto que son el geométrico, el numérico y su combinación, por tanto, se retomará esta concepción para expresar lo que aquí se pretende. Lo primero que se presentará es una definición de lo que para esta empresa significará reiteración, a saber:

2.4.2.1. Iteración

Según Braña (s.f) en un documento online de la Universidad Nacional de Colombia denominado *resumen del curso* "*introducción a la geometría fractal* "expone que, una iteración es repetir y volver sobre sí mismo una cierta cantidad de veces, en el caso de los fractales, se iteran fórmulas matemáticas, estas iteraciones se realizan mediante el uso de algoritmos. Por otro lado, según Hott y Gutiérrez (2004) una iteración es la repetición de algo una cantidad infinita de veces, en consecuencia los fractales se generan mediante la iteración de un patrón geométrico establecido como fijo. Las anteriores definiciones conllevan al siguiente concepto:

2.4.2.2. Autosimilaridad

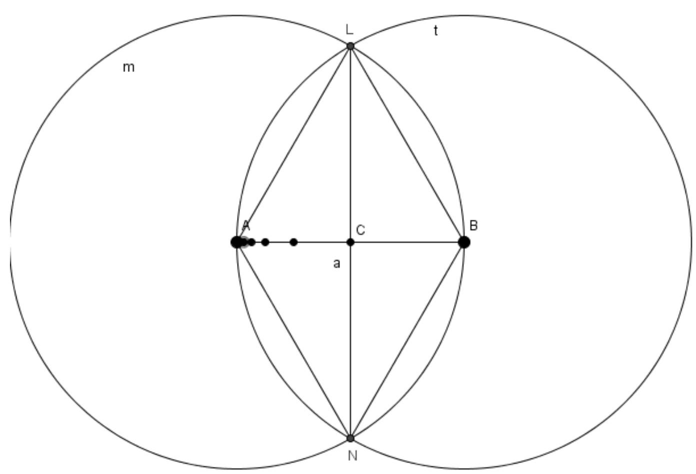
Según Mandelbrot citado en Salazar (2012) se dice que un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque puede presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas. Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se expondrá el concepto de divisibilidad indefinida a través de dos registros semióticos que son, el geométrico y el numérico.

2.4.2.3.Divisibilidad indefinida contexto geométrico

Retomando algo de la historia de las matemáticas se debe mencionar que fue Zenón uno de los primeros pensadores que puso en evidencia la divisibilidad indefinida o infinita a través de sus paradojas, lo que conllevó a una época de rechazo absoluto al infinito actual, el cual puede ser comprendido a través del siguiente ejemplo:

- Dado un segmento cualquiera AB con distancia a, se puede dividir éste a una razón dada indefinidamente:

Figura 4 Divisibilidad indefinida, iteración y autosemejanza



Representación gráfica que encapsula el proceso de divisibilidad indefinida, iteración y autosemejanza.

- Sea AB un segmento de recta cualquiera

- Con centro en A y radio AB trazar una circunferencia t
- Con centro en B y radio BA trazar una circunferencia m
- Llámese L y N a las intersecciones de las circunferencias t y m respectivamente y trácese el segmento LN que interseca a AB en el punto C.

Proposición: El punto C ha dividido el segmento AB en dos segmentos iguales.

Demostración:

- Por la [pro 1, libro I] de Euclides constrúyase un triángulo equilátero ΔALB en consecuencia $Al = LB = AB$ y como los triángulos $\Delta ALB = \Delta ANB$ son congruentes por construcción se tiene que los lados $Al = LB = AB = AN = BN$ son a su vez congruentes.
- Luego por la [pro 4, libro I] de Euclides se tiene que como $AL = LB$ y LC es común sumado a que los ángulos $ALC = CLB$ son iguales y los ángulos $LAC = CBL$ son a su vez iguales entonces, las bases $AC = CB$ son iguales y por tanto los triángulos $\Delta ALC = \Delta CLB$ entonces el punto C ha dividido a AB en dos partes iguales como se quería demostrar.

Lo previo, sumado a la definición de iteración ya expuesta, permite inferir que si se sigue el proceso indefinidamente tomando como centro el punto C y radio $AC = AB$, y, posteriormente se toma el punto D como centro y se itera el proceso ya expuesto se puede dividir el segmento AB en un número infinito de segmentos a una misma razón como se observa en la imagen a continuación:

Figura 5 Representación gráfica de la división de un segmento a una razón dada

Representación gráfica que encapsula el proceso de divisibilidad indefinida.

Para una ejemplificación que puede aclarar lo aquí expuesto remítase al ANEXO 2.

Habiendo presentado el concepto de divisibilidad indefinida o infinita desde un registro semiótico geométrico, a continuación se presentará tal concepto desde un contexto numérico a través de dos conceptos que son facción continua finita y fracción continua infinita, a saber:

2.4.2.4.Fracción continua finita

Una fracción continua es una expresión de la forma siguiente

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}}$$

Si $b_i = 1$ para todo $i \geq 1$, la fracción continua se denomina fracción continua simple y si hay último término, se llama fracción continua simple finita, de lo contrario es una fracción continua simple infinita.

2.4.2.4.1. Teorema 6

Todo número racional puede ser expresado mediante una fracción continua finita simple. Para una mayor comprensión y clarificación de este teorema remítase al ANEXO 3.

2.4.2.5.Fracción continua infinita

De acuerdo a la construcción expuesta en el ANEXO 3 se tiene que la fracción continua infinita respectiva de $\sqrt{2}$ es:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}$$

Lo anterior como consecuencia del algoritmo de Euclides, puesto que el proceso para expresar un número en fracción continua exige que se divida dividendo y residuo hasta obtener un residuo cero, no obstante, en el caso de un número inconmensurable como $\sqrt{2}$ y conforme a lo expuesto en el ANEXO 3 se tiene que el segmento AF cabe enteramente 1 vez en el segmento $AD = \sqrt{2}$, luego su resto es $FD = \sqrt{2} - 1$, éste a su vez cabe enteramente 2 veces en $AF = AC$ cuyo residuo es el segmento $AH = IK = JE = LC$, este segmento LC a su vez cabe dos veces en CE y de acuerdo a la definición de iteración expuesta este proceso se realiza indefinidamente.

Otra forma de generar la fracción continua de $\sqrt{2}$ es la siguiente:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) \; ahora\ dividiendo\ el\ divisor\ 1\ entre \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Lo anterior es extraño debido a que, según el algoritmo de Euclides se espera que los sucesivos residuos sean cada vez menores hasta obtener el residuo cero.

Ahora bien el resultado obtenido también se puede representar de la siguiente forma:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\left(2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\right)}$$

Y como el segundo sumando del denominador de la expresión a la derecha de la igualdad se puede sustituir en un proceso indefinido se tiene:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

Luego sustituyendo

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\ldots}}}}}$$

En conclusión, como la fracción continua que representa a $\sqrt{2}$ es infinita y no tiene elemento máximo, éste, no puede ser expresado como un número racional, esto, se puede complementar con lo que se presenta en el ANEXO 4.

Además de lo expuesto, es necesario incluir y definir otro concepto o más bien propiedad de los números reales para que los números irracionales que no se pueden expresar de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Q}$ y $q \neq 0$ sean incluidos en $\mathbb{R}$ y se genere un dominio continuo, esto es:

2.4.2.6. ***Axiomas de completez***

Sea A un conjunto de números reales, se dice que:

a) Un número real b es una cota superior de A, si para todo x en A, se tiene que $x \leq b$.

b) Un número real c es una cota inferior de A, si para todo x en A, se tiene que $c \leq x$.

c) Un conjunto de números reales es acotado superiormente si tiene por lo menos una cota superior y es acotado inferiormente si tiene por lo menos una cota inferior.

d) Se llama extremo superior o supremo de un conjunto no vacío de número reales a la mínima cota superior de dicho conjunto, en caso de existir, el supremo de un conjunto A, esto es, $Sup\ A = x$.

e) Se llama extremo inferior o ínfimo de un conjunto no vacío de números reales a la máxima cota inferior, en caso de existir, el ínfimo de un conjunto A, esto es, $Inf\ A = x$.

f) Si $y = Sup\ A$ tal que $y \in A$, entonces y se denomina el máximo de A. Si $t = Inf\ A$ tal que $t \in A$, entonces t se denomina el mínimo de A.

Estas propiedades sumadas al concepto de divisibilidad indefinida permiten desarrollar el concepto de número real y están estrechamente relacionadas debido a que se hace uso de sucesiones y series para definir y diferenciar un número racional de un número irracional, un ejemplo de ello se presenta a continuación:

Figura 6 Representación gráfica que define a $\sqrt{2}$

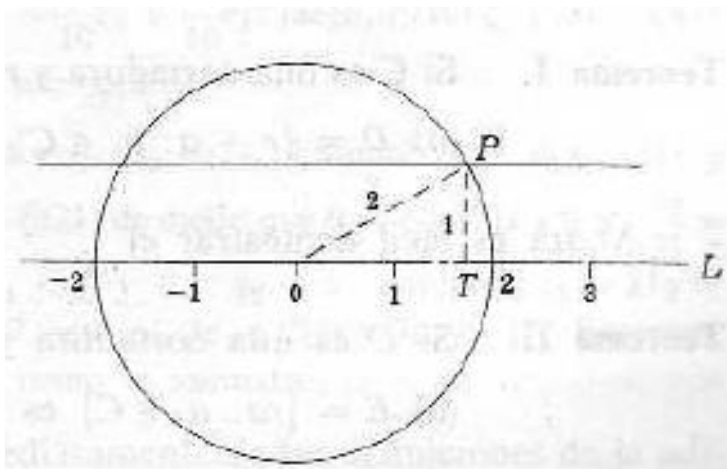


Imagen que expresa cómo $\sqrt{2}$ es un número construible con regla y compás.

Constrúyase una recta racional L, esto es, una recta en la que a cada elemento no nulo de $\mathbb{Q}$ se le asigna un punto a una distancia correspondiente de un origen 0, para lo póstumo llámese punto racional a todo punto al que se le haya asignado un número de $\mathbb{Q}$, de acuerdo a lo que se ha expuesto se sabe que no todo punto en la línea recta es racional, puesto que si P es una de las intersecciones del círculo de centro en 0 y radio 2 unidades con la paralela a L a una unidad por encima de ésta, trácese por P la perpendicular a L que corta en el punto T, entonces como se ha mencionado T no es un punto racional, pues $T^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ extrayendo la raíz $T = \pm\sqrt{3}$, conforme a lo anterior se tiene que el punto T divide a la recta L en dos conjuntos, lo cual presenta dos posibilidades:

a) El punto T que divide a L en dos conjuntos no es racional. Entonces, todo punto racional está en una de las dos partes, pero no en ambas.

b) El punto T que divide a L en dos conjuntos es racional. Entonces, con excepción de T cualquier otro punto racional está en una de las dos partes, pero no, en ambas. Aunque por conveniencia se tiende a ubicar el punto T en el conjunto a la derecha de este punto.

Lo expuesto, da paso al concepto de cortadura de Dedekind que es otra forma de expresar un número irracional a partir de sucesiones de números racionales, a saber:

Por cortadura C en $\mathbb{Q}$ entiéndase un subconjunto no vacío de números racionales con las propiedades siguientes:

1) Si $c \in C$ y $a \in \mathbb{Q}$ con $a < c$, entonces $a \in C$.

2) Para todo $c \in C$ existe $b \in C$ tal que $b > c$.

Estas propiedades en específico permiten diferenciar entre una cortadura racional que tiene un máximo o un mínimo pero no ambos a la vez, pero, cuando la cortadura no es racional, entonces ésta no puede tener elemento máximo ni mínimo ya que sí tiene alguno de los dos sería racional.

2.4.2.7.Sucesión

Una sucesión es un arreglo ordenado de números reales, uno para cada entero positivo. En términos formales una sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y cuyo rango o conjunto de imágenes de la función es un conjunto de números reales, se puede indicar una sucesión como $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó más simple

$\{a_n\}$. A su vez, se puede extender el concepto tomando en el dominio un número mayor o igual a un número prefijado.

Existen dos formas de generar una sucesión infinita, una primera sería listar los primeros términos de una sucesión y hallar un patrón con el cual generar una expresión general para n-ésimo término de ésta a lo que se le denomina fórmula explicita para el n-ésimo término, además de la anterior, también se puede generar una sucesión por medio de una fórmula de recurrencia, por ejemplo:

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 3 \text{ para } n \geq 2$$

Una de las propiedades más importantes de las sucesiones es la convergencia, esto implica en términos coloquiales, que si una sucesión tiende a un número x entonces todos los términos de una sucesión son cada vez más próximos a x conforme $n \in \mathbb{Z}^+$ toma valores cada vez mayores, es decir, conforme n toma valores cada vez mayores la proximidad de la sucesión respecto a x es cada vez menor por tanto:

2.4.2.8.Definición de convergencia

La sucesión $\{a_n\}$ converge a un número L, esto es, el $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si para cada número positivo ε existe un número positivo correspondiente N tal que $n \geq N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$, si no hay un número finito al que converja una sucesión, se dice que ésta diverge o que es divergente, esto es, conforme n toma valores mayores o iguales a N se genera un entorno para el conjuntos de imágenes de la función sucesión, a saber:

Por propiedades del valor absoluto $|a_n - L| < \varepsilon$ se tiene que

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$Luego - \varepsilon < a_n - L \ \ y\ a_n - L < \varepsilon\ desarrollando\ cada\ desigualdad$$

$$sumando\ en\ ambos\ lados\ de\ la\ primera\ desigualdad\ \varepsilon\ entonces$$

$$-\varepsilon + \varepsilon < a_n - L + \varepsilon \; reorganizando\; términos$$

$$\varepsilon - \varepsilon < a_n + \varepsilon - L \; realizando\; las\; operaciones$$

$$0 < a_n + \varepsilon - L \; restando - a_n \; en\; ambos\; lados\; se\; tiene$$

$$-a_n < a_n - a_n + \varepsilon - L \;\; luego$$

$$-a_n < \varepsilon - L \; multiplicando\; en\; ambos\; lados\; por - 1$$

$$(-1)a_n > (-1)(\varepsilon - L)$$

$$a_n > -\varepsilon + L \; reorganizando\; los\; términos$$

$$a_n > L - \varepsilon$$

Para la segunda desigualdad se realiza el mismo procedimiento, a saber:

$$a_n - L < \varepsilon \; sumando\; a\; ambos\; lados\; L\; se\; tiene$$

$$a_n - L + L < \varepsilon + L \; operando\; y\; reorganiando\; términos$$

$$a_n < L + \varepsilon \; luego$$

El entorno que encierra a la sucesión a_n es $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en consecuencia todo valor de la sucesión se encuentra en dicho intervalo. Un ejemplo de lo expuesto se presenta seguidamente:

Sea la sucesión $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n} \; luego \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ pues cuando n tiende a infinito, esto es, cuando $n \to \infty$ los valores de la función sucesión tienden a 0, en consecuencia el n-ésimo término de la sucesión es 0.

Conforme a lo anterior es relevante mencionar que todos los teoremas que se aplican a los límites de funciones de variable real también se pueden aplicar a las sucesiones, esto es:

Figura 7 Teorema A

Teorema A Propiedades de los límites de sucesiones

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes y k una constante. Entonces:

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$;
2. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, siempre que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Propiedades de los límites para sucesiones.
Fuente: (Purcell et al, 2001, p. 431)

Otra característica importante de las sucesiones es su monotonía, debido a que la sucesiones puede hacer alguna de dos cosas, la primera es que conforme n toma valores mayores en $\mathbb{N}$, la sucesión $\{a_n\}$ tiende a infinito y la segunda es que tenga una cota, por tanto tienda hacia un número fijo, para esclarecer:

Figura 8 Teorema D

Teorema D Teorema de la sucesión monótona

Si U es una cota superior para una sucesión no decreciente $\{a_n\}$, entonces la sucesión converge a un límite A que es menor o igual a U. De manera análoga, si L es una cota inferior para una sucesión no creciente $\{b_n\}$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a un límite que es mayor o igual a L.

Este teorema expone el concepto de convergencia de una sucesión a partir del concepto de cota superior e inferior.
Fuente: (Purcell et al, 2001, p. 431)

El anterior teorema se asemeja al teorema de completez de los números reales, el cual establece que la recta real es continua y que por tanto no existen huecos en ella, contrario a la recta racional que aunque densa contiene múltiples huecos, a su vez se debe mencionar que no es necesario prestar atención a los primeros términos de una sucesión para determinar si ésta es monótona o no, sino hay que prestar atención a los términos para cuando $n \geq K$ o para cuando

n es grande, ya que la convergencia o divergencia de una sucesión no depende del carácter de los términos iniciales. Para clarificar lo expuesto remitirse al ANEXO 5.

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, ahora es posible definir el significado de serie en matemáticas, a saber:

Una serie es la suma de una sucesión infinita que se puede expresar como

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Pero como no tiene sentido hablar de la suma de términos infinitos se hace uso de las sucesiones, donde cada término de la sucesión S_n es una suma parcial de los términos de una sucesión a_n, en ese sentido:

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{gathered}$$

Como se puede observar esta nueva sucesión S_n puede o no tener límite, en ese sentido, si el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe como número finito entonces se le da el nombre de suma de la serie infinita $\sum a_n$. Para complementar lo expuesto remitirse al ANEXO 6.

2.5.Perspectiva representacional

De acuerdo con las investigaciones teóricas de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011), los registros semióticos que comúnmente se utilizan para representar el objeto matemático de infinito son el numérico, el algebraico y el geométrico, pero, conforme a la perspectiva anterior se debe incluir a su vez el registro semiótico de la teoría de conjuntos y del concepto de función desde la notación de Euler, puesto que una constante que se vislumbra en los contextos y conceptos expuestos es que en su mayoría hacen uso del concepto y la notación de función para explicar y modelar el infinito en matemáticas, lo cual se conecta de forma acertada con lo propuesto en los referentes educativos curriculares colombianos debido a que, un concepto que se vuelve fundamental desde el grado noveno hasta el undécimo que hace parte del corpus seleccionado para el póstumo análisis de contenido es el de función, en donde se vinculan todos los conceptos y registros expuestos en la perspectiva anterior, para especificar se tiene que los registros recurrentes y coherentes a las escogencias de esta monografía son:

- ✓ Numérico: Hace referencia al registro semiótico utilizado para cada uno de los conjuntos numéricos convencionales $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Desde la propuesta del MEN (2006) Alude a las actividades centradas en el uso y significados de los números y la numeración, la comprensión y significado de las operaciones y relaciones entre los números sumado al desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.
- ✓ Geométrico: Desde la propuesta del MEN (2006) es el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se manipulan y construyen las representaciones de los objetos mentales del espacio, sus relaciones, transformaciones y sus traducciones materiales. Los sistemas geométricos contemplan tres aspectos, los elementos de que constan, las operaciones y las transformaciones con las que se combinan, y, por último, las relaciones o nexos entre éstos; los puntos, las líneas rectas y curvas, regiones planas, curvas limitadas e ilimitadas, cuerpos sólidos, huecos limitados e ilimitados son elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales.
- ✓ Algebraico: Desde lo propuesto por el MEN (2006) tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos que se puede representar a través de sistemas simbólicos, verbales, icónicos, gráficos o algebraicos, cabe resaltar, este pensamiento tiene la particularidad de que

conjuga en el proceso de enseñanza-aprendizaje los distintos pensamientos y sus sistemas. Uno de los propósitos de promover este pensamiento en la educación básica alude a la construcción de diversos caminos y abordajes significativos para el entendimiento sumado al uso de las funciones y sus sistemas analíticos contribuyendo a dotarlas de sentido para una comprensión póstuma en la educación Media del cálculo diferencial e integral.

