

**DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN
ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

Presentado por:

DIEGO ALEXANDER GONZÁLEZ QUESADA
Código: 20061145005

CHRISTIAN DAVID OLIVEROS MOLÍNA
Código: 20062145025

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016**

**DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN
ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

Presentado por:

DIEGO ALEXANDER GONZÁLEZ QUESADA
Código: 20061145005

CHRISTIAN DAVID OLIVEROS MOLÍNA
Código: 20062145025

Directora:

DIANA DEL PILAR RODRÍGUEZ CASTILLO
MAGISTER EN ESTADÍSTICA

Codirector:

ALBERTO FORERO
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016**

NOTA ACEPTACIÓN

APROBADO POR:

DIRECTORA

Diana del Pilar Rodríguez Castillo

Codirector

Alberto Forero

JURADO

Bogotá, 2016

*Con esmero comprendí que los logros más relevantes de la vida no sólo dependen de nuestros esfuerzos, sino
También de las personas que han caminado conmigo y que hoy me acompañan.
Infinitas gracias por la compañía y el apoyo a mi familia.*

DIEGO ALEXANDER GONZALEZ QUESADA

Esta es la última etapa de un proceso que inicié con el apoyo de muchas personas que me permitieron alcanzar una de las metas más importantes de mi vida. Sin el apoyo de ellos, en especial de mis padres y de mi hermano que siempre estuvieron presentes para bríndame fortaleza y paciencia, por esta razón quiero presentar mi sincera gratitud a todos sus esfuerzos y que aún quedan muchas metas por cumplir juntos.

CHRISTIAN DAVID OLIVEROS MOLINA

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1 . CAPÍTULO - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	12
1.1 INTRODUCCIÓN	12
1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	12
1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	15
1.3.1 PREGUNTAS DERIVADAS.....	15
1.4 OBJETIVOS	16
1.4.1 OBJETIVO GENERAL.....	16
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.5 ANTECEDENTES	17
1.6 JUSTIFICACIÓN	19
2 . CAPÍTULO - MARCO TEÓRICO	22
2.1 INTRODUCCIÓN	22
2.2 SENTIDO ESTADÍSTICO	22
2.2.1 LA CULTURA ESTADÍSTICA.....	23
2.2.2 RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO	24
2.3 CONSIDERACIONES DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS	25
2.4 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL	27
2.4.1 PRECONCEPTOS BÁSICOS PARA EL TRABAJO ESTADÍSTICO.	27
2.4.1.1 EXPERIMENTO ALEATORIO	27
2.4.1.2 ESPACIO MUESTRAL	27
2.4.1.3 EVENTO.....	27
2.4.1.4 PERMUTACIÓN Y COMBINACIÓN	28
2.4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA PROBABILIDAD.....	28
2.4.2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD.....	29
2.4.3 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.....	29
2.4.3.1 DESARROLLO DEL CONCEPTO.....	29
2.4.3.2 CARACTERÍSTICAS.....	31

2.4.3.3 CONSTRUCCION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL	31
2.5 CATEGORIAS DE ANÁLISIS.....	33
2.6 ANALISIS CLÚSTER	40
3 . CAPÍTULO - METODOLOGÍA	41
3.1 INTRODUCCIÓN	41
3.2 CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN	41
3.3 PLAN DE TRABAJO	43
3.3.1 IDENTIFICACIÓN Y FORMULACIÓN DE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	44
3.3.2 BÚSQUEDA DE ANTECEDENTES Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.	44
3.3.3 DISEÑO DEL INSTRUMENTO.....	45
3.3.4 PILOTAJE Y EVALUACIÓN PRELIMINAR DE LA HERRAMIENTA .	45
3.3.5 APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA.....	45
3.3.6 ANÁLISIS DE LOS DATOS	45
3.3.7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	46
3.4 SECUENCIA DE ACTIVIDADES.	46
3.4.1 DESCRIPCIÓN GENERAR DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES	46
3.4.1.1 ACTIVIDAD 1	48
3.4.1.1.1 FINALIDAD.....	48
3.4.1.1.2 OBJETIVOS	48
3.4.1.1.3 TEMÁTICAS DE LA ACTIVIDAD	49
3.4.1.1.4 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	49
3.4.1.1.5 ROLES	49
3.4.1.1.6 METODOLOGÍA.....	50
3.4.1.1.7 MATERIAL REQUERIDO.....	51
3.4.1.1.8 GUÍA DEL ESTUDIANTE	51
3.4.1.2 ACTIVIDAD 2	53
3.4.1.2.1 FINALIDAD.....	53
3.4.1.2.2 OBJETIVOS	53
3.4.1.2.3 TEMÁTICAS DE LA ACTIVIDAD	54
3.4.1.2.4 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	54

3.4.1.2.5 ROLES	54
3.4.1.2.6 METODOLOGÍA.....	55
3.4.1.2.7 MATERIAL REQUERIDO.....	56
3.4.1.2.8 GUÍA DEL ESTUDIANTE	56
4 . CAPÍTULO - RECOLECCIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	
58	
4.1 INTRODUCCIÓN	58
4.2 PILOTAJE DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN	58
4.3 VALIDACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS.....	62
4.4 INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA	62
4.5 SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN RECOLECTADA EN EL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES	64
4.5.1 CATEGORÍA ESPACIO MUESTRAL	64
4.5.2 CATEGORÍA PROBABILIDAD	67
4.5.3 CATEGORÍA VARIABLE ALEATORIA	70
4.5.4 CATEGORÍA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.....	72
5 . CAPÍTULO - ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	
75	
5.1 INTRODUCCIÓN	75
5.2 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES POR CATEGORÍAS.	75
5.2.1 CATEGORÍA ESPACIO MUESTRAL	75
5.2.2 CATEGORÍA PROBABILIDAD	77
5.2.3 CATEGORÍA VARIABLE ALEATORIA	79
5.2.4 CATEGORÍA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.....	82
5.3 ANÁLISIS CLÚSTER	84
5.3.1 SUB-CATEGORÍAS EMERGENTES DEL ANÁLISIS DETALLADO ..	91
6 . CONCLUSIONES	
94	
7 . RECOMENDACIONES	
97	
8 . BIBLIOGRAFÍA	
	98

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Universidad, carrera y curso ofrecido	13
Tabla 2. Cuadro categorías de análisis.....	35
Tabla 3. Descripción general de la secuencia de actividades	46
Tabla 4. Cuadro fases de la actividad N° 1	50
Tabla 5. Cuadro fases actividad N° 2	55
Tabla 6. Información sobre los estudiantes a los que se realizó el pilotaje	59
Tabla 7. Ajustes pilotaje	60
Tabla 8. Estudiantes que participaron en la intervención pedagógica.....	62
Tabla 9. Cuadro de resultados	64
Tabla 10 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de espacio muestral.	76
Tabla 11 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de espacio muestral	78
Tabla 12 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de variable aleatoria	80
Tabla 13 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de distribución de probabilidad.....	82
Tabla 14 <i>Nivel de ubicación de los estudiantes respeto a las categorías de análisis.</i>	85
Tabla 15 Conglomerados	87
Tabla 16 Conglomerado 1	87
Tabla 17 Conglomerado 2	88
Tabla 18 Conglomerado 3	89
Tabla 19 Conglomerado 4	89
Tabla 20 Conglomerado 5	90
Tabla 21 Categorías Emergentes.....	91

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el éxito económico de las grandes empresas, y de las personas, está ligado a las competencias desarrolladas para el proceso de toma de decisiones. Una decisión puede ser el factor decisivo entre el fracaso o el cumplimiento de las metas propuestas.

En el ámbito empresarial, se mantiene el enfoque de generar la mayor utilidad posible con el menor costo. Es por ello, que la oportunidad, certeza y claridad de las decisiones permite lograr esa eficiencia tan deseada; cuando se realiza el proceso de toma de decisiones sin contar con los fundamentos necesarios, se incrementa considerablemente la probabilidad de cometer un error e incurrir en gastos innecesarios, que incluso, podrían terminar con la existencia de la compañía.

Dado el contexto económico creado por la globalización, la realidad de las empresas no difiere mucho del enfoque personal. En la vida cotidiana, el proceso de toma de decisiones es inherente a la vida misma; el tener que decidir si se estudia o no una carrera, el realizar o no una inversión para emprender con una idea de negocio propio, o incluso, si tu equipo de futbol logrará clasificar al mundial o no.

Cada vez más, las personas a nivel mundial se ven enfrentadas a desarrollar competencias en el proceso de toma de decisiones, haciéndose de todas las herramientas que garanticen el efectivo cumplimiento de los objetivos previstos.

Considerado el escenario presentado anteriormente, se crean algunos interrogantes valiosos, tales como: ¿Actualmente, los estudiantes egresados de carreras profesionales cuentan con las competencias necesarias que facilitan el proceso de toma de decisiones al interior de una organización y en su vida personal?, ¿Un profesional recién egresado cuenta con la capacidad para

relacionar y aplicar las herramientas proporcionadas durante su carrera?, o más simple aún, ¿la persona puede identificar cuál es la probabilidad que tiene de ganar en una apuesta?

Entonces, surge la necesidad de confirmar si el proceso de formación adelantado en las universidades garantiza que los estudiantes realicen una correcta aprehensión de las herramientas matemáticas y estadísticas, y si es posible formular nuevos procesos que faciliten su comprensión.

Así las cosas, en el presente trabajo se desarrolla una secuencia de actividades con el fin de potenciar la noción de distribución binomial en estudiantes universitarios, teniendo en cuenta las fases metodológicas de la teoría de las situaciones didácticas. Para esto se plantea inicialmente una visión de algunos de los principales motivos por lo que hacen necesaria la investigación que nos ocupa, al igual que se reconocerá el problema central y los diferentes objetivos propuestos; posteriormente, el recorrido teórico del tema que expone un conjunto de conceptos y teorías que soportarán el presente trabajo.

En el tercer capítulo se identifica la metodología establecida para el desarrollo del presente trabajo, donde se presentará la caracterización de la investigación, la secuencia de actividades, entre otros. En el cuarto capítulo, se presenta la validación de los instrumentos creados en un primer momento y su respectivo ajuste, la intervención pedagógica y la sistematización de la información.

En el capítulo número cinco, se realizará la validación de toda la información obtenida durante la intervención pedagógica, apoyada de un análisis Clúster, para así, finalmente, presentar las conclusiones y reflexiones halladas con la investigación.

1 . CAPÍTULO - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo pretende dar cuenta del proceso adelantado en la investigación de los inconvenientes que se han evidenciado sobre la forma en que los estudiantes realizan el proceso de toma de decisiones, frente a problemas que involucran la utilización de la probabilidad, y más específicamente, la distribución binomial. Por consiguiente, y teniendo en cuenta el problema antes mencionado, surge una pregunta que guiará todo el proceso, apoyada por una serie de interrogantes que se derivan de ella, y que permitirán abordar aspectos importantes en la conceptualización y elaboración de la presente investigación.

Adicionalmente, se realiza la fundamentación teórica que permite definir y delimitar el problema de investigación, las preguntas y los objetivos. Seguido a esto, se realiza un análisis de los antecedentes que se utilizaron para la formulación del problema en torno a temáticas tales como: la forma en que los estudiantes están resolviendo problemas que involucran probabilidad, el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas probabilísticos y estadísticos, también, el tipo de investigaciones se han realizado en torno a las distribuciones de probabilidad.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Diariamente los egresados de carreras universitarias se enfrentan en las empresas a diferentes situaciones, en donde se espera que ocurra o no un evento específico; éste puede ser de éxito o fracaso sin dar lugar a un punto medio. Por ejemplo, en la producción de un artículo, éste puede cumplir con los requisitos

mínimos de calidad o no; en un deporte, un equipo puede ganar o no un juego; las metas de producción o de ventas se pueden alcanzar o no, para situaciones como esta se utiliza la distribución binomial.

Es así como en Colombia son muchos los programas de estudios universitarios o de formación profesional en los que se ofrecen cursos de estadística como disciplina básica en la formación de los estudiantes, o como parte fundamental en otras asignaturas, tales como métodos de investigación, psicometría, biometría, econometría, etc. En el siguiente cuadro se relacionan algunas universidades, la carrera y el curso de estadística que ofrecen.

Tabla 1. Universidad, carrera y curso ofrecido

UNIVERSIDAD	CARRERA	SEMESTRE	ASIGANTURA QUE CURSA ESTADISTICA
Universidad Nacional de Colombia	Economía	3	Probabilidad y estadística fundamental
Universidad Nacional de Colombia	Administración de Empresas	3	Probabilidad y estadística fundamental
Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Licenciatura en Física	4	Teoría de probabilidad
Universidad de la Salle	Licenciatura en Lengua Castellana, inglés y francés	3	Desarrollo de habilidades investigativas
Escuela Superior de Administración Pública	Administración Pública	4	Estadística II
Corporación Universitaria Minuto de Dios	Ingeniería Industrial	4	Probabilidad y estadística
Universidad Nacional de Colombia	Geología	3	Probabilidad y estadística fundamental
Universidad Autónoma de Colombia	Contaduría Pública	4	Estadística II
Universidad Autónoma de Colombia	Ingeniería Electromecánica	4	Probabilidades y Estadísticas
Fundación Universitaria Los Libertadores	Ingeniería Electrónica	6	Estadística y probabilidad
Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Ingeniería Topográfica	3	Probabilidad y Estadística
Universidad del Rosario	Negocios Internacionales	3	Probabilidad

Ahora bien, en este tipo de procesos no sólo se abordan contenidos básicos de estadística descriptiva, probabilidad o análisis exploratorio de datos, sino también una parte importante de inferencia estadística, donde es primordial el uso de distribuciones discretas de probabilidad, una de ellas la distribución binomial.

Batanero (2006), plantea que “*el azar es inherente a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la vida profesional*”. Es por ello, que para desarrollar el pensamiento aleatorio de los estudiantes universitarios, se debe realizar un trabajo en el cual ellos hagan uso de un lenguaje natural, y de ese modo, evidencien que los conceptos adquiridos les serán útiles para explicar y predecir sucesos que ocurren en su vida cotidiana, y de acuerdo con esto, cuenten con las competencias suficientes para la toma decisiones, entendiendo que la aleatoriedad puede servirle como una herramienta para llegar a conclusiones razonables sobre eventos que en ocasiones pasan desapercibidos debido al poco énfasis que se hace de estos.

No obstante, se evidencia que actualmente los estudiantes universitarios no poseen las bases suficientes para abordar los cursos de estadística, lo que genera, según (Moore, 1997) Citado en Tauber (2001), que el profesor encargado de estos cursos trate de suplir esta falta de formación, suprimiendo en lo posible el aparato matemático, lo cual reduce la posibilidad de demostrar a sus alumnos las propiedades y relaciones que les enseña. Así, la estadística se convierte en un objeto misterioso, cuyos principios se aceptan sin comprenderlos, y cuyas reglas y métodos de cálculo se memorizan y aplican mecánicamente.

De igual manera, Konold (1995) sugiere que

La simple realización de predicciones y su comparación con los datos obtenidos experimentalmente, no son suficientes para que los estudiantes cambien sus concepciones, ya que los datos raramente revelan con suficiente claridad todos los resultados y propiedades matemáticas que queremos mostrar a los alumnos (p._).

Por tanto, es imperativo desarrollar y establecer una secuencia de actividades que potencie las nociones básicas sobre las distribuciones de probabilidad en los estudiantes, en este caso particular, sobre la distribución binomial, ya que las dificultades de comprensión de la misma influyen en los errores de aplicación de los procedimientos inferenciales (Vallecillos, 1996, 1999). Como afirman Cohen y Chechile (1997), esta distribución es un tópico importante, incluso en un curso inicial.

1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cuáles son los razonamientos y procesos que permiten la construcción del concepto de distribución binomial en estudiantes universitarios, a partir de una secuencia de actividades?

1.3.1 PREGUNTAS DERIVADAS

- ¿Cuáles elementos conceptuales se deben tener en cuenta para diseñar una secuencia de actividades que potencien el desarrollo de las nociones asociadas al concepto de distribución de probabilidad binomial en los estudiantes?

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar y aplicar una secuencia de actividades que permita la enseñanza del concepto de la distribución de probabilidad binomial en estudiantes universitarios, caracterizando sus procesos de aprendizajes.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar una secuencia de actividades que potencie la noción de distribución binomial en estudiantes universitarios bajo las fases de la teoría de las situaciones didácticas.
- Analizar las producciones escritas de los estudiantes, por medio de la construcción de un sistema de categorías sustentadas bajo un marco teórico.
- Utilizar un análisis clúster para analizar el pensamiento estadístico de los estudiantes frente a la implementación de la propuesta desde las categorías de análisis construidas.

1.5 ANTECEDENTES

Para fundamentar este trabajo se ha realizado una búsqueda de antecedentes, los cuales aportan visión holística de la forma de analizar el proceso de resolución de problemas de aleatoriedad, cabe resaltar que no se ha encontrado un trabajo puntal sobre la enseñanza de la distribución binomial.

- Bernal D., Gil H., (2009) “*Construcción de la distribución normal con estudiantes de educación media*”, la cual Tiene como objetivo general diseñar una herramienta para estudiantes de educación media que facilite la construcción de la distribución normal posibilitando la inferencia estadística, en este trabajo se hizo una revisión bibliográfica que permitiera la elaboración de un instrumento. También plantearon una herramienta que permitiera la construcción de la Distribución Normal a partir de la identificación de características y propiedades de la gráfica que arroja las Distribución anteriormente mencionada a partir de esto se aplicó en estudiantes de educación media para realizar el posterior análisis de los resultados en cuanto a la construcción de la distribución normal. Las principales conclusiones del trabajo fueron que la forma de presentar el concepto dificulta el proceso ya que se parte de la imposición del modelo, lo que conduce a un uso de la distribución normal desde su mecanización. También que el instrumento se diseñó pensando en contextos cercanos a los estudiantes, se enfatizó en un proceso de construcción de conceptos orientada por el maestro, con actividades dinámicas, que confrontaran al estudiante con lo que sabe, y lo motivaran a descubrir nuevos conocimientos desde la exploración y manipulación de los datos. Pero es finalmente la aplicación la que permitiría verificar la fortaleza del diseño. Y por último se llegó a que con el desarrollo del instrumento que realizaron se permite la construcción de los conceptos a medida que se van necesitando, además de ser flexibles con el tiempo, para profundizar y aclarar las dificultades de los estudiantes. El principal aporte del presente trabajo de

grado, es que permite evidenciar una forma en que se puede enseñar una Distribución discreta, en este caso en particular la Distribución Normal, y ya que cuenta con algunas propiedades similares a la que se trabajará en este trabajo será importante en el desarrollo del mismo.

- Serrano Y. (2009) "*El análisis exploratorio de datos como herramienta para el desarrollo de razonamiento estocástico en estudiantes de noveno grado*", dicha investigación tenía como objetivo indagar nociones y conceptos estadísticos emergentes en el estudio de información estocástica presentada en artículos de periódicos y revistas desde el análisis exploratorio de datos. El principal aporte de este trabajo es la generación de una secuencia de actividades diseñada bajo la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y el análisis que se realizó de los datos recogidos, de acuerdo a las categorías previamente diseñadas a partir de la teoría utilizada. Las principales conclusiones que se realizaron en la investigación fueron en cuanto al diseño de las actividades, y el análisis de los datos, teniendo en cuenta que, con el enfoque del Análisis Exploratorio de Datos, El Proyecto de Aula y la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.
- Tauber L. (2001) "*La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*", en esta cual uno de los objetivos generales era describir los significado de los alumnos participantes en las actividades que se planificaron, y posteriormente evaluar su conocimiento al finalizar la enseñanza, el principal aporte de esta investigación es que este se pueden observar como utilizan las heurísticas los sujetos al momento de enfrentarse con una situación entorno a una distribución normal. Así en la investigación describen la utilización de las heurísticas como "*mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales*", es decir, son principios que reducen tareas complejas de

realizar a simples juicios, y para el razonamiento probabilístico una heurística sería un procedimiento que nos acercaría en forma inmediata a la solución del problema. Algunas de las conclusiones más importantes fueron del trabajo fueron : “*hemos cumplido el objetivo principal planteado al construir el cuestionario, puesto que hemos justificado suficientemente la validez de contenido, respecto al significado institucional local previsto y la fiabilidad del instrumento, así como su posible generalizabilidad a cuestionarios con un mismo contenido y a otros grupos de alumnos similares a los que participaron en el estudio*”, y “*el instrumento de evaluación elaborado sobre la distribución normal y los elementos de significado implícitos en ella, es también una aportación de nuestro trabajo, pues permite obtener información relacionada con el conocimiento de los alumnos acerca de un gran número de elementos, en un lapso breve de tiempo*”.

1.6 JUSTIFICACIÓN

Hablar de la incorporación de problemas de aleatoriedad al proceso de enseñanza y aprendizaje no resulta nada sencillo, mucho más si se considera el poco énfasis que se realiza durante los diferentes niveles de educación (básica y media). Por esta razón, surgen obstáculos al momento de ver la utilidad del trabajo con la aleatoriedad. Brousseau (1993) considera que los obstáculos presentados pueden tener diferentes orígenes, estos son: epistemológico, didáctico u ontogénico.

Serrano, Cardeñoso & Azcarate, (2005) identifican como obstáculos epistemológicos “*los obstáculos que se han ido superando a la hora de caracterizar las nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad*”, es decir aquellos que tienen que ver con los procesos de construcción de los conocimientos; como obstáculos ontogénicos “*la comprensión de las nociones básicas probabilísticas y las estrategias de razonamiento que (...) utilizan los sujetos al otorgar significado a*

dichas nociones", estos están relacionados con la forma en que los estudiantes le dan significado a los conceptos que se trabajan en el aula.

También surgen los obstáculos didácticos, que los centran en dos aspectos "*uno relacionado con el uso del lenguaje probabilístico, y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento*", el primero está relacionado con la importancia de la utilización del lenguaje apropiado para la construcción del conocimiento probabilístico y el segundo está relacionado con la forma en que se utilizan los conceptos adquiridos en las experiencias de los estudiantes.

Debido a estos obstáculos, es de esperarse que un recién egresado no utilice la aleatoriedad y conceptos probabilísticos en su vida profesional. Es por ello, que al desarrollar un trabajo con el pensamiento aleatorio y más específicamente con la aleatoriedad, debe realizarse una actividad en la cual los estudiantes hagan uso de un lenguaje natural, que se den cuenta que los conceptos que están adquiriendo les serán útiles para explicar sucesos que ocurren en su vida cotidiana y de acuerdo a esto sean capaces de tomar decisiones, entendiendo que la aleatoriedad puede servirle como una herramienta para llegar a conclusiones razonables.

Así, un profesional se podrá enfrentar a situaciones cotidianas en las que se espera que ocurra o no un evento específico, que se pueden solucionar y modelar con la distribución binomial, se espera que este sea capaz de hacer uso de la aleatoriedad para optimizar y realizar mejor su trabajo.

Para esto, teniendo en cuenta que como estudiantes para profesor de matemáticas del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, no encontramos suficientes trabajos enfocados en la enseñanza de distribución binomial, bajo un marco de la resolución de problemas, se hace relevante la necesidad de diseñar y establecer una secuencia de actividades que potencie la noción de la distribución binomial, bajo la perspectiva

de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986), en donde por medio de la creación de una situación fundamental, se estructuran y proponen situaciones problemas, en las que se generan procesos matemáticos y la reflexión sobre estos, logrando la construcción de un conocimiento aplicable.

2 . CAPÍTULO - MARCO TEÓRICO

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realizará un recorrido sobre los conceptos a tener a cuenta para el desarrollo de la investigación. En primera instancia, se busca determinar conceptos inherentes al tema, como lo es el de Sentido Estadístico y la Cultura estadística, y la consideración de la teoría de las situaciones didácticas.

Posteriormente se realiza un reconocimiento de conceptos básicos e indispensables para el desarrollo del concepto de distribución binomial, seguido a esto se propone el sistema de categorías que se utilizara el análisis de los resultados y finalmente se describe que es y para que utilizar el análisis Clúster.

2.2 SENTIDO ESTADÍSTICO

En la actualidad, la estadística ha facilitado a los profesionales el proceso para la toma de decisiones a nivel organizacional, puesto que, como lo plantea Hadeo (2001), citado en Batanero (2002), “*proporciona herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar en forma óptima estudios y experimentos y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre*”. Lo cual permite al profesional optimizar su quehacer diario con ayuda de dichas herramientas.

Ahora bien, hay que tener en cuenta que para el desarrollo de estas herramientas es esencial que los individuos logren comprender correctamente y ser capaces de aplicar los conceptos y procedimientos estadísticos, como lo cita Batanero (2013), es por ello que la enseñanza actual de la estadística debe tener **sentido estadístico para** los estudiantes. Dicho sentido estadístico se concibe

según Batanero (2013) como la unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico.

2.2.1 LA CULTURA ESTADÍSTICA

La cultura estadística es necesaria para que los ciudadanos participen de una sociedad de la información, como lo es la lectura de la prensa, la interpretación de la información en internet u optimizar su desempeño profesional, a partir de la comprensión de ideas estadísticas fundamentales, las cuales son, según Burril y Biehler (2011) citado en Batanero (2013) “*los datos, gráficos, variabilidad aleatoria, distribuciones, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia*”.

Sin embargo, la idea no es convertir a los profesionales en “estadísticos aficionados”, pues como lo plantea Batanero (2002) ”la aplicación razonable y eficiente de la estadística para la resolución de problemas requiere un amplio conocimiento de esta materia y es competencia de los estadísticos profesionales”, aun así, es importante destacar que en muchas ocasiones se presentan situaciones en donde se requieren conocimientos estadísticos que le permitan al individuo desenvolverse y plantear diferentes estrategias y soluciones, esto es lo que Batanero plantea como una **cultura estadística** en los ciudadanos, la cual se define como:

” ...dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante” (Gal, 2002, pp. 2-3).

De igual forma, Watson (2006) plantea tres componentes esenciales que se deben tener en cuenta en la cultura estadística, siendo estos:

- El conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística no suficiente.

2.2.2 RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

El razonamiento estadístico se puede definir como ““*como la forma de razonar con ideas estadísticas y dar sentido a la información estadística*” (Garfield, 2002), es decir, la manera de analizar e interpretar las diferentes situaciones en donde se involucren conceptos estadísticos; en otras palabras, “*parte del razonamiento estadístico combina ideas sobre los datos y el azar, lo que lleva a hacer inferencias e interpretar los resultados estadísticos*” (Garfield, 2002), existen diferentes niveles de razonamiento, los cuales expone Garfield (2002):

- “**Nivel 1. Razonamiento Idiosincrático** *El estudiante sabe algunas palabras y símbolos estadísticos, los utiliza sin comprender plenamente, a menudo de forma incorrecta, y puede trepar con información no relacionada*”; es decir, el estudiante tiene conoce lenguaje estadístico, pero al aplicarlos lo hace de manera empírica.
- “**(...) Nivel 2. Razonamiento Verbal** *El estudiante tiene un entendimiento verbal de algunos conceptos, pero no se puede aplicar esto a la conducta real*” en este nivel, los estudiantes tienen nociones de conceptos y lenguaje estadístico, pero al aplicarlos lo hace de manera inconsciente.

- “(...) **Nivel 3. Razonamiento Transición** *El estudiante es capaz de identificar correctamente una o dos dimensiones de un proceso estadístico sin integrar plenamente estas dimensiones*”, por ejemplo, en el desarrollo de una situación problema el estudiante conoce como determinar algunos conceptos de forma correcta, pero no como relacionarlos.
- “(...) **Nivel 4. Razonamiento Procesal** *El estudiante es capaz de identificar correctamente las dimensiones de un concepto estadístico o proceso, pero no se integra plenamente o entender el proceso*”, aquí, el estudiante identifica y relaciona conceptos estadísticos, pero no interpreta correctamente.
- “(...) **Nivel 5. Proceso Integrado razonando** *El estudiante tiene una comprensión completa de un proceso estadístico, coordina las reglas y comportamiento*”. El estudiante que se encuentra en este nivel conoce conceptos y lenguaje estadístico y, además, realiza correctamente interpretaciones de los datos.

Por consiguiente, es de esperar que un profesional utilice diferentes herramientas estadísticas, y rzone de tal forma que sea capaz de formular y resolver problemas del contexto.

2.3 CONSIDERACIONES DE LA TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDACTICAS

Para el diseño y planeación de la secuencia de actividades se tendrán en cuenta las fases metodológicas de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, para esto se propondrá una situación fundamental (Brousseau, 1986)

que sea significativa para los estudiantes, cuya solución no surja de manera inmediata y que constituya un problema por demostrar, (Polya, 1986); una vez establecido el problema, entrarán a jugar una serie de relaciones entre el estudiante, el profesor, el saber y una situación didáctica.