- ✓ Semiótica de la función desde la escritura de Euler: Como se expresó anteriormente para la equivalencia y comparación de conjuntos discretos y continuos un concepto fundamental es el de función, en ese sentido se escogió la notación de Euler porque permite reconocer desde semiótica identificar la relación entre dos conjuntos ya sea discretos o continuos.
- ✓ Semiótica de la teoría de conjuntos: Según lo expuesto por Arrieche & Godino (s.f) expresan que aunque no hay diversos estudios que aseguren la prioridad e importancia de la enseñanza de la teoría de conjuntos entre tanto si expresan que tiene una funcionalidad importante para acceder a objetos matemáticos más complejos que en este caso particular sería el objeto matemático de infinito.
- ✓ Semiótica del cálculo diferencial en particular desde la teoría de límites: Como lo expresa Neira (2012) en el cálculo intervienen diferentes registros semióticos, los cuales, obstaculizan o facilitan la comprensión de algún concepto de cálculo y de allí surge la importancia por la reificación de los conceptos o de asociarle variedad de registros a un concepto para complementar. En ese sentido, para este caso específico del límite se tiene que se pueden usar tanto tablas de doble entrada como registros semióticos geométricos y numéricos sumado al algebraico que ya se definieron.

Habiendo presentado lo necesario para este marco teórico, lo que se realizará a continuación es el desarrollo de la metodología que está compuesta de cuatro fases encaminadas a la realización del análisis de contenido con el objetivo de brindar una posible respuesta a la pregunta de investigación coherente a los resultados obtenidos al final del mismo.

3. METODOLOGIA

A fin de obtener información pertinente, fiable y necesaria para la adecuada aproximación al problema de investigación aquí planteado, se ha decidido acogerse a la mirada investigativa del análisis de contenido, supuesto este, como un tipo de análisis propio del análisis didáctico.

Desde lo que expresa Rico (2013) el análisis de contenido es:

"... un método para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. Su origen y antecedentes proceden del trabajo de censores y del estudio hermenéutico de textos (Fernández-Cano, 2010). La técnica del análisis de contenido está destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias plausibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto (Krippendorff, 1990)." (p. 6).

Por su parte para Gómez (2001):

"En este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permite identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por sub estructuras matemáticas contenidos en la estructura anterior." (p. 2)

Su método consiste en técnicas cuyo propósito es analizar la naturaleza del mensaje-discurso, cuyo el objetivo central, es develar su estructura interna a partir de estudiar su contenido semántico. En educación matemática, se utiliza para establecer y estudiar la diversidad de significados de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en el contexto educativo, como lo pueden ser el currículo de matemáticas, libros de texto, el discurso del profesor o estudiante etc.

Con base en las anteriores consideraciones, una variante de este método se centra en establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procesos basados en la reflexión curricular y en un sistema establecido de categorías didácticas centradas en los contenidos matemáticos escolares, esto es:

> *"Esta modalidad del análisis de contenido en educación matemática se propone aportar al profesor conocimientos y capacidades para diseñar y evaluar textos de matemáticas, así como criterios para su ajuste a un sistema propio de categorías. Su finalidad es proporcionar principios para atender a la estructura interna de la matemática escolar en los textos, que se elaboran para su implementación durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, y también para evaluar las producciones recogidas en términos de las expectativas enunciadas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Estos documentos muestran distintas organizaciones de los contenidos matemáticos escolares."* (Rico, 2013, p. 9).

El análisis de contenido según Rico (2013) trabaja con la dimensión regresiva y la dimensión reductora, debido a que trata de descomponer el contenido en sus unidades más simples utilizando de modo sistemático la determinación de temas y la identificación de categorías. Este método aplicado a la investigación educativa contribuye a descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa e inferir significados interpretativos en un texto.

Conforme a lo anterior, a continuación se presentarán cuatro fases que servirán de directriz para el desarrollo del análisis de contenido coherente con las dimensiones regresiva y reductora expuestas anteriormente que permitirán, la obtención de resultados para dar una posible respuesta a la pregunta planteada en esta pesquisa investigativa, a saber:

- **Fase 1: Construcción del momento lógico y marco investigativo**
  - Delimitar un corpus de contenido a analizar.

    En esta primera fase se concretarán los documentos que se analizarán, presentados en el continuo comportamental del movimiento curricular gestado desde 1998 en Colombia, tomando aquellos textos que, por solidez y acción de uso y frecuencia serán tomados para el análisis.
- **Fase 2: Descripción de las variables y fenómenos**
  - Concretar la unidad de análisis.

    Se busca establecer cuáles son las variables que se proponen en el objeto matemático infinito desde los referentes legales y cómo se presentan los elementos constitutivos del mismo, desde la formalización allí propuesta.
  - Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.

    En esta segunda fase se seleccionará y ubicará las unidades de análisis en el corpus del contenido, concretado en el punto anterior. Se pretende en este punto localizar los aspectos puntuales que emergen de los referentes y formalizar las hipótesis de acción que se contrastarán con las formalizaciones encontradas. Asimismo en este apartado la investigación debe desechar y puntualizar en los apartes que presentan grados de significación relevantes para el problema de investigación.

- **Fase 3: Construcción de marcos conceptuales de referencia**
    - Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas.
    - Codificar y cuantificar

      Mediante frecuencias o rangos, las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado de forma deductiva o inductiva. Cada unidad pertenecerá, de forma exclusiva, a una categoría. En esta fase se determinarán las categorías de análisis de acuerdo al marco teórico.
- **Análisis del Corpus y Resultados**
  - Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas considerando sus unidades de análisis adscritas.
  - Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes.

    En esta fase de acuerdo al marco teórico y las categorías de análisis que se establecen a través de éste, se espera que los resultados del análisis de contenido permitan reconocer e identificar el grado de explicitación, tipologías y fenómenos asociados al objeto matemático infinito, toda vez que se tiene el entramaje requerido tanto conceptual como metodológicamente.

3.1. Desarrollo metodológico

3.1.1. Fase 1: Construcción del momento lógico y marco investigativo

3.1.1.1. Delimitar un corpus de contenido a analizar

Como se ha expresado en el planteamiento del problema, esta monografía se inserta en el transito del *saber a enseñar* en *saber didáctizado*, esto suscita una relación docente-currículo que en términos del quehacer del docente implica como lo menciona Rico (1997), un primer momento en la construcción de planeaciones de clase, esto es, el docente se remite a los referentes educativos curriculares para conjugar coherencia entre el *saber sabio*, el *saber a enseñar* y el *saber didáctizado* que se evoca en una planeación adaptada a un grupo de aprendizaje para ser desarrollada posteriormente en un aula de clases.

Debido a la gama de documentos educativos curriculares colombianos existentes, se hace necesario acotar y especificar aquellos que fueron seleccionados para esta empresa que serán el corpus para el póstumo análisis de contenido, a saber:

- Estándares básicos de competencias para el área de matemáticas (EBCM) (2006)
- Derechos básicos de aprendizaje para el área de matemáticas (DBAM) (2015)

Conforme a esta escogencia, es válido resaltar que en términos de coherencia, los referentes curriculares educativos colombianos seleccionados mencionan que su construcción se basó en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas que vieron la luz en 1998, en consecuencia, se infiere teóricamente que al realizar el análisis de contenido del corpus seleccionado a su vez se están analizando algunos aspectos de los lineamientos curriculares para el área de matemáticas.

En conformidad al desarrollo, a continuación se realizará una presentación del corpus seleccionado con el objetivo de presentar su propósito y estructura. De acuerdo a lo que sugiere Gómez (2014), en la educación colombiana se ha dilucidado una búsqueda por unos referentes educativos curriculares que apunten a la concreción del *saber a enseñar* en las escuelas, uno de los primeros documentos educativos que marcaron el cambio educativo, fueron los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, cuyo objetivo se centra en la vinculación de una naturaleza de las matemáticas diferente a la tradicional vinculando su carácter social y epistemológico, pues su propósito central es generar reflexión a partir de la inclusión de procesos generales, de desarrollos de pensamientos y sistemas asociados, para esclarecer:

> *"Los lineamientos buscan fomentar el estudio de la fundamentación pedagógica de las disciplinas, el intercambio de experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales. Los mejores lineamientos serán aquellos que propicien la creatividad, el trabajo solidario en los microcentros o grupos de estudio, el incremento de la autonomía y fomenten en la escuela la investigación, la innovación y la mejor formación de los colombianos."* (MEN, 1998, p. 3).

Sin embargo, aunque estos lineamientos representaron un avance para el mejoramiento de la educación colombiana, no tienen un carácter explícito en la designación de saberes escolares a ser enseñados, en consecuencia, fue necesario un aterrizaje de tales procesos y de tales pensamientos a objetos susceptibles de ser enseñados-aprendidos en un estudio que involucrara realidades escolares como los grados, los ciclos y el esquema contemporáneo en el que se movilizaban los docentes.

A su vez, otro antecedente que influyó en la construcción de tal aterrizaje fueron los resultados insuficientes y divergentes de las evaluaciones internacionales aunado a lo declarado en La Comisión Internacional sobre Educación, Equidad y Competitividad Económica en América Latina y el Caribe que dio como resultado los estándares básicos de competencias para las áreas de matemáticas, lengua castellana, ciencias naturales y educación ambiental en un primer momento, ya que póstumamente se normalizó para las diferentes áreas del conocimiento ALTABLERO (2002).

Estos estándares básicos de competencias para el área de matemáticas (EBCM) indican unos mínimos que deben saber y saber hacer los estudiantes, es decir, son metas a alcanzar en cada ciclo escolar al finalizar éste, lo descrito se sustenta en uno de los propósitos de este documento el cual es:

"… dar mayor concreción a los lineamientos expedidos, de manera que las instituciones escolares cuenten con una información común para formular sus planes de estudio, respetando su autonomía." (ALTABLERO, 2002).

Para especificar surge la siguiente pregunta:

3.1.1.1.1. ¿Qué son los estándares?

Según ALTABLERO (2002) un estándar en educación determina lo mínimo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer para el ejercicio de la ciudadanía, el trabajo y la realización personal. El estándar es una meta y una medida, es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel, también expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse, para esclarecer:

- Son formulaciones claras, precisas y breves, expresadas en una estructura común a todas las disciplinas o áreas, de manera que todos los integrantes de la comunidad educativa los entiendan.
- Son formulaciones que describen conocimientos y habilidades que los estudiantes deben lograr.
- Deben ser elaborados de manera rigurosa, con formulaciones universales y estar a la par con los mejores estándares internacionales.
- Deben ser observables, evaluables y medibles e ir de la mano con los procesos de evaluación.

3.1.1.1.2. ¿Para qué los estándares?

Según (ALTABLERO, 2002) los (EBCM):

- Son el punto de partida para que las instituciones escolares, los municipios, las localidades y regiones definan su propio marco de trabajo curricular.
- Aseguran que todas las escuelas ofrezcan educación similar y de alta calidad, lo que permite la igualdad de oportunidades educativas para todos los estudiantes.
- Permiten especificar requisitos para la promoción a grados y niveles siguientes, así como para la graduación a la finalización de la educación básica o media.
- Contribuyen al diseño de pruebas de logros académicos estandarizadas y comparables.
- Son la base para diseñar estrategias y programas de formación y capacitación de docentes, a partir de criterios y expectativas compartidas.

3.1.1.1.3. ¿Por qué los estándares?

ALTABLERO (2002) manifiesta que para:

- El mejoramiento de la calidad de la educación debe partir del supuesto de que todos los niños y las niñas pueden aprender con niveles muy altos de logros o resultados. El solo hecho de elevar las expectativas de aprendizaje, puede mejorar el desempeño de los estudiantes.
- La necesidad de garantizar la equidad. Los estándares son el marco a partir del cual las instituciones escolares, las autoridades educativas locales o regionales y el nivel central, representado por el Ministerio o las Secretarías de Educación, deben organizar y definir sus planes, programas y actividades en función de lograr que todos los estudiantes aprendan lo que tienen que aprender, con alto nivel de calidad.

La democratización de la educación, pues el contar con estándares claros, precisos, transparentes y conocidos por docentes, directivos, decisores de política, padres de familia y estudiantes, permite que sepan hacia dónde deben dirigir sus esfuerzos y facilita el proceso de rendición de cuentas sobre los resultados alcanzados.

3.1.1.1.4. Sobre la estructura de los (EBCM)

Los estándares de competencias para el área de matemáticas tienen en cuenta los procesos generales y los tipos de pensamiento matemático para tal organización, en ese sentido, la coherencia horizontal alude a la relación entre los tipos de pensamiento matemático y sus diferentes sistemas, en otras palabras, relaciona a un estándar con los otros estándares de los diferentes tipos de pensamiento matemático dentro del mismo conjunto de grados.

En coherencia se presentan cinco columnas para cada uno de los cinco ciclos, esto es, primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, décimo a undécimo, cabe aclarar, en conformidad a estos ciclos, los estándares de competencia no pueden entenderse como absolutos, fijos e individuales, pues sobre cada estándar no se debe desarrollar una clase, al contrario, varios estándares deben ser vinculados a una situación problema donde también se combinen diferentes tipos de pensamiento matemáticos y sus particulares sistemas, por esta razón es necesario entender al estándar no como una meta a lograrse en un tiempo determinado sino que, debe entenderse como un identificador de nivel de avance en procesos graduales que incluso no terminan en el conjunto de ciclos a los que van dirigidos.

Por otro lado, la coherencia vertical alude al nivel de complejidad que van adquiriendo los estándares en un tipo de pensamiento matemático conforme a los ciclos en procesos graduales de avance, en otras palabras es la relación de un estándar con los otros estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados.

Respecto al aumento de complejidad en los estándares, se tiene que:

“A medida que los estudiantes avanzan en la Educación Básica y Media, la complejidad conceptual de sus conocimientos no se evidencia sólo en los aspectos formales de la disciplina que ellos pueden expresar verbalmente o por escrito, sino también en el tipo de procesos generales de la actividad matemática que pueden realizar con solvencia, eficacia y actitud positiva. A medida que los estudiantes vayan disponiendo de mejores comprensiones conceptuales, van a poder desarrollar procesos de mayor complejidad y estarán en capacidad de enfrentar el tratamiento de situaciones de mayor nivel de abstracción. Así, los contextos y situaciones dentro de los cuales los estudiantes pueden desplegar su actividad matemática pueden y deben involucrar mayores niveles de complejidad y ofrecerles desafíos cada vez más retadores, para darles oportunidad de avanzar en los niveles de competencia matemática señalados en los estándares del conjunto de grados respectivo y, ojalá, para superarlos ampliamente.” (MEN, 2006, p. 78).

Además:

“Se trata, entonces, de comprender que la organización curricular de cada institución, en coherencia con su PEI, debe buscar el desarrollo de un trabajo integrado en los distintos pensamientos, más que el progreso en cada uno de ellos independientemente de los demás. Esto se logra si el desarrollo del trabajo en el aula se piensa desde las situaciones de aprendizaje –y en particular desde las situaciones problema– más que desde los contenidos, para aprovechar de esta forma en cada situación las posibilidades de relacionar los distintos estándares y los diferentes tipos de pensamiento matemático.” (MEN, 2006, p. 77).

La forma como están construidos los estándares es:

Figura 9 Sobre la composición de los EBCM

Esta imagen da cuenta sobre cómo están construidos los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas.

Fuente: (MEN, 2006, p. 77)

“*Esta propuesta requiere reconocer que si bien el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales. El tejido de estos hilos requiere aceptar, tal como se ha descrito en cada pensamiento, que un concepto matemático admite diversas aproximaciones”* (MEN, 2006, p. 78).

Aunque los (EBCM) trataron de hacer concreción sobre algunos aspectos de los lineamientos curriculares, también contemplaron para los docentes algunas ambigüedades, debido a que no hubo una evidente claridad sobre el *saber a enseñar* en las aulas, lo anterior se puede evidenciar en este proceso de concreción sobre los saberes matemáticos a ser enseñados ya que en la actualidad se sigue presentando, es así como se hizo necesario y se gestionó desde el Ministerio de Educación Nacional la realización y determinación de un nuevo referente educativo curricular denominado Derechos Básicos de Aprendizaje (DBAM), a saber:

“Los derechos básicos de aprendizaje se estructuran guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso los estudiantes alcancen los (EBC) propuestos por cada grupo de grados. Sin embargo, es importante tener en cuenta que

los (DBA) por si solos no constituyen una propuesta curricular y estos deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos establecidos en cada establecimiento educativo, en el marco de los proyectos educativos institucionales materializados en los planes de área y de aula" (MEN, 2015, p. 2).

3.1.1.1.5. Pero ¿qué son los DBA?

Son un conjunto de saberes y habilidades acerca de lo fundamental que cada estudiante debe aprender al finalizar un grado en un área específica del conocimiento, en este caso de las matemáticas, para esclarecer los (DBAM):

- Son una propuesta articulada de aprendizajes para alcanzar al finalizar cada grado.
- Dan cuenta del desarrollo progresivo de algunos conceptos a lo largo de los grados
- Son referentes para la planeación de la clase. De esta manera, las actividades en el aula pueden e idealmente deben, involucrar varios DBA de un grado, para que estos se alcancen gradualmente a lo largo del año.
- Cada DBA NO corresponde a una actividad ni a una clase.
- Varias actividades permiten el desarrollo de los diferentes DBA.
- Aunque tengan una numeración, los DBA no están organizados en un orden particular. No necesariamente el estudiante debe desarrollar el número 3 antes del número 4. Es decir que no son secuenciales. (MEN, 2015, pág. 2-3).

Para sustentar lo aducido, es relevante exponer el párrafo último sobre ¿Qué son los DBA? del documento, con el propósito de hacer énfasis en este proceso de concreción de los saberes para el área de matemáticas que sigue generando discusiones:

“Por lo anterior, los DBA son un paso adelante en el desarrollo de referentes claros, concretos y específicos que apoyen los procesos de planeación, enseñanza y gestión de aula en general” (MEN, 2015, p. 3).

3.1.1.1.6. Sobre la estructura de los (DBAM)

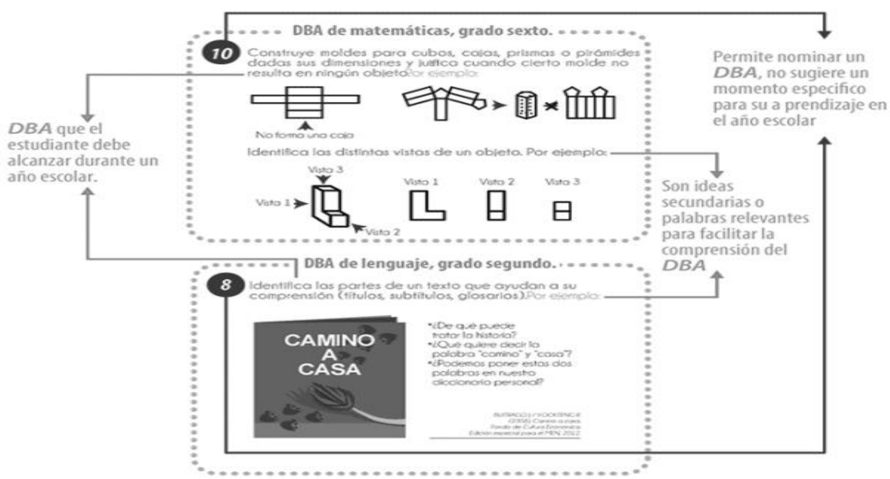
Según el MEN (2015), cada derecho básico de aprendizaje para el área de matemáticas está estructurado de la siguiente forma:

a) Un enunciado enumerado del DBA que se espera alcance el estudiante. Este se escribe en un color característico.

b) Unas ideas secundarias o palabras relevantes que dan significado al DBA y que se resaltan en negrilla.

c) El ejemplo del DBA busca ampliar la comprensión del enunciado. Estos NO se plantean como actividades que los docentes deben realizar en sus aulas de clase.

Figura 10 Explicación grafica de un derecho básico de aprendizaje



Representación gráfica que clarifica cómo se debe leer un DBA y cuáles son las partes que lo componen.

Fuente: (MEN, 2015, p. 4)

3.1.1.1.7. Sobre la relación entre los (EBCM) y los (DBAM)

Como ya se había mencionado apartados atrás, los estándares proponen un horizonte que responde a las necesidades formativas que las escuelas deben suplir en los estudiantes al finalizar cada grupo de grados para alcanzar el nivel de calidad esperado en el mismo, en ese sentido, los estándares son una expectativa de aprendizaje para desarrollarse en un lapso largo de tiempo de dos a tres años aproximadamente, por lo cual deben guardar cierta generalidad impidiendo referir de forma concreta un saber específico, en consecuencia, los docentes han decidido los contenidos que deben aprender los estudiantes, dichos contenidos varían dependiendo de la formación del docente y por tanto no responden a los mismos estándares.

Como respuesta a lo anterior, los (DBAM) complementan a los (EBCM) debido a que son unos referentes concretos que permiten identificar una ruta de aprendizaje que avanza en nivel de complejidad creciente durante cada año que compone el ciclo escolar para que al final de éste se alcancen los estándares propuestos, aunque cabe aclarar, varios (DBAM) pueden apuntar al mismo estándar y a su vez éstos no agotan los contenidos implícitos en los (EBCM).

3.1.2. Fase 2: Descripción de las variables y fenómenos

3.1.2.1.Concretar la unidad de análisis

Como se expresó en la (Fase 1) el corpus que se escogió fueron los (DBAM) y los (EBCM), en éstos a su vez, se seleccionó la unidad de análisis ciclo décimo-undécimo atendiendo a las recomendaciones didácticas e inferencias recurrentes de las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático infinito recopiladas en las investigaciones de Belmonte (2009) y Arrigo et al (1997), donde se exhiben argumentos que muestran cómo con el avanzar de la edad y del desarrollo cognitivo existe mayor posibilidad de comprender el objeto infinito matemático.

En coherencia a lo descrito, es válido expresar que tanto Belmonte (2009) como Arrigo et al (2001) presentan teorías y argumentos que dan a conocer la imposibilidad de vincular el objeto infinito en la matemática escolar, uno de ellos hace referencia a la independencia de la comprensión del objeto respecto de la edad, del grado de escolaridad y de la intervención en la enseñanza ya que, las intuiciones primarias que se evocan al razonar sobre cuestiones sobre el infinito matemático no permiten la adquisición de éste, por su parte Arrigo et al (2011), asevera que independientemente de la intervención en la enseñanza la adquisición del infinito matemático sólo la logran pequeños grupos de personas.

En contraposición a estos argumentos de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) se presentan argumentos, de otros autores, que enaltecen la validez de vincular en la matemática escolar el infinito y algunos que sustentan el porqué de la unidad de análisis que se escogió, a saber:

Tabla 5 *Argumentos para la vinculación del infinito en la educación básica y media*

AUTOR	ARGUMENTO ESGRIMIDO
Arrigo y D'Amore (1999)	Manifiestan que para superar un obstáculo se requiere de un nuevo aprendizaje, pero esto no sucede con frecuencia en la formación escolar ni tampoco se favorece en la formación superior. En esta investigación a su vez se expone que las dificultades para adquirir el objeto de infinito en matemáticas no solo dependen de los obstáculos epistemológicos sino también de los obstáculos didácticos.
Núñez (1991)	Investiga la problemática de la subdivisión cada vez menor en magnitud del recorrido de Aquiles con estudiante de 8-14 años, de lo cual se pudo evidenciar que la similaridad de las respuestas es una señal de que la comprensión del objeto no cambia con la edad ni con las competencias escolares de los grados respectivos a cada edad, a su vez da cabida a aseverar que el objeto infinito ejerce poca influencia en el aprendizaje de la matemática si éste no es específico.

Tsamir (1999)	La ampliación de conocimientos en la enseñanza mediante procesos de generalización siempre ha supuesto el origen de no pocos problemas en este caso específico respecto a la generalización de comparar conjuntos finitos a conjuntos infinitos.
Tirosh et al (1985)	Resaltan que un 70% de los estudiantes se hizo consciente de sus propios conflictos intuitivos relacionados con el objeto matemático infinito actual gracias a la instrucción realizada donde aprendieron nociones básicas de la teoría de conjuntos y procedimientos adecuados para establecer la equivalencia de conjuntos infinitos.
Jirotková & Littler (2003, 2004)	Las autoras expresan que hay evidencia de que el enfoque de un estudiante sobre el infinito difiere según el contexto en el que se exprese, en consecuencia no se puede aseverar que las comprensión de los estudiantes es incorrecta, esto implica que los estudiantes se encuentran en un cierto estadio de desarrollo y que por tanto se debe pensar en qué otras actividades se deberían propiciar para que la red cognitiva de estos estudiantes alcance mayor calidad
Monaghan (2001)	Cree muy improbable que estudiantes sin entrenamiento en estos tópicos puedan tener imágenes conceptuales de números infinitos que se correspondan con las relaciones inherentes al análisis no estándar.
Sbaragli (2004)	Expresa que el infinito matemático es, en general, un objeto desconocido, tanto en su sentido epistemológico como cognitivo, que solo se manipula mediante la intuición y que normalmente se reduce a una extensión banal de lo finito. Esto puede ser debido tanto a los obstáculos epistemológicos propios de esta noción como a una formación sesgada sobre este tópico. Todo ello conduce a la creación de modelos intuitivos que desembocaran en las ideas falsas que se transmiten.
Fischbein et al (1979)	Expresa que la matemática escolar por lo común incentiva el pensamiento lógico, esto es, los esquemas finitistas de la forma natural del pensamiento, en consecuencia las respuestas finitistas surgen y prevalecen en situaciones conflictivas a problemas no estándar sobre conjuntos infinitos por ausencia o exceso de conocimiento matemático desde lo finitista.

3.1.2.2. Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.

En esta segunda fase se ubicarán las unidades de análisis en el *corpus* del contenido concretado en el punto anterior. Se pretende en este punto localizar los aspectos puntuales que emergen de los referentes y formalizar las hipótesis de acción que se contrastarán con las formalizaciones encontradas. Asimismo, en este apartado la investigación debe desechar y puntualizar en los apartes que presentan grados de significación relevantes para el problema de investigación.

Habiendo establecido que la unidad de análisis de los (EBCM) son los estándares para el ciclo décimo-undécimo, se debe mencionar que éstos se encuentran ubicados en las páginas (88-89) del documento propuesto por la MEN (2006). En esta unidad de análisis se tendrá en cuenta los cinco tipos de pensamiento matemático y los cinco procesos generales expuestos en la (Fase 1) debido a que con la póstuma definición de categorías de análisis en la (Fase 3) se realizará el proceso de regresión y reducción que expone Rico (2013) propio del análisis de contenido, sin embargo, no se tendrá en cuenta la coherencia vertical ni horizontal ya que, el propósito de esta monografía es develar la presencia del objeto matemático infinito en los referentes curriculares más no es la coherencia que se guarda de este objeto en los mismos.

Conforme lo anterior, el otro elemento del corpus o (DBAM) tiene como unidad de análisis los DBA del grado décimo y undécimo que se encuentran ubicados en las páginas (85-94) del documento propuesto por el MEN (2015). De esta unidad de análisis cabe resaltar no se tendrán en cuenta las ideas secundarias ni los ejemplos, puesto que el enunciado debe encerrar a ambos, en consecuencia, solo se tendrán en cuenta los enunciados para el proceso de regresión y reducción del posterior análisis de contenido.

3.1.3. Fase 3: Construcción de marcos conceptuales de referencia

3.1.3.1. Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas.

Para esta primera parte de esta (Fase 3), se tendrá en cuenta lo expuesto en el marco teórico respecto a las recomendaciones didácticas frente a la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático infinito así como también las escogencias respecto a los contextos con los cuales comúnmente se enseña-aprende el objeto de infinito desde la matemática escolar, para rememorar, tales contextos son la comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos y, divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas inferiores y superiores que como ya se había mencionado harán las veces de categorías generales de análisis sobre las cuales se impondrán niveles, códigos y objetivos posibles de referencia.

Para la construcción de niveles para cada categoría (contexto), una lectura de los referentes curriculares colombianos permitió vislumbrar que tanto los (EBCM) como los (DBAM) responden a objetivos mínimos para la educación básica y media que deben alcanzar los estudiantes en la clase de matemáticas a lo largo del año escolar, es por esta razón que para el planteamiento y definición de categorías de análisis es prudente realizar una caracterización de los objetivos por niveles a través de la apuesta teórica de Penalva & Llinares (2011) quienes presentan una caracterización de las tareas matemáticas conforme a su demanda cognitiva.

Aunque la apuesta teórica de estos autores no está encaminada principalmente hacia los objetivos de aprendizaje, por lo pronto, exponen la significativa relacionan entre las tareas, actividades y los objetivos de aprendizaje ya que, para Penalva & Llinares (2011) al igual que para Gómez (2001) uno de los elementos más importantes de las planeaciones de clase y de las tareas son los objetivos ya que, es a partir de estos que las tareas se encaminan hacia el aprendizaje de algún concepto, objeto o algoritmo, para esclarecer, no todos los objetivos apuntan a las mismas actividades y mucho menos invocan el mismo tipo de procedimientos y aprendizajes, esto, es a lo que los autores mencionados denominan demanda cognitiva.

3.1.3.1.1. La demanda cognitiva de una tarea

Conforme a lo expresado, se debe resaltar que los objetivos de aprendizaje aunque no limitan la variedad de procedimientos para resolver una tarea por parte del resolutor, no obstante, sí guían tales procedimientos hacia lo que el objetivo pretende por tanto, dependiendo del objetivo propuesto para una tarea, se generan cierto tipo de procedimientos que estimulan particulares actividades cognitivas, en consecuencia, se entiende por demanda cognitiva el nivel de los procedimientos y acciones cognitivas que su resolución exige al resolutor, para aclarar lo manifestado se retomará un ejemplo expuesto por Penalva & Llinares (2011):

- ✓ Si el objetivo es aumentar la habilidad y eficacia de los educandos en rememorar hechos básicos, definiciones y reglas (recuperarlos de la memoria), entonces tareas apropiadas pueden ser actividades que estén centradas en la memorización.

Si el objetivo es aumentar la rapidez y la exactitud de los estudiantes en resolver problemas rutinarios, entonces pueden ser apropiadas actividades centradas en el uso de procedimientos sin necesidad de poseer un (sentido conceptual) de los mismos.

- ✓ Si el objetivo es que los estudiantes se impliquen en formas de razonamiento más complejas y desarrollar estrategias de comunicación, es necesario proponer otro tipo de tareas. (p. 31).

Como se puede observar en el ejemplo, no todos los objetivos producen el mismo tipo de procedimientos y acciones cognitivas, de esta manera se hace necesario clasificar la demanda cognitiva por niveles de creciente complejidad, un exponente de este tipo de clasificación es el propuesto por la (OCDE, 2003) citada en Penalva & Llinares (2011) que cabe resaltar será la directriz para la construcción de niveles que den cuenta de los posibles objetivos de referencia que deben desarrollar los estudiantes para el aprendizaje del infinito y subvenciona directrices para analizar el corpus de contenido ya mencionado en la Fase 2, los niveles propuestos por la OCDE (2013) son:

- **Primer nivel:** Reproducciones y procedimientos rutinarios. Hacen referencia a ejercicios relativamente familiares que requieren la reiteración de los conocimientos practicados (recuerdos de propiedades, uso de procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos, realización de operaciones sencillas etc).
- **Segundo nivel:** Conexión e integración para resolver problemas estándar. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación.
- **Tercer nivel:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales (reflexión). Los ítems requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos. Exige generalización y explicación o justificación de resultados. (Penalva & Llinares, 2011, p. 33).

Teniendo en cuenta estos niveles de demanda cognitiva y habiendo seleccionado categorías de análisis, a continuación se definirán y presentarán tales categorías y niveles a través de tablas compuestas, la cuales están compuestas por cinco columnas denominadas categoría de análisis (1, 2) respectivamente, nivel OCDE, código, interpretación del nivel y objetivos posibles de referencia respecto al nivel.

En específico, en la columna denominada categoría de análisis (1, 2) respectivamente corresponde a los contextos seleccionados como categoría general de análisis con los cuales según lo expuesto comúnmente se puede desde la matemática escolar construir y desarrollar el objeto infinito matemático, en particular en la educación media.

La segunda columna denominada (nivel OCDE) corresponde a los niveles de demanda cognitiva propuestos por esta organización respecto al contexto o categoría de análisis; la tercera columna denominada (código), asigna un distintivo para cada nivel de demanda cognitiva con el objetivo de identificarla en el momento del análisis; en la cuarta columna denominada (interpretación del nivel) se presenta una pequeña explicación de lo que se puede encontrar en el nivel y por último, la quinta columna denominada (objetivos posibles de referencia respecto al nivel) se enuncian los objetivos posibles conforme todo el proceso investigativo plasmado en el marco teórico para cada nivel. Conforme a la descripción anterior dicha tabla se presenta a continuación:

3.1.3.1.2. Interpretación asociada a la categoría 1 comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.

Para esta categoría se debe aclarar que el infinito se vislumbra desde la concepción conjuntista que, en términos de la matemática escolar de los grados décimo-undécimo los contextos en los que se vincula algunos aspectos de la teoría de conjuntos es desde el concepto de función polinómica en cuanto a la descripción, graficación e interpretación de éstas, puesto que al manipularse desigualdades, algunas técnica de graficación y la descripción de dominios y rangos de funciones polinómicas en diferentes contextos matemáticos puede trabajarse tanto el infinito actual como el potencial en términos de conjuntos discretos y continuos.

Tabla 6 *Denominar, definir e interpretar las categorías de análisis para la categoría 1*

CATEGORÍA DE ANALISIS 1	NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	INTERPRETACIÓN DEL NIVEL	OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL
COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIA DE CONJUNTOS DISCRETOS Y CONTINUOS	**NIVEL 1** REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	**A1**	Según lo establecido para este nivel, los objetivos corresponden a destrezas mnemotécnicas que servirán de apoyo a la comprensión del infinito matemático.	Utiliza desigualdades para expresar subconjuntos o intervalos de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$.
				Realiza operaciones con conjuntos para expresar la solución de una desigualdad.
				Ubica los puntos solución de funciones polinómicas en el plano cartesiano.
				Utiliza tablas para observar el comportamiento de funciones polinómicas.
				Hace uso de desigualdades para expresar el dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad.
	NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**A2**	De acuerdo a lo que exige este nivel, estas tareas corresponden a la solución de problemas estándar que contribuyen a comprender el infinito, por esta razón, en este nivel no es sólo necesario que el estudiante halle el	Determina el dominio, codominio y rango de funciones polinómicas.
				Restringe variables de acuerdo al dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad.

			dominio, codominio y rango de una función polinómica sino que haga conexión entre la expresión analítica de los intervalos y la gráfica para que pueda describir el comportamiento de éstas, lo cual implica que el estudiante deje de pensar en puntos particulares de una función y pase a pensar en la función como una totalidad conllevando a una concepción intuitiva de continuidad que contribuye a diferenciar conjuntos discretos de conjuntos continuos.	Grafica funciones polinómicas punto a punto de acuerdo al dominio, codominio y rango.
				Identifica cuándo una función polinómica es creciente o decreciente en ciertos intervalos para analizar con precisión su comportamiento.
				Reconoce cuándo una función polinómica es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
				Identifica una función polinómica desde diversas representaciones (gráfica, analítica y tablas)
				Utiliza las propiedades de orden de los diferentes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$ para desarrollar y solucionar problemas.
	NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Las tareas correspondientes a este nivel respecto al infinito hacen referencia a utilizar los conocimientos y procedimientos de los niveles anteriores para comprender, razonar y conjeturar parcialmente axiomas y propiedades únicas de los conjuntos numéricos infinitos y enumerables, esto, debido a que es posible a través del concepto de función y de algunos conceptos de la teoría de conjuntos comprender el infinito potencial y actual, reconociendo cuándo un conjunto es infinito a partir del concepto biyección y así mismo reconocer que el conjunto de los racionales aunque es denso es discreto dando paso a la idea de número real.	Diferencia un conjunto numérico discreto de un conjunto numérico continuo de manera gráfica y analítica.
				Determina a través del concepto de biyección la enumerabilidad o equipotencia de dos conjuntos numéricos discretos.
				Establece la infinitud de un conjunto numérico enumerable.
				Entiende el concepto de densidad del conjunto numérico $\mathbb{Q}$.

3.1.3.1.3. Interpretación asociada a la categoría 2 divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores

Considerando el hecho de que los documentos educativos curriculares por su generalidad no pueden cobijar todos los contenidos y contextos asociados al infinito, se seleccionó este contextos de divisibilidad indefinida puesto que vincula varios contenidos importantes como lo son la inconmensurabilidad, las sucesiones, el concepto de límite y el número real entre otros sumado al hecho de que, una sucesión de números puede interpretarse como una función cuyo dominio son los $\mathbb{Z}^{+}$ o $\mathbb{N}$, su codominio es $\mathbb{R}$ y su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$ esto contribuye a reforzar la diferencia entre conjunto discreto de conjunto continuo así como también permite comprender la doble acepción del infinito en problemas donde los valores del dominio crezcan mientras los valores del rango disminuyen, además de lo anterior, también se debe mencionar que una de las formas de generar una sucesión es a través de la división sucesiva e indefinida ya sea en un contexto geométrico o un contexto numérico.