Brousseau en 1982 difene una situacion didáctica, como:

“Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.” (Panizza, sf, P. 4)

De igual forma, se distinguen cuatro tipos de situaciones didacticas:

- Situacion de acción: es la etapa experimental, donde se busca que el alumno experimente, ensaye, busque, proponga soluciones, a partir de conocimientos implícitos.
- Situación de formulación: en donde el estudiante debe dar a conocer a sus compañeros sus ideas para la solución.
- Situación de validación: es aquella donde dos o más alumnos deben dar a conocer sus ideas a otros grupos de trabajo, para ser sometidas a consideración, aquí cada grupo debe ser capaz de aceptar, rechazar o pedir pruebas de las ideas de solución propuestas.
- Por último, se considera la situación de institucionalización, por Brousseau (1994) como

“La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un

fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.” (Panizza, sf, P. 14).

2.4 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

2.4.1 PRECONCEPTOS BÁSICOS PARA EL TRABAJO ESTADÍSTICO.

2.4.1.1 EXPERIMENTO ALEATORIO

Es definido por Blanco (2004) como un experimento en el que su resultado no puede ser determinado de antemano, así, un experimento aleatorio es aquel del que no se tiene total certeza de su resultado.

2.4.1.2 ESPACIO MUESTRAL

Blanco (2004), define el espacio muestral como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Canavos (1988) menciona que pueden existir dos tipos de espacio muestral: El espacio muestral finito o discreto, en el cual se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los eventos y los números enteros positivos. Y el espacio muestral infinito o continuo, que es cuando sus resultados ocurren dentro de un intervalo en los números reales.

2.4.1.3 EVENTO

Canavos (1988) define un evento como un grupo de resultados contenidos en un espacio muestral, del cual sus miembros tienen una característica común. Aquel evento que no contiene ningún resultado del espacio muestral recibirá el nombre de evento nulo o vacío.

2.4.1.4 PERMUTACIÓN Y COMBINACIÓN

Debido a que en las distribuciones de probabilidad es necesario observar la totalidad de eventos que pueden ocurrir en un espacio muestral determinado, se tiene que establecer una técnica de conteo que permita tener todas las posibilidades, para esto se debe recurrir a las permutaciones y a las combinaciones.

Según Canavos (1988), una permutación es un arreglo en un orden particular de los objetos que forman el conjunto. En este arreglo interesa el orden en el que estén los elementos, se calcula por medio de $n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1)$ o $n!$.

Ahora bien, una combinación es una selección de objetos sin que el orden importe. Así como la permutación tiene una fórmula que permite determinar su resultado, esta es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! n!}$$

Se entiende como el número de combinaciones de k objetos tomados de un conjunto de n de ellos.

Por último, se establece la diferencia entre combinación y permutación, esta es que la combinación busca determinar el número de selecciones diferentes de n elementos, en cambio la permutación se centra en contar todas las posibles colecciones de n elementos.

2.4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA PROBABILIDAD.

La probabilidad es uno de los aspectos más importantes en la inferencia estadística, Blanco (2004) define la probabilidad como la asignación a cada evento A de un número real no negativo, el “chance” o la posibilidad de ocurrencia,

teniendo en cuenta que las condiciones del experimento se mantienen más o menos constantes.

Inicialmente la probabilidad se relaciona con el azar, aunque es una concepción errada que se tiene, ya que la probabilidad es la cuantificación de la ocurrencia de un evento, en cambio el azar es la combinación de causas que llevan a la ocurrencia de un evento inesperado.

2.4.2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Dado un espacio muestral cualquiera S , y un evento cualquiera de este E , se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface lo siguiente:

1. $P(E) \geq 0$. Este axioma dice que la probabilidad de ocurrencia de un evento es mayor que cero, y la probabilidad de que un evento no ocurra es igual a cero.
2. $P(S) = 1$. Este axioma dice que la probabilidad de ocurrencia de todo el espacio muestral es igual a uno.
3. Si para los eventos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$
 $E_i \cap E_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces

$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$, con $1 \leq i \neq j \leq k$. Este axioma dice que cuando se tienen eventos mutuamente excluyentes, la probabilidad de la unión de estos es igual a la suma de la probabilidad de cada uno de ellos.

2.4.3 LA DISTRIBUCION BINOMIAL

2.4.3.1 DESARROLLO DEL CONCEPTO

La distribución binomial es un ejemplo de las denominadas distribuciones discretas de probabilidad, estas distribuciones son aquellas que solo pueden tomar valores finitos o infinitos numerables. Esta distribución fue desarrollada por Jakob Bernoulli, quien fue el autor de uno de los documentos más importantes de probabilidad denominado “Ars Conjectandi” en el año de 1713.

Se desarrolló bajo la idea de encontrar la probabilidad de obtener exactamente el número de posibles éxitos en un determinado número de ensayos. Por lo tanto, si se tiene un experimento aleatorio solo se consideran dos resultados, la ocurrencia del evento A y la no ocurrencia del evento A, a partir de esto se determinará una variable que contará el número de éxitos, esta variable comúnmente se llama X y al ser discreta puede tomar los siguientes valores: 0,1,2,3,4, 5, ..., n. la distribución binomial se desarrolló como una generalización del experimento de Bernoulli.

La distribución binomial es una de las distribuciones de probabilidad más trabajada, ya que esta puede ser aplicada en casi todas las disciplinas, es utilizada en todas las situaciones que para llegar a su solución se tengan dos resultados posibles, o cuando sus resultados puedan ser reducidos a dos opciones.

Ejemplos de situaciones en las que se puede hacer uso de la distribución binomial son diversos, algunas de ellas son:

- El nacimiento de un bebé. (Puede ser masculino o femenino)
- En una competencia se puede ganar o no ganar.
- En una prueba escrita la respuesta puede ser falsa o verdadera.
- Un tratamiento médico puede ser efectivo o inefectivo.
- En una empresa se pueden cumplir las metas de ventas o no cumplirlas.

2.4.3.2 CARACTERÍSTICAS

Para que una situación pueda desarrollarse a partir de una distribución binomial debe cumplir con algunas características, estas permitirán determinar cada uno de los parámetros que harán parte de la distribución y de esta forma dar solución al o a los problemas planteados. Estas características son:

- Cada una de las pruebas del experimento solo tendrá dos posibles resultados: éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito y de fracaso son constantes, la probabilidad de éxito generalmente se denota por p y la probabilidad de fracaso se representa por q o también puede representarse por $1-p$.
- Cada uno de los resultados obtenidos en cada una de las pruebas es independiente de los resultados obtenidos previamente.
- La variable aleatoria binomial X , representa el número de éxitos obtenidos en cada una de las n pruebas. De acuerdo con esto los valores que puede tomar la variable aleatoria X son: 0, 1, 2, 3, 4, ..., n.

2.4.3.3 CONSTRUCCION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta, que cuenta los números de éxitos en n pruebas, se desarrolla a partir de eventos independientes, donde las únicas probabilidades que se manejan son la probabilidad de tener éxito o la probabilidad de fracaso.

Esta distribución maneja una probabilidad dicotómica, ya que si denominamos la probabilidad de éxito (p), la probabilidad de fracaso será $(1-p)$, y en este caso la llamaremos (q) (esto se aplicará a posteriores distribuciones).

Ahora bien, teniendo en cuenta estas características podremos representar la función de la distribución binomial así:

$$p(x; n, p) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n. \\ 0 \text{ para cualquier otro valor. } 0 \leq p \leq 1, \text{ para } n \text{ entero} \end{cases}$$

Y por lo tanto se tiene que x es una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayo y p es la probabilidad de éxitos con cualquiera de estos y q o $(1-p)$ es la probabilidad de fracaso.

Se puede notar que un ejemplo de una función de distribución binomial es cuando $n = 1$, y esta es:

$$p(x; p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0, 1. \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

Y esta es la función de probabilidad de la distribución de Bernoulli, quien fue el que desarrolló por primera vez el concepto de ensayos independientes.

Ahora bien, ya conociendo la función se puede decir que la media de una variable aleatoria binomial, se representara multiplicando la probabilidad de éxito por la cantidad de ensayos que se realizaran, entonces se tiene:

$$E(X) = \mu = np$$

Y para calcular la varianza de la variable aleatoria binomial se debe realizar el producto de la cantidad de ensayos, la probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso.

$$Var(X) = npq$$

o

$$Var(X) = np(1-p)$$

2.5 CATEGORIAS DE ANÁLISIS

De acuerdo con lo presentado en el marco teórico, se establece que para el desarrollo de la secuencia de actividades con la cual se dará la construcción de la noción de distribución binomial, es necesario que los estudiantes razonen acerca de cuatro conceptos: **espacio muestral, probabilidad de éxito, variable aleatoria discreta, ensayos independientes y distribución de probabilidad**. Así, se crea un sistema de categorías que permitirán analizar los resultados obtenidos al aplicar la secuencia de actividades, que relacionan los cinco niveles de razonamiento estadístico planteado por Garfield (2002) con los cuatro conceptos claves para el desarrollo de distribución binomial

Por un lado, **la categoría del Espacio Muestral** hace referencia a la forma en que el estudiante reconoce cual es el conjunto de resultados que hay en un experimento aleatorio, utilizando técnicas de conteo, como lo es la combinatoria, lo que establecerá el primer parámetro en la distribución.

La categoría de **Construcción de la probabilidad** hace referencia a la forma en que el estudiante establece probabilidades, también involucra como el estudiante pasa de una probabilidad simple a una probabilidad conjunta y lo más importante la dependencia e independencia de eventos, lo que permitirá establecer el parámetro de probabilidad de éxito fija y conocida, así como la probabilidad de fracaso en la distribución.

Por otro lado, la categoría de **Variable aleatoria discreta** hace referencia a la identificación de la variable aleatoria dentro de la situación, esto permitirá al estudiante comprender que la variable puede tomar un valor que pertenezca al conjunto de los números reales y que esta a su vez representa todos los diferentes conjuntos de eventos en donde se cumplen los parámetros de probabilidad de éxito y de no éxito.

Finalmente, la **categoría de distribución de probabilidad**, refiere a la relación entre los conceptos desarrollados (conteo, probabilidad) y la articulación de estos, por medio de la independencia de probabilidad y la variable aleatoria, de igual forma hace referencia a la identificación del valor esperado de la distribución binomial.

Tabla 2. Cuadro categorías de análisis.

NIVEL	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
<p>Nivel 1. Razonamiento Idiosincrático El estudiante sabe algunas palabras y símbolos estadísticos, los utiliza sin comprender plenamente, a menudo de forma incorrecta, y puede trepar con información no relacionada”; es decir, el estudiante tiene conocimientos estadísticos, pero al aplicarlos lo hace de manera empírica</p>	Identifica que el experimento puede tener diferentes resultados posibles, y realiza una multiplicación de los números	Reconoce la existencia de la probabilidad, sin embargo, no la relaciona con el desarrollo de la situación	No se consiente de cuál es el valor que está variando en la situación	No se relacionan los parámetros para la construcción de la distribución

<p>Nivel 2. Razonamiento Verbal El estudiante tiene un entendimiento verbal de algunos conceptos, pero no se puede aplicar esto a la conducta real" en este nivel, el estudiante tiene nociones de conceptos y lenguaje estadístico, pero al aplicarlos lo hace de manera inconsciente.</p>	<p>Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados.</p>	<p>Calcula la probabilidad(algorítmicamente) sin interpretar lo que esta significa</p>	<p>Comprende que hay una variable aleatoria, pero no tiene claridad, si es el número de éxitos o de fracasos</p>	<p>Solo tiene en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (sin tener en cuenta la independencia entre los eventos)</p>
--	--	--	--	--

<p>Nivel 3. Razonamiento Transición El estudiante es capaz de identificar correctamente una o dos dimensiones de un proceso estadístico sin integrar plenamente estas dimensiones”, por ejemplo, en el desarrollo de una situación problema el estudiante conoce como determinar algunos conceptos de forma correcta, pero no como relacionarlos.</p>	<p>Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados en muestras de menor número, pero no lo generaliza.</p>	<p>Calcula las probabilidades inmersas en la situación, pero no las relaciona entre sí (no reconoce si son dependientes o independientes)</p>	<p>Reconoce la variable como el número de éxitos, pero no lo relaciona con la situación</p>	<p>Solo tiene en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (identifica si son independientes), pero no lo relaciona con la variable aleatoria</p>
---	---	---	---	--

<p>Nivel 4. Razonamiento Procesal El estudiante es capaz de identificar correctamente las dimensiones de un concepto estadístico o proceso, pero no se integra plenamente o entender el proceso”, aquí, el estudiante identifica y relaciona conceptos estadísticos, pero no interpreta correctamente.</p>	<p>El estudiante calcula una combinatoria o una permutación, pero no identifica cual se debe utilizar para el desarrollo de la situación</p>	<p>Calculan las probabilidades, se identifica si son dependientes o independientes, pero no comprende el porqué de tener en cuenta todos los posibles eventos (éxitos y fracasos)</p>	<p>Caracteriza algorítmicamente la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación</p>	<p>Determina la probabilidad en cada uno del experimento. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso.</p>
---	--	---	--	---

<p>Nivel 5. Proceso Integrado razonando El estudiante tiene una comprensión completa de un proceso estadístico, coordina las reglas y comportamiento". El estudiante que se encuentra en este nivel conoce conceptos y lenguaje estadístico y, además, realiza correctamente interpretaciones de los datos.</p>	<p>Determina los posibles resultados del experimento a partir del uso de la combinatoria.</p>	<p>Establece la probabilidad conjunta a partir de la probabilidad de eventos independientes teniendo en cuenta todos los eventos posibles.</p>	<p>Caracteriza la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación, además de tener en cuenta que la variable puede tomar más de un valor, ("al menos", " como máximo".)</p>	<p>Determina la probabilidad en cada uno de los experimentos. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso, de igual forma tiene en cuenta para la solución de la situación la medida de resumen (valor esperado)</p>
--	---	--	---	---

2.6 ANALISIS CLÚSTER

El análisis clúster es un conjunto de técnicas utilizado para clasificar un conjunto de individuos en grupos homogéneos, con el objetivo de obtener clasificaciones lo que genera que este análisis sea de carácter exploratorio. Este se utiliza fundamentalmente para resolver un problema que involucre un conjunto de individuos (conformado por N elementos) y caracterizados por n variables X_j , ($j = 1, 2, \dots, n$), con el objetivo de ser capaces de clasificarlos de manera que los individuos que pertenecen a cada grupo sean tan similares entre sí como sea posible. Así, con el análisis clúster se pretende encontrar un conjunto de subgrupos que contendrán a los individuos asignándolos de acuerdo con el criterio de las categorías de análisis propuestas.

Para la realización de un análisis clúster es necesario:

- Establecer un conjunto de N individuos de los que se dispone determinada información clasificada.
- Establecer un criterio de similitud que permita relacionar la semejanza de los individuos entre sí.
- Escoger un algoritmo de clasificación para determinar la estructura de agrupación de los individuos.
- Especificar los clúster mediante un dendogramas u otros gráficos.

Teniendo en cuenta los pasos anteriores para realizar una buena clasificación al momento de realizar un análisis clúster se debe tener en cuenta:

- Establecer una buena selección de las variables que van a describir a los individuos. En este sentido realizar un análisis de datos previo es necesario.
- El establecimiento del adecuado criterio de similaridad.
- Seleccionar el algoritmo de clasificación.

3 . CAPÍTULO - METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentará la metodología utilizada para la realización del trabajo de grado, inicialmente se describen las características del tipo de investigación que se realizó y las fases que se determinan su desarrollo. En un primer momento, basados en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, se muestra la secuencia de actividades, que fue construida a partir de una situación fundamental, que da paso a las actividades de acción, formulación, validación e institucionalización.

Posteriormente, se establecen las categorías de análisis, construidas a partir del marco teórico, seguido a esto, se presentan los instrumentos de la recolección de datos tales como: video de las clases, trabajos escritos, transcripción de los videos y protocolos de las intervenciones realizadas a un grupo de estudiantes de varias carreras profesionales que se encuentran estudiando en distintas universidades de Bogotá.

Finalmente, se presenta la forma como se realizará el análisis de los resultados, triangulando los datos obtenidos a partir de los métodos de indagación (trabajos escritos, transcripciones, protocolos) y contrastándolos con las categorías de análisis.

3.2 CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este trabajo es diseñar y aplicar una secuencia de actividades que facilite la enseñanza de la noción de la distribución de probabilidad binomial en estudiantes universitarios, es primordial, por un lado, realizar un trabajo en el aula que enriquezca el proceso de aprendizaje de los estudiantes, logrando que ellos construyan significados acerca

de la distribución binomial, apoyados en la intervención del docente; además, es esencial recolectar información de las producciones de los estudiantes, para analizar y contrastar con las categorías propuestas, caracterizando la comprensión lograda a partir de la secuencia de actividades; es por ello que se propone para el desarrollo de esta investigación una integración de métodos cualitativos y cuantitativos.

Hernández, Fernández y Baptista (2003) señalan que la integración de los dos métodos: “agrega complejidad al diseño de estudio; pero contempla todas las ventajas de cada uno de los enfoques”. (p. 21); de igual manera, según Flick (2002) “la perspectiva cualitativa y cuantitativa se complementan mutuamente en el estudio de un problema; esta complementación se concibe como la compensación de los puntos débiles y ciegos de los métodos. (Jick, 1983)” (p.280).

La perspectiva cualitativa busca establecer no solo la manera cómo se enfocan los problemas, sino también la forma cómo se buscan las respuestas a los mismos, lo que propicia el análisis que se quiere llevar a cabo dentro de la investigación, dado que se desarrollará bajo el marco de la resolución de problemas. Es por ello que para el desarrollo de este trabajo la perspectiva cualitativa será de tipo descriptiva y exploratoria.

Hernández et al. (2003), citando a Danke, afirman que los estudios descriptivos “(...) buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos comunidades o cualquier otro fenómeno que es sometido a un análisis” (p. 117). En nuestro caso, permite establecer elementos del contexto, descripción de la población y producción de los estudiantes.

Ahora bien, considerando que no se han encontrado propuestas que a partir de la resolución de problemas permitan la enseñanza de la noción de distribución binomial en estudiantes universitarios y que se pretende establecer una secuencia

de actividades que permita el aprendizaje de esta, la investigación es de tipo exploratoria, pues como lo sustenta Sabino (1994) “en el enfoque exploratorio el tema escogido ha sido poco estudiado hasta el momento y no existe sobre el mismo un conocimiento tal que permita formular hipótesis precisas”.

Dentro de la perspectiva cualitativa se procedió por medio de un estudio de caso, que según Sabino (1994) “la nota particular de este diseño la constituye el estudio profundizado y exhaustivo de uno o muy pocos objetos de investigación, lo que permite obtener un conocimiento amplio y detallado del mismo” (p. 80). Así, la aplicación se realizó a un grupo de 20 estudiantes que cursan la asignatura de probabilidad y estadística en diferentes carreras de diferentes universidades (Ver cuadro).

Por otra parte, el enfoque cuantitativo permite organizar los datos obtenidos en las categorías propuestas, y posteriormente, a partir del análisis clúster, agrupar los elementos identificando la similitud entre estos, puesto que dicho análisis, según Garza, González & Morales (2013) “busca analizar la actividad, a partir de los elementos presentados en la guía del estudiante”.

3.3 PLAN DE TRABAJO

Esta propuesta se guiará a partir de los momentos metodológicos que hacen parte del proceso de investigación cualitativa, los momentos en cuestión son: formulación, diseño y gestión. A través de ellos es posible trascender de la descripción elemental, permitiendo el acceso a formulaciones de tipo comprensivo en algunos casos, y explicativas en otros. A continuación, se presentarán momentos metodológicos planteados por Sandoval (1996).

3.3.1 IDENTIFICACIÓN Y FORMULACIÓN DE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Es el punto de partida de la investigación, éste se caracteriza por explicitar y precisar que es lo que se va a investigar y por qué, en este primer momento se identificó como una situación problema (problema de investigación) la falta de recursos didácticos para la enseñanza de la noción de la distribución binomial, posteriormente, se definió cómo abordar la situación problema (preguntas de investigación) y las acciones que se realizan en el abordaje (objetivos).

3.3.2 BÚSQUEDA DE ANTECEDENTES Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Una vez identificada la situación problema, se realizó una búsqueda de las investigaciones y trabajos adelantados en torno a nuestro problema. Es importante mencionar que se encontraron trabajos que abordan la distribución binomial como concepto matemático, sin embargo, no existen evidencias de trabajos que potencien su aprendizaje desde la resolución de problemas.

Es por ello, que los antecedentes de nuestro trabajo se relacionan con la metodología propuesta y la forma de analizar los datos después de las intervenciones en el aula.

Así mismo, se construyó el marco teórico de la investigación, con el cual se establecieron las categorías de análisis y permitió dar luz al diseño de la secuencia de actividades, teniendo en cuenta los aspectos matemáticos de la distribución binomial.

3.3.3 DISEÑO DEL INSTRUMENTO

Para realizar el diseño de la secuencia de actividades se revisó la teoría las situaciones didácticas de Brousseau y las categorías de análisis determinadas en el marco teórico. El instrumento cuenta con dos (2) actividades, que se desarrollan a través de la situación fundamental “Camino a la copa mundial de futbol”.

3.3.4 PILOTAJE Y EVALUACIÓN PRELIMINAR DE LA HERRAMIENTA

En este momento se aplicó el instrumento a un grupo de seis estudiantes de diferentes carreras universitarias, con el fin de establecer la pertinencia de las actividades propuestas.

3.3.5 APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA

Se realiza la intervención pedagógica aplicando el instrumento a un grupo de veinte (20) estudiantes de diferentes carreras universitarias, en dos sesiones, con un lapso aproximado de dos (2) hora cada una. Durante la aplicación se realizó grabaciones de audio, y encuestas semiestructuradas. De igual manera se obtuvieron las producciones escritas de los estudiantes, que constituyeron el insumo final para el respectivo análisis.

3.3.6 ANÁLISIS DE LOS DATOS

Una vez obtenidos los insumos con la aplicación de la prueba, se realizó la clasificación y sistematización de los datos, a partir de las categorías propuestas en el marco teórico, con los resultados se efectuó el análisis clúster para obtener la descripción más detallada de las producciones de los estudiantes, proponiendo así categorías emergentes a partir de los conglomerados arrojados por el clúster, que permitan una mejor caracterización de las comprensiones logradas por los estudiantes durante la aplicación de la secuencia de actividades.

3.3.7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Una vez realizado el análisis de la información, se dará respuesta a las preguntas de investigación y a los objetivos propuestos, con el fin de evidenciar si el instrumento facilita la enseñanza de la noción de la distribución binomial en la educación superior.

3.4 SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de la investigación es el de diseñar la secuencia de actividades, se presenta la descripción detallada de la secuencia a utilizar para potenciar la noción de distribución binomial.

3.4.1 DESCRIPCIÓN GENERAR DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Tabla 3. Descripción general de la secuencia de actividades

ACTIVIDAD	TEMÁTICAS	DESCRIPCIÓN
1	<ul style="list-style-type: none">• Técnicas de conteo (permutaciones y combinatoria)• Eventos dependientes e independientes.• Probabilidad simple y conjunta.	En el primer momento, se desarrollará un trabajo individual por parte de los estudiantes, en la cual se enfrentarán a la situación fundamental y una serie de preguntas, posteriormente, en grupos de tres personas los estudiantes discutirán las ideas planteadas e irán construyendo una solución a las situaciones presentadas.

		Finalmente se realizará una institucionalización de los conceptos trabajados durante la sesión.
2	<ul style="list-style-type: none"> • Combinaciones • Eventos independientes • Probabilidad simple y conjunta • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad • Valor esperado de la distribución binomial. 	<p>Inicialmente se desarrollará un trabajo individual por parte de los estudiantes al enfrentarse con situaciones que pretenden articular los conceptos de la distribución binomial, partiendo de casos donde el espacio muestral es un conjunto de dos elementos hasta la construcción de la fórmula general.</p> <p>Posteriormente se plantean situaciones con el fin de potenciar las medidas de resumen de la distribución binomial (valor esperado).</p> <p>Finalmente se realizará una institucionalización de los conceptos trabajados durante la sesión.</p>

3.4.1.1 ACTIVIDAD 1

3.4.1.1.1 FINALIDAD

Establecer un espacio que permita dar a conocer la situación fundamental y genere que los estudiantes formulen ideas sobre el desarrollo de la misma utilizando los conocimientos previos que estos tengan, de igual forma que se definan conceptos tales como: técnicas de conteo, espacio muestral, eventos independientes, probabilidad simple y probabilidad conjunta.

3.4.1.1.2 OBJETIVOS

General

Dar a conocer la situación fundamental y construir las nociones de técnicas de conteo, espacio muestral, eventos independientes, probabilidad simple y probabilidad conjunta, con el fin de establecer primeras ideas de solución a la situación.

Específicos

- Utilizar nociones previas de técnicas de conteo para definir el espacio muestral en cada una de las situaciones propuestas.
- Hacer uso de conceptos previos de eventos independientes y de probabilidad
- Dar a conocer por parte de los estudiantes estrategias de solución a la situación.

3.4.1.1.3 TEMÁTICAS DE LA ACTIVIDAD

- Técnicas de conteo (combinatoria).
- Espacio muestral.
- Eventos independientes.
- Probabilidad simple.
- Probabilidad conjunta.

3.4.1.1.4 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

En el primer momento, se desarrollará un trabajo individual por parte de los estudiantes, en la cual se enfrentarán a la situación fundamental y una serie de preguntas, posteriormente, en grupos de tres personas los estudiantes discutirán las ideas planteadas e irán construyendo una solución a las situaciones presentadas.

Finalmente se realizará una institucionalización de los conceptos trabajados durante la sesión.

3.4.1.1.5 ROLES

Profesor

Dar a conocer la situación fundamental a trabajar durante las sesiones de clase, de igual forma dar indicaciones sobre el desarrollo de la guía.

Estudiante

Escuchar atentamente las orientaciones para desarrollar el trabajo, dando a conocer en las diferentes fases, las ideas y construcciones para solución de la situación fundamental.

3.4.1.1.6 METODOLOGÍA

Tabla 4. Cuadro fases de la actividad N° 1

FASE	TIEMPO	DESCRIPCIÓN
Acción	30 min	Momento 1 Se les dará a conocer la situación fundamental a los estudiantes, entregándoles el material correspondiente realizando una lectura dirigida de la situación.
		Momento 2 Se les dará a los estudiantes un espacio de 20 minutos para que propongan individualmente las primeras estrategias de solución, durante este espacio se resolverán dudas que se presenten al momento de abordar la actividad.
Formulación	30 min	Momento 1 Se formarán grupos de tres integrantes para que discutan sobre las estrategias previamente establecidas.
Validación	30 min	Momento 1 Teniendo en cuenta las estrategias establecidas por los grupos, los demás grupos se retroalimentarán a partir de las intervenciones.
Institucionalización	30 min	Finalmente se realizará una institucionalización de los conceptos: Combinatoria, eventos independientes, espacio muestral, probabilidad simple y conjunta.

3.4.1.1.7 MATERIAL REQUERIDO

- Guía para el estudiante Actividad 1.
- Calculadora científica.

3.4.1.1.8 GUÍA DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD N° 1	
Nombre:	
Carrera:	Semestre:
Universidad:	
<p><i>La copa del mundo de fútbol es un torneo que reúne a las selecciones de distintos países que han pasado por un proceso de clasificación teniendo en cuenta el continente al cual pertenecen.</i></p> <p><i>Este torneo consta de dos etapas: una fase clasificatoria y una ronda final. El número de participantes en esta ronda final ha variado con el paso de los años: 16 participantes hasta 1978, 24 entre 1982 y 1994 y 32 desde 1998 en adelante. ¿irá Colombia al mundial?</i></p>	
<p>1. En las eliminatorias para el Campeonato Mundial de Fútbol se enfrentan todos los países de Suramérica, pertenecientes a la Confederación Suramericana de Fútbol (CSF) ¿Cuántos partidos deberán jugarse en todo el proceso clasificatorio si se sabe que juegan partidos todos contra todos, de ida y vuelta?</p> <p>PAISES QUE DISPUTAN LA ELIMINATORIA SURAMERICANA</p> 	
<p>2. De los 10 equipos suramericanos opcionados para ir a la copa mundo, Perú, Colombia, Ecuador y Chile, tiene costa en el pacífico ¿Cuál es la probabilidad de que algún equipo de los 10 tenga costa en el pacífico?</p> 	

3. Como preparación los siguientes equipos deciden realizar un torneo amistoso, Encuentra cuantos partidos se disputarán en el torneo de preparación.



4. Si en el mundial se cuenta con 32 equipos, ¿de cuantas maneras puedo organizar grupos de 4 equipos cada uno para comenzar la primera ronda del campeonato?