Tabla 7 *Denominar, definir e interpretar las categorías de análisis para la categoría 2*

CATEGORÍA DE ANÁLISIS 2	**NIVEL (OCDE, 2003)**	**CÓDIGO**	**INTERPRETACIÓN DEL NIVEL**	**OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL**
DIVISIBILIDAD INDEFINIDA, ITERACIÓN E INFLUENCIA DE COTAS SUPERIORES E INFERIORES	**NIVEL 1** REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	**A1**	Las tareas de este nivel respecto a esta categoría hacen referencia a procedimientos algorítmicos rutinarios en lo que respecta al concepto de sucesión como apoyo para diferenciar un número racional de un irracional.	Genera sucesiones haciendo uso del concepto de divisibilidad en contextos geométricos y numéricos por iteración de una condición preestablecida.
				Establece el dominio, codominio y rango de la función sucesión.
				Hace uso de las propiedades de los límites para hallar el límite de una sucesión.
				Utiliza el proceso de fracción continua para representar números.
	NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**A2**	Los objetivos correspondientes a este nivel hacen énfasis en las propiedades y características de las sucesiones para comprender el comportamiento de algunas de éstas, un ejemplo de ello es la convergencia o divergencia de una sucesión con las cuales poder generar los primeros insumos para diferenciar un número racional de un irracional, así como también contribuye a entender la inconmensurabilidad.	Entiende el límite de una sucesión como punto de identificación de convergencia.
				Diferencia un conjunto acotado de un conjunto no acotado.
				Determina el máximo y el mínimo de una sucesión si existen.
				Halla la expresión general del n-ésimo término de la sucesión ya sea explícitamente o por recursión.
				Identifica cuándo una fracción continua representa un número racional y cuándo un irracional.

	NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Estas tareas según lo establecido por la OCDE hacen referencia a procesos de pensamiento avanzado por esta razón, en este nivel el estudiante comprenderá que no todos los números pueden expresar como una razón entre enteros dando pie al concepto de número real y por ende al de infinito actual.	Entiende que todo número racional puede ser expresado como un cociente de enteros a/b con $b \neq 0$.
				Utiliza el concepto de cota superior e inferior para establecer la diferencia entre número racional e irracional.

Habiendo presentado la estructura que permitirá el análisis de contenido del corpus respecto a la unidad de análisis seleccionada, se debe aclarar que en lo que se presenta a continuación se hace uso de un código de colores para identificar en qué tipo de pensamiento matemático propuestos por el MEN (2006) se puede ubicar cada elemento de la unidad de análisis de cada elemento del corpus, a saber:

- Azul: Pensamiento espacial
- Rojo: Pensamiento métrico
- Amarillo: Pensamiento numérico
- Gris: Pensamiento variacional
- Verde claro: Pensamiento aleatorio

3.1.3.2. Codificar y cuantificar

En la siguiente tabla se presenta la codificación del elemento del corpus (EBCM) para las dos categorías de análisis respectivamente las cuales, se identificarán por colores que son, naranja para la comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos, y, verde oscuro para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

A su vez, se debe aclarar que la tabla siguiente conserva la misma estructura que las presentadas con anterioridad solo que, se agrega una columna denominada estándares asociados, en donde se ubican los elementos de los (EBCM) conforme a la unidad de análisis que guardan coherencia con los objetivos posibles de referencia respecto al nivel para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.

Tabla 8 *Codificación de la unidad de análisis (EBCM) ciclo décimo-undécimo para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.*

CATEGORÍA DE ANALISIS 1	NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL	ESTÁNDARES ASOCIADOS

COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIA DE CONJUNTOS DISCRETOS Y CONTINUOS	
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**NIVEL 1** REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS
A2	**A1**
Determina el dominio, codominio y rango de funciones polinómicas.	Utiliza desigualdades para expresar subconjuntos o intervalos de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$.
Restringe variables de acuerdo al dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad.	Realiza operaciones con conjuntos para expresar la solución de una desigualdad.
Grafica funciones polinómicas punto a punto de acuerdo al dominio, codominio y rango.	Ubica los puntos solución de funciones polinómicas en el plano cartesiano.
Identifica cuándo una función polinómica es creciente o decreciente en ciertos intervalos para analizar con precisión su comportamiento.	Utiliza tablas para observar el comportamiento de funciones polinómicas.
Reconoce cuándo una función polinómica es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.	Hace uso de desigualdades para expresar el dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad.
Identifica una función polinómica desde diversas representaciones (gráfica, analítica y tablas)	
Utiliza las propiedades de orden de los diferentes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$ para desarrollar y solucionar problemas.	
Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

	NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Diferencia un conjunto numérico discreto de un conjunto numérico continuo de manera gráfica y analítica.	Determina a través del concepto de biyección la enumerabilidad o equipotencia de dos conjuntos numéricos discretos.	Establece la infinitud de un conjunto numérico enumerable.	Entiende el concepto de densidad del conjunto numérico $\mathbb{Q}$.	Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
							Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.
							Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

Al igual que la anterior, en la siguiente tabla se agrega una columna denominada estándares asociados, en donde se ubican los elementos de los (EBCM) conforme a la unidad de análisis que guardan coherencia con los objetivos posibles de referencia respecto al nivel para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

Tabla 9 *Codificación de la unidad de análisis (EBCM) ciclo décimo-undécimo para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores*

CATEGORÍA DE ANÁLISIS 2	**NIVEL (OCDE, 2003)**	**CÓDIGO**	**OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL**	**ESTÁNDARES ASOCIADOS**

DIVISIBILIDAD INDEFINIDA, ITERACIÓN E INFLUENCIA DE COTAS SUPERIORES E INFERIORES			
NIVEL 1 REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	**A1**	Genera sucesiones haciendo uso del concepto de divisibilidad en contextos geométricos y numéricos por iteración de una condición preestablecida. Establece el dominio, codominio y rango de la función sucesión. Hace uso de las propiedades de los límites para hallar el límite de una sucesión. Utiliza el proceso de fracción continua para representar números.	Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**A2**	Entiende el límite de una sucesión como punto de identificación de convergencia. Diferencia un conjunto acotado de un conjunto no acotado. Determina el máximo y el mínimo de una sucesión si existen. Halla la expresión general del n-ésimo término de la sucesión ya sea explícitamente o por recursión. Identifica cuándo una fracción continua representa un número racional y cuándo un irracional.	Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

								Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
	NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Entiende que todo número racional puede ser expresado como un cociente de enteros a/b con $b \neq 0$.		Utiliza el concepto de cota superior e inferior para establecer la diferencia entre número racional e irracional.			Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.

Al igual que las anteriores, las siguientes tablas conservan la misma estructura sólo que, en este caso, cambia el elemento del corpus, esto es, ya no son los (EBCM) que se hacen corresponder sino que, son los (DBAM) los que se analizan lo cual implica agregar una sexta columna que se denomina DBAM asociado.

En coherencia a lo anterior, la siguiente tabla conserva la misma estructura que las presentadas con anterioridad solo que, se agrega una columna denominada estándares DBAM asociado, donde se ubican los elementos de los (DBAM) conforme a la unidad de análisis que guardan coherencia con los objetivos posibles de referencia respecto al nivel para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.

Tabla 10 *Codificación de la unidad de análisis DBAM décimo-undécimo comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.*

CATEGORÍA DE ANALISIS 1	NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL					DBAM ASOCIADOS
COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIA DE CONJUNTOS DISCRETOS Y CONTINUOS	**NIVEL 1** REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	A1	Utiliza desigualdades para expresar subconjuntos o intervalos de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$.	Realiza operaciones con conjuntos para expresar la solución de una desigualdad.	Ubica los puntos solución de funciones polinómicas en el plano cartesiano.	Utiliza tablas para observar el comportamiento de funciones polinómicas.	Hace uso de desigualdades para expresar el dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad.	Soluciona inecuaciones del tipo $f(x) > 3$ o $f(x) \leq g(x)$, donde f y g son funciones dadas de forma gráfica o algebraica.
								Reconoce cuándo una función tiene o no una función inversa.
								Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebraica presenta variaciones.
								Reconoce características generales de las gráficas de las funciones observando regularidades.

NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Diferencia un conjunto numérico discreto de un conjunto numérico continuo de manera gráfica y analítica. Determina a través del concepto de biyección la enumerabilidad o equipotencia de dos conjuntos numéricos discretos. Establece la infinitud de un conjunto numérico enumerable. Entiende el concepto de densidad del conjunto numérico $\mathbb{Q}$.	Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales.
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**A2**	Determina el dominio, codominio y rango de funciones polinómicas. Restringe variables de acuerdo al dominio, codominio y rango de una función polinómica definida con anterioridad. Grafica funciones polinómicas punto a punto de acuerdo al dominio, codominio y rango. Identifica cuándo una función polinómica es creciente o decreciente en ciertos intervalos para analizar con precisión su comportamiento. Reconoce cuándo una función polinómica es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Identifica una función polinómica desde diversas representaciones (gráfica, analítica y tablas) Utiliza las propiedades de orden de los diferentes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$ para desarrollar y solucionar problemas.	Soluciona problemas en el plano cartesiano. Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas. Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.

La siguiente tabla al igual que la coetáneamente precedente, tiene una sexta columna denominada DBAM asociados, donde se ubican los elementos de los (DBAM) conforme a la unidad de análisis que guardan coherencia con los objetivos posibles de referencia respecto al nivel para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

Tabla 11 *Codificación de la unidad de análisis DBAM grados décimo-undécimo para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores*

CATEGORÍA DE ANÁLISIS 2	**NIVEL (OCDE, 2003)**	**CÓDIGO**	**OBJETIVOS POSIBLES DE REFERENCIA RESPECTO AL NIVEL**				**DBAM ASOCIADOS**
DIVISIBILIDAD INDEFINIDA, ITERACIÓN E INFLUENCIA DE COTAS SUPERIORES E	**NIVEL 1** REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	**A1**	Genera sucesiones haciendo uso del concepto de divisibilidad en contextos geométricos y numéricos por iteración de una condición	Establece el dominio, codominio y rango de la función sucesión.	Hace uso de las propiedades de los límites para hallar el límite de una sucesión.	Utiliza el proceso de fracción continua para representar números.	

	NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	**A2**	Entiende el límite de una sucesión como punto de identificación de convergencia.	Diferencia un conjunto acotado de un conjunto no acotado.	Determina el máximo y el mínimo de una sucesión si existen.	Halla la expresión general del n-ésimo término de la sucesión ya sea explícitamente o por recursión.	Identifica cuándo una fracción continua representa un número racional y cuándo un irracional.	Comprende el concepto de límite de una sucesión.
	NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	**A3**	Entiende que todo número racional puede ser expresado como un cociente de enteros a/b con $b \neq 0$.			Utiliza el concepto de cota superior e inferior para establecer la diferencia entre número racional e irracional.		Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros ${}^{a}/_{b}$.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS UNIDADES

4.1.Cuantificación del corpus estándares básicos de competencias para el área de matemáticas ciclo décimo-undécimo

En lo subsiguiente se presentan dos tablas que asignan una frecuencia a la cantidad de elementos asociados de los corpus asociados en coherencia con la unidad de análisis y el nivel.

Esta primera tabla muestra las frecuencias numéricas obtenidas del paso anterior para ambas categorías que tienen su propio código de color respecto a un solo elemento del corpus que es (EBCM), no obstante, es necesario aclarar que esta tabla tiene una estructura diferente a las anteriores, ya que está compuesta primero por dos filas, donde la primera expresa el elemento de corpus que se está cuantificando y la segunda expresa la categoría a la que pertenecen dichas frecuencias. En la tercera fila, está dividida en siete columnas que son, nivel OCDE, Código, Pensamiento numérico, Pensamiento espacial, Pensamiento métrico, Pensamiento aleatorio y Pensamiento algebraico-analítico cada uno coherente con el código de colores ya expuesto. De esta manera se relacionan los cinco tipos de pensamiento con los niveles OCDE para cada una de las categorías respecto a los (EBCM).

Tabla 12 *Frecuencias para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos EBCM*

NIVEL (OCDE, 2003)	**CÓDIGO**	**PENSAMIENTO NUMÉRICO**	**PENSAMIENTO ESPACIAL**	**PENSAMIENTO MÉTRICO**	**PENSAMIENTO ALEATORIO**	**PENSAMIENTO VARIACIONAL**
NIVEL 1 REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	A1	0	1	0	0	0

NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	A2	0	1	0	1	1
NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	A3	3	0	0	0	0

Esta segunda tabla expone las frecuencias obtenidas para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores teniendo en cuenta estructura de la tabla anterior, donde se relacionan los cinco tipos de pensamiento matemático con los niveles OCDE.

Tabla 13 *Frecuencias para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores EBCM*

NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO MÉTRICO	PENSAMIENTO ALEATORIO	PENSAMIENTO VARIACIONAL
NIVEL 1 REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	A1	0	0	0	0	1
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	A2	1	0	2	0	0
NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	A3	1	0	0	0	0

4.2.Cuantificación de la unidad de análisis derechos básicos de aprendizaje para el área de matemáticas grados décimo y undécimo

Al igual que las anteriores dos tablas, las que se exponen a continuación guardan la misma estructura solamente cambia el elemento del corpus que se cuantifica, es decir, la siguiente tabla muestra las frecuencias obtenidas para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos para los (DBAM).

Tabla 14 *Frecuencias para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos DBAM*

NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO MÉTRICO	PENSAMIENTO ALEATORIO	PENSAMIENTO VARIACIONAL
NIVEL 1 REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	A1	0	1	0	0	3
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	A2	0	1	0	0	2
NIVEL RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN , INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	A3	1	0	0	0	0

La siguiente tabla expone las frecuencias obtenidas para la categoría divisibilidad indefinida del elemento del corpus (DBAM), teniendo en cuenta los cinco tipos de pensamiento matemático y los niveles OCDE.

Tabla 15 *Frecuencias para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores DBAM*

NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO MÉTRICO	PENSAMIENTO ALEATORIO	PENSAMIENTO VARIACIONAL
NIVEL 1 REPORDUCCIÓN Y PROCEDIMIENTOS RUTINARIOS	A1	0	0	0	0	0
NIVEL 2 CONEXIÓN E INTEGRACIÓN	A2	0	0	0	0	1
NIVEL 3 RAZONAMIENTO, ARGUMENTACIÓN, INTUICIÓN Y GENERALIZACIÓN	A3	1	0	0	0	0

4.3.Fase 4: Análisis del corpus y resultados

4.3.1. Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas considerando sus unidades de análisis adscritas

Para empezar con la descripción de resultados, lo primero que se expondrá es un análisis de contenido realizado por Albadan et al (2016) respecto a los verbos con los cuales se expresan los estándares y enunciados de los derechos básicos de aprendizaje contrastando las unidades de análisis EBCM y los DBAM en los grados décimo-undécimo considerando los cinco tipos de pensamiento matemático; sin embargo, el documento concedido por el mismo autor y director de esta monografía contiene todo el extenso proceso de cuantificación, por tanto, aquí sólo se presentará el resultado final y las gráficas de tal cuantificación, a saber:

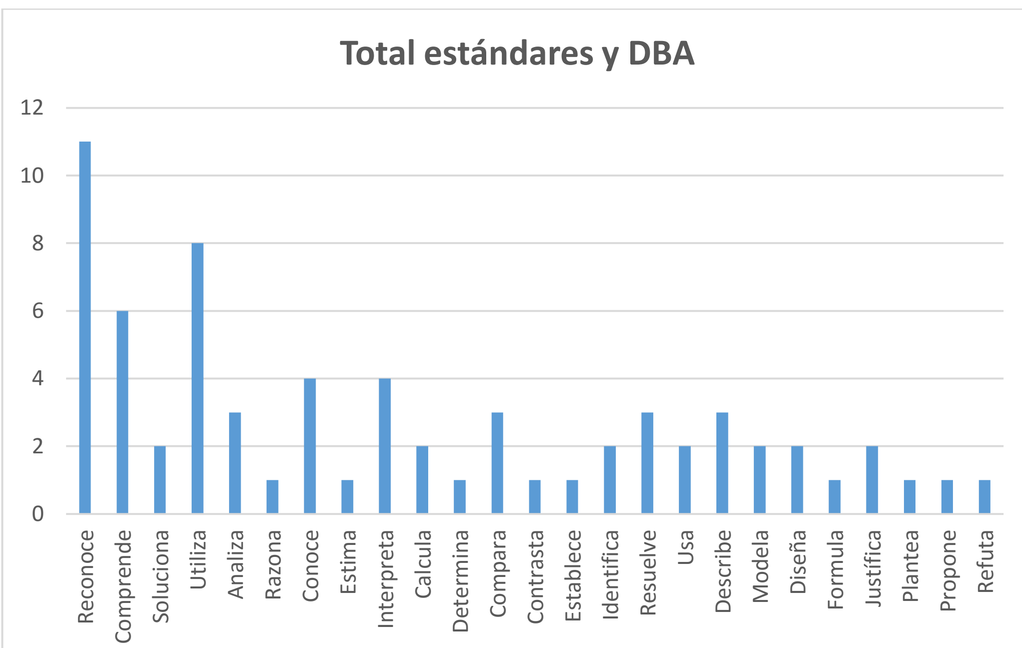
Tabla 16 *Frecuencias de verbos y acciones asociadas a los EBC y DBA*

VERBOS	GRAN TOTAL DE DBA	GRAN TOTAL DE EBC	TOTAL DE PENSAMIENTOS
Reconoce	9	2	11
Comprende	6	0	6
Soluciona	2	0	2
Utiliza	6	2	8
Analiza	1	2	3
Razona	1	0	1
Conoce	4	0	4
Estima	1	0	1
Interpreta	2	2	4
Calcula	2	0	2
Determina	1	0	1
Compara	1	2	3
Contrasta	0	1	1
Establece	0	1	1

Identifica	0	2	2
Resuelve	0	3	3
Usa	0	2	2
Describe	0	3	3
Modela	0	2	2
Diseña	0	2	2
Formula	0	1	1
Justifica	0	2	2
Plantea	0	1	1
Propone	0	1	1
Refuta	0	1	1

De este conteo surgen las siguientes representaciones gráficas:

Figura 11 Conteo de verbos y acciones asociadas en los EBC y los DBAM.



En esta gráfica se encapsula el conteo de verbos y acciones asociadas a los EBC y a los DBA.
Fuente: Albadan et al, (2016), documento de trabajo, revisión ministerial de los DBAM

Figura 12 Contraste de Frecuencias entre verbos y acciones de EBC con DBAM

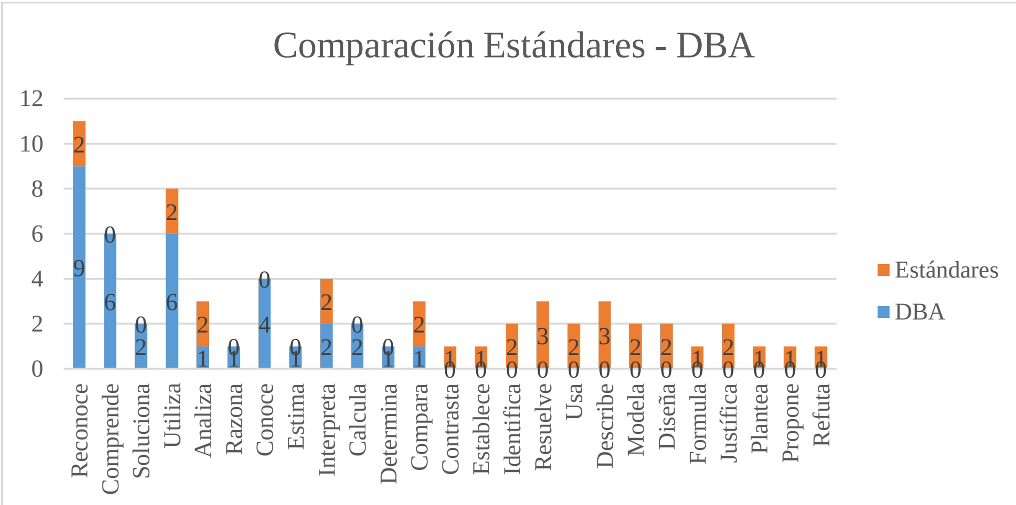


Gráfico que expone el contraste de frecuencias entre los DBA y EBC respecto a los verbos y acciones asociados.