5. Si de 10 partidos jugados la selección colombiana ganó 8, ¿cuál es la probabilidad de ganar y de no ganar que presentó la selección?

6. Teniendo en cuenta la información presentada en cada imagen, establezca la probabilidad que tiene James Rodríguez de anotarle a cada equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que al jugar un partido contra Uruguay y luego contra Chile, James anote en ambos partidos?

7.



VS



De cada cuatro partidos en los que James enfrenta a Chile anota en uno.



VS



De cada dos partidos en los que James enfrenta a Uruguay anota en uno.

8. La probabilidad de que la selección boliviana le gane a Brasil es de 0,15; de que le gane a Argentina es 0,23 y de que le gane a Venezuela es de 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que al enfrentar esos tres partidos consecutivos Bolivia consiga tres victorias?



3.4.1.2 ACTIVIDAD 2

3.4.1.2.1 FINALIDAD

Construir el concepto de distribución binomial, a partir de la Relación de los conceptos desarrollados, articulándolos por medio de la independencia de probabilidad y la variable aleatoria, de igual forma utilizar la medida de resumen de la distribución binomial (valor esperado).

3.4.1.2.2 OBJETIVOS

General

Dar solución a la situación fundamental a partir de la construcción de distribución binomial.

Específicos

- Utilizar nociones previas de técnicas de conteo para definir el espacio muestral en cada una de las situaciones propuestas.
- Relacionar los conceptos de combinatoria, espacio muestral, probabilidad y variable aleatoria, para la construcción del concepto de distribución binomial.
- Institucionalizar el concepto de distribución binomial

3.4.1.2.3 TEMÁTICAS DE LA ACTIVIDAD

- Técnicas de conteo.
- Espacio muestral.
- Eventos independientes.
- Probabilidad simple y conjunta.
- Variable aleatoria
- Distribución binomial
- Medida de resumen (valor esperado)

3.4.1.2.4 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Inicialmente se desarrollará un trabajo individual por parte de los estudiantes al enfrentarse con situaciones que pretenden articular los conceptos de la distribución binomial, partiendo de casos donde el espacio muestral es un conjunto de dos elementos hasta la construcción de la fórmula general.

Posteriormente se plantean situaciones con el fin de potenciar la medida de resumen de la distribución binomial (valor esperado).

Finalmente se realizará una institucionalización de los conceptos trabajados durante la sesión.

3.4.1.2.5 ROLES

Profesor

Propiciar la reflexión de los estudiantes sobre la validez de las respuestas dadas, de igual forma presentar a los estudiantes los parámetros a tener en cuenta para la resolver la distribución binomial.

Estudiante

Proponer una hipótesis en relación con la situación fundamental y Asumir la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos, en situaciones de acción, formulación y validación. (Rocha, 2006, pg. 9)

3.4.1.2.6 METODOLOGÍA

Tabla 5. Cuadro fases actividad Nº 2

FASE	TIEMPO	DESCRIPCIÓN
Acción	40 min	<p>Momento 1</p> <p>Dar la actividad a los estudiantes entregándoles el material correspondiente realizando una lectura dirigida de la situación.</p> <p>Momento 2</p> <p>Se les dará a los estudiantes un espacio de 30 minutos para que propongan individualmente a partir de los conceptos trabajados en la sesión anterior, las soluciones a las situaciones planteadas.</p>
Formulación	20 min	<p>Momento 1</p> <p>Se formarán grupos de tres integrantes para que discutan sobre las estrategias utilizadas.</p>
Validación	30 min	<p>Momento 1</p> <p>Teniendo en cuenta las estrategias establecidas en los grupos, los demás retroalimentarán a partir de las intervenciones.</p>

Institucionalización	30 min	Se institucionalizará el concepto de distribución binomial, a partir de los parámetros establecidos durante el desarrollo de las sesiones.
----------------------	--------	--

3.4.1.2.7 MATERIAL REQUERIDO

- Guía para el estudiante Actividad 2
- Calculadora científica.

3.4.1.2.8 GUÍA DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD N° 2
<p>Nombre: _____</p> <p>Carrera: _____ Semestre: _____</p> <p>Universidad: _____</p> <p>1. Resuelva las siguientes situaciones teniendo en cuenta los datos que ofrecen la siguiente historia:</p> <p>En la eliminatoria anterior al no participar Brasil por ser sede de la Copa Mundial, solo participaron 9 equipos disputando un total de 16 partidos cada uno de los equipos. De estos 16 que disputó la selección Colombia en la eliminatoria al mundial, ganó 9, empato 3 y perdió 4, siendo esta una de las eliminatorias más destacadas para ellos, ya que se logró la clasificación con anticipación, además hacía mucho tiempo que la selección Colombia no iba a un mundial (16 años).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Halla la probabilidad de ganar y de no ganar (empatar o perder) de la selección Colombia, en los 16 partidos disputados. <p>Teniendo en cuenta las probabilidades anteriormente encontradas, calcula:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido que juegue la selección Colombia, pueda llegar a ganar? • ¿Cuál es la probabilidad de que, de 2 partidos jugados, pueda llegar a obtener 1

victoria?

- ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 partidos jugados, pueda llegar a obtener 1 victoria?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a obtener tres victorias?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos?

La eliminatoria para la Copa Mundial de Rusia 2018 volverá a contar con todos los 10 equipos sudamericanos. Calcula las siguientes probabilidades:

- ¿Cuál es la probabilidad de que jugados 18 partidos la selección Colombia obtenga las mismas victorias que en la eliminatoria pasada (9 victorias)?
- ¿Cuál es la probabilidad de que jugados la mitad de los partidos la Selección Colombia haya ganado al menos 5 partidos?

2. Resuelva las siguientes situaciones teniendo en cuenta los datos que ofrecen la siguiente historia:

Para el próximo mundial una de las máximas figuras que se espera participe es Cristiano Ronaldo, este anotó 13 tantos al inicio de la temporada, 7 en La Liga de España y 6 en Champions League, donde es máximo anotador en 19 encuentros jugados, 15 en Liga y 4 en Champions.

Teniendo en cuenta que ya terminó la temporada, Cristiano logró anotar 28 goles en 38 partidos disputados. Ahora bien, teniendo en cuenta esta información, interpreta y reflexiona sobre las siguientes situaciones.



- ¿Cuál es la probabilidad que tiene Cristiano Ronaldo de anotar 23 goles en 38 partidos?
- Con la información suministrada inicialmente determine cuál sería la cantidad de goles que anotaría Cristiano Ronaldo en 16 partidos jugados.

4 . CAPÍTULO - RECOLECCIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se da a conocer el proceso de recolección y sistematización de la información el cual se llevó a cabo en dos momentos: recolección y la sistematización de la información.

En el primer momento de recolección de la información se realizó un pilotaje, donde se observó la viabilidad de los instrumentos, posteriormente se desarrolló la intervención en el grupo de estudiantes.

4.2 PILOTAJE DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN

En este momento se observó la pertinencia de la situación fundamental y las preguntas propuestas para cada una de las actividades propuestas teniendo en cuenta la gestión de las mismas, los instrumentos propuestos y las categorías de análisis.

Para llevar a cabo dicho pilotaje se realizó una intervención pedagógica a seis estudiantes de diferentes carreras universitarias los cuales había o estaban cursado una asignatura de estadística en la que se desarrollaban conceptos de estadística descriptiva, en la siguiente tabla se relaciona la información sobre la carrera, el semestre y el curso de los estudiantes:

Tabla 6. Información sobre los estudiantes a los que se realizó el pilotaje

Estudiante	Universidad	Carrera	Semestre	Asignatura que cursa sobre estadística
1	Universidad Nacional	Economía	3	Probabilidad y estadística fundamental
2	Universidad Nacional	Administración de empresas	3	Probabilidad y estadística fundamental
3	Escuela Superior de Administración Pública	Administración publica	4	Estadística II
4	Universidad Sergio Arboleda	Administración de empresas	4	Estadística II
5	Universidad EAN	Economía	4	Estadística y probabilidad
6	Universidad Minuto De Dios	Psicología	4	Estadística II inferencial

Al finalizar la intervención pedagógica se evidencio que se debían realizar algunas sugerencias tanto en la gestión docente, como de las actividades y las preguntas fundamentales, así, el pilotaje permitió realizar cambios y observar posibles respuestas de los estudiantes que no se habían tenido en cuenta en el diseño.

Los cambios realizados al instrumento fueron:

- Las preguntas que realiza el profesor, surgieron nuevas preguntas para cada una de las actividades.

- Algunas preguntas por su nivel de complejidad y extensión, estas fueron replanteadas en preguntas más precisas.
- La redacción y representación de las preguntas de cada una de las actividades.

Tabla 7. Ajustes pilotaje

Antes	Ahora
<p><i>La copa del mundo de fútbol es un torneo que reúne a las selecciones de distintos países que han pasado por un proceso de clasificación teniendo en cuenta el continente al cual pertenecen. Este torneo consta de dos etapas: una fase clasificatoria y una ronda final. El número de participantes en esta ronda final ha variado con el paso de los años: 16 participantes hasta 1978, 24 entre 1982 y 1994 y 32 desde 1998 en adelante. ¿Qué probabilidad tiene un equipo de clasificar al mundial?</i></p>	<p><i>La copa del mundo de fútbol es un torneo que reúne a las selecciones de distintos países que han pasado por un proceso de clasificación teniendo en cuenta el continente al cual pertenecen. Este torneo consta de dos etapas: una fase clasificatoria y una ronda final. El número de participantes en esta ronda final ha variado con el paso de los años: 16 participantes hasta 1978, 24 entre 1982 y 1994 y 32 desde 1998 en adelante. ¿Irá Colombia al mundial?</i></p>
<p>De los 10 equipos suramericanos opcionados para ir a la copa mundo, solo hay cuatro cupos para la fase final ¿Cuál es la probabilidad de que Colombia clasifique al mundial?, y ¿Cuál sería la probabilidad de que no clasifique?</p>	<p>De los 10 equipos suramericanos opcionados para ir a la copa mundo, Perú, Colombia, Ecuador y Chile, tiene costa en el pacífico ¿Cuál es la probabilidad de que algún equipo de los 10 tenga costa en el pacífico?</p>



Clasificado
1

Clasificado
2

Clasificado
3

Clasificado
4

Teniendo en cuenta las probabilidades anteriormente encontradas, calcula:

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido que juegue la selección Colombia, pueda llegar a ganar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a obtener tres victorias?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos?

Teniendo en cuenta las probabilidades anteriormente encontradas, calcula:

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido que juegue la selección Colombia, pueda llegar a ganar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que, de 2 partidos jugados, pueda llegar a obtener 1 victoria?
- ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 partidos jugados, pueda llegar a obtener 1 victoria?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a obtener tres victorias?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos?

4.3 VALIDACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

Una vez ajustados los instrumentos a partir del pilotaje, se realizó una validación con dos estudiantes, así se logró verificar la pertinencia de la situación fundamental, de las preguntas y demás instrumentos (actividades, guías y categorías).

4.4 INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

Se realizó la intervención pedagógica aplicando el instrumento a un grupo de veinte (20) estudiantes de diferentes carreras universitarias (ver cuadro), en dos sesiones, con un lapso aproximado de dos (2) hora cada una.

Tabla 8. Estudiantes que participaron en la intervención pedagógica

Estudiante	Universidad	Carrera	Semestre	Asignatura que cursa estadística
1	Universidad Nacional de Colombia	Economía	3	Probabilidad y estadística fundamental
2	Universidad Nacional de Colombia	Economía	3	Probabilidad y estadística fundamental
3	Universidad Nacional de Colombia	Administración de Empresas	3	Probabilidad y estadística fundamental
4	Universidad Nacional de Colombia	Administración de Empresas	3	Probabilidad y estadística fundamental
5	Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Licenciatura en Física	4	Teoría de probabilidad
6	Universidad de la Salle	Licenciatura en Lengua Castellana, inglés y francés	3	Desarrollo de habilidades investigativas
7	Universidad de la Salle	Licenciatura en Lengua Castellana, inglés y francés	3	Desarrollo de habilidades investigativas

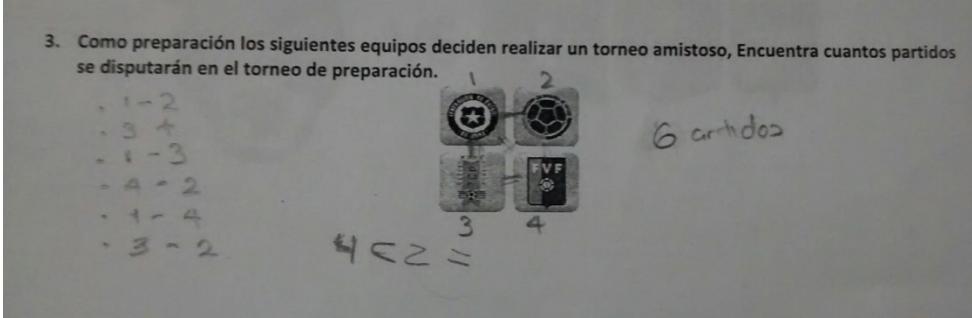
8	Escuela Superior de Administración Pública	Administración Pública	4	Estadística II
9	Escuela Superior de Administración Pública	Administración Pública	4	Estadística II
10	Corporación Universitaria Minuto de Dios	Ingeniería Industrial	4	Probabilidad y estadística
11	Corporación Universitaria Minuto de Dios	Ingeniería Industrial	4	Probabilidad y estadística
12	Universidad Nacional de Colombia	Geología	3	Probabilidad y estadística fundamental
13	Universidad Autónoma de Colombia	Contaduría Pública	4	Estadística II
14	Universidad Autónoma de Colombia	Contaduría Pública	4	Estadística II
15	Universidad Autónoma de Colombia	Ingeniería Electromecánica	4	Probabilidades y Estadísticas
16	Universidad Autónoma de Colombia	Ingeniería Electromecánica	4	Probabilidades y Estadísticas
17	Fundación Universitaria Los Libertadores	Ingeniería Electrónica	6	Estadística y probabilidad
18	Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Ingeniería Topográfica	3	Probabilidad y Estadística
19	Universidad del Rosario	Negocios Internacionales	3	Probabilidad
20	Universidad del Rosario	Negocios Internacionales	3	Probabilidad

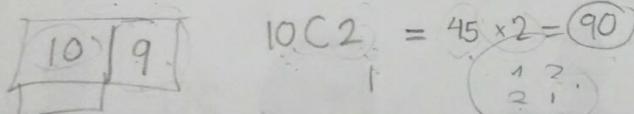
4.5 SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN RECOLECTADA EN EL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

4.5.1 CATEGORÍA ESPACIO MUESTRAL

Tabla 9. Cuadro de resultados

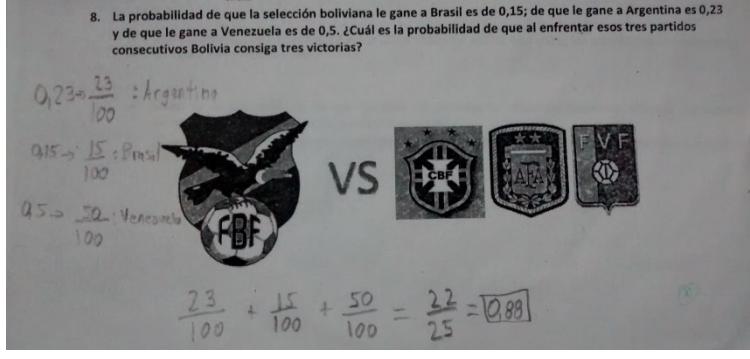
Nivel	Razonamiento	Evidencia de los resultados de los estudiantes	Frecuencia	%
1	Identifica que el experimento puede tener diferentes resultados posibles, y realiza una multiplicación de los números	<p>1. En las eliminatorias para el Campeonato Mundial de Futbol se enfrentan todos los países de Suramérica, pertenecientes a la Confederación Sudamericana de Fútbol (CSF). ¿Cuántos partidos deberán jugarse en todo el proceso clasificatorio si se sabe que juegan partidos todos contra todos, de ida y vuelta?</p> <p>$32 \times 2,63$</p>	1	5
2	Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados.	<p>3. Como preparación los siguientes equipos deciden realizar un torneo amistoso. Encuentra cuantos partidos se disputarán en el torneo de preparación.</p> <p>Chile → Venezuela → Uruguay → Colombia</p> <p>Partidos: Chile → Venezuela → Uruguay → Colombia</p> <p>Partidos: Chile → Uruguay → Colombia → Venezuela</p> <p>Partidos: Chile → Colombia → Venezuela → Uruguay</p> <p>Partidos: Chile → Colombia → Uruguay → Venezuela</p> <p>Partidos: Chile → Uruguay → Colombia → Venezuela</p> <p>Partidos: Chile → Colombia → Venezuela → Uruguay</p> <p>Partidos: Chile → Uruguay → Venezuela → Colombia</p> <p>6 Partidos ✓</p>	1	5

3	<p>Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados en muestras de menor número, pero no lo generaliza.</p>	<p>3. Como preparación los siguientes equipos deciden realizar un torneo amistoso, Encuentra cuantos partidos se disputarán en el torneo de preparación.</p> <p> - 1 - 2 - 3 - 4 - 1 - 3 - 4 - 2 - 1 - 4 - 3 - 2 </p>  <p>6 partidos</p> <p>$4 \times 3 = 12$</p>	6	30

4	<p>El estudiante calcula una combinatoria o una permutación, pero no identifica cual se debe utilizar para el desarrollo de la situación</p>	<p>4. Si en el mundial se cuenta con 32 equipos, ¿de cuantas maneras puedo organizar grupos de 4 equipos cada uno para comenzar la primera ronda del campeonato?</p>  <p>$32 \text{C} 4$</p> <p>\downarrow</p> <p>35960</p>	5	25
5	<p>Determina los posibles resultados del experimento a partir del uso de la combinatoria.</p>	<p>1. En las eliminatorias para el Campeonato Mundial de Futbol se enfrentan todos los países de Suramérica, pertenecientes a la Confederación Suramericana de Futbol (CSF) ¿Cuántos partidos deberán jugarse en todo el proceso clasificatorio si se sabe que juegan partidos todos contra todos, de ida y vuelta?</p>  	7	35
5		<p>4. Si en el mundial se cuenta con 32 equipos, ¿de cuantas maneras puedo organizar grupos de 4 equipos cada uno para comenzar la primera ronda del campeonato?</p>  <p>Possibles Combinaciones para formar los grupos</p> <p>$32 \text{C} 4 = 35960$</p> <p>$4 \text{C} 2 = 6$</p> <p>Número de partidos Jugados en los grupos</p>	7	35

4.5.2 CATEGORÍA PROBABILIDAD

Nivel	Razonamiento	Evidencia de los resultados de los estudiantes	Frecuencia	%
1	Reconoce la existencia de la probabilidad, sin embargo, no la relaciona con el desarrollo de la situación		0	
2	Calcula la probabilidad(algorítmicamente) sin interpretar lo que esta significa	<p>8. La probabilidad de que la selección boliviana le gane a Brasil es de 0,15; de que le gane a Argentina es 0,23 y de que le gane a Venezuela es de 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que al enfrentar esos tres partidos consecutivos Bolivia consiga tres victorias?</p>  <p>VS</p> <p> $1 - 0.15 \rightarrow 0.85$ $1 - 0.23 \rightarrow 0.77$ $1 - 0.5 \rightarrow 0.5$ </p>	1	5

3	<p>Calcula las probabilidades inmersas en la situación, pero no las relaciona entre sí (no reconoce si son dependientes o independientes)</p>	<p>8. La probabilidad de que la selección boliviana le gane a Brasil es de 0,15; de que le gane a Argentina es 0,23 y de que le gane a Venezuela es de 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que al enfrentar esos tres partidos consecutivos Bolivia consiga tres victorias?</p> <p>$0,23 = \frac{23}{100}$: Argentina $0,15 = \frac{15}{100}$: Brasil $0,5 = \frac{50}{100}$: Venezuela</p> <p style="text-align: center;">VS</p>  <p>$\frac{23}{100} + \frac{15}{100} + \frac{50}{100} = \frac{88}{100} = 0,88$</p>	2	10
4	<p>Calculan las probabilidades, se identifica si son dependientes o independientes, pero no comprende el porqué de tener en cuenta todos los posibles eventos (éxitos y fracasos)</p>	<p>• ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a obtener tres victorias? $(0,15 \times 0,23) \times 0,5 = 0,0345 \times 0,5 = 0,01725$</p> <p>La probabilidad de que gane los tres consecutivos es del 1,125 %.</p> <p>• ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a obtener tres victorias? $(0,15)^3 = 0,15$</p> <p>• ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos? $\frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \left(\frac{9}{16}\right)^8 = 0,01002$</p>	5	25

5	Establece la probabilidad conjunta a partir de la probabilidad de eventos independientes teniendo en cuenta todos los eventos posibles.	$P\left(\frac{9}{16}\right)^3 \cdot q = \left(\frac{7}{16}\right)^7$ $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$ $0,17 \cdot 0,003$	12	60

4.5.3 CATEGORÍA VARIABLE ALEATORIA

Nivel	Razonamiento	Evidencia de los resultados de los estudiantes	Frecuencia	%
1	No se consiente de cuál es el valor que está variando en la situación	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a $\frac{3}{10}$ obtener tres victorias? • ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos? $\frac{1}{2}$ 	3	15
2	Se comprende que hay una variable aleatoria, pero no se tiene claridad, si es el número de éxitos o de fracasos	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos? $\rightarrow \binom{10}{4} 0,44^4 \cdot 0,56^6 = 120 \cdot 0,0031 \cdot 0,175 = 0,0651$ 	1	5
3	Se reconoce la variable como el número de éxitos, pero no lo relaciona con la situación	<p>5). $P^5 \cdot q^{(9-5)} \cdot q_{c5}$</p> $(0,56)^5 \cdot (0,43)^4 \cdot q_{c5} =$ $(0,56)^4 \cdot (0,43)^3 \cdot q_{c4} =$ $(0,56)^3 \cdot (0,43)^2 \cdot q_{c3} =$ $(0,56)^2 \cdot (0,43)^1 \cdot q_{c2} =$ $(0,56)^1 \cdot 1 \cdot q_{c1} =$	4	20
				70

4	Caracteriza algorítmicamente la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación	$\rightarrow \left(\frac{16}{8}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^8 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,11 = 11\%$ $\rightarrow \left(\frac{16}{9}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^9 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,16 = 16\%$ $\rightarrow \left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,26$ $\left(\frac{9}{6}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,22$ $\left(\frac{9}{7}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^7 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,12$ $\left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{9}{16}\right)^8 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^9 = 0,039$	3	15
5	Caracteriza la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación, además de tener en cuenta que la variable puede tomar más de un valor, ("al menos", "como máximo".)	$\left(\frac{9}{5}\right) \times 0.5625^5 \times 0.4375^4 = 0.2599 = 0.65 = 65\%$ $\left(\frac{9}{6}\right) \times 0.5625^6 \times 0.4375^3 = 0.2228$ $\left(\frac{9}{7}\right) \times 0.5625^7 \times 0.4375^2 = 0.1227$ $\left(\frac{9}{8}\right) \times 0.5625^8 \times 0.4375^1 = 0.039$ $\left(\frac{9}{9}\right) \times 0.5625^9 \times 0.4375^0 = 0.0056$ <p>Cu probabilidad de que Colonia hoyo gane al menos 5 partidos de 9 jugados es de 65%.</p>	9	45

4.5.4 CATEGORÍA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Nivel	Razonamiento	Evidencia de los resultados de los estudiantes	Frecuencia	%
1	No se relacionan los parámetros para la construcción de la distribución	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido que juegue la selección Colombia, pase algo? • ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a $\frac{3}{10}$ obtener tres victorias? • ¿Cuál es la probabilidad de que de los 16 partidos Colombia haya ganado tan solo 8 partidos? $\frac{1}{2}$ 	3	15
2	Solo se tiene en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (sin tener en cuenta la independencia entre los eventos)	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 partidos que juegue la selección Colombia, puedan llegar a $\frac{3}{10}$ obtener tres victorias? $3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) \cdot \left(\frac{7}{16}\right) = 0,73$ 	1	5
3	Solo se tiene en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (identifica si son independientes), pero no lo relaciona con la variable aleatoria	$3 \left(\frac{9}{16}\right)^3 \left(\frac{7}{16}\right)^7$ <p style="text-align: center;"> ganar perder </p>	2	10

4	Determina la probabilidad en cada uno de los experimentos. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso.	$\left. \begin{array}{c} \underline{\text{G}} \quad \underline{\text{NG}} \quad \underline{\text{NG}} \\ \underline{\text{NG}} \quad \underline{\text{G}} \quad \underline{\text{NG}} \\ \underline{\text{NG}} \quad \underline{\text{NG}} \quad \underline{\text{G}} \end{array} \right\} \binom{3}{1} \left(\frac{9}{16}\right)^1 \left(\frac{7}{16}\right)^2 = 0,322$ $\begin{array}{ccccccccc} \underline{\text{G}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} \\ \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} \\ \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} \\ \vdots & & & & & & & & \\ \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{NG}} & \underline{\text{G}} & \underline{\text{G}} \end{array} \right\} \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^7$ <p style="text-align: center;">Probabilidad Genuino ↓ 3C0 Probabilidad No Genuino ↓ 7C3 Probabilidad Genuino ↓ 7C0</p> $P(x=3) = 120 \times 0.17 \times 0.00306$ $P(x=3) = 0,062.$	10	50

5	<p>Determina la probabilidad en cada uno de los experimentos. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso, de igual forma tiene en cuenta para la solución de la situación la medida de resumen (valor esperado)</p>		4	20
---	---	--	---	----

5 . CAPÍTULO - ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el análisis realizado a las producciones de los estudiantes, inicialmente se presenta un análisis puntual por categoría, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento planteados para cada una de ellas.

Después de esto se presentan las características del análisis clúster que se realizó y su análisis correspondiente.

5.2 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES POR CATEGORÍAS.

5.2.1 CATEGORÍA ESPACIO MUESTRAL

Para la construcción de la distribución binomial es primordial tener en cuenta el conjunto de los posibles resultados del experimento aleatorio, es decir, en este caso, determinar el espacio muestral utilizando la técnica de conteo de combinaciones, por consiguiente, en la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos para la primera categoría.

Tabla 10 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de espacio muestral.

Nivel	Razonamiento	Frecuencia	%
1	Identifica que el experimento puede tener diferentes resultados posibles, y realiza una multiplicación de los números	1	5
2	Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados.	1	5
3	Utiliza una representación para Determinar cómo contar los posibles resultados en muestras de menor número, pero no lo generaliza.	6	30
4	El estudiante calcula una combinatoria o una permutación, pero no identifica cual se debe utilizar para el desarrollo de la situación	5	25
5	Determina los posibles resultados del experimento a partir del uso de la combinatoria.	7	35

A partir de la información obtenida, se puede identificar que el 10% de los estudiantes no utilizaron una técnica de conteo (permutaciones o combinaciones) lo que le generó dificultad a la hora de establecer el espacio muestral del experimento aleatorio, esto debido a que los estudiantes tienen nociones de conceptos estadísticos, pero no la manera de aplicarlos a la situación o los hacían de manera empírica.

Así mismo, se puede establecer que el 90% de la población utiliza representaciones gráficas (diagramas de árbol) para realizar el conteo, y determinar así el espacio muestral. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el 33% de estos estudiantes, no logran generalizar para determinar el espacio con números mayores, lo que les generó mayor dificultad en la solución de las situaciones posteriores.

De igual forma, se evidencia que el 60% de la totalidad del grupo utiliza una técnica de conteo, recurriendo a las combinaciones, puesto que les permite tener todos los conjuntos de posibles resultados del experimento aleatorio, logrando así determinar los diferentes espacios muestrales finitos que se presentan, facilitando un mejor análisis y comprensión del desarrollo de la situación.

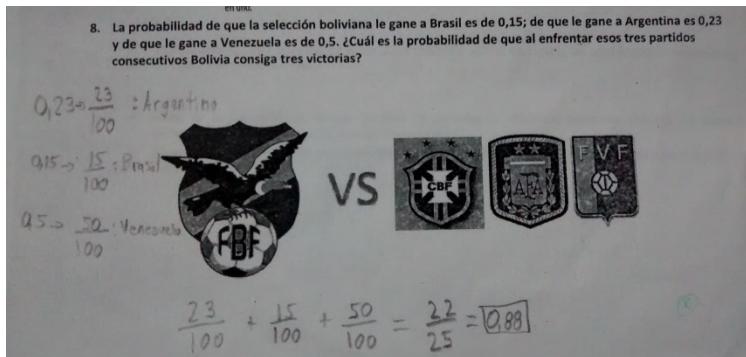
5.2.2 CATEGORÍA PROBABILIDAD

La **categoría** de probabilidad hace referencia a la forma en que el estudiante establece probabilidades simples y conjuntas, de igual forma se resalta la importancia de establecer la independencia de eventos, puesto que esto es lo permitirá establecer el parámetro de probabilidad de éxito y de fracaso en la distribución, en la siguiente tabla se muestran los resultados de esta categoría.