Fuente: Albadan et al, (2016), documento de trabajo, revisión ministerial de los DBAM

Una primera inferencia que surge al observar el Gráfico 1 es que, conforme avanzan los verbos en complejidad la cantidad de EBCM y de DBAM disminuyen, esto, se sustenta con lo expresado en ALTABLERO (2002), quienes aseveran que los EBCM son objetivos que apuntan a lo básico que se debe desarrollar para el área de matemáticas en la educación básica y media por esta razón, se vislumbra que las frecuencias de los primeros verbos son mayores que las de los siguientes de izquierda a derecha, ya que representan lo básico que debe desarrollar el estudiante durante el proceso escolar.

Otra inferencia que surge al analizar el Gráfico 2 es que, se vislumbra una mínima interconexión entre los EBCM y los DBAM, debido a que, los valores que dan cuenta de la presencia de algún objetivo no se mantienen equilibrados al comparar los dos documentos, en consecuencia, esta evidencia cuantitativa pone en duda lo argüido por el MEN (2015) respecto de los DBAM, es decir, que estos están construidos con base los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas y los lineamientos curriculares para el área de matemáticas.

Lo cual implica, de existir tal relación, considerar la coherencia vertical, horizontal y los tipos de pensamiento matemático expuestos en los documentos curriculares colombianos ya mencionados ya que, deberían encontrarse enunciados en los DBAM que respondieran a tal complejidad creciente que como se manifestó no existe, puesto que desde el verbo (contrasta) no hay enunciados asociados, de lo anterior, se puede aseverar que los EBCM contrario a los DBAM para el grado décimo-undécimo apuntan a objetivos más complejos, lo cual, está en coherencia con lo propuesto por Belmonte (2009), quien asevera vincular objetivos de mayor complejidad en los grados décimo-undécimo.

Continuando con el proceso de descripción de resultados para esta fase, a continuación se exponen dos tablas que comparan las frecuencias obtenidas de los dos elementos del corpus teniendo en cuenta la unidad de análisis, la categoría, los tipos de pensamientos matemáticos y el nivel, a saber:

Tabla 17 *Comparación de frecuencias de la unidades de análisis para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos*

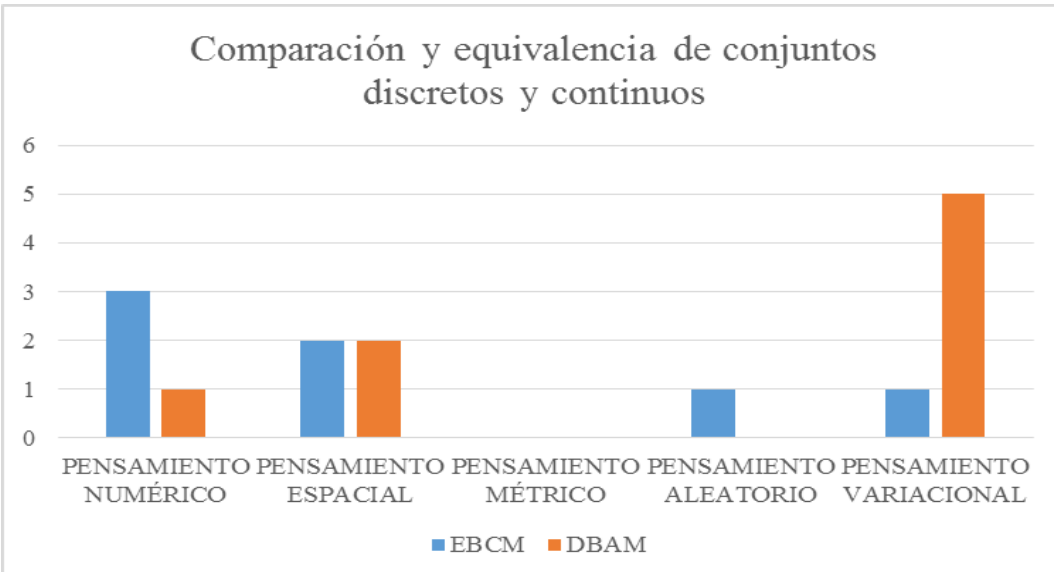
ELEMENTOS DEL CORPUS	NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO MÉTRICO	PENSAMIENTO ALEATORIO	PENSAMIENTO VARIACIONAL
ESTÁNDARES DE COMPETENCIAS PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS	**NIVEL 1**	**A1**	0	1	0	0	0
	NIVEL 2	**A2**	0	1	0	1	1
	NIVEL 3	**A3**	3	0	0	0	0
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS	**NIVEL 1**	**A1**	0	1	0	0	3
	NIVEL 2	**A2**	0	1	0	0	2
	NIVEL 3	**A3**	1	0	0	0	0

Tabla 18 *Comparación de frecuencias de las unidades de análisis para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores*

ELMENTOS DEL CORPUS	NIVEL (OCDE, 2003)	CÓDIGO	PENSAMIENTO NUMÉRICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO MÉTRICO	PENSAMIENTO ALEATORIO	PENSAMIENTO VARIACIONAL
ESTÁNDARES DE COMPETENCIAS PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS	**NIVEL 1**	**B1**	0	0	0	0	1
	NIVEL 2	**B2**	1	0	2	0	0
	NIVEL 3	**B3**	1	0	0	0	0
DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS	**NIVEL 1**	**B1**	0	0	0	0	0
	NIVEL 2	**B2**	0	0	0	0	1
	NIVEL 3	**B3**	1	0	0	0	0

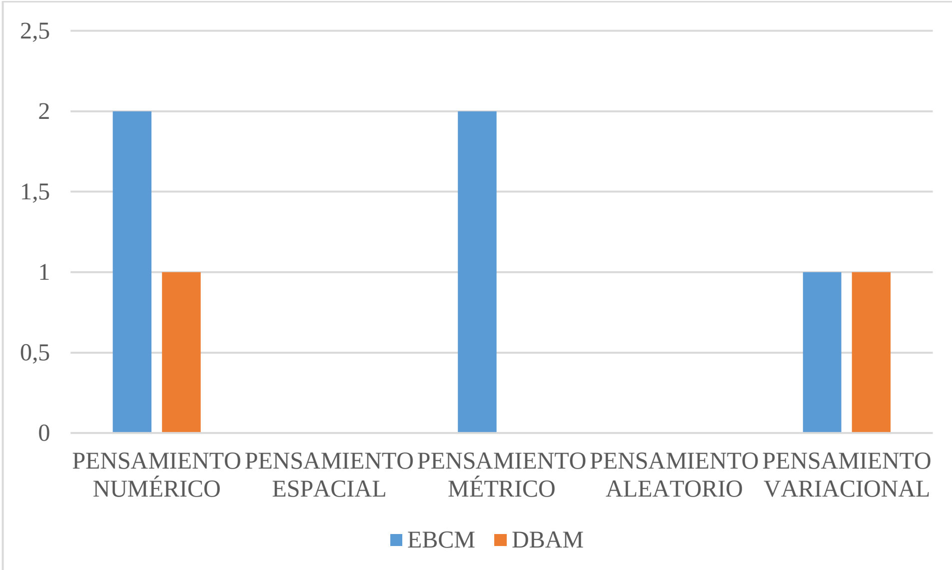
De las tablas anteriores que corresponden respectivamente a las categorías de análisis comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos, y, divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores surgen las siguientes gráficas que facilitan el análisis e interpretación de los resultados obtenidos y de lo que se expresa posteriormente en este capítulo, a saber:

Figura 13 Contraste de las frecuencias de los elementos del corpus categoría 1



En esta figura se expone un comparativo entre las frecuencias de los elementos corpus respecto a la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.

Figura 14 Contraste de las frecuencias de los elementos del corpus categoría 2



En esta figura se expone un comparativo entre las frecuencias de los elementos corpus respecto a la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

4.3.2. Cuantificación de los resultados del análisis de cada corpus con respecto a la totalidad

Una vez se realizó el análisis del *corpus* tomando como base la unidad de análisis (ciclo V –grado décimo y undécimo-) se encuentran los siguientes resultados generales, en los que no se enuncia el desarrollo por niveles de las dos categorías asociadas, aspecto que será desarrollado posteriormente.

4.3.2.1.Para los (EBCM)

Se tiene que la cantidad total de estándares en la unidad de análisis son 27, por otro lado el análisis realizado muestra que hay 13 estándares que pueden ser asociados al infinito en este *corpus*, estos 13 estándares respecto a la totalidad representan aproximadamente el 48,15%, esto permite inferir que, casi la mitad de los objetivos de la unidad de análisis pueden ser encaminados hacia potenciar el aprendizaje del infinito matemático.

4.3.2.2.Para los (DBAM)

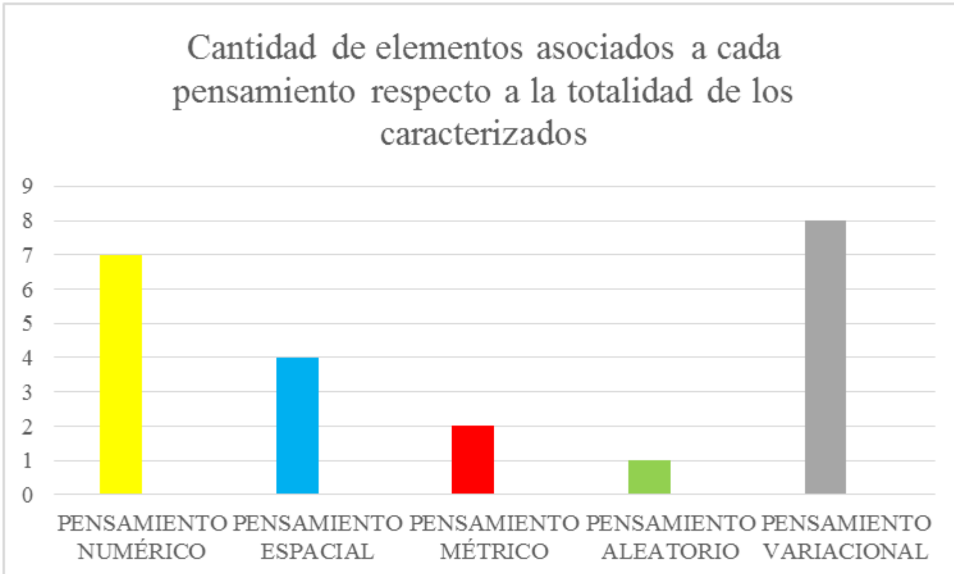
Para este elemento del corpus, se tiene que la totalidad de enunciados es 34, mientras que el análisis de contenido muestra que tan solo 10 de los enunciados se pueden asociar al infinito matemático, esto, en términos de porcentajes representa un 29,4%.

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene que al comparar los dos porcentajes de cada elemento del corpus se evidencia un desequilibrio entre los documentos, lo que reitera, la mínima relación que existe entre los EBCM y los DBAM. A su vez, de esta cuantificación surgen las siguientes gráficas.

4.3.3. Frecuencias asociadas a cada pensamiento matemático respectos a la totalidad de elementos categorizados

Del proceso de análisis de contenido se tiene que los elementos categorizados para ambos elementos del corpus respecto a la unidad de análisis son 22 en total, en este apartado, se describirá cuantitativamente el porcentaje que representa la cantidad de elementos vinculados a cada tipo de pensamiento matemático con respecto a estos 22 elementos, para un apoyo visual a lo que se argumenta a continuación se hará uso de una gráfica, a saber:

Figura 15 Cantidad total de elementos caracterizados para cada tipo de pensamiento matemático.



Esta figura representa la cantidad total de elementos caracterizados para cada tipo de pensamiento matemático.

4.3.3.1.Para el pensamiento numérico

El porcentaje que representa la cantidad de estándares y enunciados categorizados en este pensamiento es aproximadamente el 31,82%.

4.3.3.2.Para el pensamiento espacial

El porcentaje que representa la cantidad de estándares y enunciados categorizados en este pensamiento es aproximadamente el 18,18%.

4.3.3.3.Para el pensamiento métrico

El porcentaje que representa la cantidad de estándares y enunciados categorizados en este pensamiento es aproximadamente el 9,09%.

4.3.3.4.Para el pensamiento aleatorio

El porcentaje que representan la cantidad de estándares y enunciados categorizados en este pensamiento es aproximadamente el 4,54%.

4.3.3.5.Para el pensamiento variacional

El porcentaje que representa la cantidad de estándares y enunciados categorizados en este pensamiento es aproximadamente 36,36%.

Esto sugiere que los registros semióticos a los que más se les asoció estándares y enunciados fueron el variacional, el numérico y el espacial en este orden respectivamente, aunque cabe aclarar, en los pensamientos aleatorio y métrico se asociaron sólo estándares lo cual indica equilibrio en la secuencialidad de los EBCM.

4.3.4. Cuantificación de cada elemento del corpus respecto a cada pensamiento matemático

4.3.4.1.Para los (EBCM)

4.3.4.1.1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos

En este pensamiento respecto a la unidad de análisis se tiene que, de los cinco estándares existentes, los cinco pueden ser encaminados hacia el aprendizaje del infinito matemático, esto, en términos de porcentajes representa un 100%. El siguiente cuadro muestra tales estándares y a qué categoría pertenecen:

Tabla 19 *Caracterización particular de estándares del pensamiento numérico*

ESTÁNDARES PENSAMIENTO NUMÉRICO	CATEGORIZACIÓN
Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.
Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.	Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

4.3.4.1.2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos

En este pensamiento se tienen seis estándares y según el análisis los categorizados son dos estándares, lo cual en términos de porcentajes presenta un 33,4%. Este porcentaje indica que aproximadamente la tercera parte de la cantidad de estándares de este pensamiento respecto a la unidad pueden ser encaminados hacia el aprendizaje del objeto matemático infinito según los objetivos de referencia propuesto para la categorización. Los elementos caracterizados se muestran a continuación:

Tabla 20 *Caracterización particular de estándares para el pensamiento espacial*

ESTÁNDARES PENSAMIENTO ESPACIAL	CATEGORIZACIÓN
Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.	
Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.	
Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	
Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.	
Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.

4.3.4.1.3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas

En este pensamiento se tienen tres estándares para la unidad de análisis y en la categorización sólo se encontró uno que puede ser guiado hacia el aprendizaje del infinito matemático, lo anterior en términos de porcentajes representa 33,4%, permitiendo inferir que este pensamiento, donde se puede trabajar desde la escuela el infinito potencial y el actual, desde el concepto de magnitud y comparación de magnitudes discretas y continuas no es utilizado para generar las primeras nociones sobre el objeto matemático infinito. A continuación se exponen los elementos categorizados con respecto a la cantidad de estándares para la unidad de análisis en este pensamiento, a saber:

Tabla 21 *Caracterización particular de estándares del pensamiento métrico*

ESTÁNDARES PENSAMIENTO MÉTRICO	CATEGORIZACIÓN
Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.	Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.
Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.	
Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.	Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.

4.3.4.1.4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

Los estándares de este pensamiento respecto la unidad de análisis son nueve en total y según lo analizado, solo se caracterizó un estándar que puede ser guiado hacia el aprendizaje del infinito matemático, lo cual representa en términos de porcentajes un $11,2\%$. Este porcentaje es una evidencia cuantitativa que permite inferir el poco uso que se le da a este pensamiento en el cual se trabajan conjuntos de variables relacionadas y conceptos básicos de la teoría de conjuntos entre otros, que contribuirían a la comprensión del concepto de función y de comparación de conjuntos numéricos discretos importantes para la póstuma aproximación del objeto matemático infinito. A continuación se presenta este comparativo entre la cantidad total de estándares en este pensamiento respecto a los categorizados, a saber:

Tabla 22 *Caracterización particular de estándares del pensamiento aleatorio*

ESTÁNDARES PENSAMIENTO ALEATORIO	CATEGORIZACIÓN
Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación.	
Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.	
Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.	
Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).	
Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).	
Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.	
Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).	
Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.	

4.3.4.1.5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos

La totalidad de estándares de este pensamiento respecto a la unidad de análisis son cuatro y de los cuantificados en este análisis se tienen sólo dos, esto, en términos de porcentajes representa un 50%, lo que indica que la mitad de los estándares pueden ser guiados hacia el aprendizaje del infinito matemático. Una representación de esta relación se puede observar a continuación:

Tabla 23 *Caracterización particular de estándares del pensamiento variacional*

ESTÁNDARES PENSAMIENTO VARIACIONAL	CATEGORIZACIÓN
Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores.
Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	
Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	Comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos.
Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	

4.3.5. Descripción cualitativa de resultados para el elemento del corpus (DBAM)

Para este análisis se debe tener en cuenta que en los DBAM no hay una separación de los enunciados por cada tipo pensamiento matemático propuestos por el MEN (1998) como si ocurre en los EBCM, y aunque se haya realizado este tipo de separación para la categorización; en el proceso, se seleccionaron los enunciados que podían ser encaminados hacia el aprendizaje del objeto matemático infinito desde lo preestablecido y ya seleccionados, se les clasificó en un tipo de pensamiento, no obstante, en el documento no hay tal clasificación por tanto, no se puede realizar este análisis porcentual por cada tipo de pensamiento para este elemento del corpus.

4.3.6. Interpretación cualitativa de resultados comparando las frecuencias de los elementos del corpus respecto a la unidad de análisis de acuerdo a la categoría y nivel, a saber:

4.3.6.1. Categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos

4.3.6.1.1. Nivel 1 (A1)

Como se puede observar en las frecuencias anteriores, en los EBCM existe un estándar perteneciente al pensamiento geométrico y sistemas geométricos que implica procedimientos algorítmicos o mnemotecnias que puede ser utilizado para la comprensión del infinito matemático desde un contexto geométrico, mientras que en los DBAM se puede observar en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos que existen tres enunciados que hacen alusión a procesos algorítmicos con los cuales poder manipular ciertos registros semióticos para comprender y vincular algunos conceptos con los cuales abordar el objeto matemático infinito desde una concepción conjuntista a través del concepto de función, así mismo, existe otro enunciado en los DBAM perteneciente al pensamiento espacial y sistemas geométricos que hace alusión al proceso de reificación del concepto de función importante como lo expresa Neira (2012) a la hora de hacer el tránsito del algebra al cálculo.

Un argumento para sustentar la falta de estándares en este nivel puede deberse como lo argumenta el MEN (2006) a que, los EBCM han sido secuenciados de acuerdo a la coherencia vertical y horizontal, esto es, avanza en complejidad tanto vertical sobre un mismo pensamiento como también aumenta la complejidad de un estándar horizontalmente por cada pensamiento por tanto, este tipo de procesos algorítmicos que implican sólo reproducción que además se encasillan según la OCDE (2003) citada en Penalva & Llinares (2011) en un nivel 1 se pueden encontrar en grados anteriores al décimo-undécimo.

Por el contrario en los DBAM los enunciados categorizado en este nivel hacen específico la solución de inecuaciones de forma geométrica y analítica con las cuales se pueden vincular conceptos de la teoría de conjuntos como la idea de conjunto solución, intersección, unión y su notación entre otros que son necesarios a la hora de construir el objeto matemático infinito desde una concepción conjuntista en la matemática escolar encaminado a la comparación de conjuntos numerables. A su vez, se encuentra otro enunciado que hace alusión a reconocer cuando una función tiene asociada una función inversa, lo cual vincula el concepto de biyección importante para determinar el cardinal y la numerabilidad de un conjunto infinito discreto; además de los anteriores, existen dos enunciados que hacen alusión a reificación del concepto de función en este caso polinómica ya que, le pide al estudiante que a partir de los cambios generados en la expresión analítica de una función polinómica reconozca los cambios en su representación geométrica, esto, como lo arguye Neira (2012) es de suma importancia para el aprendizaje del cálculo porque se deja de concebir las funciones como concepto para visualizarlas como objetos de estudio, así mismo, Duval (1990) manifiesta que un concepto se enriquece en la cognición cundo el sujeto manipula y traslada un concepto a diferentes registros semióticos.

4.3.6.1.2. Nivel 2 (A2)

Respecto a este nivel se puede observar que en los EBCM en el pensamiento espacial y sistemas geométricos hay dos estándares que hacen referencia objetivos con las cuales variando ciertas características se puede introducir el infinito matemático, puesto que estos objetivos implican la descripción y graficación de funciones en este caso particular polinómicas donde las técnicas de graficación y descripción de funciones se asocia con la determinación de dominios, codominios y rangos, como también se puede asociar el proceso de discretización en la graficación de funciones y como éste sólo determina unos cuantos puntos mientras que al graficar la función se realiza un trazo continuo permitiendo generar una idea intuitiva de continuidad además de esto, puede posibilitar la diferenciación de un conjunto infinito discreto de puntos de un conjunto continuo de puntos desde un contexto geométrico o numérico, ya que no es lo mismo determinar soluciones especificar de una función que hallar las infinitas soluciones reales de una función.

A su vez, los EBCM tienen otro estándar perteneciente al pensamiento métrico y sistemas de medidas que puede encaminarse a estudiar conjuntos de puntos para generar una expresión analítica del comportamiento de conjuntos con variables relacionadas; por otro lado, existe un estándar perteneciente al pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos que hace referencia a analizar las relaciones y propiedades de las funciones polinómicas y racionales desde un contexto analítico y geométrico, con este estándar puede vincularse el concepto de límite importante al momento de trabajar con sucesiones de números racionales para comprender la naturaleza del último término de la sucesión lo cual implica vislumbrar la doble concepción del infinito matemático, esto es, en potencia y acto.

Conforme a lo anterior, se puede evidenciar una coherencia entre lo que expresa Belmonte (2009) con respecto a los contextos más utilizados para representar y adquirir el infinito matemático y lo propuesto en las unidades de análisis seleccionadas, a su vez se puede evidenciar que hay un mayor número de estándares y enunciados en este nivel que en el nivel anterior debido a que, dichos estándares al pertenecer al grado décimo-undécimo suponen un mayor grado de complejidad.

Otro aspecto que se evidencia en la comparación de este corpus de contenido con respecto a la unidad de análisis en esta categoría y nivel es que, en los EBCM existe un estándar perteneciente al pensamiento aleatorio y sistemas de datos que puede vincular los conceptos de función, biyección y variable importantes también a la hora de abordar el infinito matemático desde una perspectiva conjuntista a través del concepto de biyección mientras que, en los DBAM son nulos los enunciados en este tipo de pensamiento matemático que hagan referencia a posibles objetivos que contribuyan a comprender el infinito desde la perspectiva ya mencionada en los grados décimo-undécimo.

Por otro lado en esta categoría y para este nivel en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos en los DBAM, se pueden encontrar tres enunciados que se pueden guiar hacia la comprensión del infinito matemático desde una concepción conjuntista al indicarle al estudiante que grafique funciones a trozos que implica trabajar con subconjuntos de puntos de $\mathbb{R}$ y además implica dividir la recta según la función polinómica a trozos que se defina, sumado a esto, dentro de los tres enunciados categorizados en este nivel, existe uno que le indica al estudiante analizar funciones racionales algebraicamente y hallar sus asíntotas lo cual puede dar paso al concepto de límite que contribuye para la segunda categoría aquí seleccionada conceptos importantes como el de límite y las propiedades de éste para operar sucesiones y construir conceptos importantes como el de convergencia así como también, se puede hacer énfasis en el concepto de continuidad y la naturaleza del último elemento de una sucesión ya que como se puede deducir de las apuestas teóricas de Belmonte (2009) y Arrigo et al (2011) al estudiarse la naturaleza del último término de una sucesión se puede sustituir la idea intuitiva de proceso indefinido que conlleva al fenómeno de aplastamiento y la dualidad proceso-objeto.

Además del anterior enunciado, hay presencia de otro que hace referencia en términos de Duval (1999) a transformaciones de conversión que implica transitar de un registro semiótico a otro al indicarle al estudiante que relacione la gráfica de una función polinómica con su expresión algebraica a la cual le debe realizar ciertos cambios que hacen que la gráfica cambie su forma o posición, aunque no es específica en cuanto al infinito matemático, es importante para el proceso de reificación de un concepto según Neira (2012) puesto que la función deja de ser un proceso a ser un objeto de análisis lo cual es importante para el tránsito algebra-cálculo. Por el contrario en los EBCM sólo se tiene un estándar que engloba el análisis de funciones desde lo analítico y gráfico semejante a algunos enunciados de los DBAM ya analizados. Sobre este pensamiento se puede observar una coherencia entre los EBCM y los DBAM debido a que los enunciados y estándares de este nivel apuntan a los mismos objetivos y contenidos ya que aparte de que las frecuencias son iguales también lo son sus objetivos.

4.3.6.1.3. Nivel 3 (A3)

En este nivel se puede vislumbrar según las frecuencias ya expuestas un predominio del pensamiento numérico y sistemas numéricos puesto que, en los EBCM se pueden observar tres estándares que son parcialmente específicos respecto al infinito matemático, por ejemplo hay dos estándares que hacen alusión a comparar las propiedades de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ lo que implica comprender que los $\mathbb{Q}$ son densos ya que es una de sus propiedades más importantes y no menos importante, también implica comprender que aunque en el conjunto de los números naturales existe un elemento mínimo pero no existe elemento máximo generándose cimientos para la interpretación del infinito como una entidad potencial, además, esta acepción sobre el infinito en potencia puede ser puesta en tela de juicio al compararla con los raciones y de ahí partir hacia los irracionales para establecer las bases para construir el concepto de número real como también se puede establecer la infinitud de un conjunto numérico enumerable a través de la idea de biyección donde puede ser generado el concepto de equipotencia de conjuntos discretos a nivel de colegio.

El tercer estándar perteneciente al pensamiento numérico aunque se le caracterizó en dicho pensamiento también se le puede ubicar en el pensamiento espacial y el pensamiento variacional debido a que exige que la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ se reconozca a partir de diferentes métodos numéricos, geométricos y algebraicos, este estándar es uno de los que dentro de todo el ciclo décimo-undécimo muestra una pequeña especificidad respecto al infinito matemático ya que de él pueden desprenderse los conceptos de divisibilidad indefinida y la medición de números para hallar una medida común, además de esto, también podría ser configurado hacia la reafirmación del concepto de conjunto numérico infinito discreto y continuo de forma intuitiva a partir del concepto de biyección.

Por otro lado, en los DBAM se puede vislumbrar que solo hay un enunciado que hace referencia hacia la infinitud de un intervalo en los reales que puede ser guiado hacia la comprensión de la propiedad de densidad de los $\mathbb{Q}$ no obstante, es válido aclarar que el enunciado de este nivel establece que el estudiante reconoce que entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números, esto implica desde su sintaxis que el estudiante ya ha construido el concepto de número real y que diferencia éstos de los racionales puesto que la densidad es una propiedad que en términos epistemológicos permitió la construcción de los números irracionales para dar paso a los reales y no a la inversa, aparte, una de las maneras o formas de visualizar la densidad de los racionales es a través del concepto de divisibilidad indefinida lo cual relaciona las dos categorías aquí seleccionadas.

4.3.6.2. Categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores

4.3.6.2.1. Nivel 1 (B1)

De las frecuencias de este nivel para esta categoría se vislumbra que en los EBCM existe un estándar perteneciente al pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos que hace alusión a utilizar técnicas de aproximación para procesos infinitos numéricos, una de esas técnicas está relaciona con la posibilidad de divisibilidad, lo que puede implicar que se genere un proceso finito o infinito que permite diferenciar un número racional de un irracional al haber números que no tienen una medida común conllevando a la representación como fracción continua de un número racional o irracional, además de lo anterior, es válido expresar que este estándar es uno de los más específicos respecto al infinito matemático aunque le falta claridad pues no especifica qué tipo de infinito está tratando en dicho proceso si el potencial o el actual. Por otro lado en los DBAM no existen enunciados que hagan alusión a procesos algoritmos o de reproducción respecto a esta categoría.

4.3.6.2.2. Nivel 2 (B2)

Respecto a este nivel en esta categoría en los EBCM se puede vislumbrar que existe un estándar perteneciente al pensamiento numérico y sistemas numéricos que se refiere a establecer relaciones y diferencias entre distintas representaciones de un número real, esto permite comprender que un número irracional puede ser expresado en forma decimal infinita no periódica que surge de un proceso de divisibilidad o medición indefinida entre dos números uno irracional y otro racional además de lo anterior, también genera reconocer la igualdad entre la representación de un número irracional como fracción continua y su representación decimal en cuyo proceso de representación se puede vislumbrar la doble acepción del infinito matemático, esto es, potencial y actual, cabe aclarar que cuando se exige comprender la igualdad entre las distintas representaciones de un número real el estudiante debe tener claro el infinito actual puesto que no es lo mismo por ejemplo $\sqrt{2}$ que $1{,}41\ldots$ ya que la primera representación es netamente infinito actual mientras que la segunda representación puede interpretarse como un proceso indefinido o una aproximación que puede interpretarse como infinito en potencia. Por otro lado en los DBAM no se encontraron enunciados que hicieran alusión a este tipo de tareas y conceptos.

Sumado al anterior pensamiento en los EBCM existen dos estándares pertenecientes al pensamiento métrico y sistemas de medidas que hacen alusión a justificar procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición además de exigirle al estudiante el diseño de estrategias para tal justificación; estos estándares pueden vincular la comprensión del infinito actual y potencial con el uso de representaciones numéricas y geométricas tales como los puntos suspensivos en la expansión decimal de un número que hace referencia a un proceso potencialmente infinito o la barra sobre el periodo de la expansión decimal de un número racional que hace referencia al infinito actual, a su vez, también vincula conceptos como el de límite desde una interpretación intuitiva como proceso de aproximación o el cual debe llevar a la naturaleza del último elemento de la sucesión de tales aproximaciones que conlleve a la comprensión del infinito actual. Contrario a lo que se vislumbra en los estándares, en los DBA no existen enunciados que den cuenta de proceso de medición que implican tanto lo finito como el infinito potencial y actual respecto al pensamiento métrico.

Opuesto a lo que se ha manifestado en los anteriores párrafos, en los EBCM frente al pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos no se encontró ningún estándar para esta categoría, sin embargo, en los DBAM se encontró un enunciado que hace explicito el proceso de límite de una sucesión, esto conlleva a pensar que dicho enunciado puede ser guiado hacia comprender la diferencia entre número real y número irracional, esto es, entender la doble acepción de infinito debido a que una forma de comprender lo mencionado es a través de sucesiones cuyos dominios sean los enteros positivos y cuyos rangos sean subconjuntos de los reales puestos en biyección reforzando el concepto de conjunto infinito discreto, a su vez este estándar respecto al infinito implica un entendimiento por parte del estudiante respecto al infinito actual puesto que el proceso de límite debe llevarlo a comprender la naturaleza del último elemento de una sucesión.

4.3.6.2.3. Nivel 3 (B3)

Dentro de los estándares y enunciados expuestos hasta el momento y al igual que en el nivel 3 de la categoría anterior, se vislumbra que en este nivel y para esta categoría dichos estándares y enunciados son más explícitos respecto a conceptos que hacen alusión al infinito matemático, en ese sentido, en los EBCM se puede evidenciar para este nivel y categoría un estándar perteneciente al pensamiento numérico y sistemas numéricos que hace referencia a analizar representaciones decimales de números reales para diferenciar entre racionales e irracionales, esto, acarrea comprender que un número racional tiene expansión decimal finita o infinita periódica en cuyo proceso se puede evidenciar una concepción actual del infinito y a su vez comprender que un número irracional tiene una expansión decimal infinita no periódica en cuyo proceso para determinar la expansión decimal se vincula la posibilidad de divisibilidad definida o indefinida y a su vez se relacionan dos expresiones distintas de número real como fracción continua y como expansión decimal.

Además de lo anterior, se puede vincular la idea de sucesión al obtener cada reducta de la fracción continua conforme se realiza el proceso infinito de división. Por otro lado, en los

DBAM se pueden vislumbrar un enunciado perteneciente al pensamiento numérico y sistemas numéricos que alude a reconocer que no todos los números son racionales, esto es, no todos los números se puede expresar como un cociente de enteros, esto compromete reconocer el concepto de inconmensurabilidad y por tanto a preguntarse por la naturaleza del último elemento al que se aproxima cada división sucesiva. Como se puede analizar existe una coherencia en cuanto al pensamiento y el objetivo del enunciado y estándar entre los EBCM y los DBAM para este nivel.

4.4. Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes

En este apartado de acuerdo al marco teórico y las categorías de análisis que se establecen a través de éste, se espera que los resultados del análisis de contenido permitan reconocer e identificar el grado de explicitación, tipologías y fenómenos asociados al infinito matemático, toda vez que se tiene el entramaje requerido tanto conceptual como metodológico.

4.4.1. Respecto al grado de explicitación

Conforme al análisis de contenido realizado y a los resultados obtenidos, se deduce que en los referentes educativos colombianos en específico, en los EBCM y DBAM para la unidad de análisis décimo-undécimo, no se encuentran alusiones explicitas al objeto matemático infinito ya que para ello, se requiere de argumentar la importancia de este objeto en la enseñanza-aprendizaje de la matemática y en específico del cálculo la cual, en los documentos analizados no se vislumbra esclarecida, no obstante, algunos documentos actuales como el de Artigue (1995), el de Neira (2012) y el de Belmonte (2009) entre otros, sugieren que bastantes argumentos se han develado a través de la investigación en didáctica del cálculo para que se le otorgue importancia al infinito matemático tanto en la educación básica y medica como en la educación superior.

Conforme a lo anterior, es válido mencionar que en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas se vislumbra elementos que contribuyen a realizar un comparativo respecto a la explicitación del objeto matemático infinito ya que, desde las premisas de los EBCM y de los DBAM se argumenta la interconexión de estos tres documentos.

El Ministerio de educación nacional en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998), expresa en su breve presentación sobre la historia de la variación que, uno de los elementos más importantes en la variación son los procesos infinitos que yacen de ésta, a su vez manifiesta que el uso de tablas para representar el comportamiento de una función contribuye a que el estudiante comprenda aparte de la correspondencia entre dos conjuntos de valores desde una interpretación del infinito potencial que, los valores de reemplazo de una función son infinitos. Además de lo anterior, en los lineamientos curriculares propuestos por el MEN (1998) se da claridad e indicación al docente sobre los registros semióticos más propicios para el proceso de enseñanza-aprendizaje del continuo numérico los cuales son, el numérico y el geométrico.

Aunado a lo expresado en tal referente curricular colombiano se puede entrever una clara intencionalidad respecto a la construcción del objeto matemático infinito ya que, indica que los estudiantes desde muy temprana edad tienen contacto con éste, en el hecho de que al contar la secuencia del conjunto de los números naturales puede reconocer que tal conteo no tiene un elemento máximo aparte, también sugiere que los procesos infinitos deben ser introducidos en el registro geométrico para que no se tengan dificultades respecto a la continuidad que permite la divisibilidad, dejando entrever estos argumentos un atisbo de importancia del objeto matemático infinito en la matemática escolar que no se vislumbra en los EBCM y en los DBAM.

En coherencia a lo anterior, otro elemento importante para la explicitación de este objeto matemático tiene que ver con la particularización del infinito, esto es, diferenciar pero a su vez relacionar tanto el infinito potencial como el actual lo cual, dentro de los resultados obtenido tampoco se vislumbra clarificado. A pesar de la no explicitación de estándares y enunciados en los documentos analizados, por lo pronto, sí se encuentran elementos a los que se les puede asociar el objeto matemático infinito. Dentro de los objetivos encontrados en el corpus los más explícitos son:

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. (EBCM)
- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. (EBCM)
- Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales. (DBAM)
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. (EBCM)

En coherencia a lo expuesto con anterioridad se tiene, que la explicitación de estos objetivos es nula puesto que, según lo investigado el objeto matemático infinito tiene al igual que otros objetos del cálculo diversos registros, procedimientos algorítmicos y conceptos asociados que no son clarificados en la sintaxis de estos objetivos, esto es, cuáles son lo que aluden al infinito en potencia y cuáles al infinito actual, a su vez, se puede inferir conforme a lo investigado específicamente en lo que respecta a la perspectiva epistemológica, que no se tiene una particularización clara del infinito potencial y del actual, aunque, desde una interpretación mucho más aguda de la secuencia de estándares y derechos básicos de aprendizaje categorizados en el análisis de contenido, se puede reconocer, que tales objetivos lo que pretenden en su trasfondo es que el estudiante pase de un dominio discreto a un dominio continuo en registros semióticos numéricos, geométricos y algebraicos-analíticos.

Así mismo, se puede vislumbrar una coherencia del lugar que ocupan estos objetivos frente a lo que se estableció con anterioridad respecto a que en la unidad de análisis seleccionada es posible vincular el objeto matemático infinito ya que, la mayoría de estos objetivos casi explícitos respecto al infinito matemático se caracterizaron en el nivel 2 y nivel 3 que implican más allá de la reproducción de procedimientos de objetos asociados al infinito matemático comprender el comportamiento del infinito en matemáticas.

4.4.2. Respecto a las tipologías

Aunque en el apartado anterior se mencionó que no se expone en los EBCM y en los DBAM una particularización clara del infinito actual y del infinito potencial, por lo pronto si se puede inferir que se enfatiza mucho más en el infinito potencial que en el actual ya que, si se repasan los estándares y los derechos básicos para el área de matemáticas en su totalidad existen más objetos asociados al infinito potencial que al infinito actual, para esclarecer y teniendo en cuenta las categorías de análisis seleccionadas, la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos, lo que se buscaba al seleccionarla era encontrar estándares y enunciados que llevaran del infinito discreto al infinito continuo, mientras que con la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores se buscaba era encontrar estándares y enunciados en el corpus respecto a la unidad de análisis que trabajaran el concepto de infinitesimal, número real y en general encontrar elementos que llevaran a pensar en el infinito actual.

De lo anterior, y teniendo en cuenta las frecuencias para cada una de las categorías se puede inferir que, la tipología del infinito que promueven los EBCM y los DBAM es la potencial ya que, las frecuencias para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos son mucho mayores que las encontradas en la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores, ya que los objetivos y enunciados para la primera categoría de las nombradas buscan que el estudiante comprenda el concepto de densidad del conjunto de los $\mathbb{Q}$ que se traslada a los $\mathbb{R}$, lo anterior invita a trabajar sólo con conjuntos numerables, no obstante, le sigue faltando profundidad al concepto de completez de los $\mathbb{R}$ en los referentes curriculares analizados ya que, los bajos valores de las frecuencias para la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores así los corroboran.

4.4.3. Respecto a los fenómenos asociados

Dentro de lo que se pudo deducir del proceso de análisis de contenido, se tiene que la selección de las categorías de análisis fue acertada ya que, en los EBCM y en los DBAM se tienen objetivos y conceptos asociados a éstas. Para la categoría 1 comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos, se pudo vislumbrar que se realiza un énfasis importante en estos documentos curriculares al concepto de función que como ya se ha expresado, es de suma importancia para vincular algunos conceptos y registros propios de la teoría de conjuntos como también para la comprensión del concepto de biyección entre dos conjuntos ya sea de puntos o de números.

Para la categoría 2, la cual reúne varios conceptos como el de inconmensurabilidad, número real, sucesión entre otros, se pudo vislumbrar en los EBCM y en los DBAM objetivos que hacían alusión a tales objetos y conceptos matemáticos, por ejemplo, se tienen la comparación de números, comprender la densidad del conjunto de los números racionales y la representación de un número real en distintos registros semióticos, lo cual implica comprenderlo e interpretarlo como fracción continua que contribuye a entender la naturaleza y particularidad del número real, no obstante, no contribuye a entender el infinito actual ya que para ello requiere de comprender la naturaleza del último elemento de la sucesión a la que no se le pueden asignar las mismas propiedades de los elementos que componen la sucesión, esto, supone comprender el concepto de límite que conlleve al infinito actual para comprender entre otras cosas que $0,\overline{9} = 1$ como asevera Belmonte (2009) y Salat (2010) y, se reinterprete la acepción del infinito como un proceso indefinido aunque sea en principio una interpretación provisional del mismo.

En consecuencia de lo anterior, se tiene que los fenómenos en los que puede verse implicado el objeto matemático infinito en los referentes curriculares colombianos analizados son, el de función y el de medida de números, aunque, contradictoriamente en los DBAM a diferencia de los EBCM no se encuentran enunciados explícitos o particularizados que puedan ser propios del pensamiento métrico y sistemas de medida.

Sumado a lo anterior, se puede deducir de los resultados obtenidos, que los registros semióticos más usados en los referentes educativos curriculares analizados, esto es, lo registros semióticos o de representación en los que se pueden encontrar objetivos y enunciados relacionados con el infinito matemático son el numérico, el geométrico y el algebraico-analítico que corresponden al pensamiento numérico, pensamiento espacial y pensamiento variacional respectivamente, sin embargo, en los EBCM se pudo encontrar objetivos pertenecientes a los pensamientos aleatorio y métricos donde se puede vincular el objeto matemático infinito en comparación con los DBAM, donde no se encontraron enunciados que se pudieran encasillar en tales pensamientos, a su vez, según los resultados obtenidos en el análisis de contenido se tiene que, el registro semiótico más usado para representar el objeto matemático infinito es el variacional contrario a las recomendaciones propuestas por los lineamientos curriculares MEN (1998) en donde se indica introducir los procesos infinitos a través del registro semiótico geométrico.

Como consecuencia de lo expuesto, una deducción más que se puede vislumbrar conforme a lo que se ha mencionado de lo encontrado en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas es que, ni los EBCM ni los DBAM tienen en cuenta en su totalidad las recomendaciones respecto a los proceso infinitos indicadas por el MEN (1998) ya que, como se puede observar en las primeras gráficas expuestas con anterioridad, que las frecuencias del pensamiento espacial son pocas respecto a las encontradas en el pensamiento numérico y variacional, lo cual indica una disociación entre los documentos respecto al objeto matemático infinito.

Así mismo, al observar las mismas gráficas se puede inferir que los EBCM tienen mayores frecuencias en el pensamiento numérico contrario a los DBAM que tienen mayores frecuencias en el pensamiento variacional, lo cual indica que, estos dos documentos no están equilibrados frente a los objetivos y contenidos que pueden ser asociados al infinito matemático, además de lo descrito, también se puede aseverar que los EBCM están más equilibrados frente a lo propuesto en los lineamientos curriculares para el área de matemáticos respecto del infinito matemático que los DBAM, a los cuales, se les visualiza una clara intensión de priorizar los procesos infinitos a través del pensamiento variacional y sus sistemas asociados, esto, contradice los argumentos propuestos en cada uno de los elementos del corpus seleccionado ya que, según los resultados aquí obtenidos se evidencia poca relación y coherencia entre los lineamientos curriculares, los EBCM y los DBAM.

5. CONCLUSIONES

Para finalizar este proceso investigativo, en este apartado se presentarán las apreciaciones generales respecto a los objetivos planteados, así como también se describirá en términos generales la posible respuesta a la pregunta planteada que ha encaminado esta monografía y por último se darán a conocer algunas recomendaciones y alcances de la misma.

Conforme a lo descrito, lo primero que se abordará serán los objetivos específicos, a saber:

- Construir un marco teórico referencial para describir y caracterizar el objeto matemático infinito que permita a su vez definir categorías y objetivos de referencia para el análisis de contenido de los EBCM y DBAM en el ciclo V (décimo-undécimo).

Como se puede observar desde el capítulo segundo al tercero, se realizó un proceso riguroso que permitiera establecer unos mínimos recurrentes respecto a la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático infinito, estos mínimos a su vez generaron la selección y establecimiento de las categorías de análisis que como se puede observar en los resultados obtenidos, las categorías seleccionadas están en coherencia con lo propuesto en lineamientos curriculares para el área de matemáticas MEN (1998) respecto a los registros semióticos más utilizados para la enseñanza-aprendizaje del infinito matemático y respecto a los fenómenos que contribuyen a introducirlo en la educación media correspondiente a la unidad de análisis especificada para el análisis de contenido realizado.

Así mismo, este marco teórico permitió la clarificación conceptual necesaria para reconocer y establecer algunos aspectos prioritarios que dan cuenta de la explicitación del objeto matemático infinito en el corpus de documentos curriculares colombianos seleccionados, esto es, contemplar diversos argumentos que expresan la importancia de vincular desde la educación básica y media dicho objeto, y a su vez permitió identificar, la importancia que tiene mantener ese equilibrio entre la particularización del infinito matemático en su doble acepción con su indisociable interconexión para la construcción conceptual del infinito actual.

Sumado a lo anterior, este marco teórico también permitió abrir el campo de conocimientos que se tenían previamente respecto al objeto matemático infinito y la enseñanza-aprendizaje del mismo ya que, en el transcurso de su construcción se reconocieron distintas interpretaciones, dificultades y problemáticas que acarrea el estudio del infinito matemático en los escolares tanto en la educación básica como en la educación superior, pero sin lugar a dudas, el aspecto más importante que se visualizó en este marco teórico es la latente influencia que tiene el infinito matemático en la enseñanza-aprendizaje del cálculo, ya que al ser su cimiento debe ser un elemento clave sobre el que se debe hacer énfasis para realizar un tratamiento o por lo menos establecer el choque cognitivo y contraintuitivo de corte epistemológico que obstaculiza una mejor comprensión de los procesos infinitos propios del cálculo relacionados en su mayoría con el concepto de límite.

En coherencia al orden propuesto, el siguiente objetivo específico es:

- Realizar un análisis de contenido a los EBCM y DBAM en la unidad de análisis ciclo V (décimo-undécimo) desde la apuesta teórica de Rico (2013).

Como se puede evidenciar en el capítulo tres, este objetivo fue desarrollado en su totalidad de acuerdo a las dimensiones regresiva y reductora según Rico (2013) propias del análisis de contenido, esto, se puede sustentar en todo el proceso que se realizó para la selección de categorías, establecimiento de niveles y objetivos posibles de referencia ya que, esto permitió desmenuzar el corpus de contenido respecto a la unidad de análisis en elementos más simples que permitieran identificar la explicitación del objeto matemático infinito en los EBCM y DBAM.

De lo expuesto cabe aclarar, que considerando lo propuesto por Rico (1997) respecto a que los documentos curriculares al ser generales no pueden cobijar todos los saberes a ser enseñados en las aulas, esto, fue un detonante en el proceso de análisis de contenido ya que las primeras categorías y objetivos de referencia de estas categorías respecto a la unidad de análisis tenían un carácter discreto que no permitía identificar los matices de la explicitación del infinito en los referentes ya mencionados, en consecuencia, se replantearon en el proceso de construcción de esta monografía las categorías de análisis según las recomendaciones didácticas de diversos autores ya explicitados en el marco teórico y a su vez se replantearon los objetivos de referencia por elementos asequibles y posibles de encontrar como mínimo en la matemática escolar, lo cual, generó el análisis de contenido ya expuesto.

El tercer objetivo específico de esta monografía se refiere a:

- ❖ Identificar los registros semióticos del objeto matemático infinito de acuerdo a los resultados del análisis de contenido en los EBCM y DBAM para el ciclo V (décimo-undécimo).

Como se puede dilucidar en el capítulo cuatro, el análisis de contenido permitió identificar que los EBCM y los DBAM promueven en su mayoría el infinito en potencia, lo cual se puede sustentar al comparar las frecuencias obtenidas para la categoría comparación y equivalencia de conjuntos discretos y continuos con respecto a las frecuencias asociadas a la categoría divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores siendo las de la primera cantería mencionada mayores que las de la segunda.

A su vez, se pudo encontrar que en los EBCM los registros semióticos predominantes para representar el infinito matemático son el numérico y el geométrico, no obstante, en este elemento del *corpus* respecto a la unidad de análisis se pudo evidenciar que existen estándares de los pensamientos métrico, variacional y aleatorio que se pueden asociar al objeto matemático infinito, mientras que en los DBAM se pudo evidenciar un predominio por registros semióticos del pensamiento variacional para representar el infinito, esto sugiere que, existe un desequilibrio tanto en los registros semióticos para representar el infinito como en la cantidad de elementos de cada corpus que pueden asociarse al mismo por tanto, no se presenta una relación estrecha entre los DBAM y los EBCM.

Por último el cuarto objetivo específico expresa:

- ❖ Determinar si existe relación entre los EBCM y DBAM respecto a los tipos de representación del objeto matemático infinito.

De los resultados obtenidos a través del análisis de contenido se pudo determinar que, las representaciones más utilizadas en los EBCM son las numéricas y las geométricas siguiendo las recomendaciones didácticas propuestas por el MEN (1998) en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, así mismo y aunque no con la misma frecuencia, se vislumbran representaciones algebraicas-analíticas.

En contraste, en los DBAM se observa un predominio por las representaciones algebraicas-analíticas y geométricas, esto, sugiere como se puede constatar en el capítulo cuatro que los EBCM y los DBAM no están equilibrados respecto a los registros semióticos para representar el objeto matemático infinito ni tampoco llegan a un acuerdo respecto a lo que se pretende que aprenda el estudiantes frente al infinito matemático ya que, como lo evoca Neira (2012) el exceso del registro algebraico-analítico en el proceso de enseñanza del infinito y del cálculo obstaculiza una mejor comprensión de los objetos matemáticos asociados al cálculo.

A su vez, estos resultados permiten deducir que respecto del objeto matemático infinito en la unidad de análisis seleccionada se vislumbran pocos puntos de concordancia entre los LCM, los EBCM y los DBAM ya que, la apuesta de enseñanza-aprendizaje de los LCM busca que el estudiante tenga contacto con el objeto matemático infinito desde registros que permitan vincular la intuición como detonante para la comprensión de dicho objeto matemático tal y como se manifiesta en la apuesta teórica de Belmonte (2009), que pasa de representaciones geométricas a las numéricas para por último llegar a las algebraicas-analíticas.

En coherencia, se puede concluir que tanto los EBCM como los DBAM contradicen su apuesta que asevera estar en concordancia con lo propuesto en los LCM, en consecuencia, pensar una relación transitiva entre los LCM, EBCM y DBAM es equivoco respecto al objeto matemático infinito, sin embargo, se debe mencionar que los EBCM tienen mayor relación con

LCM ya que existen estándares en el pensamiento numérico y espacial que sugieren que los EBCM consideran lo propuesto en los LCM; a su vez, otro argumento que contribuye a resaltar esta relación entre los LCM y EBC se vislumbra en los estándares de los pensamientos métrico, aleatorio y variacional que se caracterizaron en el análisis de contenido, mientras que en los DBAM el predominio por los registros algebraicos-analíticos nubla toda relación con los LCM y EBCM, por tanto, los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas en la unidad de análisis seleccionada frente al infinito matemático están más equilibrados que los DBAM con respecto a los LCM.

Otro elemento que refuerza la poca relación entre los EBCM y los DBAM es que, estos últimos no tienen en cuenta en su estructura la coherencia vertical y horizontal que tiene la estructura de los EBCM, esto, es tal vez la causa de divergencia de los propósitos entre los estándares y enunciados respecto al objeto matemático infinito en la unidad de análisis seleccionada.

Habiendo expuesto las conclusiones frente a los objetivos específicos establecidos en esta monografía, a continuación se presentarán conclusiones respecto al objetivo general para continuar de manera inductiva el desarrollo de este capítulo final, a saber:

- ❖ Develar la existencia de especificidad del objeto matemático "*infinito*" y su tipología en los EBCM y DBAM respecto a la unidad de análisis ciclo V (décimo-undécimo) conforme a los resultados del análisis de contenido realizado.

Desde el mismo momento en que se empezó a pensar y construir este trabajo de grado, se fueron reconociendo tres aspectos fundamentales para la condición de especificidad del objeto matemático infinito en los referentes educativos curriculares colombianos seleccionados para el análisis de contenido que son, la particularización del objeto matemático infinito y la importancia de su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje no solo del mismo sino para el cálculo en la educación básica y media, y por último, las recomendaciones didácticas para su enseñanza-aprendizaje.

Para esclarecer precedente, respecto a la particularización del objeto matemático infinito según lo analizado en el marco teórico y en el análisis de contenido realizado es importante distinguir el infinito potencial del infinito actual, no obstante, según lo investigado, para una comprensión del infinito actual se hace necesario considerar ambos simultáneamente sin que esta doble acepción cause choques cognitivos y desequilibrios ya que esta es la naturaleza del infinito en matemáticas, aunque cabe aclarar, su proceso de enseñanza-aprendizaje parte de lo intuitivo y lo contraintuitivo.

Respecto al segundo aspecto, es decir, respecto a la importancia de su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo y para el cálculo se tiene que según lo investigado, al ser el infinito un obstáculo epistemológico y base del cálculo, es necesario dedicar parte del proceso escolar al tratamiento de tal obstáculo, con el propósito de gestar las bases para una mejor comprensión de los objetos matemáticos del cálculo y tratar de evitar las prácticas de enseñanza que reducen tales objetos matemáticos a lo algebraico al menos teóricamente.

Por último, respecto a las recomendaciones didácticas para la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático infinito según lo investigado se tiene que, es importante partir de la intuición para llegar a contradecirla, lo cual, es un detonante para el aprendizaje, a su vez, es necesario reconocer que cada uno de los registros semióticos para representar el objeto matemático infinito y del cálculo acarrean sus propias dificultades y contradicciones que no son excusa para eliminar del currículo colombiano el infinito en la educación básica y media. Así mismo, identificar que los registros semióticos numéricos y geométricos son fundamentales para introducir el objeto matemático infinito.

Entendiendo y conjugando estos tres aspectos es posible vincular en la matemática escolar el objeto matemático infinito ya que, permiten generar rutas de enseñanza-aprendizaje para la construcción del infinito matemático y mitigar como lo expresaría Neira (2012), la deserción escolar en la educación superior y los problemas de incomprensión tanto en la básica-media como en la educación superior.

En relación a lo descrito se tiene que, respecto a la particularización del objeto matemático infinito según los resultados obtenidos a través del análisis de contenido realizado, en los EBCM y en los DBAM no se vislumbra una diferenciación explicita del infinito potencial y del infinito actual, ya que los estándares y enunciados caracterizados en el análisis de contenido no guardan un equilibrio respecto a los pensamientos a los que se les vinculó ni a los propósitos en sí mismos, un ejemplo de ello se vislumbra, en el estándar que se expresa como (Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos) en comparación con el enunciado que dice (Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales.), claramente en los estándares se busca la comprensión del concepto de densidad y a su vez sugiere identificar la enumerabilidad del conjunto de los $\mathbb{Q}$ (infinito potencial) mientras que en los derechos básicos de aprendizaje se asume que el número real ya ha sido construido y a su vez sugiere que se ha comprendido el concepto de completez del conjunto de los $\mathbb{R}$ (infinito actual).

Respecto a la importancia de su papel el en proceso de enseñanza-aprendizaje, se vislumbra según los resultados que ni en los EBCM ni en los DBAM se explicita la importancia de dicho objeto matemático en la enseñanza-aprendizaje del cálculo y la variación. Respecto a las recomendaciones didácticas, en ninguno de los corpus de contenido seleccionados se expresan alusiones a los registros semióticos a utilizar en la enseñanza-aprendizaje del infinito matemático ni tampoco las dificultades que acarrean cada registro y la intuición en el proceso de aprendizaje.

En consecuencia, se puede dar una posible respuesta a la pregunta que encaminó esta pesquisa investigativa, esto es, que en la unidad de análisis seleccionada respecto al objeto matemático infinito en los EBCM y en los DBAM, no se encuentran alusiones explicitas y claras que permitan el tránsito del saber a enseñar en saber didáctizado para la comprensión del infinito matemático como elemento importante en la construcción de un puente entre el álgebra y el cálculo, esto indica, que al igual que en los objetos matemáticos del cálculo, el objeto matemático infinito se observa como una característica de los conceptos del cálculo más no como un objeto propio que al igual que la mayoría de los objetos del cálculo se enseña-aprende a través de otros registros y conceptos como el de función, conjuntos etc.

Lo anterior sugiere, en términos de la relación docente-currículo respecto al objeto matemático infinito que, la responsabilidad de vincular o no este objeto al currículo colombiano recae en los docentes, quienes deben realizar una lectura crítica y aguda de los referentes educativos curriculares para vislumbrar lo que éstos no explicitan ya que, aunque no sea evidente el objeto matemático infinito en tales referentes, entre tanto, si existen elementos que pueden ser guiados hacia la comprensión del infinito matemático y que desde lo propuesto en esta monografía es necesario realizar, ya que como lo expresa Artigue (1995), tratar de evitar las dificultades y obstáculos que conlleva el aprendizaje de los conceptos del cálculo y entre estos el infinito matemático a través de su algebrización, contrario a tratarlos los refuerza.

En consecuencia, es imperativo, desde las instituciones de educación superior que ofrecen programas de pregrado para la formación de docentes de matemáticas, realizar reformas en las que se vincule el estudio crítico del currículo de matemáticas colombiano, donde se reconozca su generalidad y lo que implica para los futuros docentes de matemáticas realizar una lectura crítica del currículo para configurar unidades didácticas y mallas curriculares conexas en cuanto a los saberes a ser enseñados en los ciclos escolares y grados específicos que permitan mitigar los desarrollos lineales del currículo como lo sugiere Bertoni (2009).

A su vez, es importante para el mejoramiento de la educación matemática y en específico para la enseñanza-aprendizaje del cálculo la vinculación de cursos para los futuros docentes donde se expongan las dificultades, obstáculos, los registros semióticos etc. Incluir apuntes de cómo el objeto matemático infinito, puede ser uno de esos elementos importantes a la hora de comprender los conceptos propios del cálculo.

Con lo expuesto hasta el momento se ha logrado identificar que, entre los referentes educativos curriculares colombianos respecto al objeto matemático infinito no muestran una estrecha relación, así mismo, se pudo identificar que la falta de equilibrio entre los EBCM y DBAM puede ser porque, los derechos básicos de aprendizaje para el área de matemáticas no tienen en cuenta la coherencia vertical y horizontal de la estructura de los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas, como tampoco tienen en cuenta los cinco tipos de pensamiento matemático propuestos en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas establecidos por el (MEN, 1998).

Con base en los resultados de esta monografía, se comprende que debe promoverse una reforma de los referentes educativos curriculares actuales para que la falta de interconexión entre los mismos, no obstaculice los procesos de transposición didáctica, en específico, para la transformación del saber a enseñar en saber didáctizado. Considerando que cada uno de los referentes educativos curriculares colombianos analizados busca que el profesor a través de su saber profesional proponga desarrollos curriculares no lineales que tengan como base lo propuesto en los mismos, pero, como ya se expresó, esta inferencia debe estar acompañada de reformas tanto en las licenciaturas como en los referentes curriculares.

Para finalizar, se debe expresar que esta monografía ha permitido reconocer campos poco abordados en la investigación en educación matemática como los son, el mirar, comprender y profundizar en el campo de la educación matemática en Colombia, desde el análisis de los referentes educativos curriculares colombianos y los mínimos didácticos establecidos para el tránsito aritmética-algebra y el importante papel de la historia en los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

Albadan, J., Franco , M. (2016). *Revisión documental de los DBAM en su primera versión*. Documento de trabajo interno. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.

Aponte, M. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática* (Tesis de maestría). Universidad del Valle. Colombia: Santiago de Cali.

Arrigo, G., D'Amore, B., Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Ayres, F. (2003). *Algebra moderna. Recuperado de http://www.biblioises.com.ar/Contenido/500/510/Algebra%20Moderna%20-%20Schaum.pdf*

Bertoni, E. (2009). *La transposición didáctica*. Un campo de reflexión con múltiples posibilidades para la docencia. *Área de fortalecimiento didáctico 2009 MODULO II. 1-9.* Recuperado de: http://www.cse.edu.uy/sites/www.cse.edu.uy/files/documentos/Bertoni%20-%20Transposicion_didactica.pdf

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito* (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. *4*(3), 219-236.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial AIQUE.

D'Amore, B. (2011). *La didáctica del infinito matemático*. Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagógica de Bogotá. *In: AA. VV. (2011). Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadística*, Bogotá, 8-10 settembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5, 21-29.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla M., Fandiño M., Piatti A., Rodríguez Bejarano J.,... Sbaragli S. (2006). *El "sentido del infinito"*. Epsilon. Sevilla, España. 22(2), n° 65, 187-216. ISSN: 1131-9321.

Garbin, S. (2005). *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito?. La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos*. Relime, *8*(2), 169-193. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf

Gómez, Pedro (2001). *Conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas al inicio de su formación*. En Perales, F. J.; García, A. L.; Rivera, E.; Bernal, J.; Maeso, F.; Muros, J.; Rico, L.; Roldán, J. (Eds.), Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI (pp. 1851-1864). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Hitt, F. (s.f). El cálculo y su enseñanza. *El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo : infinito potencial versus infinito real*.(pp. 104-120). Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=3&index_web=9&index_mgzne

Lipschutz, S. (2003), *Teoría de conjuntos y temas afines.* Recuperado de http://www.elsolucionario.org/teoria-de-conjuntos-y-temas-afines-seymour-lipschutz-1ed/

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias para Matemáticas*. Cooperativa Editorial: Magisterio.

MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Cooperativa Editorial: Magisterio.

Mena-Lorca, A., Montoya, J., Morales, E., Parraguez, M. (2015). Relime. *El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis*. Vol. 18 (3). (pp. 330-354). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33543068003

Neira, G. (2012). *Del algebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica*. En DIE (Ed), Énfasis: pensamiento, epistemología y lenguajes matemático (pp. 13-42). Colombia, Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Boletín de la asociación matemática venezolana, 1*(2), 59-81. Recuperado de http://emis.u-strasbg.fr/journals/BAMV/conten/vol01/vol1n2p59-81.pdf

Purcell, J., Rigdon, S., Varberg, D. (2007), *Cálculo.* Cengage Learning S.A. México D.F. México.

Penalva, C. Llinares, S. (2011). Educación siglo XXI. *Didáctica de las matemáticas, Vol 30* (1). (pp. 26-51).

Rico, L. (1997-c). *Los organizadores del curriculum*. en L. RICO (coord.). La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria. Barcelona, Horsori, 39-59.

Rico, L. (2013). *El método del análisis didáctico*. UNION, 33, 11-27. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf

Stewart, J. (2010), *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* Pearson Educación de México S.A. México D.F. México.

Salat, R. (2010). Números. *El infinito en matemáticas, Vol (77)*. (75-83). Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_03.pdf

Waldegg, G. (1996). Revista educative de investigación educativa. *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual, Vol 1* (1), 107-122. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo;jsessionid=1776BB6E5110B618FAC37FAE96694334.dialnet02?codigo=300433

ANEXOS

Anexo 1

Ejemplo histórico expuesto por Galileo Galilei, a saber:

Sea $f(n) = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, esta función así definida es una aplicación de $\mathbb{N} \to P$, donde $P = \{conjunto\ de\ los\ números\ pares\}$ y $P \subset \mathbb{N}$, ahora bien, según la definición de función biyectiva presentada con anterioridad se tiene que a cada n del dominio $\mathbb{N}$ le corresponde un $f(n)$ en el codominio P por tanto y a su vez cada $f(n)$ del codominio es imagen de un elemento n de dominio $\mathbb{N}$ por tanto cumple la condición de biyectividad para esclarecer:

$$\begin{array}{cc}
f(n) = 2n & f(n) \\
f(1) = 2(1) = & 2 \\
f(2) = 2(2) = & 4 \\
f(3) = 2(3) = & 6 \\
\vdots & \vdots \\
f(k) = 2(k) = & 2k \\
f(k+1) = 2(k+1) & 2k+1
\end{array}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y por la definición 9-1 el conjunto $P \sim \mathbb{N}$ en consecuencia por la definición 2 el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito ya que $P \subset \mathbb{N}$ y como cada elemento $n \in \mathbb{N}$ tiene una imagen $f(n) \in P$ entonces por la definición 9-3 P es enumerable y tiene mismo cardinal $\aleph_0$ del conjunto $\mathbb{N}$.

Por otro lado supóngase que el intervalo $[0,1]$ es numerable, al ser numerable cada uno de los números comprendidos entre el 0 y el 1 se pueden poner correspondencia biunívoca con los $\mathbb{N}$ por tanto $[0,1] \sim \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{cases} 1 & 0{,}11011235\ldots \\ 2 & 0{,}24103678\ldots \\ 3 & 0{,}30147885\ldots \\ 4 & 0{,}41596088\ldots \\ 5 & 0{,}56882011\ldots \\ 6 & 0{,}67301265\ldots \\ 7 & 0{,}71101188\ldots \\ 8 & 0{,}85012677\ldots \end{cases}$$

Ahora tómense cada digito de la diagonal y súmesele 1 a cada uno respectivamente y fórmese el número x entonces:

$$\begin{cases} 1 & 0{,}11011235\ldots \\ 2 & 0{,}24103678\ldots \\ 3 & 0{,}30147885\ldots \\ 4 & 0{,}41596088\ldots \\ 5 & 0{,}56882011\ldots \\ 6 & 0{,}67301265\ldots \\ 7 & 0{,}71101188\ldots \\ 8 & 0{,}85012677\ldots \end{cases}$$

$$x = 0{,}25203398\ldots$$

Ahora bien el número x debe estar dentro del intervalo $[0,1]$ la cuestión es en qué posición de la lista, si x estuviera en el n-ésimo lugar no sería cierto debido a que éste sería por definición distinto, pues es una unidad mayor que el n-ésimo lo cual implica que x no ha sido contemplado en el listado por tanto se llega a una contradicción puesto que se rechaza la hipótesis de que $[0,1] \sim \mathbb{N}$ ya que x no está en $[0,1]$ en consecuencia, $[0,1]$ no es numerable.

Anexo 2

En el mismo contexto geométrico se puede analizar un ejemplo de división indefinida sobre un segmento inconmensurable producido por la diagonal de un cuadrado de lado unidad donde la diagonal tiene magnitud $\sqrt{2}$.

- ✓ Constrúyase un cuadrado $ABDC$ de lado 1, esto es, $AB = BD = DC = CA = 1$, luego trácese el segmento AD que es la diagonal del cuadrado $ABDC$.

- ✓ Seguido por la relación pitagórica se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$ sustituyendo

  $a = 1$, $b = 1$ y $c = AD$ entonces

  $(AD)^2 = 1^2 + 1^2$

  Luego $(AD)^2 = 1 + 1$

  Por tanto $(AD)^2 = 2$

  Luego $AD = \sqrt{2}$

Ahora bien qué es $\sqrt{2}$, una primera aproximación a los números reales es tratar de medir a través del algoritmo de Euclides el número irracional $\sqrt{2}$, el proceso geométrico respectivo para la medición de este segmento de magnitud inconmensurable $\sqrt{2}$ es:

- Por la [pro 2, libro I] de Euclides trasládese el segmento AC sobre AD intersecando en un punto F, luego $AD = AF + FD$.
- A su vez por la [pro 2, libro I] trasládese el segmento AD sobre la prolongación hacia la derecha de AC intersecando en un punto E, luego $AD = AC + CE$.
- Por construcción se tiene que $AB = BD = DC = CA = AF$ y $AD = AE$ por ser radios de la misma circunferencia luego $AF + FD = AC + CE$ en consecuencia $FD = CE$ y por la [pro 4, libro I] se concluye que los triángulos $\Delta ACD = \Delta AFE$ son iguales e isósceles así mismo trácese $FE = AB = BD = DC = CA = AF$ y llámese I la intersección entre DC y FE.
- Seguidamente por el algoritmo de Euclides se tiene que $\frac{AD}{AC} = AF + \frac{FD}{AC}$ posteriormente por el mismo algoritmo y teniendo en cuenta que $FD = CE$ se tiene que $\frac{AC}{FD} = \frac{AC}{CE} = CG + GH + \frac{AH}{CE}$.

- Seguido por la definición de iteración que se presentó con anterioridad se repite el proceso se repite el mismo proceso inmediatamente anterior en una escala con menor magnitud, esto es, teniendo en cuenta que por la [pro 5, libro I] $FI = IC$ y $DI = IE$ respectivamente y a su vez $FD = FI = IC = CE = CG = GH$.
- Luego por la [pro 2, libro I] trasládese el segmento FI sobre el segmento $FE = AC$ por construcción intersecando en el punto J entonces $FD = FI = IC = CE = CG = GH = IJ$ en consecuencia $AC = CG + GH + AH$ es igual a $FE = FI + IJ + JE$ por construcción, en razón a lo anterior $AH = JE$ pero al ser $CE = IJ$ por la trasládese CE sobre IE que interseca en un punto K, en consecuencia $AG = GH + HA$; $IE = IJ + JE$ y $IE = EK + KI$ son iguales, esto es, $AG = IE$ y a su vez $GH + HA = IJ + JE = EK + KI$ son iguales respectivamente y por tanto $HA = JE = KI$.
- Seguidamente, por la [pro 2, libro I] trasládese IE sobre AE intersecando en un punto L, en consecuencia, $IE = KE + KI$ es igual a $LE = CE + LC$ luego $KI = LC$ y por el algoritmo de Euclides se tiene que $\frac{CE}{AH} = CM + MN + \frac{NE}{AH}$.
- Conforme a lo anterior y de acuerdo a la definición de iteración (autosemejanza) ya expuesta este proceso se puede realizar indefinidamente con el mismo patrón de construcción y medición llevándonos a obtener siempre un resto con magnitud cada vez menor, en particular desde esta construcción los restos sucesivos son FD, AH, NE.

Anexo 3

Demostración del teorema 6

Supóngase que se tiene el número racional $\frac{c}{d}$, con $d \neq 0$. Por el algoritmo de Euclides existen números naturales a_1 Y r_1 tales que:

$$c = da_1 + r_1 \quad con\ 0 \leq r_1 < d$$

Donde a_1 es el cociente y r_1 es el residuo de dividir c entre b.

Si r_1 es diferente de cero, se reitera el proceso tomando como dividendo el divisor y como divisor el residuo de la anterior división, de esta manera se tiene sucesivamente:

$$d = r_1 a_2 + r_2 \quad con\ 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 a_3 + r_3 \quad con\ 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3 a_4 + r_4\ con\ 0 < r_4 < r_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} a_{n-1} + r_{n-1} \quad con\ 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} a_n + r_n \quad con\ 0 = r_n$$

Para obtener la fracción continua correspondiente a la fracción $\frac{c}{d}$, se divide la primera igualdad entre d:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{r_1}{d}$$

E iterando el proceso anterior las demás igualdades se dividen entre $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-2}$ y r_{n-1} respectivamente obteniéndose:

$$\frac{d}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_1 = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$r_2 = a_4 + \frac{r_4}{r_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$$

Ahora se debe conseguir que el numerador de cada fracción sea 1 y se logra si se divide su numerador y denominador entre el numerador, esto es:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{r_1}{d} = a_1 + \frac{1}{\frac{d}{r_1}}$$

Finalmente sustituyendo cada fracción parcial por su equivalente se obtiene:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \cdots \frac{1}{a_n} \end{matrix}$$

Que era lo que se quería demostrar, a su vez el proceso inverso es cierto, esto es, toda fracción continua finita simple representa un número racional, en particular para la fracción:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4}}}$$

Se realizan las operaciones correspondientes de forma parcializada obteniéndose:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4}}} = \frac{a_1[a_2(a_3a_4 + b_3) + b_2a_4] + b_1(a_3a_4 + b_3)}{a_2(a_3a_4 + b_3) + b_2a_4}$$

Anexo 4

Supóngase que $AD = \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ entonces, esto es, existe un número racional $\frac{p}{q}$ tal que su cuadrado es igual a 2, es decir, $(AD)^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2}$, así mismo se debe supone que p y q no tienen factores en común, pues de tenerlos podrían ser cancelados desde el primer momento, luego multiplicando a ambos lados de la igualdad por q^2 se tiene que $2q^2 = p^2$ por lo cual p^2 es par en consecuencia p a su vez debe ser par, hágase $p = 2r$, sustituyendo en la ecuación p por $2r$ se obtiene $2q^2 = (2r)^2$ por tanto $2q^2 = 4r$, dividiendo a ambos lados por 2 se obtiene $q^2 = 2r$ en consecuencia q^2 es par y así mismo q debe ser también par, lo cual es una contradicción, puesto que sí p y q son pares tienen factores comunes y en consecuencia existiría un racional con expresión como fracción continua finita tal que su cuadrado sea igual a 2 lo cual no es cierto, por tanto no existe ningún $\frac{p}{q}$ cuyo cuadrado sea 2.

Anexo 5

Sea la sucesión definida por la expresión $a_n = \frac{n^2}{2^n}\ con\ n \geq 1$, algunos términos de la sucesión son:

$$a_1 = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$$

$$a_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}$$

$$a_6 = \frac{6^2}{2^6} = \frac{36}{64}$$

$$\vdots$$

Entonces $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}$ ... como se puede observar para cuando $n \geq 3$ la sucesión a_n parece decreciente, para ellos se debe recurrir a lo siguiente:

$$a_n > a_{n+1} \; entonces$$

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \; multiplicando \; por \; 2^{n+1} \; en \; ambos \; lados$$

$$\frac{(2^{n+1})n^2}{2^n} > \frac{(2^{n+1})(n+1)^2}{2^{n+1}} \; por \; propiedades \; de \; los \; exponenetes$$

$$\frac{2^n 2n^2}{2^n} > \frac{2^n 2(n+1)^2}{2^n 2} \; luego$$

$$2n^2 > (n+1)^2 \; descomponiendo \; el \; binomio \; al \; cuadrado$$

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1 \; restando \; n \; en \; ambos \; lados$$

$$2n^2 - n^2 > n^2 - n^2 + 2n + 1 \; luego$$

$$n^2 > 2n + 1 \; restando \; 2n \; en \; ambos \; lados$$

$$n^2 - 2n > 2n - 2n + 1 \; luego \; operando \; y \; factorando$$

$$n(n-2) > 1 \; lo \; cual \; es \; cierto \; para \; n \geq 3$$

$$tómese \; n = 3 \; entonces \; 3(3-2) > 1 luego$$

$$3 > 1$$

Anexo 6

Definición 6

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denótese con S_n su n-ésima suma parcial, entonces:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe como número real, entonces la serie $\sum a_n$ se llama convergente y se escribe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad o \; \sum_{i=1}^{n} a_i = S$$

Donde el número S se denomina suma de la serie. Por otro lado si la sucesión $\{S_n\}$ es divergente, entonces la serie infinita es divergente. De acuerdo a lo anterior se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ahora bien un ejemplo importante para entender el concepto de infinito es la serie geométrica, esto es:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad con\ a \neq 0$$

Entonces cada término se obtiene del anterior multiplicando por la razón común r. Si $r = 1$ entonces, $S_n = a + a + a + \cdots = an \to \pm\infty$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe en consecuencia la serie geométrica diverge, pero, si $r \neq 1$ entonces:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}\ multiplicando\ por\ r$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$restando\ ambas\ igualdades\ se\ tiene$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n\ factorando$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

$$dividiendo\ por\ (1 - r)$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}\ factorando\ el\ numerador$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

De lo anterior se tiene que si $r = \frac{1}{k}$ $con\ k \neq 0$ entonces $r^n = \left(\frac{1}{k}\right)^n$ luego $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n =$ 0 ya que conforme $n \to \infty$ la razón $\left(\frac{1}{k}\right)^n$ tiende a 0 ya que $\lim_{n\to\infty} k^n = \infty$, en consecuencia de lo anterior:

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

Del anterior análisis surge el siguiente teorema:

La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}\ con\ |r| < 1$$

Si $|r| \geq 1$ entonces la serie geométrica es divergente.