Tabla 11 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de espacio muestral

NIVEL	RAZONAMIENTO	FRECUENCIA	%
1	Reconoce la existencia de la probabilidad, sin embargo, no la relaciona con el desarrollo de la situación	0	0
2	Calcula la probabilidad(algorítmicamente) sin interpretar lo que esta significa	1	5
3	Calcula las probabilidades inmersas en la situación, pero no las relaciona entre sí (no reconoce si son dependientes o independientes)	2	10
4	Calculan las probabilidades, se identifica si son dependientes o independientes, pero no comprende el porqué de tener en cuenta todos los posibles eventos (éxitos y fracasos)	5	25
5	Establece la probabilidad conjunta a partir de la probabilidad de eventos independientes teniendo en cuenta todos los eventos posibles.	12	60

En mi primera instancia es importante resaltar que ningún estudiante se encontró en el nivel 1, lo cual evidencia que la noción de probabilidad es conocida por la población a la que aplico la actividad, así se puede inferir que ellos no determinan una probabilidad simple de manera empírica, sino que identifican la probabilidad como el resultado de asignar a cada evento A, un número real no negativo, el “chance” o la posibilidad de ocurrencia, como lo expone Blanco (2004).



Por otra parte, se evidencia que solo el 10% de los estudiantes no tienen claridad sobre la independencia de los eventos, como se puede observar en la imagen, el estudiante suma las probabilidades inmersas en la situación, sin tener en cuenta que los eventos presentados son independientes.

En el nivel 4, en donde se encuentra el 25% se evidenció que tiene en cuenta la independencia de los eventos, pero solo para los eventos de éxito, más no tuvieron en cuenta la probabilidad de fracaso en las situaciones.

Finalmente, para el análisis de esta categoría se evidenció que el 60% de los estudiantes lograron identificar la independencia de los eventos, y también tener en cuenta tanto la probabilidad de éxito como la de fracaso.

$$P\left(\frac{9}{16}\right)^3 \cdot q = \left(\frac{7}{16}\right)^7$$

$$0,17 \cdot 0,003$$

En la imagen se observa una solución de un estudiante, el cual tiene en cuenta la independencia de los eventos, al multiplicar 3 veces la probabilidad de éxito ($p (\frac{9}{16})^3$), y a su vez, multiplicarlo por la probabilidad de fracaso ($q (\frac{7}{16})^7$), teniendo en cuenta los 10 ensayos que propone el experimento.

5.2.3 CATEGORÍA VARIABLE ALEATORIA

Ahora bien, para el análisis la categoría de Variable Aleatoria es importante resaltar que es aquí donde se verán los razonamientos que permitirán a los estudiantes comprender que la variable puede tomar uno o más valores, los cuales representan todos los diferentes conjuntos de eventos en donde se

cumplen los parámetros de probabilidad de éxito y de fracaso, a continuación, se presentan los resultados obtenidos en esta categoría:

Tabla 12 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de variable aleatoria

NIVEL	RAZONAMIENTO	FRECUENCIA	%
1	No se es consciente de cuál es el valor que está variando en la situación	3	15
2	Comprende que hay una variable aleatoria, pero no se tiene claridad, si es el número de éxitos o de fracasos	1	5
3	Reconoce la variable como el número de éxitos, pero no lo relaciona con la situación	4	20
4	Caracteriza algorítmicamente la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación	3	15
5	Caracteriza la variable aleatoria como el número de éxitos que se presentación en la situación, además de tener en cuenta que la variable puede tomar más de un valor, ("al menos", " como máximo")	9	45

Como se mencionó anteriormente, esta categoría aporta mucho a la construcción del concepto de distribución binomial, en este orden de ideas, el 60% de los estudiantes, logró identificar la variable aleatoria dentro de la situación, como una variable cuantitativa cuyo valor numérico se ha determinado por un experimento aleatorio y definiéndola como el número de éxitos en los n ensayos.

Cabe resaltar que el 45% de la población total, no solo identifica la variable aleatoria, sino que también tienen en cuenta que la variable puede tomar más de un valor, como en los casos donde se presentan situaciones en donde se plantean las condiciones “al menos” o “como máximo”.

Handwritten calculations:

$$\binom{9}{5} \times 0.5625^5 \times 0.4375^4 = 0.2599 = 0.65 = 65\%$$

$$\binom{9}{6} \times 0.5625^6 \times 0.4375^3 = 0.2228$$

$$\binom{9}{7} \times 0.5625^7 \times 0.4375^2 = 0.1227$$

$$\binom{9}{8} \times 0.5625^8 \times 0.4375^1 = 0.039$$

$$\binom{9}{9} \times 0.5625^9 \times 0.4375^0 = 0.0056$$

*Cu probabilidad de que Galantia haga
ganado al menos 5 partidos de 9 jugadas
es de 65%.*

Ahora bien, a partir de la tabla también se puede observar que el 20% de los estudiantes, reconocen la variable como el número de éxitos, pero no la relacionan con la situación, es decir, poseen un razonamiento de transición, en el cual saben determinar conceptos de forma correcta, pero no como relacionarlos con la situación; en la imagen se puede observar como el individuo si bien, sabe cómo solucionar el problema, no calcula los resultados y además confunde los valores que puede tomar la variable aleatoria. (Como se observa en la imagen anterior los valores correctos de la variable son $p(X \geq 5)$.

Handwritten steps:

$$P^5 \cdot q^{(9-5)} \cdot q_{c5}$$

$$(0,56)^5 \cdot (0,43)^4 \cdot q_{c5} =$$

$$(0,56)^4 \cdot (0,43)^3 \cdot q_{c4} =$$

$$(0,56)^3 \cdot (0,43)^2 \cdot q_{c3} =$$

$$(0,56)^2 \cdot (0,43)^1 \cdot q_{c2} =$$

$$(0,56)^1 \cdot 1 \cdot q_{c1} =$$

Por otro lado, se evidencia que el 5% de los estudiantes confunden la variable aleatoria, asignándola como el número de ensayos y no como el número de éxitos, y finalmente, que el 15% no son conscientes de cuál es el valor que está variando en la situación, lo que genera que no se logren articular los parámetros, ni establecer la distribución de probabilidad, evidenciando un razonamiento

idiosincrático, pues empíricamente colocan una probabilidad simple para la solución de las situaciones.

5.2.4 CATEGORÍA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Finalmente se presentan los resultados de la categoría de distribución de probabilidad, referente a la relación entre los conceptos desarrollados (conteo, probabilidad) y la articulación de estos, por medio de la independencia de probabilidad y la variable aleatoria, de igual forma hace referencia a la identificación del valor esperado de la distribución binomial.

Tabla 13 Tabla de frecuencia y porcentajes respecto a los niveles de la categoría de distribución de probabilidad

NIVEL	RAZONAMIENTO	FRECUENCIA	%
1	No relaciona los parámetros para la construcción de la distribución	3	15
2	Solo tienen en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (sin tener en cuenta la independencia entre los eventos)	1	5
3	Solo tienen en cuenta el producto entre la probabilidad de éxito y de fracaso (identifica si son independientes), pero no lo relaciona con la variable aleatoria	2	10
4	Determina la probabilidad en cada uno de los experimentos. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso.	10	50
5	Determina la probabilidad en cada uno de los experimentos. Multiplicando la combinatoria con la probabilidad de éxito y fracaso, de igual forma tiene en cuenta para la solución de la situación la medida de resumen (valor esperado)	4	20

A partir de los resultados descritos en la tabla Nº13, se evidencia que el 15% de los estudiantes se encuentran en un nivel idiosincrático, pues no lograron establecer la relación entre los conceptos que constituyen la distribución binomial (conteo, probabilidad, variable aleatoria), puesto que colocan empíricamente conceptos estadísticos sin tener en cuenta lo planteado por la situación. Ahora, también se identifica que el 5% de los estudiantes tienen en cuenta la independencia de los eventos, pero no establece la relación con el número de ensayos del que está compuesto el experimento.

De igual forma, que si bien el 10% de estudiantes que se encuentran en el nivel 3, identifican las probabilidades de éxito y fracaso y la independencia de los eventos, no articulan estos conceptos con la variable aleatoria, es decir no tiene en cuenta el espacio muestral que se generar con el uso de la combinatoria; en la imagen se puede observar que el estudiante tiene una construcción errada de distribución binomial, al multiplicar los parámetros de éxito y fracaso, por el número de éxitos.

$$3 \left(\frac{9}{16}\right)^3 \left(\frac{7}{16}\right)^7$$

gano ↓ ganar ↓ perder

Por otro lado, el análisis arroja que el 70% de los estudiantes lograron la construcción de la distribución binomial, a partir de la articulación de los conceptos trabajados (combinatoria, probabilidades de éxito y fracaso, independencia de eventos y la variable aleatoria), tanto con ejemplos con pocos ensayos, como aquellos en donde se realizan varios.

En la imagen se observa un ejemplo de la construcción del concepto de distribución binomial, en donde se busca encontrar la probabilidad de obtener 1 éxito en 3 ensayos, y el estudiante articula los conceptos de combinatoria, probabilidad de éxito, de fracaso, eventos independientes y variable aleatoria.

$$\begin{array}{c} \text{G NG NG} \\ \text{NG G NG} \\ \text{NG NG G} \end{array} \left\{ \binom{3}{1} \left(\frac{9}{16}\right)^1 \left(\frac{7}{16}\right)^2 = 0,322 \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{G G G NG NG NG NG NG NG NG} \\ \text{G NG G G NG NG NG NG NG NG} \\ \text{G NG NG G NG NG NG NG NG} \\ \vdots \\ \text{G NG NG NG NG NG NG NG NG} \end{array} \left\{ \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^7 \right.$$

↓
P. 0.17
R. 0.00306

$$P(X=3) = 120 \times 0.17 \times 0.00306$$

$$P(X=3) = 0,062$$

También se puede observar una solución en donde se busca encontrar la probabilidad de obtener 3 éxitos en 10 ensayos, e igualmente se articulan los conceptos trabajados evidenciando un proceso integrado de razonamiento.

Finalmente cabe destacar que el 28,57% de los estudiantes además de construir la distribución de probabilidad, también calcularon de manera explícita la medida de resumen del valor esperado de la distribución.

$$\bullet P = \frac{28}{38} \Rightarrow P = 0,736$$

el número de goles que anotaría Cristiano Ronaldo si juega 16 partidos
Serie: $16 \cdot 0,736 = 11,76$ goles

5.3 ANÁLISIS CLÚSTER

Para desarrollar un análisis detallado de los resultados obtenidos en la intervención pedagógica, se agruparon en la siguiente tabla cada uno de los estudiantes con respecto a cada una de las categorías propuestas: espacio muestral, probabilidad, variable aleatoria y distribución binomial.

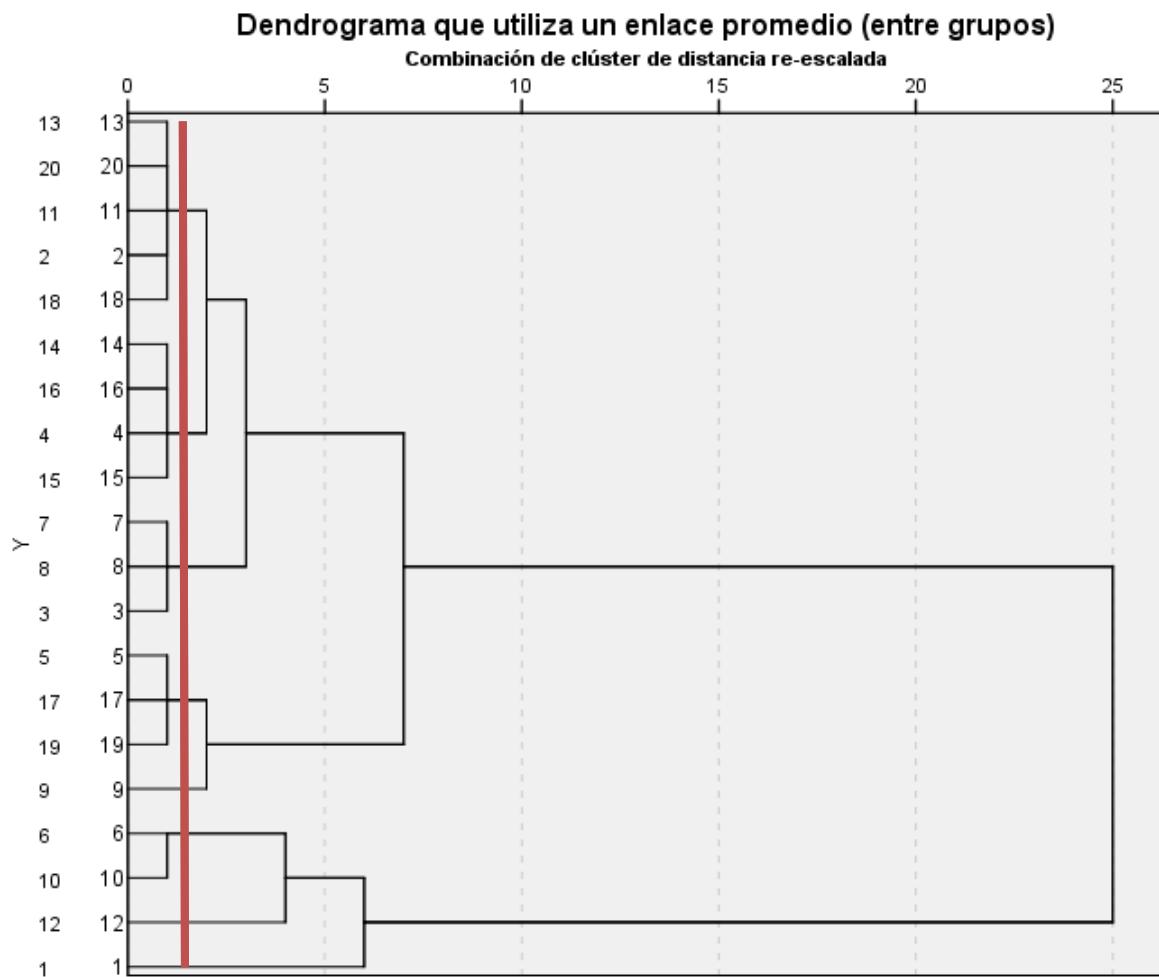
Tabla 14 *Nivel de ubicación de los estudiantes respecto a las categorías de análisis.*

ESTUDIANTE	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
1	1	2	1	1
2	4	5	5	4
3	5	5	3	4
4	5	5	5	4
5	3	4	3	3
6	2	3	1	1
7	5	5	4	4
8	5	5	4	4
9	3	4	4	4
10	3	3	1	1
11	4	5	5	5
12	3	4	2	2
13	4	5	5	5
14	5	5	5	4
15	5	5	5	5
16	5	5	5	4
17	3	4	3	3
18	4	5	5	4
19	3	4	3	4
20	4	5	5	5

Haciendo uso del método de análisis clúster, se obtuvieron grupos de estudiantes cuyas respuestas son lo más homogéneas posibles a partir de las categorías propuestas, lo que permitirá establecer las características de como razona cada uno de estos grupos, y que llevó a los estudiantes a desarrollar el concepto y a otros no.

Así el siguiente dendograma se observan los grupos de estudiantes con comportamientos homogéneos a partir de los conglomerados.

Figura N° 1 dendograma niveles de los estudiantes por categorías de análisis



A partir del dendograma se pueden agrupar las respuestas en 5 conglomerados, los cuales se evidencian antes de la recta de color rojo, ubicándolos de arriba hacia

abajo. En la siguiente tabla se resumen los conglomerados y los estudiantes que pertenecen a cada uno

Tabla 15 Conglomerados

CONGLOMERADO	ESTUDIANTES
1	2, 11, 13, 18, 20
2	4, 14, 15, 16
3	3, 7, 8
4	5, 9, 17, 19
5	1, 6, 10, 12

De esta manera el análisis detallado se describirá a partir de cada uno de los conglomerados arrojados por el análisis clúster

CONGLOMERADO 1

Tabla 16 Conglomerado 1

ESTUDIANTE	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
4	5	5	5	4
14	5	5	5	4
15	5	5	5	5
16	5	5	5	4

✓ ***Características que describen a los estudiantes del conglomerado 1***

Los estudiantes que pertenecen a este conglomerado se caracterizan por tener un razonamiento integrado en los conceptos que constituyen la distribución binomial, parten de identificar el espacio muestral utilizando la combinatoria, después identifican la independencia entre los eventos, las probabilidades de éxito y fracaso y a partir de esto, relacionan la variable aleatoria con el espacio muestral, articulando los conceptos para llegar a la distribución binomial, es importante destacar, que este grupo de estudiantes si bien realizó la construcción del

concepto, solo uno de los estudiantes identificó la media de resumen del valor esperado.

CONGLOMERADO 2

Tabla 17 Conglomerado 2

ESTUDIANTE	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
2	4	5	5	4
11	4	5	5	5
13	4	5	5	5
18	4	5	5	4
20	4	5	5	5

✓ *Características que describen a los estudiantes del conglomerado 2*

Este grupo de estudiantes se caracteriza por iniciar el desarrollo de las situaciones de una manera procesual en sus razonamientos, como se puede observar parten de determinar el espacio muestral de una manera algorítmica. De igual forma identificaron la independencia entre los eventos, las probabilidades de éxito y fracaso y a partir de esto, relacionaron la variable aleatoria con el espacio muestral, articulando los conceptos para llegar a la distribución binomial.

Se resalta que, a pesar de haber comenzado con un nivel procesual, durante el desarrollo de la secuencia, lograron alcanzar en su mayoría el nivel integrado que le permitió llegar a la construcción del concepto de distribución binomial. También, en este conglomerado se encuentran 3 estudiantes que lograron determinar la medida de resumen del valor esperado.

CONGLOMERADO 3

Tabla 18 Conglomerado 3

ESTUDIANTE	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
3	5	5	3	4
7	5	5	4	4
8	5	5	4	4

✓ ***Características que describen a los estudiantes del conglomerado 3***

Los estudiantes que se encuentran en este conglomerado, se caracterizan por que dan una pobre interpretación de los valores que puede asumir la variable aleatoria discreta, sin embargo, estos estudiantes, lograron construir el concepto de distribución binomial, en este grupo ninguno determinó la medida de resumen del valor esperado.

CONGLOMERADO 4

Tabla 19 Conglomerado 4

ESTUDIANTE	ESPACIO MUESTRAL	PROBABILIDAD	VARIABLE ALEATORIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
5	3	4	3	3
9	3	4	4	4
17	3	4	3	3
19	3	4	3	4

✓ ***Características que describen a los estudiantes del conglomerado 4***

Los estudiantes que se encuentran en este grupo parten con dificultades desde el establecimiento del espacio muestral, cuando la situación involucra un espacio muestral donde se involucra pocos eventos, los estudiantes lo logran determinar a partir de representaciones gráficas, pero al tener una situación que involucre un espacio muestral mayor, se evidencia una dificultad al generalizar el concepto (combinatoria).

Debido a que no se determina de forma adecuada el espacio muestral, no se tiene claridad en que se debe ser un experimento completo, es decir, tener en cuenta la independencia entre las probabilidades de todos los ensayos (de éxito y de fracaso).

Otra característica del grupo es confundir la variable aleatoria que es igual al número de éxitos, con el número de fracasos. Todo esto conlleva algunos de ellos no se logren relacionar todos los conceptos y por ende no construir el concepto de distribución binomial.

CONGLOMERADO 5

Tabla 20 Conglomerado 5

Estudiante	Espacio muestral	Probabilidad	Variable aleatoria	Distribución de probabilidad
1	1	2	1	1
6	2	3	1	1
10	3	3	1	1
12	3	4	2	2

✓ ***Características que describen a los estudiantes del conglomerado 5***

Los estudiantes que se encuentran en este grupo tienen dificultades para establecer el espacio muestral, por lo tanto, al no desarrollar la estrategia de conteo, no logran generalizar el proceso, algunos de ellos identificaban el espacio muestral en situaciones de pocos eventos.

De igual forma, aquí se caracteriza el uso de un razonamiento empírico, puesto que se conocen de conceptos estadísticos, pero no aplican a la situación, como se evidencia al momento de determinar las probabilidades, debido a esto, el grupo no logra caracterizar la variable aleatoria. Finalmente, al no tener claridad de los conceptos que involucran la construcción de la distribución binomial, no es posible llegar a su interiorización

5.3.1 SUB-CATEGORÍAS EMERGENTES DEL ANÁLISIS DETALLADO

A partir de la caracterización de los 5 conglomerados, se plantea unas categorías emergentes de análisis que permita identificar las producciones de los estudiantes.

Tabla 21 Categorías Emergentes

Conglomerado	Categorías emergentes	Descripción
1	1	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza la combinatoria como técnica de conteo para establecer el espacio muestral. • Identifica que los eventos son independientes. • Determina las probabilidades de éxito y fracaso y la probabilidad conjunta. • Caracteriza la variable aleatoria e identifica que esta puede tomar uno o más valores. • Articula los conceptos por medio de la variable aleatoria y el espacio muestral. • Determina probabilidades a partir de la distribución binomial. • Determina la medida de resumen conocida como el valor esperado.
2	2	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza la combinatoria de manera algorítmica establecer el espacio muestral.

		<ul style="list-style-type: none"> • Identifica que los eventos son independientes. • Determina las probabilidades de éxito y fracaso y la probabilidad conjunta. • Caracteriza la variable aleatoria e identifica que esta puede tomar uno o más valores. • Articula los conceptos por medio de la variable aleatoria y el espacio muestral.
3	3	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza la combinatoria como técnica de conteo para el establecer el espacio muestral. • Identifica que los eventos son independientes. • Determina las probabilidades de éxito y fracaso y la probabilidad conjunta. • Caracteriza la variable aleatoria, pero no identifica que esta puede tomar uno o más valores.
4	4	<ul style="list-style-type: none"> • Determina el espacio muestral, cuando la situación involucra un espacio muestral con pocos

		<p>eventos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • No identifica que el experimento debe ser completo, es decir, tener en cuenta la independencia entre las probabilidades de todos los ensayos (de éxito y de fracaso) • Confunde la variable aleatoria (número de éxitos) con el número de ensayos. • No articula los conceptos para construir la distribución de probabilidad. • No resuelve situaciones haciendo uso de la distribución binomial.
5	5	<ul style="list-style-type: none"> • No determina el espacio muestral. • No identifica que el experimento debe ser completo, es decir, tener en cuenta la independencia entre las probabilidades de todos los ensayos (de éxito y de fracaso). • No se caracteriza la variable aleatoria como el número de éxitos. • No articula los conceptos para construir la distribución de probabilidad

		<ul style="list-style-type: none">• No resuelve situaciones haciendo uso de la distribución binomial.
--	--	---

6 . CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta la importancia que tiene el proceso para la toma de decisiones en nuestra vida cotidiana, en el presente trabajo de investigación se diseñó una secuencia de actividades que facilita la construcción del concepto de distribución binomial, como herramienta fundamental para la predicción de posibles resultados.

Dando respuesta al primer objetivo planteado en el presente trabajo, para el diseño de la secuencia de actividades se identificaron los diferentes parámetros que hacen parte de la definición formal del concepto de distribución binomial. A partir de esto, se diseñaron 2 actividades, donde los estudiantes definieron, calcularon y relacionaron los siguientes conceptos: Espacio muestral, combinatoria, eventos independientes, probabilidad, caracterización de la variable aleatoria. Potenciando así la noción del concepto de distribución binomial, todo esto bajo las fases de acción, formulación, validación e institucionalización.

Ahora bien, a partir de la construcción del marco teórico en donde por un lado se resaltó la importancia del razonamiento estadístico, y por el otro, los conceptos identificados en la definición formal de la distribución binomial, se construyó un cuadro categorial donde se relacionan los niveles de razonamiento estadístico según Garfield (2002) y los 4 conceptos claves en la definición de la distribución binomial: espacio muestral, probabilidad, variable aleatoria y distribución binomial.

A partir de esto, se recolectaron y sistematizaron las producciones escritas de los estudiantes en cada uno de los niveles propuestos, identificando los tipos de razonamiento que utilizan ellos al enfrentarse a las situaciones. Así se logró identificar que, para llegar a la construcción del concepto de distribución binomial, es necesario que los estudiantes tengan claridad en el momento definir el espacio muestral, los eventos, las probabilidades y la caracterización de la variable aleatoria, dando respuesta al segundo objetivo planteado en el trabajo.

De igual forma, se identificó una dificultad que se presenta al momento de desarrollar situaciones en torno a la distribución binomial y es cuando los estudiantes no conocen las técnicas de conteo, como la combinatoria y la permutación ya que no logran definir de manera correcta el espacio muestral.

Otra dificultad que se encontró en los estudiantes, fue que al no identificar si los eventos son independientes, se generó un sesgo al momento de definir la probabilidad de éxito y fracaso.

Adicionalmente, se identificó que, al no caracterizar la variable aleatoria, ni relacionarla con el espacio muestral, los estudiantes no llegan a articular los conceptos para la construcción de la distribución binomial. Así se logró dar respuesta al tercer objetivo planteado.

Para dar respuesta al cuarto objetivo, se realizó un análisis clúster, con el que se logró identificar el comportamiento de las producciones de los estudiantes, agrupándolos en 5 conglomerados, que permitieron establecer nuevas categorías emergentes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se da por cumplido el objetivo general del trabajo de investigación, el cual pretendía: Diseñar y aplicar una secuencia de actividades que facilite la enseñanza de la noción de la distribución de probabilidad binomial en estudiantes universitarios.

7 . RECOMENDACIONES

- Diseñar secuencias en donde se trabaje en diferentes contextos en los cuales la distribución binomial, facilite el proceso de toma de decisiones, haciendo así más significativo su aprendizaje.
- Fortalecer los métodos de conteo en los inicios del curso de estadística.
- Plantear actividades que permitan el desarrollo y construcción de las distribuciones discretas.

8 . BIBLIOGRAFÍA

Bernal d., gil h. (2009) construcción de la distribución normal con estudiantes de educación media, trabajo de grado para optar al título de licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, Bogotá, Colombia.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Recuperado el 23 de agosto de 2016. Disponible en:
<http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf>

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Recuperado el 23 de agosto de 2016. Disponible en:
<http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf>

Batanero, C. Díaz, C. Contreras, J. Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Recuperado el 23 de agosto de 2016.
<http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article4075>

Brousseau, G (1986) fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas. Francia.

Canavos, G. (1999). Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos. México. Mc Graw Hill.

Cohen, S. y Chechile, R. A. (1997). Probability distributions, assessment and instructional software: Lessons learned from an evaluation of curricular software. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), The assessment challenge in statistics education (pp. 253-262). Amsterdam: IOS Press

Falk, R. y Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. Psychological Review, 104, 310-318.

Flick, U (2002). Qualitative research – State of art. Social Science Information.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. International Statistical Review, 70 (1), 1-51.

Garfield, J (2002). El reto de desarrollar razonamiento estadístico. Minnesota: Diario de estadísticas de educación, volumen 10 revista número 3. Recuperado el 24 de agosto de 2016 de: <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html>

Grupo DECA (2005), La Práctica Docente A Partir Del Modelo Deca Y La Teoría De Las Situaciones Didácticas, comunicación oral, la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa , en Montevideo (Uruguay).2005

Hernández, R, Fernández, C, Baptista, P. (2003). Metodología de la Investigación. Mc Graw Hill Interamericana. D.F, México. 2003.

Polya, G. (1986). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas. Traducción de Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Sabino, C. (1992); El proceso de Investigación. Bogotá, Colombia.

Sandoval, c. (1996). Investigación cualitativa. Bogotá, Colombia.

Serrado, a. Cardeñoso, j. Azcarate, p. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. Recuperado el 3 de marzo del 2011 en [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/serj4\(2\)_serrado_etal.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/serj4(2)_serrado_etal.pdf)

Serrano y (2009) el análisis exploratorio de datos como herramienta para el desarrollo de razonamiento estocástico en estudiantes de noveno grado, trabajo de grado para optar al título de licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, Bogotá, Colombia.

Tauber, I. (2001). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. Trabajo de grado de doctorado, universidad de Sevilla. Sevilla.

Vallecillos, A. (1996). Inferencia estadística y enseñanza: Un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Madrid: Comares.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute (Tome LVIII, Book 2, pp. 201-204). Helsinki: International Statistical Institute.

Watson, J. (2006). Statistical literacy at school: Growth and goals. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates