EL MÉTODO ARGUMENTATIVO EN DESCARTES. ANÁLISIS Y APLICACIÓN

HASBLEYDY LIZETH ALMÉCIGA RUIZ

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN COMO OPCIÓN DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

JHON HELVER BELLO

(Magister en docencia de las matemáticas)

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS BOGOTÁ D.C. 2016

EL MÉTODO ARGUMENTATIVO EN DESCARTES. ANÁLISIS Y APLICACIÓN

HASBLEYDY LIZETH ALMÉCIGA RUIZ

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN COMO OPCIÓN DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

JHON HELVER BELLO

(Magister en docencia de las matemáticas)

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS BOGOTÁ D.C. 2016

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado:

Jurado

Bogotá abril 2016

Agradecimientos

Este espacio es muy importante para recompensar aquellas personas que a lo largo de la elaboración de este documento me han compartido sus conocimientos con el fin que este trabajo esté bien sustentado, es por ello que agradezco de manera muy especial al profesor JHON HELVER BELLO, no solo por su amplia ayuda sino por su paciencia y esmero a la hora de brindarme algunos de sus amplios conocimientos, sin dejar de lado que me haya compartido gran parte de los referentes teóricos que sustentan este documento.

Por otro lado, quisiera agradecer a todos los profesores sin excepción, que a lo largo de la carrera se esmeraron en enseñarme conceptos importantes, y más aún, ese don de gente tan necesario en el ejercicio de profesor.

De igual manera agradezco al profesor Juan Pablo Albadán por cederme el espacio de formación a su cargo para aplicar la propuesta, en donde no sólo fue de apoyo, sino que su trato hacia mí fue ejemplar.

Dedicatoria

Esta monografía está dedicada a Señor Dios todopoderoso, que me brindó la oportunidad de culminar satisfactoriamente este documento, que me dio una familia hermosa a la que amo profundamente.

De igual forma se la dedico a mi hija Sofía, que es mi motor cada día para continuar, que, aunque en la elaboración de esta monografía no le haya dedicado el tiempo que se merece, ella sabe que todos mis logros son para ella.

Es imposible nombrar a todos los integrantes de mi familia, pero si quiero decirles a todos, que sé que cada uno aportó un grano de arena para hacer de mi lo que hoy soy, infinitas gracias, además a una prima que en el proceso falleció aun siendo muy joven Ninna Casas Alméciga, que más que mi prima fue mi hermana y gran apoyo, sé que desde el cielo recibirá este reconocimiento. A mi papá a mi abuelita y a mi hermano Juan Carlos los amo con mi corazón.

Contenido

Agradecimientos 4
Dedicatoria 5
Capítulo 1 7
ANTECEDENTES 7
JUSTIFICACIÓN 10
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 13
PREGUNTA ORIENTADORA 14
OBJETIVOS 15
Objetivo General 15
Objetivos Específicos 15
Capítulo 2 16
MARCO TEÓRICO 16
Capítulo 3 38
MARCO METODOLÓICO 38
Actividad de la Catenaria 41
Capítulo 4 48
ANÁLISIS DE RESULTADOS 48
Análisis del proceso seguido por el grupo 1 48
Análisis del proceso seguido por el grupo 2 54
Análisis del proceso seguido por el grupo 3 61
Análisis del proceso seguido por el grupo 4 66
Análisis del proceso seguido por el grupo 5 70
Análisis del proceso seguido por el grupo 6 75
Capítulo 5 80
CONCLUSIONES 80
Bibliografía 82

Capítulo 1

ANTECEDENTES

Al remitirse a trabajos antecesores se realizó una elección de estos, estableciendo como prioridad de selección, la temática concerniente tanto a la parte histórica del surgimiento de un concepto matemático, como al estudio desde las prácticas matemáticas desarrolladas por Descartes, visto desde el análisis de resolución de problemas geométricos, entre los cuales se destacan las dos tesis para optar por el título de Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas; los cuales se titulan "La Elipse De Apolonio Vista En El Espacio Geogebriano" y "El método que soluciona problemas geométricos propuesto por Descartes en la trisección del ángulo" de los autores Fabián Ricardo Gutiérrez Castro y Lenin Fabián Quintero Mora respectivamente.

Iniciando con la tesis de (Gutiérrez, 2014), se selecciona puesto que en este documento se realiza un análisis del concepto de elipse desde lo desarrollo en las cónicas de Apolonio, en donde se parte de la caracterización del objeto a estudiar visto a través de la historia, iniciando desde el reconocimiento del concepto históricamente, es decir, se trata de un documento en donde el autor busca identificar aspectos propios de la elipse partiendo desde la descripción del personaje desde su entorno, pasando por el recorrido histórico del surgimiento de las cónicas, posterior a ello presenta la importancia del uso del recurso tecnológico en la enseñanza del concepto para los estudiantes, todo esto con el fin de realizar tres representaciones de las proposiciones de Apolonio mediante el recurso tecnológico. La primera que es nombrada como *Definición* que hace referencia a la definición textual de Apolonio, la segunda, *Representación clásica* que refiere a la representación brindada por el autor (Apolonio) y la tercera la *Representación en Geogebra* allí (Gutiérrez, 2014) incorpora las definiciones formales y las representa con ayuda del software.

De allí se destaca la posibilidad de identificar a través del recurso una apreciación más clara de características y propiedades del objeto matemático, tal como se observa en la siguiente frase "La construcción en Geogebra permite evidenciar la existencia (de) un solo diámetro transverso y recto para un par de curvas" (Gutiérrez, 2014, pág. 20) entre otras. Por otro lado, se observa que en esta tesis se toma como base el libro *Treatise on conic sections* realizando un análisis en lo que refiere al concepto de elipse, semejante a lo que se pretende realizar con el libro *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* de Descartes extrayendo el método de argumentación del autor mencionado, lo cual se logra mediante el análisis de la resolución de los problemas presentados en el apartado de *La Geometrie.*

De allí nace la importancia de este documento pues permite dar una mirada al trabajo investigativo histórico en relación con Apolonio y sus descubrimientos, propiamente dicho de la elipse, además del hecho de realizar una propuesta de actividad que permita a los estudiantes observar atributos del objeto matemático, hace que sea apreciable su valor en relación con este documento, destacando que, aunque no haya sido aplicada, es valiosa en cuanto a que se presenta una propuesta innovadora aplicable para los estudiantes.

En lo que refiere al siguiente documento el presentado por (Quintero, 2015) en éste se pudo observar que se parte históricamente de las prácticas matemáticas en Descartes, iniciando desde la comprensión de la ruptura de la homogeneidad, tal como se observa en la siguiente frase:

> *…rompe sutil y elegantemente con el problema de la homogeneidad dimensional, que sin lugar a dudas era una de las más importantes limitaciones de la aplicación del Álgebra a la Geometría. Desde luego así había sido en la Geometría griega, pero incluso en la época de Descartes el producto de dos segmentos era un rectángulo, y el producto de tres segmentos un paralelepípedo, por tanto, el producto de más de tres segmentos no tenía sentido y en consecuencia no se llevaba a efecto.* (Quintero, 2015, págs. 18-19)

Allí se observa cómo a partir de Descartes se entenderá la operación entre dos o más segmentos, lo que da paso a la presentación de las operaciones aritméticas elementales entre segmentos, destacando el razonamiento y el método que pone en marcha Descartes, puesto que las operaciones las realiza mediante el establecimiento de proporciones entre triángulos.

Por otro lado, dentro del documento de (Quintero, 2015) se hace explicitas las cuatro fases que componen el método propuesto por Descartes para la adquisición de cualquier tipo de conocimiento científico. Y finalmente se presenta la resolución de la trisección del ángulo, en donde el autor hace aportes personales que vislumbren el camino de resolución, además que aclara en cuanto a algunos procedimientos que Descartes no presenta.

Todo ello cobra especial relevancia en cuanto que, es mediante el análisis de la resolución de problemas geométricos que se logra observar y analizar el método argumentativo en Descartes. Puesto que, a través de la operación entre segmentos y el proceso de resolución llevado a cabo en la trisección del ángulo se logra observar el camino de abordaje, así como las estrategias de resolución, para así poder llegar a la solución del problema planteado permitiendo desde allí extraer el método argumentativo. Por otro lado, no se puede pasar por alto la importancia de comprender el problema de la homogeneidad dimensional, tema trascendental en la comprensión de la obra, puesto que se rompe con la tradición griega, a pesar de que en la operatoria entre segmentos se mantenga las proposiciones ya conocidas por los griegos.

De igual forma (Quintero, 2015) en uno de sus apartados pone en tela de juicio la enseñanza del álgebra en el aula de clases; de acuerdo con esta frase enunciada en el documento "ya que por lo general la organización y secuenciación de una clase de álgebra escolar o geometría analítica está fundamentada sobre el análisis del contenido". Con esto se quiere decir que el análisis de contenido toma especial relevancia cuando se trata de la enseñanza del álgebra en la escuela, siendo este solo uno de los aspectos que se debe poner en marcha en la enseñanza de un objeto matemático, aspecto que se quiere transformar mediante esta propuesta de enseñanza. Estableciendo que para fines de este documento se dejará de lado el análisis de contenido visto netamente desde los procesos algorítmicos ya que, dicho proceso no es lo único que se debe poner en marcha a la hora de presentar conceptos a los estudiantes, sino que se pretende ir más allá de una crítica al currículo, más bien diseñar una propuesta de enseñanza que permita presentar el concepto a los estudiantes cuidando que esta vaya de la mano de las prácticas de argumentación en la resolución de problemas, pues cuando se llevan a cabo dichas prácticas en el aula de clases se logra que los estudiantes se apropien del concepto trabajado.

En el trabajo de (Quintero, 2015) se realiza un análisis del libro *La Geometría* de Descartes, visto desde la mirada de resolutor de problemas irresolubles para la época en la que se presentaba, como lo es: la trisección del ángulo, al igual que lo que se pretende realizar con el mismo libro, pero en este caso se pretende dar una mirada a este documento analizando específicamente las practicas argumentativas en Descartes.

Estos dos documentos son relevantes en cuanto se habla de un concepto determinado visto desde su surgimiento histórico, de la mano del personaje que le da vida como es el caso de las cónicas de Apolonio en el documento de (Gutiérrez, 2014) por otro lado la observación detallada del método de Descartes en la resolución del problema de la trisección del ángulo presente en (Quintero, 2015) hacen que se tomen por su contenido histórico, y la propuesta de enseñanza que se presenta, además que se permite observar el proceso de resolución, aspecto fundamental en el análisis del método argumentativo de Descartes en el documento de (Quintero, 2015).

JUSTIFICACIÓN

Este trabajo pretende partir desde una mirada filosófica, reconociendo que las matemáticas son un constructo social tal como lo afirma (Paty, 1997, pág. 7) “Las ciencias no son otra cosa que la sabiduría humana, la cual es única y siempre la misma, cualesquiera que sean las diferencias entre los sujetos a los cuales se les aplica”, que emergen gracias a las diferentes contribuciones de personajes relevantes dentro de este campo. Reconociendo que sus invenciones se dan gracias al trabajo y a la dedicación de personajes que logran condensar sus creaciones en resultados; los cuales, aunque no revelan el total de los pasos por los que atravesaron para poder llegar a la solución, si muestran una síntesis que ha permitido que se avance en este campo.

Se tendrá en cuenta el componente histórico como eje fundamental; en donde se reconoce la historia de un concepto matemático como ese testigo constante del proceso de surgimiento, asimismo, susceptible de ser indagado, lo que permite una reconstrucción tanto del método de resolución que dio lugar al descubrimiento del objeto, como de las necesidades propias de la época que llevaron al estudio de las características del objeto trabajado. Por lo cual cobra especial importancia abandonar el análisis de contenido, por ir en busca del método argumentativo, el cual aflora gracias a la resolución de problemas geométricos, en donde las expresiones matemáticas no correspondan al fin, sino al medio que se utiliza en el establecimiento de conjeturas y relaciones al interior de una situación problema. En concordancia con la exposición anterior (Dennis, 1997) afirma que: Ecuaciones no crean curvas; curvas dan lugar a ecuaciones. Lo que sugiere que no se trata sólo del hecho de tener la ecuación, sino que va más allá, en donde ésta es irrelevante en cuanto no se tenga la certeza de su origen y de su relación con el problema que se está trabajando, siendo la ecuación una manera de establecer relaciones que permitan caracterizar el objeto del cual proviene.

Se ha elegido a Descartes para este estudio, ya que este ha sido un personaje que ha hecho grandes contribuciones en el campo no sólo de la filosofía, sino también en el campo de las matemáticas; una de ellas es, lograr romper con la tradición griega de la homogeneidad aspecto que le valió para desarrollar problemas irresolubles para la época. Enfatizando que la intención de este documento no se trata de reconstruir los planteamientos de Descartes en cuanto a los problemas resueltos, más bien se trata de lograr comprender el método de argumentación presente en la solución que presenta Descartes de los problemas geométricos planteados en libro la *Geometrie.* A continuación, se presenta una idea sobre el método cartesiano.

> *Los métodos matemáticos desarrollados por Descartes (hablamos de la geometría cartesiana), la claridad y oportunidad de muchos de sus análisis filosóficos y algunas de sus contribuciones a la física son mucho más que apartados de la historia de la filosofía: forman parte de la misma base de la ciencia y pensamiento contemporáneos.* (Descartes, 1637/1996)

Entendiendo la argumentación como todo proceso que permite explicar una idea o una solución de un problema, de tal manera que se logre identificar la idea primero gestada en Descartes que dio paso a la resolución de la situación problema, y luego observar cuales son los procesos argumentativos en los estudiantes a lo que se les aplica la propuesta de enseñanza. De allí que se busca observar cómo es que los estudiantes relacionan saberes y conocimientos para lograr inferir que algo es cierto.

El componente histórico permitirá en primera instancia analizar el método de argumentación realizado por Descartes en la resolución de problemas geométricos, identificando en los diferentes problemas planteados y resueltos en sus escritos, los pasos por los cuales atraviesa, logrando evidenciar el método. Es por ello que es necesario remitirse al estudio y análisis del proceso de resolución que presenta Descartes en el libro de la *Geometrie*, pues es allí donde revela su método argumentativo. El método de resolución de problemas geométricos en Descartes se conoce como Hipotético-deductivo, es decir, que se plantea una hipótesis que se considera posible para mediante ella extraer relaciones que más tarde se conviertan en una cadena de deducciones que lleven a confirmar o rechazar la hipótesis planteada al inicio.

Finalmente, este proceso se condensará en una propuesta de enseñanza dirigido hacía estudiantes para profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, en el espacio de formación didáctica del álgebra y la geometría, siendo éste un espacio propicio, pues permite evidenciar el proceso que llevan a cabo los estudiantes para profesor en la resolución de problemas geométricos, con el fin de analizarlos posteriormente, es decir, identificando los procesos de argumentación en los estudiantes, en donde se busque a través de ciertas estrategias planteadas dentro de la propuesta, las ideas de resolución de problemas que presentan los estudiantes, los argumentos matemáticos que ponen en juego a la hora de defender su postura y finalmente el camino de abordaje que los lleva a la solución de un determinado problema. De tal manera que al final puedan ser contrastándolos con el proceso de argumentación en Descartes.

Esto se lleva a cabo con el fin de comprobar la importancia que juega la historia dentro de la enseñanza de los conceptos matemáticos, en donde el estudiante para profesor reconozca la relevancia del trasfondo del concepto, es decir, que abandone la idea de la importancia única del de la expresión algebraica asociada a un objeto matemático, sino que sea consciente de la relación que existe entre el concepto formal y la parte geométrica.

Es por ello que se ha querido primero analizar detalladamente el método argumentativo en Descartes para finalmente plasmarlo en una propuesta que permita a los estudiantes para profesor analizar situaciones, sin que se vea la necesidad de iniciar con el lenguaje simbólico, sino que este emerja de la exploración y el análisis que lleve a cabo cada estudiante, pasando por la representación geométrica que sin lugar a dudas es lo que permite a Descartes reconocer como acabado un problema, ya que éste sabía que había resuelto un cuestionamiento cuando realizaba una comparación entre representaciones; simbólica y geométrica, las cuales le permitían establecer conexiones, teniendo en cuenta principalmente la axiomática euclidiana.

La propuesta de enseñanza es pertinente en el proceso de formación de profesores, pues es allí desde la resolución de problemas geométricos donde el estudiante hace visible las estrategias de resolución que se ponen en marcha a la hora de analizar una situación problema en el ámbito matemático, siendo éste un escenario propicio tanto para el planteamiento de ideas de resolución como para su defensa mediante argumentos matemáticos que le permitan debatirlas con los demás compañeros de clase, además se busca que los estudiantes indaguen sobre conceptos que no le sean familiares, permitiendo que se jalone en el aprendizaje. Puesto que como se mencionó anteriormente, este método no solo busca identificar las prácticas argumentativas en los estudiantes, sino identificar la pertinencia del método en el aprendizaje de conceptos, en donde el estudiante sea el actor principal en la búsqueda de respuestas a cuestionamientos que en el proceso de resolución le surjan.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Identificar el método argumentativo en Descartes se convierte en una prioridad en este documento ya que es a partir de allí donde se estructura la propuesta de enseñanza, es por ello que cobra especial sentido analizar mediante diferentes documentos, cómo se organiza su método, permitiendo crear así más delante unas categorías de análisis que revelen el proceso argumentativo en los estudiantes a los que se les aplica la propuesta. Tal como se explica en el siguiente fragmento de texto extraído de (Descartes, 1637/1996):

> *Aquí la forma de argumentar de Descartes corresponde mejor al estilo hipotético al que se alude al final del Discurso del método: formular modelos explicativos compatibles con los principios generales de su filosofía de la naturaleza y con las observaciones pues. "verificándose experimentalmente con certeza la mayor parte de estos efectos, las causas de las que han sido seducidos no sirven tanto para probarlos como para explicarlos y, por el contrario, estas son las que son aprobadas por ellos"*

En este planteamiento se hace alusión a estilo hipotético que hace referencia a la elección de una hipótesis que mediante una cadena de deducciones lo llevará (Descartes) a comprobar si se trata de una certeza o una falsedad. De allí se infiere en primera instancia que el método busca que se inicie de una hipótesis como punto de partida en la resolución de un problema.

Se busca que los estudiantes abandonen la expresión matemática de un objeto como única referencia del objeto a trabajar, asimismo se intenta que amplíen su panorama de representaciones y hagan uso de representaciones geométricas presentadas mediante el uso del plano de referencia, además que los estudiantes den lugar a la exploración y a la extracción de conjeturas que les permita establecer una hipótesis de solución y un camino de abordaje, que esté mediado por la búsqueda de respuestas a cuestionamientos que surjan en el proceso y que deban ser aclarados. Por otro lado, es necesario que la solución del problema permita que se presente una representación geométrica del objeto, propia del estudiante, en donde se realice una comprobación mediante la axiomática euclidiana. Del mismo modo que lo sustenta (Shea, 1993)

> *Debe tenerse muy presente que Descartes concibe siempre la solución de los problemas geométricos como una construcción de figuras, y no, al contrario de lo que podríamos suponer, como una solución algebraica satisfactoria. Para Descartes, la ecuación de una curva era una herramienta, no una forma de definición o de representación.* (pág. 73)

Al aplicar una propuesta de enseñanza que tiene un componente histórico, se debe tener presente que es necesario poner en marcha estrategias que permitan al estudiante transitar por el método de Descartes, es por tal motivo que la mejor estrategia es plantear una situación problema haciendo énfasis en la construcción propia del conocimiento, es decir, una situación en la que el estudiante sea el actor principal en la búsqueda de caminos de abordaje y de respuestas de cuestionamientos que le surjan, es por tal motivo que es necesario que el docente tome el rol tanto de investigador de su propia práctica como guía en el proceso, el cual permita que los estudiantes sigan un rumbo definido, puesto que es necesario que se encause el proceso, con el fin de llegar a inferencias en relación con el problema planteado. Por otra parte, el docente debe poseer un conocimiento histórico en relación con el objeto matemático a estudiar, el cual le permita formar parte activa en el proceso de resolución que se plantee en la aplicación de la propuesta.

Asimismo, cuando los estudiantes hacen evidente el camino de resolución abordado, éste debe estar en la capacidad de poseer argumentos sólidos tal que se encuentre en la disposición de exponerlos y de defenderlos enfrente de sus compañeros, este proceso hace que se enriquezca en argumentos anticipados el estudiante, con el fin de sentar su postura y debatirla frente al total del grupo. Esto hace que el estudiante sienta la necesidad de profundizar en los conceptos que se involucran en el problema.

PREGUNTA ORIENTADORA

¿Qué procesos de argumentación presentan los estudiantes de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del proyecto curricular Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, del espacio de formación problemas del álgebra y la geometría, en la resolución de un problema geométrico?

OBJETIVOS

Objetivo General

- Diseñar una propuesta de enseñanza basada en el método de resolución de problemas geométricos, tomando como eje central la parte histórica de dicho concepto, analizado desde el proceso de argumentación en Descartes.

Objetivos Específicos

- Identificar y analizar el proceso argumentativo en Descartes.
- Desarrollar una gestión y posterior evaluación de la propuesta desde el punto de vista del análisis histórico mediante el proceso argumentativo en Descartes.
- Identificar los tipos de representaciones que ponen en juego los estudiantes a la hora de la resolución de problemas geométricos.
- Analizar los tipos de métodos argumentativos que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas geométricos.
- Contrastar los argumentos presentados por los estudiantes con los argumentos utilizados por Descartes en lo que refiere a la solución de problemas geométricos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Este apartado atravesará por las siguientes fases: i. Postura filosófica sobre las matemáticas. ii. Componente histórico referido al método de resolución de problemas geométricos en Descartes. iii. Análisis del proceso argumentativo en Descartes.

Dentro de la postura filosófica sobre las matemáticas se tendrán en cuenta, aspectos como el realismo, entendido como: verdades y propiedades en matemáticas, maneras de actuar. Y es que la búsqueda de la verdad permeó el pensamiento de Descartes, es por ello que (Paty, 1997) afirma lo siguiente:

> *La garantía de la verdad de esos conocimientos -y de la de las respuestas a esas preguntas -, se mantiene bajo la influencia de la evidencia primera, puesta en relación con la posibilidad de pensarlas dentro de la luz instantánea de la comprensión, primera información percibida intuitivamente de la cual se trata en seguida de asegurar los fundamentos.* (pág. 3)

En la cita anterior se observa que una de las prioridades en Descartes, la búsqueda de la verdad, lograr encontrar la forma de sustentar sus ideas de forma lógica. La búsqueda de la verdad en Descartes dentro de la resolución de problemas, hace parte de la concepción filosófica de la cual se va a partir, entre otros aspectos. Ya que se hace indispensable reconocer desde qué postura filosófica se tomará la propuesta de enseñanza. Entendiendo que no se entenderán las matemáticas como únicas, creadas exclusivamente por mentes prodigiosas, sino que se entenderán como un constructo social que emerge a partir de la búsqueda de respuestas a fenómenos de la cotidianidad del individuo que se interesa por ellas. Asimismo, se entienden las matemáticas como una práctica que evoluciona y se adapta a las necesidades de su entorno. Por medio de esta postura se busca lograr responder los siguientes cuestionamientos con el fin de elaborar una propuesta que permita a los estudiantes ser los actores principales en la adquisición de conceptos; tales como: ¿qué se entenderá por matemáticas?, ¿desde qué concepciones matemáticas se encamina la propuesta? Se da por sentado que las matemáticas no se tratan de un producto terminado que solo exige exploración, sino más bien una construcción sujeta a nuevas invenciones. En palabras de (MADDY, 2003) “matemáticas es el estudio científico de las entidades matemáticas existentes objetivamente” (pág. 18).

Identificando el quehacer matemático como un proceso en donde su prioridad no sea simplemente el resultado, es decir, se trata de ir más allá a través del análisis de procesos, es encontrar cómo se estructura y qué ha permitido que se llegue a una solución. En síntesis, se trata de la construcción colectiva del concepto. Retomando el proceso de resolución como un camino importante susceptible de ser analizado y retroalimentado, es decir, identificando las matemáticas como una práctica, reconociendo que las matemáticas no sólo corresponden a una transmisión de saberes, sino que el individuo toma como propios los conceptos gracias a la búsqueda individual ligada a los intereses que él mismo posea. Se habla de práctica matemática cuando el individuo se ve enfrentado al quehacer matemático en búsqueda de respuestas a situaciones cercanas, es ir en busca de herramientas que le permitan avanzar. Este proceso va acompañado de inferencias que pueden nombrarse con el término de subjetividad yendo en la misma línea que (Paty, 1997) afirma que: …"lo que hace que una subjetividad -es decir, toda subjetividad- pueda adquirir una certeza y, por ende, el conocimiento". Es decir que el conocimiento nace a partir de poder lograr demostrar que una subjetividad que se ha planteado el individuo ha logrado convertirse en certeza. De ahí que la argumentación se expresa mediante una idea que nació en el individuo y que a través de una cadena de deducciones lógicas logró convertirse en certeza,

Retomando el concepto de "realismo" siguiendo la idea de (MADDY, 2003) la cual afirma que: "Realismo, entonces (en primera aproximación), es la idea de que las matemáticas es la ciencia de los números, conjuntos, funciones, etc." (pág. 3), es decir que aunque se trate de entidades abstractas, estas son susceptibles de ser analizadas y estudiadas, mediante la posición del sujeto que las estudia, como en objetos reales que hacen parte de un entorno, entendiendo que son las "propiedades de estas cosas que las hacen verdaderas o falsas". (MADDY, pág. 4)

Se trata de poder presentar los objetos matemáticos, por medio del componente histórico por el cual surgió el objeto a estudiar, problema que se soluciona desde la filosofía tomando específicamente la historia, propiamente dicho de las matemáticas, es allí donde cobra significado el término "filosofía de las matemáticas" entendido como lo plantea (Mancoso, 1996) "me refiero a la serie específica de conceptos, categorías y teorías empleadas, implícita o explícitamente, por filósofos y matemáticos en su discurso sobre las matemáticas" (pág. 3).

Destacando el papel tan importante que juega la historia dentro de la enseñanza de conceptos algebraicos hacia los estudiantes, donde se deben tener en cuenta que el docente forma parte activa e indispensable en este proceso, pues es el encargado de encaminar, sin olvidar que debe poseer ciertos conocimientos en este campo, que le permitan llevar a cabo de manera satisfactoria el proceso de enseñanza de un determinado concepto. De acuerdo con (Socas) "se acepta como punto de partida que la discusión histórica y el análisis epistemológico del pensamiento algebraico juegan un papel esencial a la hora de determinar los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra escolar" (pág. 266). Cabe aclarar que, aunque la población de estudio no corresponde a estudiantes escolares, este proceso como lo sustenta (Socas) debe también poderse dar en estudiantes universitarios.

Ahora bien (Mancoso, 1996) expone: Descartes analizó la restricción del universo geométrico, de las llamadas curvas mecánicas donde argumentó una nueva interpretación. Se evidencia la importancia de los registros históricos, ya que estos, ha permitido la reconstrucción de conceptos descubiertos por los antepasados, así como la evolución de los mismos o por el contrario la transformación o el reemplazo.

Los registros históricos permiten analizar los procesos de construcción de los conceptos, de manera tal que indagando acerca de la época en la que fueron desarrollados, permiten evidenciar las necesidades que llevaron a la creación del objeto matemático, así como de las limitaciones que se tuvo, tal como lo afirma (Descartes, 1637/1996) mediante este cuestionamiento "*¿cómo construir los problemas geométricos cuando no es posible hacerlo con regla y compás? Si aplicamos el álgebra el problema se reduce a resolver la ecuación";* a lo que se refiere Descartes en esta frase, es que encontraba limitaciones en cuanto a los mecanismos para construir la representación de algunos problemas geométricos, por lo que le es necesario encontrar mecanismos diferentes que le permitiera resolver los problemas que se le planteaban.

La matemática le permitió a Descartes demostrar la veracidad de sus proposiciones denominándola como "ciencia admirable" (Paty, 1997). Descartes es un personaje relevante en lo que refiere a la modernidad, ya que de acuerdo con (Dennis, 1997) "Descartes ha dirigido aquí (se refiere a los problemas geométricos solucionados en su libro La geometría) varios de sus principales aspectos de las relaciones entre geometría y su representación simbólica" (pág. 7). Lo que permite establecer que mediante la historia se puede analizar el proceso que llevo a cabo Descartes en el descubrimiento del concepto de curva algebraica, identificando los pasos por los cuales atravesó para llegar a este. Posterior a la resolución, Descartes brinda una argumentación al proceso de resolución de problemas geométricos.

La elección de Descartes se da por el método que utiliza en la argumentación a la resolución de problemas geométricos. Romper con la homogeneidad le valió a Descartes para adentrarse en una nueva forma de razonar, dejando atrás la significación que poseían las magnitudes en la geometría euclidiana, dado que para Descartes la operación entre segmentos da como resultado un nuevo segmento de la misma naturaleza que los iniciales, desde ese punto se encuentra una diferencia sustancial, sin olvidar que nombra un segmento como unidad, lo que hace que pueda establecer proporciones que serán la base en las deducciones posteriores, de ahí que este método pueda ser examinado con la axiomática euclidiana. En concordancia con lo anteriormente expuesto Descartes citado por (Mancoso, 1996) afirma que: "Cualquier problema en geometría se puede reducir fácilmente a tales términos, el conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción". Es decir, que, al identificar la longitud de algunas líneas, a partir de ahí se pueden establecer relaciones de proporcionalidad que le serán útiles en la deducción de ecuaciones.

Por otro lado, en Descartes cada concepto debía ser demostrado sin que se diera por sentado nada como se puede observar en el siguiente escrito:

> *Siempre he permanecido firme en la decisión que había tomado de no suponer ningún otro principio que aquel del que me ha servido para demostrar la existencia de Dios y del alma, así como en la de no aceptar como verdadero nada que no me pareciera más claro y cierto de lo que me había parecido las demostraciones de los geómetras.* (Descartes, 1637/1996)

Este tipo de pensamiento es lo que en términos de (Paty, 1997) se conoce como La inteligibilidad que se trata de la adquisición de un conocimiento verdadero y la posibilidad de asegurar la verdad de ese conocimiento, proveniente de Descartes. Este concepto se amplía en el apartado *Argumentación en Descartes*.

Analizando la solución presentada en el libro de la *Geometría* del problema de Pappus el cual influyó para que emergiera el uso del lenguaje algebraico y se diera un cambio de registro en la representación (Arboleda, 2007); mediante este problema se puede observar detalladamente la argumentación expuesta de la solución al problema antes mencionado; más adelante trataremos el tema de la argumentación a profundidad, por ahora vamos a observar un poco acerca de este personaje dentro del ámbito matemático.

> *La búsqueda cartesiana de la unidad del saber, incardinó la mente filosófica de Descartes hacia la Matemática, ciencia en la que encuentra el modelo paradigmático en el rastreo de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, pues aspira a dar cuenta y razón de la totalidad del saber, con la pretensión de cimentar los principios de la Filosofía con la certidumbre de las Matemáticas, en palabras de Spinoza. Pero más que en los extensos conocimientos particulares de las Matemáticas aprendidos en su etapa escolar, Descartes se fija especialmente en el modo de proceder en la investigación matemática, en los rasgos característicos de la propia Matemática, en el espíritu y la naturaleza intelectual de la práctica del quehacer matemático, llegando a afirmar que las cosas que entran en la esfera del conocimiento se encadenan como las proposiciones geométricas (DM.AT,VI,19).*
>
> *Profundas reflexiones sobre las condiciones intelectuales que habían concurrido en el pasado y gravitaban en el presente sobre toda esta actividad mental, relacionada con el trabajo matemático, que Descartes plasma en su obra de juventud, Reglas para la dirección del espíritu, le llevan a concebir el «Método para conducir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias» de El Discurso del Método, acta fundacional del llamado Cartesianismo, corriente filosófica que se dice basada en el método de la razón, lo que hay que entender como «método de la razón matemática», ya que las reglas de este Método de Pensamiento son extraídas de los procedimientos geométricos y están inspiradas, según Descartes, en los saberes matemáticos. En este sentido se quiere indicar que la Matemática es la base racional del pensamiento cartesiano, de modo que el llamado racionalismo cartesiano está poseído de un acusado matematicismo.* (Gonzáles, 2003)

El apartado anterior pone en manifiesto que Descartes se fija especialmente en el modo de proceder en la investigación matemática. Abriendo paso a un nuevo método de deducción instaurado por él, nombrado como hipotético-deductivo. Los saberes matemáticos le sirvieron en otros campos del saber en los que Descartes hizo aportes. Tanto así que establece que para este personaje las matemáticas son la base racional de su pensamiento. (Gonzáles, 2003)

Los métodos de Descartes abrieron paso a una nueva forma de razonar en matemáticas, además se reconoce que, este personaje centra su atención en hacer que sus análisis sean claros para sus lectores, este tipo de claridad en sus argumentos hace parte del método argumentativo, objeto de estudio de este documento, a continuación se sustenta la anterior afirmación:

> *Los métodos matemáticos desarrollados por Descartes (hablamos de la geometría cartesiana), la claridad y oportunidad de muchos de sus análisis filosóficos y algunas de*

> *sus contribuciones a la física son mucho más que apartados de la historia de la filosofía: forman parte de la misma base de la ciencia y pensamiento contemporáneos.* (Descartes, 1637/1996)

El deseo más ferviente que se encontraba en Descartes es iniciar desde cimientos nuevos, su intención no era partir de algo ya hecho, tal como él mismo lo afirma "e indagar el verdadero método con el fin de conseguir el conocimiento de todas las cosas de las que mi espíritu fuera capaz" sino de algo innovador que permitiera adentrarse en los razonamientos, que fuesen comprensibles para la mayoría de la población, aunque esta haya carecido de estudios.

> *Si queremos comprender lo que hace tan novedoso el pensamiento de Descartes en la ciencia y en la filosofía de su tiempo, es necesario ir directamente a lo esencial, que la riqueza misma de sus desarrollos contribuye a esconder, sin contar los cuatro siglos de interpretaciones que ha tenido, ciertamente, en cada época su utilidad, y que muestran entre otras la fecundidad y la vitalidad de ese pensamiento en el curso del tiempo. Por eso es útil preguntarse cómo ese pensamiento surgió en su novedad -cómo nació, vivo, de un ser viviente, de un individuo, René Descartes.* (PATY, 1997, pág. 2)

Comprender el proceso que llevó a cabo Descartes significa ir más allá, es decir, es necesario hacerse participe con su pensamiento, para ello es de gran importancia partir del principio que éste establece:

> *Puesto que tratando de descubrir la falsedad e incertidumbre de las proposiciones que examinaba, no mediante débiles conjeturas sino siguiendo razonamientos claros y seguros, no encontraba ninguna tan dudosa de la que no obtuviese alguna conclusión bastante cierta, aunque solamente hubiese sido la de que no contenía nada cierto.* (Descartes, 1637/1996)

En esta búsqueda de descubrir la certidumbre de sus planteamientos Descartes realiza una distinción entre curvas, algo novedoso para la época, lo que nombrará como curvas geométricas y no geométricas que posteriormente se daría una rectificación a curva algebraica. (Mancoso, 1996) nos revela el tratamiento que él (Descartes) les brindó:

> *Por lo tanto, la separación entre las curvas geométricas y no geométricas, que fue fundamental en la visión de Descartes de la geometría, descansó en última instancia de su convicción de que las proporciones entre longitudes de curvas y rectas no puede ser encontrado exactamente. Esto, de hecho, era una doctrina antigua, que se remonta a Aristóteles. El papel central de la incomparabilidad de recta y curvada en Descartes geometría explica por qué las primeras rectificaciones de algebraica (es decir, para Descartes curvas geométricas) a finales de la década de 1650 eran tan revolucionaria: socavaban una piedra angular del edificio de geometría de Descartes.*

Allí (Mancoso, 1996) refiere la distinción que hace Descartes entre curvas geométricas y no geométricas, en donde las no geométricas, refieren al tipo de curvas cuya proporción no se puede establecer de manera exacta con una recta dada. En tanto que en las geométricas si se puede establecer una proporción entre una recta y la curva dada como en el caso de la definición de parábola como lugar geométrico.

En esta distinción Descartes también rechaza algunas curvas mecánicas tal como lo afirma este apartado “Se consideran como se describen por dos movimientos separados, entre los que no hay relación que se pueda medir exactamente” gracias a que no se lograba establecer la relación entre un movimiento y el otro, entre las curvas excluidas se encuentra la cuadratriz y hélice. “El cuadratriz se excluye debido a ser generada por dos movimientos independientes y la hélice es excluida porque es generada por un filete "hilo"”. (Mancoso, 1996)

A continuación, se tomará en cuenta el desarrollo que dio Descartes al problema de Pappus, puesto que su análisis permite establecer el proceso de argumentación, así como adentrarse en los procesos matemáticos inmersos, para ello se utilizarán términos indispensables tanto para fines de este problema como para el conjunto de este documento tales como: lugar geométrico y curva algebraica; para ello se brindará una definición que nos acerque un poco más a lo que significan dichos términos.

Lugar geométrico es el conjunto de puntos (x, y) *en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica. Dicha condición es representada mediante una ecuación de la forma*

$$f(x, y) = 0$$

El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen tal ecuación recibe el nombre de gráfica de la ecuación; o bien, su lugar geométrico. Un lugar geométrico puede cumplir con una o más condiciones a la vez.

(Lugar geométrico , 2011, págs. 1-2)

Es importante aclarar que la definición de curva algebraica se extrae del análisis de lo que significa para Descartes dicho concepto, por lo tanto, retomaré la definición que se encuentra inmersa en sus diferentes escritos: *Una curva es algebraica si y solo si, tiene representación simbólica.*

Entendiendo que para analizar el método de argumentación en Descartes es necesario observarlo mediante la resolución de un problema que este haya llevado a cabo, es por tal motivo que se ha seleccionado el problema de Pappus ya que este se encuentra en el libro de la *Geometría* pues es una fuente que permite evidenciar el proceso directamente del autor implicado.

Mi intención no es replicar la explicación que se encuentra en los libros que tratan este problema mediante el razonamiento de Descartes, sino que se pretende observar el uso que éste le da al lenguaje algebraico, aspecto indispensable en el análisis y la resolución del problema. Así como de la curva generada por la solución, pues nuestro objeto de estudio está enmarcado por la comprensión del método argumentativo en Descartes, el cual emergen como resultado de la resolución de problemas de lugar geométrico.

En primera instancia Descartes toma el problema de Pappus para cuatro líneas con el fin de a través de este llegar a la generalización cuando se tienen *n* líneas.

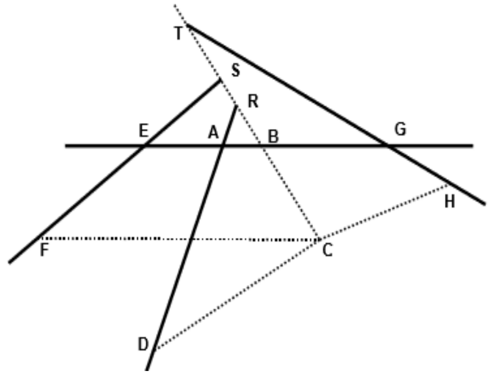


Ilustración 1. Gráfico problema de Pappus

Cuando en el libro de la *GEOMETRIA* Descartes explicita lo siguiente: *Sea* $\overline{AB}$ $\overline{AD}$ $\overline{EF}$ $\overline{GH}$*, etc., varias líneas dadas, debiendo hallarse un punto C, desde el que, trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas,* aquí se puede observar la elección del punto C (destacando que la elección de este punto depende de la condición que el producto de la multiplicación de un cierto número de líneas sea igual al obtenido por la de las otras, o que guarde una proporción dada con el resultado obtenido por la multiplicación de las otras) (Descartes, 1637/1996, pág. 408) como solución del problema en donde más adelante Descartes afirmará ***En primer lugar, supongo resuelto el problema***, al definir un punto solución nombrado para este caso como C, se evidencia tanto el punto solución, como la cadena de razonamientos que acompañan, lo cual le permite más adelante validar la hipótesis del punto seleccionado.

Analizando la resolución brindada para este problema, cuando Descartes selecciona los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ como x e y respectivamente, hace que se dé, el primer acercamiento a lo que sugiere como el sistema de coordenadas y como el inicio al reemplazo de segmentos por variables. De la misma manera que la afirmación que posteriormente lanza permite observar que tenía claro lo que significaba la dependencia, lo que para el día de hoy se conoce como la correspondencia entre variables, o mejor aún la relación que se da al interior del establecimiento de una pareja ordenada tal como lo afirma *"así mismo, tomando sucesivamente un infinito número de diferentes valores para la línea* y*, podremos hallar otros tantos para* x*".*

Como en primera instancia Descartes se aseguró de asociar los segmentos con un punto en común llamado C, esto le permitiría más adelante establecer proporciones teniendo como relación en común la proporción en términos de la variable *z* como veremos a continuación:

1) $\frac{AB}{BR} = \frac{Z}{b}$

2) $\frac{CR}{CD} = \frac{Z}{C}$

3) $\frac{BE}{BS} = \frac{Z}{d}$

4) $\frac{CS}{CF} = \frac{Z}{e}$

5) $\frac{BG}{BT} = \frac{Z}{f}$

6) $\frac{TC}{CH} = \frac{Z}{g}$

Aquí se puede observar que z corresponde a una cantidad desconocida involucrada en las distintas ecuaciones lo que hace que haya relación entre unas y otras. Siendo de gran importancia lo que establece Descartes citado por (Gonzáles, 2003)

> *«Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir más que de no ver ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban; [sigue el texto latino].»*

Aquí Descartes hace referencia a la imposibilidad que tenían sus antecesores en la asignación de relaciones, es decir, la imposibilidad de poner de manifiesto ya sea dependencias, relaciones de orden, o multiplicidad entre los objetos matemáticos involucrados en una situación problema. Aspecto que se le facilitaba a Descartes y que dio paso para resolver distintos problemas planteados. Esta asignación de relaciones le será de gran ayuda más adelante como recurso en la obtención del lugar geométrico puesto que se operan, reconociendo relaciones antes manifestadas:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{Z}{b}$$

Reemplazando *AB* por x se obtiene $\frac{x}{BR} = \frac{Z}{b}$ despejando la ecuación con el fin de hallar *BR* se encuentra que:

$$BR = \frac{bx}{z}$$

Continuando con la cadena de razonamientos que llevó a cabo Descartes se identifican los otros segmentos buscados:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{Z}{c}$$

Como $CR = y + \frac{bx}{z}$ reemplazándolo en la anterior ecuación:

$$CD = \frac{(y + \frac{bx}{z}) \cdot c}{z}$$

$$CD = \frac{cy}{z} + \frac{cbx}{z^2}$$

Este razonamiento $CR = y + \frac{bx}{z}$ se da suponiendo que el punto B se encuentra entre C y R.
Líneas conocidas o en posición: $\overline{AB}$ $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$
Distancia entre A y E se conocerá como k así: $\overline{AE} = k$
Por lo que y $\overline{EB} = x + k$
Suponiendo que el punto A se encuentra entre E y B se obtiene que:

$\frac{BE}{BS} = \frac{Z}{d}$ reemplazando a $\overline{EB} = x + k$

$$BS = \frac{dk + dx}{z}$$

Para obtener el valor del segmento $\overline{CS}$ el cual está conformado por la suma de $\overline{ES}$ y $\overline{BC}$ reemplazando por los valores obtenidos para $\overline{ES}$ y $\overline{BC}$ se establece que:

$CS = \frac{zy+dk+dx}{z}$ cuando B se encuentra entre C y S.

Para $\frac{CS}{CF} = \frac{Z}{e}$ entonces

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$

Para finalizar la cadena de razonamientos se hace un nuevo nombramiento en donde $\overline{AG} = l$ por lo que $\overline{BG} = l - x$ por lo cual $\frac{BG}{BT} = \frac{Z}{f}$ será igual a:

$$BT = \frac{fl - fx}{z}$$

$$CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$$

Y finalmente para la última proporción se obtiene lo siguiente:

$$\frac{TC}{CH} = \frac{Z}{g}$$

En donde:

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

Tal como lo afirma (Descartes, 1637/1996) “Lo analítico de este segundo procedimiento, reside en el hecho que, de lo dado (la ecuación de segundo grado en una variable), se llega al principio ya conocido (una cónica)”.

Como se evidencia en el proceso de resolución anterior, Descartes es un personaje refinado en cuanto a modelaciones, tal como se puede observar en este pasaje:

> *Si bien es cierto que cada curva que se puede describir por un movimiento continuo debe ser aceptado en la geometría, esto no quiere decir que debemos utilizar en al azar el primero que nos encontramos en la construcción de un problema dado. Nosotros siempre debe elegir con cuidado la curva más simple que se puede utilizar en la solución de un problema. Citado por* (Mancoso, 1996)

Se presenta la solución dada por Descartes al problema de Pappus con el fin de analizar el proceso de resolución de la situación, en contraste con la argumentación presentada por Descartes en el libro de la *Geometría*. Por otro lado, dicha observación permitió establecer en síntesis los pasos por los cuales atraviesa Descartes en la resolución del problema:

1. Supone el problema resuelto
2. Elige un objeto con el que se relacionen los demás con el fin de obtener el objeto solución.
3. Al suponer el problema resuelto ubica el objeto solución a través del análisis.
4. Analiza la cadena de razonamientos.
5. Deduce la solución (lugar geométrico)
6. Interpretación de la curva algebraica en el mundo euclidiano.

Los anteriores pasos de resolución fueron encontrados mediante el análisis de la resolución de problemas que presenta Descartes en el libro de la *Geometrie,* sin embargo, es necesario examinar otros documentos en los cuales se encuentre el mismo análisis de resolución de problemas en Descartes, con el fin tanto de contrastar los pasos como que sirvan de aporte a este documento. Por lo tanto, se extraen de dos fuentes la primera corresponde a (Gonzáles, 2003) y la segunda a (Quintero, 2015):

A. **Análisis.**
    1. Supone el problema resuelto
    2. Da nombre a todos los segmentos necesarios para representarlos, tanto los conocidos como los desconocidos.
    3. Construye algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permita alcanzar la síntesis.
B. **Introduce el primer sistema de coordenadas.** (Gonzáles, 2003)

En el proceso de resolución expuesto por (Gonzáles, 2003) se puede observar que sintetiza más los procesos que lleva a cabo Descartes en la resolución, reconociendo la introducción de sistema de coordenadas como parte de la resolución del problema.

A continuación, se observa los pasos de resolución para un problema específico, la cual se encuentra en el documento de (Quintero, 2015)

MÉTODO EN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LA TRISECCIÓN	
1	Realizar una construcción que modelice el problema geométrico ya resuelto e incluir dentro de ésta a la unidad y designar a los segmentos importantes mediante símbolos.
2	Obtener la ecuación que modela el problema geométrico a resolver mediante el uso de una construcción y las relaciones entre segmentos que se infieren de ésta.
3	Utilizar el método de la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado (intersección entre un parábola y una circunferencia, llamado por Descartes como “La forma general de reducir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado”)
4	Obtención de las soluciones geométricas al problema resuelto.

Ilustración 2. Método Descartes

(Quintero, 2015, pág. 40)

En el documento de (Quintero, 2015) se evidencia gran similitud con los pasos que se extraen en esta monografía mediante el análisis de la resolución de problemas geométricos en Descartes, resaltando un aspecto importante, que refiere a la escogencia del segmento unidad (aparece en el primer punto del cuadro anterior), se resalta este paso ya que se trata de un problema específico que lo requiere (trisección del ángulo), puesto que, si se desea generalizar los pasos de resolución de los problemas, la escogencia de la unidad no es necesaria en la resolución de todos los problemas.

A través de este escrito se ha podido observar la importancia que Descartes ha tenido dentro del campo de las matemáticas, ya que, sin lugar a dudas sus avances permitieron que se diera una transformación en la manera de razonar, transformación que se hace evidente en la forma de sustentación de la resolución de problemas, la cual es susceptible de ser estudiada, es por ello que se busca sumergirse dentro del pensamiento cartesiano con el fin de poder entender a profundidad dicho método.

ARGUMENTACIÓN EN DESCARTES

Para sumergirnos en lo que significó la argumentación en el proceso de resolución de problemas en Descartes, es ineludible definir qué se va a entender como argumentación: hablar de argumentación supone la importancia de citar como lo hacía Descartes, ¿qué aspectos llevaba a cabo en sus pruebas y cuales no consideraba como demostraciones formales? es decir, la *Argumentación* como todo proceso que permite explicar una idea o una solución de un problema. Forma como relaciona saberes y conocimientos para saber que algo es cierto.

Existen dos posiciones útiles a tener en cuenta en el desarrollo de esta propuesta, las dos anunciadas en el libro de Mancuso: la primera tiene que ver con la necesidad de usar la expresión algebraica de una curva por parte de Descartes, en donde establece que la curva es la ecuación y por ende el trabajo con la ecuación supone estar trabajando con la curva específicamente. Y la segunda el uso de esta expresión solamente con el fin de tomarla como recurso en la resolución de problemas geométricos y no como el fin de ellos.

Siguiendo esta línea se hace importante identificar la forma de argumentación en Descartes definida como:

> *Aquí la forma de argumentar de Descartes corresponde mejor al estilo hipotético al que se alude al final del Discurso del método: formular modelos explicativos compatibles con los principios generales de su filosofía de la naturaleza y con las observaciones pues. "verificándose experimentalmente con certeza la mayor parte de estos efectos, las causas de las que han sido seducidos no sirven tanto para probarlos como para explicarlos y, por el contrario, estas son las que son aprobadas por ellos"* (Descartes, 1637/1996)

Dentro del proceso de argumentación en Descartes se evidencia que, recurría a consultas, tal como se observa en el siguiente ejemplo:

> *…Los antiguos distinguieron con toda perfección la existencia de tres clases de problemas en geometría: planos, sólidos y lineales; es decir, unos pueden ser construidos con sólo trazar líneas rectas y círculos; los segundos, por el contrario, no pueden serlo sin realizar la introducción de alguna sección cónica…* (Descartes, 1637/1996, pág. 409)

Descartes destaca la importancia de otros instrumentos diferentes a los aceptados para la época. Más allá de buscar precisión mediante el instrumento utilizado, Descartes buscaba precisión, pero en el razonamiento, si bien es cierto que para este personaje no era satisfactorio que se realizara una distinción entre curvas mecánicas y geométricas, siendo las primeras producto de construcciones con otro tipo de instrumentos diferentes a la regla y el compás, puesto que en la deducción de la ecuación y en la demostración de la curva mediante axiomática euclidiana se seguía un razonamiento lógico sólido, en donde no se daba lugar a la ambigüedad y en la que se podía establecer la medida de la curva.

Examinemos el siguiente argumento tomado de (Descartes, 1637/1996) que busca demostrar porque las curvas mecánicas no deben ser excluidas:

1. Inicia definiendo los conceptos a saber:

Geométrico definido como lo que es preciso y exacto y ***Mecánico*** lo que no lo es

2. Luego define la Geometría como una ciencia que enseña en general a conocer las medias de todos los cuerpos.

3. Afirma que: no existe razón alguna para excluir de la misma (refiriéndose a la geometría) el estudio de líneas más complejas y no el de las más simples.

4. Realiza una salvedad: Con tal que puedan imaginarse descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos y en los que los últimos vienen determinados por los anteriores.

5. Deducción final que lleva a la demostración: por este medio (refiere a lo expuesto en el numeral 4) puede siempre tenerse conocimiento exacto de su medida.

6. Luego por transitividad se establece que, si se conoce su medida y de acuerdo con la definición de Geometría, necesariamente lo mecánico debe hacer parte de dicha ciencia.

Descartes no solo se preocupa por revelar su proceso de resolución, sino que intenta comprender el rechazo a las curvas mecánicas por parte de los geómetras antiguos. Reconociendo las limitaciones y los posibles caminos de abordaje que les sugirió a estos personajes de la antigüedad un rechazo inminente hacia este tipo de curvas.

Por otro lado, se observa en este personaje un proceso importante de generalización, buscando que dicho proceso se pudiese generalizar para todos los problemas que tuviesen relación con el problema expuesto, no conformándose solamente con solucionar el problema planteado, sino que además generaliza y clasifica los elementos encontrados; es decir, para el caso de curvas, su clasificación se da por el grado de la expresión asociada. En la siguiente frase se evidencia el deseo de Descartes de generalizar, aunque no se haga explícito. …"Podría exponer en este lugar otros medios para trazar y concebir líneas curvas que fuesen cada vez más complejas hasta el infinito" … (Descartes, 1637/1996, pág. 414).En esta frase se observa la idea de encontrar el mecanismo con el cual pueda trazar líneas curvas complejas hasta el infinito, no conformándose solamente con la representación de unas cuantas sino que considera importante establecer un proceso general.

Como parte del método de Descartes es el establecer relaciones entre los objetos que se involucran en los problemas, siendo uno de los pilares dentro del proceso de resolución, puesto que establece relaciones tanto de los elementos dados en el problema, como los elementos que establece mediante deducciones. Así:

> *Cuando conocemos la relación que guardan todos los puntos de una línea curva con todos los de una recta, según el modo que he explicado, también es fácil conocer la relación que guarda con todos los otros puntos y líneas dadas; en consecuencia, será fácil conocer los diámetros, ejes, centros y otras líneas o puntos con los que pueda tener cada línea curva alguna relación más específica o más simple; de esta forma podremos*

imaginar diversos modos para describirla y hacer una selección. (Descartes, 1637/1996, pág. 434)

La aseveración extraída de la afirmación anterior precede del siguiente enunciado *"Que para hallar las propiedades de las líneas curvas, basta con conocer la relación que guardan sus puntos con los de las rectas, y la forma de trazar otras líneas formando ángulos rectos"* con el cual se puede inferir que: se establece inicialmente una relación entre los puntos de una línea curva con los de una recta, esta correspondencia permite conocer otras relaciones como otros puntos y líneas dadas por consiguiente se procede a obtener diversos modos de escribirla, lo que se traduce en la obtención de una igualdad de la cual se pueda obtener ciertas inferencias.

Si se habla de argumentación en Descartes debe estar presente la inteligibilidad que exponen en sus escritos matemáticos, no solamente como aspecto filosófico propio en Descartes, sino como pilar en sus deducciones y posteriores demostraciones, para ello se define el término inteligibilidad como la adquisición de un conocimiento verdadero y la posibilidad de asegurar la verdad de ese conocimiento …, se retoma esta definición planteada en apartados anteriores por su gran importancia en cuanto asegura a Descartes una argumentación limpia, con el término limpia me refiero tanto a consistente, libre de ambigüedades como comprensible para el lector, es tal la preocupación en Descartes por hacerse entender que recurre a introducir nuevos términos matemáticos, o en su defecto a explicar detenidamente los ya conocidos. "No temeré introducir esos términos en la geometría con el fin de hacerme más inteligible" (Descartes, 1637/1996).

Asimismo, dentro de su deseo de ser inteligible se observa que busca diferentes tipos de representaciones de un mismo objeto; por ejemplo, cuando abandona la representación gráfica, por su expresión asociada, o mediante el nombramiento de los atributos propios del objeto a trabajar.

Ya que sus escritos no están dirigidos solo al público educado en el tema a tratar, sino que es comprensible para otro tipo de público que se interese por los conceptos mencionados en sus escritos. Y es que para la época en la que escribió Descartes, las matemáticas eran solamente para unos pocos como lo afirma (Paty, 1997)"El retorno de las matemáticas al primer rango del conocimiento se debió también a la coyuntura de la época que las veía venidas del cielo, de los objetos ideales". En ese orden de ideas era absolutamente necesario que la argumentación de la resolución de problemas geométricos se alejara de unas matemáticas celestiales, cambiándolas por unas matemáticas terrenales, accesibles para los mortales.

Dentro del método de argumentación en Descartes se establece el *análisis-síntesis;* este consiste en hacerse comprensible el cual consiste en hacer una distinción entre los elementos complejos y simples, con el fin de establecer relaciones con los elementos conocidos permitiendo que, mediante el análisis de deducciones obtenidos por medio del análisis de las relaciones anteriores, llegando así a obtener la información de los elementos no conocidos o complejos.

Como ya he mencionado lo que se pretende realizar con la argumentación y de qué manera es presentada por Descartes, con el fin de sintetizar dicho proceso, a continuación, se presenta un diagrama que encierre todo el proceso argumentativo en Descartes ilustrado a lo largo este documento.

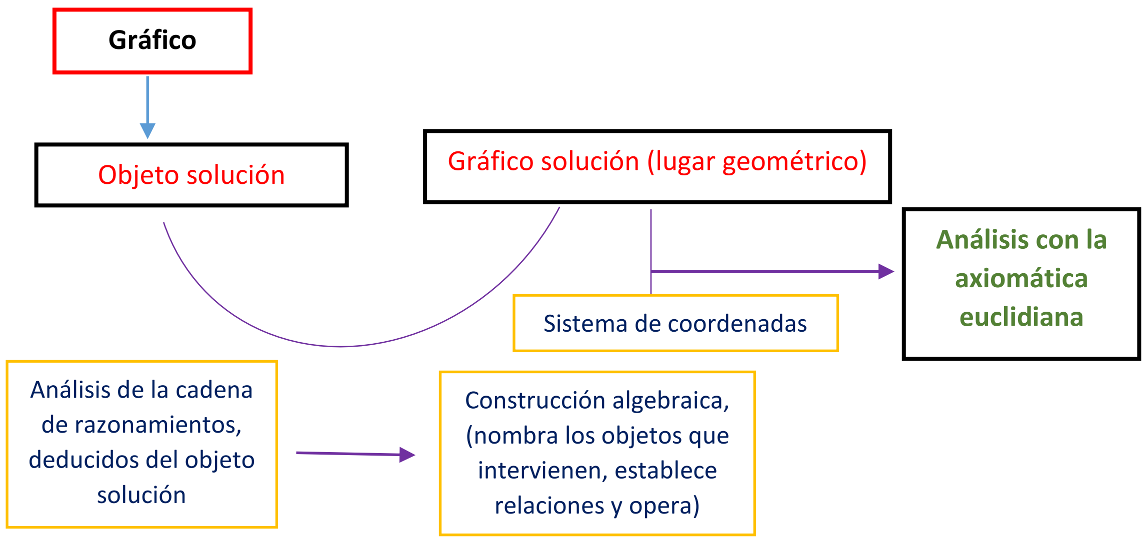


Ilustración 3. Método argumentativo en Descartes

En la *ilustración 3* se observa el desarrollado del método argumentativo en Descartes, en donde se inicia con el gráfico que corresponde a la representación inicial del problema enunciado, seguido del objeto solución que refiere a la elección de un punto determinado y del cual se desprende la cadena de inferencias siguientes, intermedio se encuentra análisis de la cadena de razonamientos que corresponde a establecer relaciones mediante el objeto solución seleccionado, seguido se encuentra construcción algebraica que refiere al nombramiento de los objetos que interviene en el problema, así como las operaciones algebraicas que se hacen con ellos, más adelante se encuentra gráfico solución que refiere a la representación de la solución del problema pues como se ha aclarado en ocasiones anteriores, la solución en Descartes no corresponde a una expresión matemática sino a su representación geométrica, finalmente se encuentra en recuadro nombrado como análisis con la axiomática euclidiana, puesto que en Descartes una vez finalizado el problema vendría su comprobación analizada a la luz de axiomática euclidiana puesto que en Descartes se trataba de una aspecto fundamental.

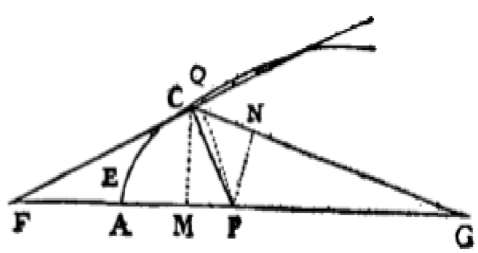
La argumentación que realizó Descartes como producto de dar cuenta de las soluciones a los problemas geométricos resueltos, nos sirve como base en lo que se quiere llevar a cabo con los estudiantes de licenciatura ya que se pretende que estos lleven a cabo un proceso similar en donde se analice las acciones de los estudiantes como protagonistas en el proceso de resolución con el fin de contrastarlas con las realizadas por Descartes.

Se busca observar en síntesis si los estudiantes logran: “Verificar un lado a otro entre las representaciones y ver que los resultados de manipulaciones algebraicas simbólicas son consistentes con los resultados geométricos establecidos de forma independiente”.

A continuación, se analizará detalladamente uno de los problemas resueltos por Descartes, que tiene que ver con encontrar las tangentes a las curvas –vía la normal–, mediante la técnica de considerar el doble contacto del círculo osculador como una característica de la normal. En este problema se busca identificar los pasos antes mencionados que más adelantes son nombrados como categorías y los cuales sirven de fundamento en el análisis de resultados de la aplicación de la propuesta a los estudiantes. Para ello se ha tomado el problema citado en (Gonzáles, 2003, págs. 94-96)

En siguiente cuadro corresponde a una comparación entre las frases textuales extraídas de un problema resuelto por Descartes y el análisis argumentativo, llevado a cabo mediante los pasos establecidos en la ilustración 3.

Tabla 1. Cuadro comparativo: problema-argumentación

Problema resuelto por Descartes	**Análisis del proceso argumentativo**
“Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos”  *Ilustración 4. Problema de curvas*	Enunciado del problema. Se observa el ***Grafico*** que corresponde a la representación inicial.
Supongamos que la cosa está hecha y que la línea buscada es CP,	Esta frase es muy importante, pues es la que permite observar el primer aspecto que lleva a cabo Descartes en el proceso argumentativo y es la ***elección del objeto solución,*** *que viene dada por la suposición de la que parte, se trata del hecho de que el problema planteado ya se encuentra resuelto, siendo esta una de las características fundamentales del método*

	argumentativo en Descartes)
que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta GA que supongo ser aquella a cuyos puntos se refieren todos los de la línea CE; de manera que haciendo MA o $CB = y$, y CM o $BA = x$, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y	Aquí se observa la utilización del sistema de coordenadas al cual denotaremos como **utilización del plano de referencia**. Es indispensable reconocer que el objeto que se ubica en el plano cumple ciertas características, y que puede estar ubicado en cualquier parte del plano desde que permanezcan tanto la relación con los demás objetos, como las características que éste posee. Es decir que Descartes no concibe al objeto como la representación de elementos de un conjunto, tal como se conoce actualmente las coordenadas (x, y).
[el punto B no figura en el dibujo; guiándose por las siguientes figuras, se obtendría como intersección de la perpendicular a AM por A y la paralela a AM por C]. Luego haciendo $PC = s$, $PA = v$, o bien $PM = v - y$, por el triángulo rectángulo PMC obtengo s^2, que es el cuadrado de la base, igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, que son los cuadrados de los dos lados; es decir que tengo $$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$ o bien $$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$	Se puede observar que Descartes establece algunas relaciones lo cual se nombrará como **conjeturas**, esto le permite llevar a cabo una cadena de razonamientos, hilando el proceso que más adelante se vislumbrará como acierto o desacierto en la elección del objeto solución.
y por medio de esta ecuación, saco de la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva CE con los de la recta GA [la ecuación de la curva], una de las dos cantidades indeterminadas x o y; lo que es fácil de hacer poniendo $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$en lugar de x, y el cuadrado de esta suma en lugar de x^2, y su cubo en lugar de x^3; y así los otros términos si es x que yo deseo sacar; o bien, si es y, poniendo en su lugar $v + \sqrt{s^2 - x^2}$; y el cuadrado o el cubo, etc.	En este apartado se observa que se está realizando una **algebrización.** Pues es justo en este paso donde se logra identificar algunos de los procesos algorítmicos que realiza Descartes, así como las comprobaciones de las conjeturas llevadas a cabo en el proceso anterior.
De modo que quede siempre según esto, una ecuación en	En este apartado se

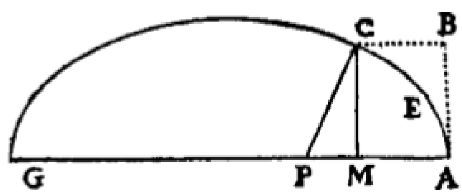
<table>
<tr>
<td>la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada x o y.
A continuación, Descartes aplica el método desarrollado a la elipse (G.AT,VI, 414): <u>Si fuese CE una elipse y MA el segmento de su diámetro [eje] al cual corresponde CM, y siendo r su lado recto y q el transverso se tiene, por el teorema 13 del Libro I de Apolonio:</u></td>
<td>encuentra lo que se denotará como análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana, se aclara que para este punto Descartes en apartados anteriores había mencionado las características del método del <u>círculo</u> el cual se utiliza en la resolución de dicho problema.</td>
</tr>
<tr>
<td>$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$
<u>[ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro la tangente en su extremo]</u>


Ilustración 5. Prblemas de curvas 2
de donde sustituyendo x^2, queda:
$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$
o bien
$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r}$ igual a cero. pues mejor, en este lugar, considerar así en conjunto toda la suma que hacer una parte igual a otra.»</td>
<td>Finalmente encontramos el gráfico, el cual hace parte del proceso argumentativo en Descartes, es importante mencionar que, en ciertos casos, posee dos momentos, el gráfico inicial del cual se parte y el gráfico final que aparece como resultado del problema propuesto. Se aclara que Descartes en el libro de la Geometría en ciertos problemas, abandona este tipo de representación pues no se trata de un factor indispensable gracias a sus exposiciones anteriores.</td>
</tr>
</table>

Llegado a este punto, Descartes en sus escritos obvia ciertos procesos algorítmicos, afirmando que estos deben realizarse por el lector que se interese profundamente en sus documentos, ya que a su modo de ver esto se trataba de un verdadero placer, es por ello que con el fin de hacer más comprensible el objeto matemático trabajado en el anterior problema (Gonzáles, 2003) proporciona una explicación del método llamado método del círculo utilizado en el cálculo de tangentes a las curvas, por el cual se llega a la resolución del problema, a continuación, se presenta para que se tenga mayor claridad de lo que se está tratando teniendo en cuenta el lenguaje moderno.

Sea la curva $y = f(x)$, y P un punto cualquiera de ella de abscisa x, donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta CP, siendo $C(v, o)$ la intersección de la normal con el eje de abscisas.

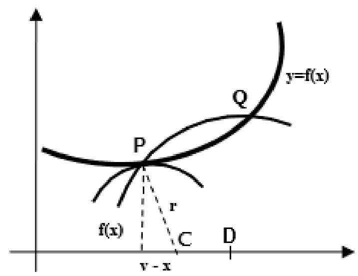


Ilustración 6. Circulo osculador

En general un círculo con centro en un punto D próximo a C y que pase por P, cortará a la curva $y = f(x)$, no sólo en P, sino en otro punto Q,cercano a P, pero si CP es la normal a la curva en el punto P este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y = f(x)$ y el círculo $(x - v)^2 + y^2 = r^2$.

Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta que la ecuación

$[f(x)]^2 + (v - x)^2 = r^2$ (1)

donde $v, r,$ son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble. Pero una función algebraica con una raíz doble $x = e$, debe ser de la forma:$(x - e)^2 \sum b_n x^n$ de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$[f(x)]^2 + (v - x)^2 = r^2 = (x - e)^2 \sum b_n x^n$ (2)

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble e. En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la «*subnormal*» $v - x$, que permite hallar la pendiente de la normal: $\frac{-f(x)}{(v-x)}$y de ésta la pendiente de la tangente – es decir, nuestra derivada: $\frac{(v-x)}{f(x)}$-. La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que «*toda raíz doble de una función es raíz de su derivada*», por tanto, de (1) se deduce:

$$2f(x) \cdot f'(x) - 2(v - x) = 0,$$

y de aquí:

$$f'(x) = \frac{(v - x)}{f(x)}$$

obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente. (Gonzáles, 2003)

En el anterior cuadro y su explicación posterior encontramos un problema resuelto por Descartes explicado en el documento de (Gonzáles, 2003) mediante la comparación se buscaba que se identificara en un problema los pasos por los cuales atravesó Descartes en la solución, esto permite no solo identificar los pasos sino ponerlos en juego en el análisis del problema de la misma forma que se pretende analizar los procesos de los estudiantes a los que se les aplique la propuesta de enseñanza.

Catenaria

Este trabajo versa sobre el proceso de argumentación que Descartes trabajó en la resolución de problemas geométricos, en ese sentido y sabiendo por los comentaristas que se le habían planteado problemas que no correspondían a curvas algebraicas y suponiendo que su solución tuvo que haber sido abordada por él por el mismo método, como efectivamente sucedió pocos años después de que los matemáticos se apropiaran del método de solución de problemas propuesto por Descartes, se decide proponerle a los estudiantes del curso la misma situación de la cuerda suspendida por medio de dos chinches. Vale la pena decir que este trabajo no pretende la construcción de ninguna curva, sino entender el uso que posiblemente estudiantes para profesor hacen de procesos argumentativos de resolución de problemas, haciendo uso de las formas de argumentar reconocidas en el método de solución de problemas propuesto en la *Geometría.*

Antes de definir el objeto matemático es necesario que el lector identifique ciertos aspectos:

¿Por qué la catenaria y no otro tipo de curva?

En el enunciado problema se presenta a los estudiantes la curva catenaria, la cual se selecciona por razones específicas:

1. Por la gran similitud con la curva de la parábola: esta similitud hace que dentro del proceso de resolución en los estudiantes se espere que su primera hipótesis corresponda a que la curva sea una parábola, sin embrago se espera que no se conformen únicamente por la impresión visual, sino que entren a analizar características de la parábola con el fin de hacer una correspondencia o comparación entre las dos curvas, es decir la curva del problema y la parábola.
2. Porque se trata de un problema propuesto a Descartes: aunque no se evidencia en sus escritos el proceso de resolución de este problema en Descartes, se puede establecer que, el método utilizado en la resolución de otro tipo de problemas geométricos, debe permitir que este mismo método se pueda adoptar en la resolución de este problema.
3. Porque la curva puede ser representada mediante materiales tangibles: el poder representarse mediante este tipo de materiales permite a los estudiantes que se dé una exploración, así mismo, permite el establecimiento de conjeturas, que más adelante pueden ser comprobadas mediante deducciones. Por otro lado, el estudiante debe estar en la capacidad de identificar características por medio de la representación tangible, sin embrago debe reconocer que en la representación no está el conjunto de características que posee el objeto en la abstracción.

El lector puede preguntarse por qué se eligió una curva transcendental en la enseñanza del concepto de curva algebraica. Pues porque se espera que los estudiantes más que enfocarse en la expresión matemática, el estudiante analice el objeto matemático mediante la representación gráfica, estableciendo el plano de coordenadas.

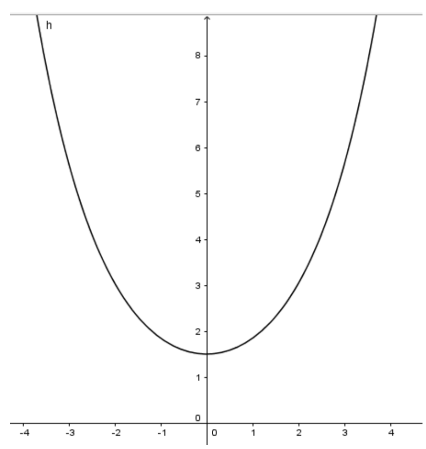
Por otro lado, se busca que los estudiantes a través de la búsqueda del tipo de curva que se adapta a las características de la curva del problema, tenga que pasar por el análisis de otro tipo de curvas algebraicas como la parábola, la elipse, la hipérbola, entre otras; con el fin que al ir descartando opciones de curva pueda también darse una apropiación de las características de las curvas por las cuales transitó en la búsqueda de la curva del problema.

Realizando esta salvedad a continuación, se presentarán algunas características de este concepto.

Este problema fue enunciado a Descartes por Beeckman…

> *Beeckman, a su vez, le encargó a Descartes la tarea, mucho más ardua, de averiguar si la forma que adopta una cadena suspendida de dos clavos colocados a una misma altura es una sección cónica. Se trata del famoso problema de la «chainette», que habría de ocupar a los matemáticos a lo largo del siglo diecisiete.* (Shea, 1993, pág. 59)

Como se puede observar se trata de un problema propuesto hace varios años del que se conoce actualmente con la definición:



La catenaria es la curva cuya forma es la que adopta una cuerda de densidad uniforme sujeta por sus dos extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. En sentido estricto, no es una curva, sino una familia de curvas, cada una de las cuales está determinada por las coordenadas de sus extremos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y por su longitud L. (Ivorra, 2010). En la imagen se observa que visualmente la curva es parecida a una parábola. Aspecto favorable en el planteamiento de la situación problema para la población a la que se le aplica la propuesta de enseñanza, buscando que la primera hipótesis de los estudiantes corresponda a que la curva es una parábola y que de acuerdo con esta afirmación entre a observar las características que hagan que rechace la hipótesis.

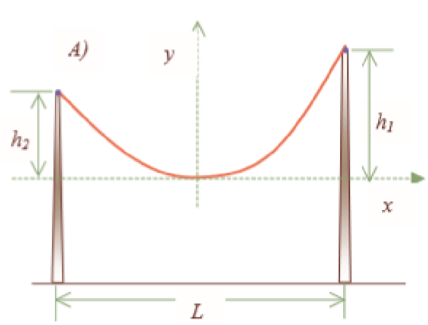


Ilustración 7 tomada de (Gil 2011)

En la imagen se observa otro tipo de curva catenaria la cual corresponde a una curva cuyos extremos no se encuentra a la misma altura; la ecuación de la catenaria viene dada por:

$$y(x) = \frac{1}{\gamma}\cosh(\gamma \cdot x) + c$$

A continuación, se muestras a que corresponde cada variable dentro de la ecuación de la catenaria. Las constantes c y γ se pueden determinar haciendo cumplir las condiciones de borde: para $x = L_1$ $y = h_1$, y $x = L_2$, $y = h_2$, por simplicidad en lo que sigue supondremos que: $h_1 = h_2 = h$ y $L_1 = L_2 = L/2$. Bajo estas condiciones tenemos:

$$h = \frac{1}{\gamma}\cosh(\gamma \cdot L/2) + c$$

Como $y = (x = 0) = 0$

$$0 = \frac{1}{\gamma}\cosh(0) + c$$

La ecuación de la catenaria resultante es

$$y(x) = \frac{1}{\gamma}(\cosh(\gamma \cdot x) - 1)$$

La longitud de la cadena puede obtenerse como:

$$L_c = 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \frac{2}{\gamma}\sin(\gamma \cdot \frac{L}{2})$$

Combinando obtenemos la condición:

$$\frac{\gamma \cdot L_c}{2 \cdot (\gamma \cdot h + 1)} = \tanh(\gamma \cdot \frac{L}{2})$$

(Gil, 2011, págs. 141-143)

Y en su expresión cartesiana viene dada por

$$y(x) \approx a\left[\left(1 + \frac{C_2}{a}\right) + \frac{1}{2}\frac{(x - C_1)^2}{a^2}\right] + O(x^4)$$

Sabiendo que la curva catenaria es una curva trascendente es utilizada en la enseñanza del concepto de curva algebraica pues se busca mirar como argumentan los estudiantes un problema geométrico que fue abordado por Descartes.

Capítulo 3

MARCO METODOLÓICO

1. Fases de investigación

Como punto de partida dentro de la metodología, es importante que el lector comprenda el proceso de producción de esta monografía, como aspecto relevante, puesto que para su creación se atravesó por una serie de pasos relevantes en la comprensión de la estructura del documento, es por ello que el siguiente mapa conceptual presenta una idea acerca de los pasos por los cuales se transitó en su creación.

2. Investigación cualitativa

Con el fin de aplicar y posteriormente analizar la propuesta de enseñanza, primero se debe iniciar estableciendo el tipo de investigación, lugar, muestras, temporalidad y finalmente se toman decisiones metodológicas sobre el conjunto que se llevará a cabo en dicho proceso, esto de acuerdo con (Santa palella y feliberto Martins 2010) En este sentido es necesario aclarar, que la presente investigación se enmarca dentro de la perspectiva cualitativa de la investigación, es fundamental con especificidad en el trabajo de campo, como se especifica a continuación:

Investigación fundamental: En la que se establece que, a partir de la muestra de sujetos, las conclusiones de la investigación, se hace extensiva a la población y se orienta a las conclusiones. Su objetivo se centra en el aumento de información teórica y se relaciona con la investigación pura (básica). Es decir, de acuerdo con la población seleccionada y mediante el análisis de procesos de la misma, se busca que dicha investigación sirva de base teórica para los demás docentes que deseen implantar una propuesta similar con sus estudiantes.

De la misma manera se hizo necesario establecer en qué lugar se aplicó la propuesta, es por ello que dentro del ámbito teórico dicho proceso se conoce con el nombre de **Investigación de campo:** La investigación se centra en hacer el estudio donde el fenómeno se da de manera natural, de este modo se buscaba conseguir la situación lo más real posible. En donde se hizo necesario observar a los estudiantes en su entorno habitual (el aula de clases) siendo allí, donde a través de análisis de procesos de resolución de problemas, ya sea los arrojados de manera verbal o escrita, identificando los procesos argumentativos en los estudiantes, con el fin de contrastarlos con el modelo argumentativo en Descartes. Esto se llevó a cabo en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas del proyecto curricular Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, en el espacio de formación didáctica del álgebra y la geometría.

En lo que refiere a temporalidad esta se tomó como un método transversal, es decir, un método el cual se lleva a cabo en un lapso de tiempo corto, ya que se tiene planeado aplicar el instrumento en un periodo de cuatro sesiones de clase, seguido del análisis y finalmente la extracción de conclusiones.

Se hizo uso de una metodología cualitativa que hace referencia a el análisis subjetivo e individual, esto la hace una investigación interpretativa, referida a lo particular. Puesto que se trata de una población específica en la que se buscaba que revelaran procesos argumentativos en la resolución de un problema geométrico planteado. Para ello se definió tanto el instrumento como las categorías de clasificación a partir de las cuales se analizó la información encontrada, por medio de grabaciones de las sesiones de clase, en las que los estudiantes presentaron producción escrita y expositiva, desde las cuales se logró finalmente extraer conclusiones validas en el ámbito educativo.
Como señala Wajnryb (1992, p. 1) citado por (Villar, 2013) donde se concibe la observación como una capacidad que puede desarrollarse y que por tanto es objeto de aprendizaje. Como afirma Wajnryb, se trata de una capacidad que depende de la habilidad para observar e interpretar las sesiones de clase y que facilita la comprensión del aula y la mejora de la actuación del docente. Esta autora (pp. 9-16) establece cinco presupuestos para desarrollar la capacidad de observación:

1- Un modelo de desarrollo profesional de carácter reflexivo.
2- La naturaleza de la relación entre formador y observado basada en la "ayuda" o "facilitación".
3- La importancia de la clase como fuente primaria para el desarrollo docente.
4- La observación entendida como una habilidad que puede "entrenarse".
5- Las tareas de observación como base de un aprendizaje experiencial.

1. Técnica

Se propuso trabajar con los estudiantes una técnica de grupos focales es decir en términos de (Valles, 1999)

> En primer lugar, se reconoce la diversidad de aplicaciones de esta técnica (en los estudios de mercado, en la elaboración de cuestionarios de encuestas sociales o en la evaluación de programas) …Pero su definición típica sigue haciéndose, sobre todo, desde la experiencia en el campo de la investigación de mercados.
>
> a) *Propósitos* de investigación aplicada en dicho campo, destacando los de carácter exploratorio o preparatorio (familiarización con el tema, prueba de cuestionarios, valoración de reacciones a un producto, cambio de imagen u orientación, etc.)

b) *Lugar* habitual de realización en escenarios formales (no naturales) de entrevista.

c) *Estilo de moderación* semidirigido o dirigido, generalmente siendo el formato de la entrevista y la interrogación "algo estructurado"

Se toma dentro de la metodología de trabajo esta técnica ya que se estableció como la organización de grupos de trabajo dentro de la resolución del problema, puesto que la retroalimentación entre estudiantes permite que se dé una construcción conjunta de conceptos, por otro lado, los grupos focales permiten que se generen discusiones entre los participantes que permite establecer diferentes caminos tanto de abordaje como de resolución.

Dentro de la subcategoría lugar se tomó el aula de clases como reunión de estudiantes en un espacio determinado del claustro educativo.

Por otro lado, en lo que refiere a estilo de moderación estuvo semidirigido, ya que los temas de discusión los determinó el investigador mediante el enunciado de la situación problema, pero las vertientes que tomó las discusiones estuvieron a cargo de los participantes.

2.1 Instrumentos

Se buscaba que los instrumentos que se iban a utilizar permitieran trabajar aspectos cercanos a los trabajados por Descartes, con el fin que se pudiera llevar a cabo un análisis exitoso que revelara el proceso argumentativo en la población antes mencionada. Para ello se tuvo en cuenta los siguientes elementos.

- ✓ **Diario de campo del investigador:** Permite llevar un registro de las observaciones realizadas al trabajo grupal en el desarrollo de la situación problema, tomando nota de los abordajes y de las discusiones centradas en los conceptos a trabajar.
- ✓ **Registro fonoaudiológico:** Tiene que ver con la grabación de las cuatro sesiones de aplicación, con el fin de tener un registro detallado de las intervenciones de los estudiantes, que más adelante sirva de sustento en el análisis de las acciones realizadas por el grupo observado.
- ✓ **Portafolio:** Dentro de portafolio se encuentra la producción tanto escrita como expositiva de los estudiantes, allí se analizará el proceso de resolución del problema, así como las estrategias y aspectos relevantes que consideraron los grupos como sustento de su trabajo final.

Para el proceso de grabación de las sesiones y el análisis de la producción escrita en los estudiantes se transitó por los siguientes pasos:

i. Presentación del instrumento (situación problema) a los estudiantes.

ii. Seguimiento mediante la observación sesión a sesión del proceso realizado por los grupos de trabajo.

iii. Grabación fonoaudiológica de producción escrita y expositiva de la resolución del problema por parte de los estudiantes.

iv. Análisis de la información mediante las categorías propuestas.

v. Conclusiones del proceso.

3. **Categorías de análisis**

Como se trata de una investigación de carácter cualitativo, era indispensable establecer categorías que permitieran analizar las acciones de los grupos, además estas categorías permitieron más adelante concluir sobre las acciones del proceso realizado, estableciendo la pertinencia o impertinencia de la aplicación de la propuesta. Por lo cual se estableció como categorías de análisis las siguientes:

A. ***Elección del objeto solución:*** Refiere a la asignación de un objeto determinado puede corresponder a punto del cual se deprenda la cadena de razonamiento base en la resolución del problema.

B. ***Conjeturas:*** Las establece con el fin de identificar relaciones entre objetos o entre datos proporcionados por el problema o extraídos a través de la observación.

C. ***Algebrización:*** Tiene que ver con el nombramiento de objetos, además de establecer relaciones que finalmente lo llevan a establecer igualdades que le permitirán operar cantidades.

D. ***Utilización del plano de referencia:*** Hace referencia a la necesidad de establecer un plano que le permita conjeturar, teniendo en cuenta los conceptos formales, estableciendo coordenadas del objeto no con el fin de ubicarlo sino de observar atributos del objeto de estudio (la curva del problema).

E. ***Gráfico:*** Esta representación refiere al gráfico final del objeto, no como representación de la observación, sino como el objeto formal que posee ciertos atributos específicos.

F. ***Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana:*** Esta categoría hace referencia al análisis final que hace el grupo resolutor con el fin de corroborar si sus conjeturas y algebrizacion fueron consistentes, observando el gráfico final analizado desde la axiomática propia de Euclides.

3.1 Instrumento de análisis

Como instrumento de análisis se tuvo la siguiente propuesta de trabajo, es importante mencionar que esta propuesta busca que el lector identifique aspectos teóricos de la actividad, así como la hipótesis de solución y la respuesta del problema planteado, sin embargo, a los estudiantes solamente se les presenta el enunciado de la situación problema, acompañado de los materiales necesarios.

Actividad de la Catenaria

Descripción

Esta actividad tiene como punto de partida la exploración por parte de los estudiantes, en donde se hará entrega de un par de chinches, una cuerda de lana de 60cm, y un cartón rectangular sin mediada específica. Se busca que éstos aten con los chinches los extremos de la cuerda, tal que sobre el cartón tal que se forme la curva suspendida verticalmente. Desde allí se parte para el posterior análisis de las acciones de los estudiantes en la búsqueda del lugar geométrico obtenido y su ecuación correspondiente.

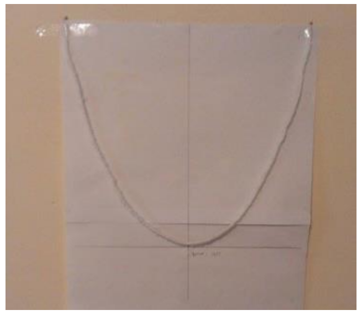


Ilustración 8. situación problema

Enunciado de la situación problema

Dados dos puntos (chinches) a una distancia de 29 cm y una cuerda (tira de lana) de longitud 60cm, establezca el tipo de curva que describe la cuerda cuando de los extremos (chinches) ubicados a la misma altura, se desprende la cuerda de manera vertical.

Objetivo general

- Identificar el proceso de argumentación en la resolución de la situación planteada en los estudiantes de la Universidad Distrital del proyecto de Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, del espacio de formación didáctica de la geometría, contrastándolo con el proceso Argumentativo de resolución de problemas geométricos llevado a cabo por Descartes

Objetivos Específicos

- Proponer una situación problema en torno a procesos de argumentación, tomando específicamente la curva de la Catenaria.
- Identificar el proceso exploratorio que lleven a cabo los estudiantes con los materiales presentados.
- Analizar el proceso resolutor del problema geométrico realizado por los estudiantes.
- Contrastar el proceso argumentativo de resolución presentado mediante producción escrita o expositivas en los estudiantes, con el proceso argumentativo en Descartes.
- Extraer las conclusiones que permitan reconocer el éxito o el fracaso del proceso llevado a cabo con los estudiantes.

Metodología de la actividad

Las sesiones de clases se desarrollarán de la siguiente manera:

Tabla 2 Momentos en las sesiones de aplicación

Momento	Organización	Rol del investigador	Rol del estudiante
Primera sesión	Trabajo en grupos. (4 estudiante)	Realizar la presentación del problema a trabajar. Responder algunas de las inquietudes que se puedan presentar en torno a la resolución del mismo.	Buscar estrategias que le permitan dar solución a las situaciones problema.
Segunda sesión	Trabajo en grupos. (4 estudiante)	El investigador realizará cuestionamientos que pongan al estudiante en un conflicto interno cognitivo que jalone a un cambio en sus esquemas de conocimiento. (devolución del problema) • ¿qué tipo de curva es la que describe la cuerda? • ¿encuentre argumentos matemáticos que le permitan justificar su razonamiento? • ¿qué características posee la curva que hace que no pueda ser una parábola, o una hipérbola? • ¿Superponer una parábola en la curva dada hace que sea un argumento matemático fuerte en la demostración? • ¿Qué características posee la catenaria? • ¿Qué la hace diferente a la parábola? Actúa como	Comprobar que sus conocimientos son insuficientes para abordar toda la actividad. El estudiante debe evidenciar la necesidad de poner en juego nuevos conceptos que le permitan dar solución a lo que está abordando. Abandonando la idea que el lugar geométrico corresponde con una parábola mediante el análisis de características del objeto matemático. Establecer deducciones y conjeturas Realizar validación de sus deducciones y conjeturas-pruebas. Comunicar mediante lenguaje escrito sus elaboraciones.

		coordinador de procesos. Lograr que el estudiante se sienta responsable de las acciones que toma y que ello trae consecuencias (devolución de la decisión) Finalmente se observa los avances que estos hayan realizado, además de informar acerca de la próxima sesión que se desarrollará mediante presentaciones del proceso realizado.	
Tercera y cuarta sesión.	Trabajo en grupos. (4 estudiante)	El investigador estará atento a la producción escrita (trabajo escrito de la resolución de la situación problema) y expositiva de los estudiantes. Realizando tanto análisis como cuestionamientos. Se realiza una breve institucionalización del concepto trabajado.	Hacer evidente el proceso de resolución en la caracterización del lugar geométrico y la ecuación, mediante producción expositiva enmarcando los pasos por los cuales atravesaron para llegar a los resultados presentados.

Recursos

Tabla 3. Recursos

Clasificación del recurso	**Función**	**Hipótesis de aprendizaje**
Material tangible (chinches, lana y un recuadro de cartón)	El estudiante podrá realizar una representación manipulativa del objeto matemático de la catenaria.	El estudiante logrará establecer conjeturas y deducciones que le permitan interpretar características propias del objeto, así como observar detenidamente mediante la exploración las acciones que posteriormente realizará con el fin de establecer el género de la curva a la que pertenece.

Manipulativo grafico-textual Situaciones problema.	Mediante la situación problema el estudiante se verá en la necesidad de recurrir al plano de referencia (plano cartesiano) el cual le permita observar y analizar cierto tipo de relaciones.	A partir del contexto de la situación problema, el estudiante se encasilla en la búsqueda del tipo de curva de acuerdo a la definición de la parábola y de la hipérbola si la llegase a necesitar deduciendo finalmente que se trata de una catenaria de acuerdo con las características encontradas, las cuales sólo corresponden a este tipo de curva.

Solución esperada por el investigador

1. Suponiendo que el estudiante parta de la idea de que la curva corresponde a una parábola se establece que:

El estudiante toma como punto de partida las coordenadas (0,0), (14.5,24) y (-14.5,24), estas coordenas surgen de dos ideas:

i. El estudiante representa el eje *y* ubicándolo en el punto medio de la distancia dada dentro del enunciado del problema (29 cm)

ii. El estudiante realiza algún tipo de medición con un instrumento, lo que hace que la medida de uno de los chinches al centro de masa de la curva corresponda a 24 cm.

De allí reconoce que al ubicar la curva en el origen no le es necesario hallar los valores de b y c en la ecuación general de la parábola $(ax^2 + bx + c)$. Para ello únicamente le bastaría con identificar el valor de a. lo cual mediante algunas operaciones corresponde al valor de $a = 0.11415$. Lo cual corresponde al siguiente gráfico:

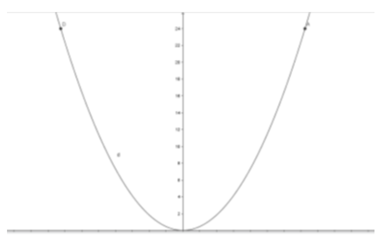


Ilustración 9. Parábola esperada

2. Al observar el gráfico obtenido de la curva experimental, el grupo debe poder observar que ciertos puntos de la parábola no corresponden con los mismos puntos en la curva, lo cual los lleva preguntarse si realmente se trata de una parábola, entrando en conflicto puesto que si se toma la definición de parábola dichos puntos no cumplirían las características que allí se enuncian:

*Se denomina **parábola** al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz, y de un punto exterior a ella, llamado foco.*

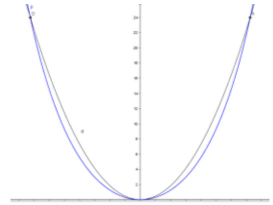


Ilustración 10. Contraste entre parábola y catenaria

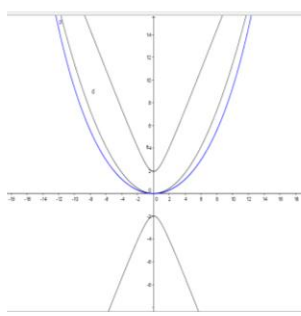
En color azul se pude observar el gráfico de la catenaria y en color negro la parábola

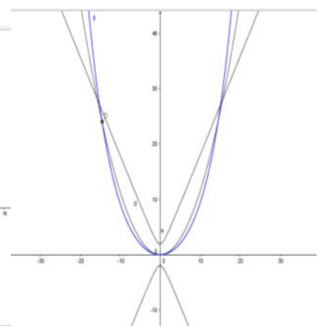
Ecuación de la catenaria

$$p(x) = \frac{1}{0.15}\cosh(0.15\,x) - 6.51$$

Es justo allí donde inicia preguntándose qué tipo de curva es a la que se está enfrentando.

Podrían cuestionarse acerca de si se trata de una parte de una hipérbola comparándola punto a punto. Remitiéndose a la definición de hipérbola y contrastándola con los puntos que pertenecen a la curva que tiene.





Ecuación de la hipérbola:

$$-1.67x^2 + 0.52y^2 = 2$$

Tal como se mencionó anteriormente se busca que los estudiantes lleven a cabo un proceso similar al de Descartes en la resolución de problemas, con el fin de identificar qué tan cerca se encuentran del método argumentativo propuesto por Descartes; reconociendo que la deducción de la expresión analítica de la catenaria requiere un cierto nivel como de construcciones mentales fuertes, es por ello que no se da prioridad a que el estudiante logre deducirla, sino los argumentos matemáticos que ponga en juego en la caracterización de la curva. Para ello se tiene presupuestado que el estudiante tome métodos deductivos alternativos al que se conoce actualmente. Como lo es la deducción geométrica

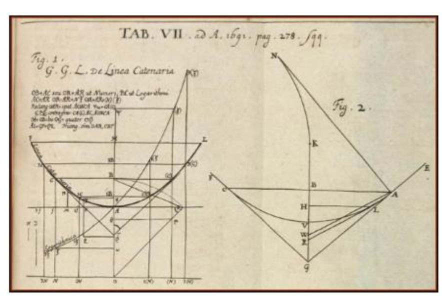


Figura 2: Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en Acta Eruditorum (1691)

propuesta por Leibniz.

3.2 Estructura del análisis

Dentro de este apartado se hará una breve descripción de cómo se organizó la información encontrada tras la aplicación de la propuesta, en donde se busca que el lector identifique la estructura de análisis.

La información se clasificó en tres fases:

Fase de experimentación: Esta fase tiene que ver con la presentación del problema a los estudiantes, en donde se hace entrega del material y del enunciado de la situación problema, allí los estudiantes establecían posibles caminos de solución y conjeturas, de acuerdo a la observación, es importante aclarar que en esta fase los estudiantes no tuvieron contacto con consultas en otras fuentes diferentes a los conocimientos del grupo de trabajo.

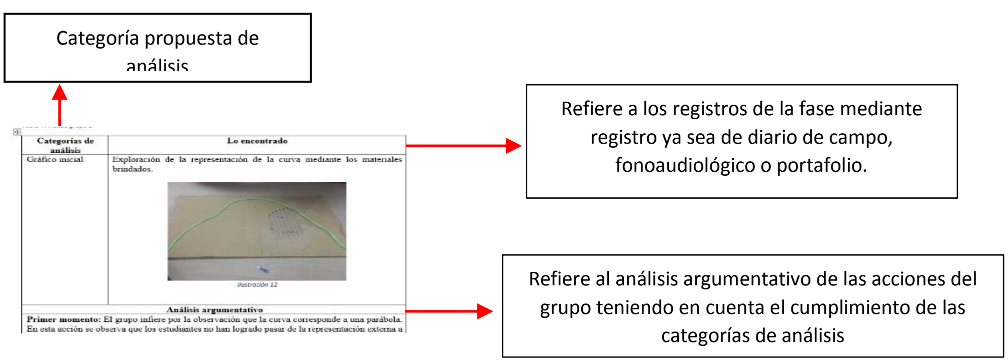
Fase intermedia: Para esta fase los estudiantes ya han tenido un tiempo de análisis de la situación problema, además se les ha sugerido que se remitan a consultas teóricas de conceptos matemáticos formales que consideren necesarios profundizar.

Fase expositiva: En esta fase final los grupos presentan producción tanto escrita como expositiva del proceso de resolución del problema, se da un énfasis especial a esta fase ya que es fundamental dentro del análisis argumentativo, ya que el proceso argumentativo es el engranaje principal de este documento, lo que no quiere decir que en las fases anteriores no se den argumentación de resolución en los grupos de trabajo.

En el siguiente esquema se presenta una idea de cómo se organiza el análisis de resultados del siguiente apartado, allí se observa tres casillas principales:

1) Categorías de análisis
2) Lo encontrado
3) Análisis argumentativo

En cada casilla se encuentra la explicación de la función de cada una.



Este esquema se presenta con el fin que el lector tenga una idea más clara de lo que se va a encontrar en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, se muestra el análisis de los resultados encontrados en la resolución del problema en cada uno de los grupos de trabajo del espacio de formación didáctica del álgebra y la geometría, se realizó una división entre las fases de resolución, las cuales corresponden a *fase de exploración*, que muestra la parte inicial de la resolución del problema, la segunda fase nombrada como *fase intermedia* refiere al momento en que los estudiantes se remiten a consultas que les permitan afianzar las conjeturas o abandonarlas y finalmente se presenta la *fase de exposiciones*, la cual corresponde a la fase de presentación de producción escrita como expositiva de la resolución del problema. Tal como se explica en la “Tabla 4 Momentos en las sesiones de aplicación” de la página 42.

Durante las sesiones de aplicación se realizó un seguimiento de las acciones de los estudiantes, con el fin de reconocer el método argumentativo que presentan en la resolución de la situación planteada, teniendo en cuenta que, la resolución no comprende únicamente las presentaciones finales, sino que estas conforman un proceso en el cual forman parte activa las conjeturas y caminos de abordajes, es por ello que tanto los registros y el análisis se da inclusive en la fase inicial denotada como fase de exploración.

Mediante el análisis de las acciones de los estudiantes se encontró que estos, sobrevaloran las consultas teóricas realizadas, hasta el punto de abandonar el proceso propio por comprender los contenidos de las consultas, además de seguirlos al pie de la letra y hacerlos evidentes como un triunfo dentro de la resolución del problema. Es por ello que aparece la necesidad de crear una categoría que diera cuenta de este tipo de acciones en los grupos analizados dando cabida a categoría emergente que llamaremos *refiere conceptos extraídos de documentos académico.*

Análisis del proceso seguido por el grupo 1

Fase de exploración: **Grupo 1**

Los estudiantes tienen como primera hipótesis, que la curva corresponde a una función cuadrática tal como se observa a continuación (registro fonoaudiológico 11-03-16 a partir del minuto 6’’38)

Estudiante: entonces mira, Al igual que mis compañeros, nosotros encontramos que es una cuadrática, pero esto debe cumplir una serie de cosas.

El grupo establece una hipótesis, que corresponde a que la curva es una función cuadrática, sin embargo, no reconoce la diferencia entre función cuadrática y parábola pues más tarde hace referencia al objeto nombrándolo como parábola. Es evidente que el surgimiento de la hipótesis se da producto de la retroalimentación con los demás grupos, pues lo manifiesta dentro de su exposición.

Por otro lado, llama la atención, la afirmación según la cual la curva debe ser simétrica, afirmado que:

Estudiante: Debe tener un vértice acá y ese es el punto de corte donde empieza la simetría de la parábola. Ahí es donde empieza a ser simétrica en los dos cuadrantes.

La anterior argumentación sugiere que los estudiantes tienen en mente el plano de referencia, aunque no se exteriorice la idea en algún tipo de representación tangible. Este proceso se ubica dentro de la categoría de análisis planteada *utilización del plano de referencia*. Destacando el hecho que los estudiantes asumen la existencia de simetría al trazar una línea que pase por el vértice, sin que se tenga en cuenta el comportamiento de los puntos, ni otros argumentos que sustenten la idea.

Por otro lado, en su primera búsqueda de hipótesis intentan comparar la curva del problema con algunas funciones que han trabajado en ocasiones anteriores, por cual se expresa que dicha curva puede también corresponder a un gráfico de la función valor absoluto. Es importante mencionar que los estudiantes en esta primera fase, no han hecho uso de ningún referente teórico con el cual se puedan apoyar, sino que las ideas que manifiestan son el producto de sus intuiciones y aproximaciones conceptuales.

En esta fase se observa que el grupo establece caminos de solución en relación con objetos que le sean familiares, como lo es relacionar la curva del problema con la función cuadrática, o con la función valor absoluto, sin embargo, se asumen hechos sin tener argumentos matemáticos, producto de deducciones, sino que simplemente se establecen por intuición.

Fase intermedia

Como los estudiantes relacionan la curva directamente con la imagen de una parábola de manera netamente visual, posterior a la fase anterior, los estudiantes se remiten a consultas teóricas que den cuenta de las características principales del objeto matemático definido como parábola. Argumentan que dicho concepto debe poseer como aspectos fundamentales los siguientes elementos:

- Directriz
- Vértice-simetría
- Eje x-directriz

En ese orden de ideas y seguido de establecer las componentes que debe tener una parábola se da el siguiente dialogo:

Investigadora: ¿quién es la directriz de esa parábola?

Estudiante: es que yo se la dibujé, pero no tiene

Investigadora: ¿No tiene?

Estudiante: Tú me entregaste solamente la lana y los dos chinches.

Investigadora: Ah lo que te refieres es que no se ve

Estudiante: exacto, acá no se ve bien, pero te puedo decir cuáles son las componentes que debe tener la parábola.

Mediante el dialogo anterior se puede observar que el grupo no se logra desprender de la experiencia o de la representación con objetos tangibles, es decir, el grupo no logra abandonar la representación con el fin de analizar a profundidad el objeto matemático y sus componentes, sino que hacen responsable a la representación por los objetos no visibles. Dando por hecho que la experiencia debe darles todos los elementos de matematización involucrados es sus hipótesis para estudiar la curva. Centrando sus esfuerzos en hacer evidente las consultas realizadas situándose en la categoría denominada *refiere conceptos extraídos de documentos académicos.*

Más adelante de acuerdo con la definición encontrada de directriz manifiestan que debe ser paralela al eje $\boldsymbol{x}$, y que para el caso específico de esta curva coincide con el mismo eje. Tal parece que los estudiantes identifican a la directriz siempre como una recta paralela al eje $\boldsymbol{x}$, por lo que se puede asumir que no contemplan parábolas ubicadas horizontalmente. Es decir, que tengan como directriz una recta paralela al eje $\boldsymbol{y}$**.** De igual modo, esta afirmación se ubica dentro de la categoría *Conjeturas,* puesto que en primera instancia se manifiesta que la curva no posee directriz, pero más adelante y gracias a sus consultas teóricas, asume otra posición que les permite, ahora nombrarlas en una ubicación específica. Tal como se registra en las notas de campo y de audio a partir del minuto 7’0’’.

En este tipo de argumentación se hace evidente la necesidad de caracterizar el objeto trabajado por parte de los estudiantes, contrastándolo con fuentes teóricas confiables que permitan establecer cierto tipo de conexiones, que más adelante le sean favorables a la hora de plantear el camino de resolución de la situación planteada. Dicho proceso se clasifica en la categoría *refiere conceptos extraídos de documentos académicos*. Es decir, se evidencia que los estudiantes dan un énfasis profundo a las consultas teóricas que realizan, tanto así que abandonan el proceso propio por darle prioridad a construcciones formales externas.

Fase de exposiciones finales grupo 1 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

La casilla denominada “lo encontrado” hace referencia a frases mencionadas por los estudiantes a lo largo de la exposición que han sido en algunas ocasiones parafraseadas, o traducidas mediante la idea que estos quieren presentar, esto ha sido tomado tanto de la presencia física en las exposiciones como en diferentes archivos de audio que registran el desarrollo de los momentos de la actividad.

El siguiente cuadro se organiza de acuerdo con las categorías de análisis planteadas, seguido de “lo encontrado” en la fase de exposiciones, sin dejar de lado algunas intervenciones en fases anteriores que salieron a la luz en la presentación del problema, finalmente debajo de las dos columnas anteriores se ubica la fila nombrada como análisis argumentativo en donde se encuentra un análisis detallado de la columna nombrada como “lo encontrado”.

Tabla 5 Análisis grupo 1

<table>
<tr><th>Categorías de análisis</th><th>Lo encontrado</th></tr>
<tr><td>Gráfico inicial</td><td>Exploración de la representación de la curva mediante los materiales brindados.

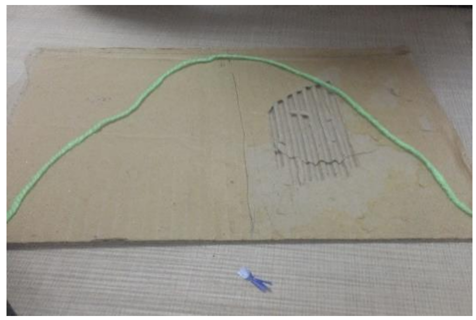



Ilustración 11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Primer momento: El grupo infiere por la observación que la curva corresponde a una parábola. En esta acción se observa que los estudiantes no han logrado pasar de la representación externa a la representación interna en términos de (Dufour-Janvier, Bednarz y Belanger, 1987). Es decir, reconociendo que en el transcurso de dichas representaciones se da un proceso de interiorización del concepto que permite establecer relaciones conceptuales.
Dejándose llevar netamente por la forma sin tener en cuenta el trasfondo de la curva en términos de datos, naturaleza, entre otros aspectos propios de la curva.
Dificultad encontrada en Descartes, pues él creía que este tipo de curva correspondía con una parábola, gracias a su gran parecido en forma. Aclarando que Descartes no se quedó allí, sino que llegó a establecer que la curva no correspondía a una parábola sino a una catenaria.
Segundo momento: el grupo muestra gran interés en seguir con la hipótesis inicial, pero se observa que los estudiantes abandonan completamente la curva dada por ir en busca de la teoría que dé cuenta de las características de la parábola, pero sin llevarlas a la curva. Por lo tanto, se puede establecer que este grupo da prioridad al referente teórico pues lo considera aspecto fundamental y suficiente en la búsqueda de la resolución de la situación problema. Lo que pone de manifiesto la supervaloración que se le da a las construcciones teóricas con respecto a las propias, pues para el caso específico se ubican por encima de las construcciones propias del grupo. Esta afirmación se puede observar en las siguientes imágenes tomadas de la producción escrita presentada por el grupo.</td></tr>
</table>

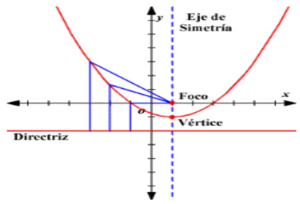


Ilustración 12

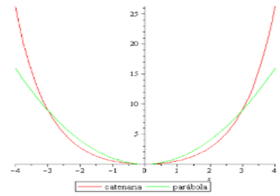


Ilustración 13

Objeto solución	No definido.

Análisis argumentativo

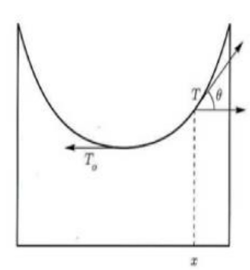
De lo expuesto en la sesión se logra evidenciar que no se establecen objeto solución. Dentro del proceso de resolución se pudo observar que los estudiantes transcurrieron por dos fases, en la primera que corresponde a la fase que se nombró como fase de experimentación, los estudiantes tácitamente se referían al plano cartesiano como recurso en la demostración de simetría lo que permite ver un posible objeto solución ubicado en el punto medio de la distancia entre chinche y chinche, pero dicha afirmación posteriormente fue dejada de lado al hacer uso únicamente de argumentos teóricos, sin que estos fuesen contrastados en el problema planteado. Esto se da gracias a que el estudiante establece una suficiencia con los conceptos abstraídos de la teoría, dejando de lado las representaciones gráficas propias.

Conjeturas	El grupo argumenta que se puede tratar de un tipo de clasificación de curva definido como abierta y como sub clasificación se establece que corresponde a una Parábola tal como se afirma en el registro fonoaudiológico 19-03-16 a partir del minuto 36’’08’’’ **Grupo:** Nosotros abordamos el problema diferente, nosotros partimos de los tipos de curva…, la clasificación que le dimos a la curva como tal era de tipo abierto. En la cual estaba la parábola la hipérbola y la catenaria. De acuerdo a la intervención del grupo se observa que se llega a la conjetura que la curva puede corresponder a una catenaria mediante consultas del concepto matemático de curva abierta, encontrando que en esta clasificación se encuentran tres tipos de curvas los cuales pueden corresponder con la curva del problema. **Grupo:** hay que dejarlo claro nuestras hipótesis es que es catenaria pero también tomamos que es parábola. Allí se observa que los estudiantes, establecen hipótesis en relación con las consultas realizadas. Sin embargo, el grupo desecha la posibilidad que la curva corresponda a una hipérbole.

Análisis argumentativo

El grupo resolutor, por medio de diferentes consultas teóricas comprende que existen otro tipo de curvas, por lo cual establecen que es necesario no encerrasen únicamente en la idea que la curva se trata de una parábola, y que es importante analizar detenidamente las características que posee la curva dada, con el fin de establecer su relación con las curvas encontradas a través de consultas teóricas.

Se observa que se abre el panorama conceptual de los estudiantes, al referirse no solamente a la curva como correspondiente a una parábola sino a otro tipo de curva como lo presentaron, más específicamente se refieren a la catenaria como posible camino de resolución. Tal parece que la

<table>
<tr><td colspan="2">importancia de la consulta de conceptos toma especial sentido en esta acción de los estudiantes, lo que hace inferir que se ha interiorizado en ellos la necesidad de la búsqueda minuciosa de aspectos que lleven a clarificar temas fuera de las aproximaciones conceptuales. Entendiendo la importancia de la investigación en estudiantes universitarios y pilar fundamental en el proyecto académico del que procede el grupo analizado.</td></tr>
<tr><td>Algebrización</td><td>El grupo comparte dentro de su espacio expositor la ecuación general de la parábola. Y brindan argumentos tales como:
No se puede construir la curva con regla y compas.
La ecuación general que describe una catenaria se expresa mediante el seno hiperbólico.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tal como se afirmó en apartados anteriores, los estudiantes al dar prioridad al concepto teórico abandonaron todo tipo de manipulación algebraica en la curva del problema, lo que no les permitió establecer relaciones, partiendo ya sea de los datos proporcionados u otros hallados en el proceso de búsqueda, sin embargo, manifiestan que la curva no puede ser construida con regla y compás lo que sugiere un análisis de tanto de la naturaleza de la curva, como de su expresión matemática asociada.</td></tr>
<tr><td>Utilización del plano de referencia.</td><td>Puede ubicarse indiferentemente (no definen dónde está)</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El plano de referencia como construcción propia cobra sentido cuando los estudiantes intentan demostrar simetría, más adelante aparece únicamente en representaciones extraídas de referentes teóricos. Lo que implica que los estudiantes lo consideran importante en cierto sentido, aunque no fundamental.</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>Catenaria general, tomada de un documento.


$T.cos\theta = T_0,\ \ T.sen\theta = w.s(x)$
$\frac{dy}{dx} = tg\theta = \frac{w.s}{T_0}$
$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{w}{T_0}.\frac{d^2y}{dx^2}$
$y = a\,cosh\left(\frac{x}{a}\right)$
Ilustración 14</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta imagen tomada de la producción escrita de los estudiantes se ubica dentro de esta categoría ya que el proceso de resolución los llevó a intuir que la curva también podía ser una catenaria, tal como registra en el portafolio presentado por el grupo Cuando se volvió a leer el problema se tuvo en cuenta otras variables que podían influir en la cuerda del problema y el tipo de curva que se describiría; las variables que surgieron era que la cuerda estaba colgando de manera vertical, es decir que la gravedad influiría en la forma que toma la cuerda y que los chinches están a una misma altura.</td></tr>
</table>

(Vega, Rodriguez, & Hernandez, 2016) sin embargo, no se profundiza en dicha afirmación, aunque la imagen no corresponda a una producción propia, si permite observar que las diferentes investigaciones y posibles conexiones, llevaron a preguntarse los estudiantes por otro tipo de curvas, aunque no muy habituales dentro de su proceso académico. Se trata de una conjetura que exige ser desarrollada, si se logra determinar su importancia dentro del proceso.	
Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana.	Parábola como curva polinómica, catenaria como curva trascendental.
Análisis argumentativo	
Al abandonar la curva del problema, y al no poder establecer procesos algebraicos, estableciendo relaciones entre datos del problema, los estudiantes no logran alcanzar esta categoría, pues es necesario que el estudiante atraviese por las categorías planteadas satisfactoriamente, con el fin que esta categoría aparezca, ya que se trata de un proceso que debe darse como resultado del cumplimiento de las anteriores categorías.	

Teniendo en cuenta las categorías de análisis propuestas, se evidencia del grupo resolutor que:

No establece objeto solución lo que sugiere que no se tiene en cuenta la argumentación entendiéndola como hipotético-deductiva, sin embargo, el grupo propone como hipótesis de solución dos caminos: el primero hace referencia a que la curva corresponde a una parábola, y el segundo que la curva corresponde a una catenaria, pero sin que dicha hipótesis siga una cadena de razonamientos teniendo en cuenta los datos proporcionados, con el fin de llegar a un acierto en términos formales, que le permita establecer de manera precisa la comprobación de algunas de las hipótesis planteadas. Identificando la dificultad en el grupo, de nombrar los objetos que intervienen en la situación problema, lo cual desencadenó en un plano de referencia inexistente, el cual no permitió establecer una cadena clara de razonamientos aterrizados al problema.

Posterior se presenta un gráfico final, que no corresponde a una construcción propia como se esperaba, sino al fruto de una comparación superficial de forma y enunciado, la cual proviene de un documento investigado. Se evidencia que el grupo resolutor se conforma hacer evidente una expresión matemática general de las catenarias, por lo que el análisis axiomático euclidiano se reduce a manifestar el carácter de las curvas, es decir, la parábola como curva polinómica o la catenaria como curva trascendental.

Análisis del proceso seguido por el grupo 2

Fase de exploración Grupo 2

Intervenciones tomadas de la observación de los avances de cada grupo (registro fonoaudiológico 07-03-16 a partir del minuto 11’’51’’’):

Dentro de la fase de exploración el grupo tiene como hipótesis que la curva corresponde a una parábola. En lo que refiere al plano cartesiano el grupo manifiesta que no puede dibujarse, ya que primero se debe identificar la curva en qué cuadrante está. Esto manifiesta implícitamente que para el grupo el plano de referencia viene amarrado al objeto, es decir, el objeto no se le puede asignar arbitrariamente un lugar en el plano, sino que el objeto en sí mismo viene dado con un lugar en específico, por lo cual es necesario identificarlo de antemano con el fin de poder ubicarlo en el lugar que le corresponde.

Dentro de las intervenciones iniciales del grupo se destaca ésta, en la que se afirma que: La ecuación tiene que ser de cuarto grado, pero sin términos impares en los exponentes. Es decir, si llegase a ser de cuarto grado será de la forma $x^4 + bx^2 + c$ lo que implica la ausencia de los términos con exponente impar. Este planteamiento se da, puesto que para este grupo la presencia de términos de grado impar hace que el gráfico de cualquier curva tome la forma del término, es decir, si la expresión x^2 viene acompañada de un término de primer grado la curva tendrá en algún intervalo el gráfico de una línea recta, así:

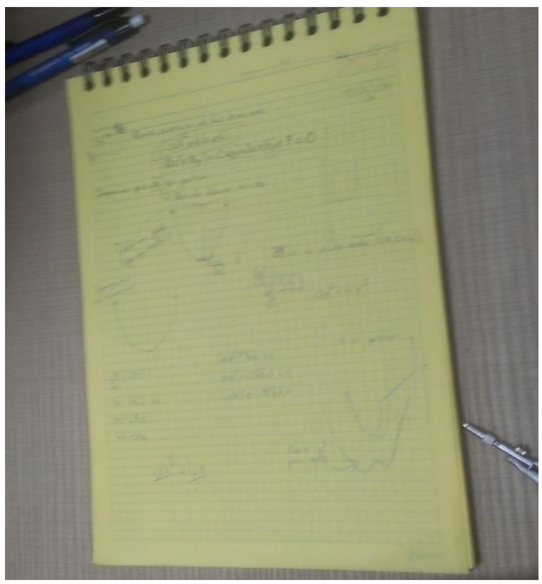


Ilustración 15

En la imagen se observa la representación de las ideas expuestas, del lado derecho se encuentra una imagen de una curva que posee las características manifestadas, es decir, que si la curva posee un término de grado impar esto hará que la curva tome ciertas variantes, para el caso específico que de allí se desprenda una recta.

De esa afirmación del grupo se puede inferir que el grupo tácitamente relaciona directamente los términos con el tipo de gráfico obtenido, es decir que dicha afirmación puede ubicarse en la categoría gráfico inicial, destacando que, aunque no sea necesariamente utilizado nuevamente, si permite identificar los posibles obstáculos por lo que está travesando el grupo resolutor. Identificando que el grupo trata de vislumbrar una función a trozos. Dicha intervención se ubica en la categoría de *algebrización*.

Fase intermedia

Grupo 1 Intervenciones tomadas de la observación de los avances de cada grupo (registro fonoaudiológico 11-03-16 desde el minuto 37’’27’’’):

Para la segunda fase el grupo establece que la curva debe corresponder necesariamente a una sección cónica, seleccionando como caso específico la parábola, mediante la observación de la forma de la curva.

De allí las estudiantes se remitieron a consultar teóricamente la diferencia entre parábola e hipérbole tal como quedó registrado en la siguiente transcripción:

Estudiantes: Nosotros nos fuimos a ver la diferencia entre parábola e hipérbole

Investigadora: ¿Cuál es?

Estudiante: No fuimos a ver qué significa y de dónde sale cada cosa. entonces ahí nos apareció un circulo una parábola y una elipse.

Investigadora: ¿Esa cómo se llaman?

Estudiante: Las secciones cónicas

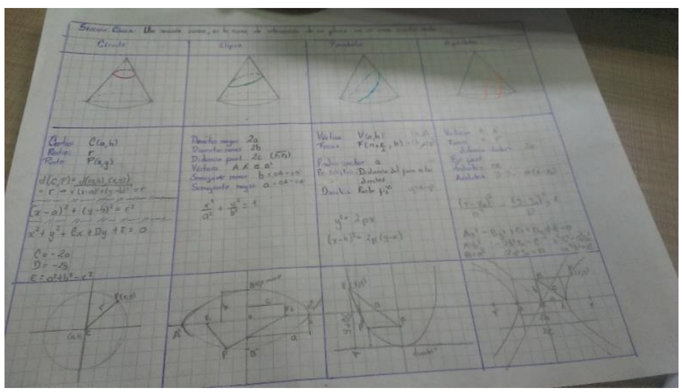


Ilustración 16

Dado que, el grupo establece que la curva corresponde a una sección cónica, manifiesta que, de llegarse a comprobar la hipótesis establecida, se debe poder logar encontrar los elementos característicos como el vértice, la directriz entre otros, estableciendo que la última debe poseer atributos especiales, para lo cual debe ser necesariamente perpendicular al eje de simetría, en el trasfondo de esta afirmación se alberga la categoría denominada *utilización del plano de referencia,* además de ser plasmada en algún tipo de representación gráfica puede ubicarse dentro de la categoría gráfico, puesto que se plasma mediante inferencias, estableciendo, que su representación viene dado por el descubrimiento de puntos, además se da por la identificación de relaciones.

A continuación, se cita una frase expuesta por el grupo en la fase intermedia de resolución “Por ahí encontramos que como lo dado es la medida de la cuerda, entonces que eso se puede calcular mediante la longitud de arco, pero como ya tenemos la longitud de arco lo que tenemos que hacer es devolvernos” llama la atención esta frase encasillándola dentro de la categoría *conjeturas*, en cuento se evidencia consultas relacionadas con longitud de cuerda, y de cómo los datos que se proporcionan en el enunciado pueden ponerse en juego a la hora de establecer relaciones importantes que permitan establecer con certeza el tipo de curva que se está trabajando.

Se encuentra que el grupo establece caminos de abordaje, realizando un refuerzo de estos caminos mediante consultas teóricas, sin embargo, el grupo se encuentra con conceptos desconocidos siendo esto un obstáculo en la resolución del problema lo que hace que en vez de adentrarse en el concepto desconocido y lograr comprenderlo, el grupo acuerda mejor abandonarlo por ir en busca de conceptos ya trabajados, es decir, conceptos que le sean familiares.

Fase de Exposiciones finales grupo 2 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

A continuación, se muestra los resultados de los estudiantes en la fase de exposiciones finales.

Tabla 6 Análisis grupo 2

Categorías de análisis	Lo encontrado
Grafico inicial	Exploración con los materiales.  *Ilustración 17*
Análisis argumentativo	
En esta categoría el grupo inicia explorando con los materiales presentados, analizando el tipo de curva, allí realizan observaciones de inferencias y de posibles representaciones mediante posibles ecuaciones la replicación de la forma de la curva, que más adelante contrastan con el uso del recurso tecnológico. Relacionado los conceptos previos con las nuevas exigencias conceptuales que trae consigo el análisis del problema. “Para construir un nuevo conocimiento hay que utilizar un sistema cognitivo ya elaborado que a su vez hay que transformar”. (Rubio B. M., 2013)	
Objeto solución	1. Punto centro entre la distancia de los chinches, con el fin de establecer el eje de simetría. 2. Punto vértice en la coordenada (0,0)
Análisis argumentativo	
Seleccionan la distancia media, y se ubica el vértice en el origen del plano, lo que hace que indirectamente se establezca el eje de coordenadas, de igual forma buscan identificar si la curva	

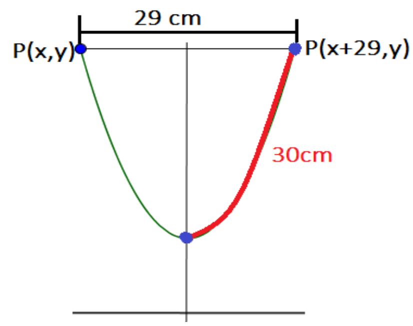
<table>
<tr><td colspan="2">es simétrica, permitiendo no sólo establecer un posible objeto solución sino el uso del plano de referencia, además del establecimiento de atributos del eje de simetría. Al ubicar el vértice del objeto en un punto determinado del plano con el fin de observar el comportamiento de la curva en cada uno de sus puntos se evidencia que, al igual que lo que establece Descartes, en donde para este último la importancia de la ubicación del objeto en el plano no radicaba en el lugar propio del plano donde se ubicaba sino de las relaciones que se pudiera establecer del objeto, indistintamente de su posible ubicación, se observa que puede estar ubicado en cualquier parte del plano desde que permanezcan tanto la relación con los demás objetos, como las características que éste posee. Destacando el mismo proceso de resolución del grupo al realizar dicha elección del objeto solución.</td></tr>
<tr><td>Conjeturas</td><td>Este grupo resolutor atraviesa por tres caminos posibles:
1. Por la forma de la curva debe ser una curva de grado par con ausencia de términos de grados impares afirmación explicada en la fase anterior).
2. Es una sección cónica, Longitud de arco (procesos abandonado por la dificultad con el concepto que se debe poner en juego) tal como lo evidencia el registro fonoaudiológico 19-03-16 partir del minuto 6’’
Estudiante: En si nos decían que la longitud de la cuerda era 60
Estudiante: Entonces en un punto medio esta distancia valía 30 (ver la imagen)


Ilustración 18

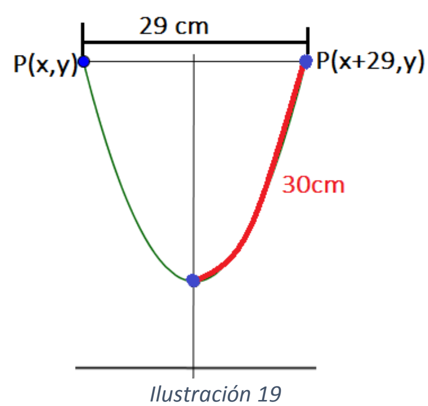
Estudiante 1: Entonces miramos qué teníamos y qué podíamos hallar.
Estudiante 2: Uno de los datos dados que era 60 cm, que era el que teníamos, tratamos de ver qué información conseguíamos con eso, como tratábamos de relacionarlo con la parábola.
Nunca lo habíamos visto de ese lado, podíamos obtener de ella, pero, para ello miramos como se hallaba la longitud de curva la cual está dada por una integral, esta ecuación determina un poco la aproximación de la longitud de la cuerda a partir de la distancia entre los puntos. En nuestro caso podríamos decir…
Estudiante 1: entonces pensamos que eso nos servía para poder hallar este, pero pues a manera que no sabemos integrales no nos sirvió.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo establece la hipótesis que la curva corresponde a una parábola, argumentando que,</td></tr>
</table>

gracias al el uso del recurso tecnológico se abandonando la hipótesis de otras curvas de grado mayor par, tal parece que el grupo revela esto gracias a la practicidad que genera trabajar con una expresión antes trabajada, es decir buscando la expresión asociada de la parábola, de la que se poseen ciertos criterios para determinar posteriores relaciones.

Respaldando la hipótesis que la curva se trata de una parábola y con el fin de relacionar los datos proporcionados en el enunciado del problema, el grupo indaga acerca del concepto longitud de arco, estableciendo que como se posee el valor de la longitud, solamente es necesario conocer la ecuación asociada a la curva presentada. En otras palabras, el grupo buscar partir desde el valor de la longitud de arco, con el fin de establecer la posible expresión asociada y no como se realiza generalmente, que se parte de la ecuación para conocer la longitud de la cuerda.

Finalmente, el grupo abandona el abordaje correspondiente a la longitud de arco, mencionando que se les genera una gran dificultad en la comprensión de las integrales y derivadas que aparecen. Tal parece que esta situación se puede interpretar como lo afirma (GÓMEZ CHACÓN, 2002)

Los alumnos buscan en los enunciados de los problemas un conjunto de referentes habituales (consensuados explícitamente o implícitamente con el profesor, a partir de la practica escolar anterior) que les permitan por una parte descubrir cuál es el procedimiento matemático (o el campo de conocimientos) al cual hace referencia, y por otra parte decidir la manipulación más adecuada de los datos contenidos en los enunciados. La. mayoría se trata. de referentes inadecuados que el estudiante ha ido formándose. En cualquier caso, se intentan aplicar los mecanismos habituales, y al no funcionar, o funcionar de forma incompleta, el resultado es un bloqueo, una acción incoherente, o un abandono del problema (por ejemplo, no asumiendo que se trata de un problema de matemáticas).

Algebrización	Deducción de la ecuación general de la parábola. Teniendo en cuenta las características propias de la parábola. (foco, vértice, directriz, eje de simetría) pero de manera general  *Ilustración 19*

Análisis argumentativo

Los estudiantes toman como estrategia nombrar los chinches como puntos dentro del plano, es decir, tal como se aprecia en la imagen a los chinches se le asignan coordenadas puntuales dentro del plano de referencia, se evidencia un avance pues asignar coordenadas permite identificar posibles relaciones, además toman en cuenta la longitud de la curva con un invariante, el que corresponde a tomar la mitad del valor de la longitud que de la cuerda. Y establecen ciertas relaciones. Allí se evidencia la necesidad de tomar todos los datos que proporciona el enunciado de la situación problema con el fin que den cuenta de posibles relaciones.

Utilización del plano de referencia.

$x^2 = 4py$

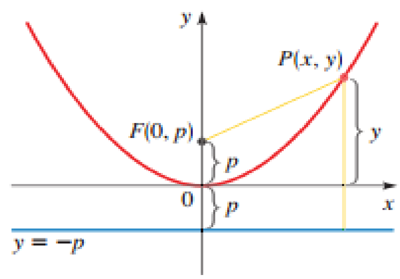


Ilustración 20

Análisis argumentativo

En fases previas se logró evidenciar de manera indirecta el uso del plano en procesos de demostración de simetría, ya en esta fase se encuentra explícito al momento de asignar coordenas específicas a los chinches, ahora bien, en contraste se abandona la curva del problema dando cabida a una parábola general con vértice en las coordenadas (0,0). Este cambio se da gracias a que el grupo se interesó posteriormente en la deducción de la ecuación general de las parábolas con vértice en (0,0) con el fin de más adelante llevar tal deducción a la curva específica, aplicando los datos del problema, sin embargo, este proceso no se dio, puesto que el grupo al final no logró reemplazar los datos del problema en la expresión general.

Gráfico

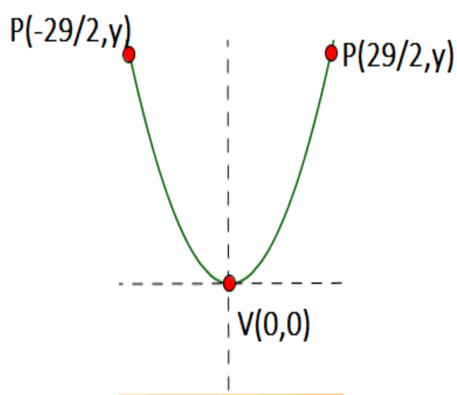


Ilustración 21

Análisis argumentativo

El grafico solución hace referencia a la certeza que la curva corresponde a una parábola; determinando tanto dos puntos, como vértice y posible directriz. Sin que se esecifique la ecuación de la recta drirectriz, además no se realiza una compración punto a punto de la curva encontrada con la curva del problema, con el fin de establecer la similitud de las curvas, en la

imagen se observan dos varibles dentro de las coordenadas, que corresponden a P y a y, sin que se especifiquen los valores posibles que pueden tomar las variables, ni la naturaleza de estas.	
Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana.	Contrastar las características de la parábola con las de la curva presentada.
Análisis argumentativo	
Al momento de establecer una posible curva, tomando algunas coordenadas tales como dos puntos y el vértice, se evidencia un gran avance, en tanto que se asigna un lugar específico del objeto en el plano. Sin embargo, para que se llegase a esta categoría era necesario que se diese una comprobación de la ecuación de la parábola punto a punto con la ecuación de la curva mencionada, al no darse esta comprobación el grupo no logra analizar con la axiomática euclidiana puesto que no tiene el objeto sobre el cual analizar.	

El grupo establece un modelo explicativo compatible con las observaciones, cuando argumenta la posibilidad que la curva corresponda a una de grado par, y se remite a la búsqueda de un sustento válido que respalde su hipótesis mediante la graficación de las diferentes variantes que puede llegar a tomar una expresión de esta índole, aceptando solamente las correspondientes a segundo grado, tomando como referencia la curva presentada realizando un contraste con la gráfica de manera netamente visual.

Se observa que el grupo tiene en mente posibles caminos válidos, y hace uso de recurso matemáticos pertinentes en la búsqueda planteada, sin embargo, algunos de estos caminos se abandonan por el desconocimiento de conceptos nuevos que van apareciendo. Se resalta que el grupo siempre tiene en mente el problema planteado, pero en cierto momento del proceso resolutor lo abandona completamente por ir en busca de la deducción de la expresión general de las parábolas que poseen vértice en el origen, lo que pone en manifiesto la necesidad de condensar el trabajo en una expresión matemática que sustente las diferentes afirmaciones. Siendo este un impedimento a la hora de la comparación con la curva planteada ya que se hace necesario establecer ciertos puntos que refieren a los de una parábola sin tener en cuenta otros puntos importantes en la comparación que da paso a identificar que la curva no corresponde a una parábola.

Finalmente, no logran analizar la situación con la axiomática euclidiana puesto que, al darse el abandono momentáneo del problema por ir en busca de la expresión matemática, no se logra establecer una correspondencia evidente entre la expresión y la curva presentada teniendo en cuenta el total de los puntos de la curva.

Análisis del proceso seguido por el grupo 3

Fase de exploración Grupo 3

Este grupo inicia estableciendo conjeturas tales como: la curva debe tener una expresión asociada en la que se tenga una variable al cuadrado. Esta inferencia corresponde en su trasfondo a la relación que establecen que la curva corresponde a una parábola, por lo que hacen visible que la ecuación debe tener necesariamente una variable al cuadrado. En consecuencia, con la hipótesis que la curva corresponde a una parábola, se indica que se debe encontrar las características propias de dicho objeto por lo cual es necesario identificar el foco.

Al referirse a la expresión asociada enmarca que debe tener una variable en y. (se remiten a la ecuación general de la parábola):

Estudiante: Podríamos buscar en la ecuación general de la cuadrática la que es $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (la estudiante escribe la expresión en su cuaderno)

Investigadora: *¿Quiénes serían a, b y c?*

Estudiante: Pues pueden ser reemplazados por x.

Tomando del (registro fonoaudiológico 07-03-16)

Se evidencia que el grupo no identifica la diferencia entre las variables que se involucran en la ecuación cuadrática, además solamente reconoce como incógnita la letra ***x*** pues le es estrictamente necesario realizar un cambio de variables, es decir no se conforma con las letras ***a, b y c,*** sino que debe cambiarlas por la variable ***x*** sin que se reconozca que los valores asignados para ***a, b y c*** no siempre son los mismos.

Fase intermedia Grupo 3

(registro fonoaudiológico 11-03-16 a partir del minuto 12’’):

En esta fase el grupo arranca con la hipótesis que la curva corresponde a una parábola. Se evidencia consultas referentes a las características de la parábola.

Estudiantes: encontramos que cualquier parábola debe tener foco, vértice y directriz.

Estudiante: como ya sabemos que tenemos una parábola entonces vamos a mirar eso en la curva.

En esta fase el grupo manifiesta que mediante consultas en diferentes documentos se encontró la ecuación general de la parábola la cual corresponde a la siguiente expresión:

$ax^2 + bx + c = 0$ estableciendo que de esta ecuación y relacionándola con los datos del problema se debe poder establecer foco, vértice y directriz. En esta afirmación se evidencia conjeturas de las que parten los estudiantes para resolver la situación problema.

El grupo centra su interés principalmente en la expresión asociada a la curva, partiendo de la hipótesis que la curva corresponde a una parábola, se observa que se da por hecho que la curva es una parábola por lo que todos sus esfuerzos se encaminan en buscar la expresión asociada, llama la atención que grupo asocia la curva con la parábola y esta conjetura la toman como cierta, lo que no les permite pensar en otro tipo de curva que pueda estar representada allí, sino que se centra en la única idea que la curva corresponda a una parábola, esto hace que la búsqueda de la ecuación se convierta para el grupo en una necesidad inminente.

Fase de exposiciones finales Grupo 3 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

La casilla denominada "lo encontrado" hace referencia a frases mencionadas por los estudiantes a lo largo de la exposición que han sido en algunas ocasiones parafraseadas, o traducidas mediante la idea que estos quieren presentar, esto ha sido tomado tanto de la presencia física en las exposiciones como en diferentes archivos de audio que registran el desarrollo de los momentos de la actividad.

Tabla 7 Análisis grupo 3

<table>
<tr><th>Categorías de análisis</th><th>Lo encontrado</th></tr>
<tr><td>Gráfico inicial</td><td>Aquí se puede observar la fase de exploración con los materiales propuestos, en donde se representa la situación problema propuesta.

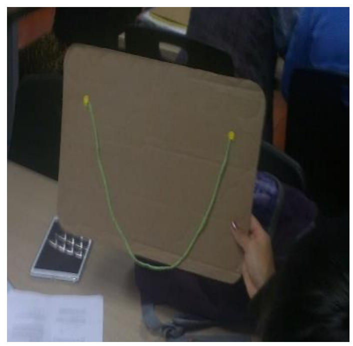
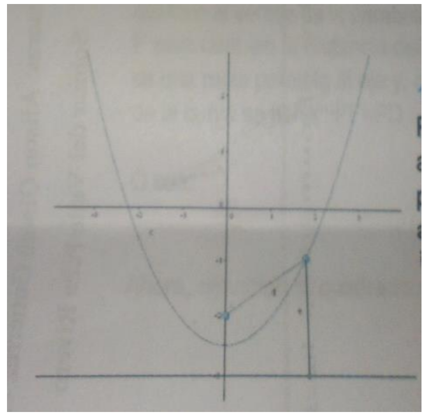



Ilustración 22</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo representa la curva con los materiales brindados. Tal como se puede observar en la imagen del grupo a partir de la representación del problema, se inicia estableciendo posibles caminos de abordaje.</td></tr>
<tr><td>Objeto solución</td><td>No definido dentro de la curva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo no define dentro de la curva el objeto solución, es decir no se toma ningún punto en la curva del cual partir a futuros razonamientos, sin embargo, el grupo se interesa por ir en busca de la expresión que define el objeto parábola, puesto que, su hipótesis es que la curva corresponde al objeto antes mencionado, lo que los lleva directamente tanto a la ecuación general como a la factorización de la expresión en busca de las raíces de la ecuación. Es allí donde se hace evidente la afirmación de:
(Rubio B. M., 2008) "La construcción del conocimiento puede ser analizada desde dos vertientes: Los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje y, los mecanismos de influencia educativa susceptibles de promover, guiar y orientar dicho aprendizaje". Se entenderá como influencia educativa aquellos procesos algorítmicos que realizan los estudiantes, puesto que se llevan a cabo sin identificar la importancia de estos, es decir, que se realizan simplemente por el reconocimiento que genera, así no exista relación alguna con los datos que proporciona la situación problema.</td></tr>
</table>

Conjeturas	"Por la forma se intuye que es una parábola" **(registro fonoaudiológico 19-03-16)**. Por medio de tanteo se busca la ecuación que pudiese corresponder con la curva presentada.  *Ilustración 23*

Análisis argumentativo

El grupo basa sus argumentos principalmente en la forma, es decir por la impresión visual que les genera la curva, por lo que su primera y única hipótesis corresponde a que la curva es una parábola, incluso el grupo asume que la curva corresponde a una parábola sin tener argumentos matemáticos que den cuenta de la igualdad entre la parábola y la curva del problema. En ese orden de ideas su prioridad se concentra en la búsqueda de definiciones formales de las características principales de las parábolas, abandonando por completo las conjeturas propias.

Algebrización	Tal como se afirma en la categoría anterior, el grupo busca por medio del tanteo llegar a la ecuación que corresponde con la afirmación de que se trata de una parábola. De la misma manera que buscan lograr deducir la ecuación general de la misma, cuando su vértice corresponde al origen.

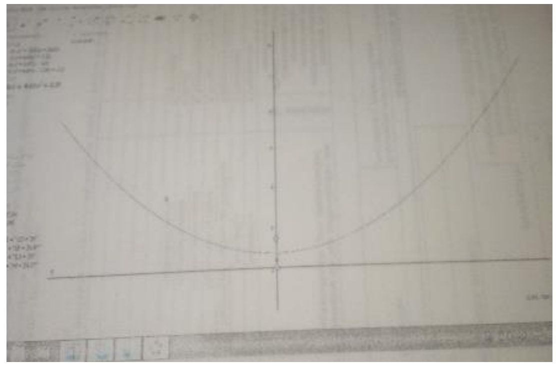
Análisis argumentativo

Se evidencia que lo estudiantes centran su prioridad en obtener la expresión matemática asociada a la curva, es por ello que como primera estrategia lo hacen por medio del tanteo, sin embargo este proceso se va matizando hasta desaparecer al momento en el que se encuentran con la ecuación general de las parábolas con vértice en el origen, pues prefieren ir en busca de la deducción de la ecuación general, abandonando la curva específica por completo, puesto que se esperaría que al final de la deducción de la ecuación general los estudiantes fuesen capaces de reemplazar los datos del enunciado del problema, pero dicho proceso no se logra llevar a cabo.

Utilización del plano de referencia.	Inexistente como construcción propia.

Análisis argumentativo

El plano cartesiano es un elemento que solo aparece mediante el recurso tecnológico, puesto que el abordaje del problema estuvo determinado por la manipulación en todo momento de expresiones algebraicas, tales como la ecuación general de la parábola, lo que hiso que el plano cartesiano fuera relegado, evocándolo únicamente al momento de representar la ecuación de la curva en el recurso tecnológico, es por ello que se afirma que el plano de referencia es

<table>
<tr><td colspan="2">inexistente pues no se trata de una construcción necesaria sino que parece haciendo parte de la representación gráfica.</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>
Ilustración 24</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráfico final. Elaborado a partir de la estrategia del tanteo, estableciendo como dato de relevancia y sobre el que se deben acercar lo más posible, la longitud de la cuerda tomando como estrategia de medición, poniendo en marcha la opcion de longitud de arco que se encuentra en un recurso tecnologico utilizado.</td></tr>
<tr><td>Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana.</td><td>No definido</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teniendo en cuenta la categoría anterior, los estudiantes se conforman con la presentación de la representación de la parábola obtenida al tanteo, sin que se realice una comparación punto a punto de la curva con la gráfica de la parábola. Es por ello que no puede darse un análisis axiomático euclidiano, puesto que para ello era necesario que los estudiantes evocaran la curva del problema en conjunto, la que fue abandonada desde la fase intermedia.</td></tr>
</table>

Este grupo reconocen la importancia del plano de referencia en la búsqueda de la expresión asociada, destacando la importancia sustancial que genera el poder tener una expresión matemática, es por ello que llevan a cabo esta búsqueda mediante dos fases: tanteo y deducción de la ecuación general. Muy posiblemente por la creencia arraigada en lo estudiantes en la que sienten que han resuelto una situación problema cuando logran encontrar una expresión analítica. Más adelante cuando obtiene la deducción de la ecuación general no logran realizar un contraste con la curva dada.

Es evidente que la forma que toma la curva genera en los estudiantes cierta certeza que se trata de una parábola, lo que hace que se remitan a buscar definiciones formales del objeto, no con el ánimo de identificar su concepto, sino de presentarlo como un avance en torno al problema, es decir, que los conceptos hacen parte de la resolución de la situación no para que sirvan de apoyo, sino como sustento teórico de las características que se verán reflejadas en la curva presentada.

El recurso tecnológico permitió que se diera un acercamiento en cuento a la longitud de arco, posibilitando que este dato que hacía parte del enuncia del problema, fuese de apoyo en la búsqueda de la expresión asociada y mediante este los estudiantes establecieran relaciones.

Análisis del proceso seguido por el grupo 4

***Fase de exploración* Grupo 4**

En esta primera frase el grupo conjetura estableciendo que la curva debe tener dentro de su expresión algebraica un término que corresponda a -1, puesto que para ellos la curva abre hacia la izquierda. Llama la atención que el grupo inicia estableciendo conjeturas, ubicando la curva en una posición distinta, sin que se altere las condiciones del problema, aunque no se explicite, se evidencia que los estudiantes toman el plano de referencia ubicando la curva de manera horizontal.

Es por ello que se da el siguiente dialogo:

Profesor: Entonces ¿cómo es la forma del plano en el que está ubicada la curva?

Estudiante 1: Es un plano cualquiera

Estudiante 2: No es necesario tomar algún plano.

Tomando textualmente (registro fonoaudiológico 07-03-16)

En esta primera sesión el grupo no se aventura a establecer alguna hipótesis en cuanto al tipo de curva, simplemente establecen el plano de referencia y en este, ubican a la curva la cual parte del punto (0,0) ubicándola de manera horizontal.

Seguido del procedimiento anterior conjeturan acerca del tipo de ecuación que le debe corresponder a la curva estableciendo que la expresión asociada deber ser de la siguiente forma: $x^2 \div x$

Reescribe la ecuación así: $ax^2 \cdot c$

El estudiante escribe en su cuaderno la anterior expresión

Seguido de la afirmación: “cuando $x = c$ entonces se da que: $ax^2 \cdot c = x^2 + x$”

Allí se puede observar un error en las operaciones que interviene en la ecuación, puesto que inicia con una división seguido de una multiplicación y finaliza con una adición.

Después de la discusión interna sobre la operatoria de las ecuaciones, el grupo laza varias hipótesis de posibles caminos de solución.

Estudiante: Puede ser la hoja de una hipérbole. O un valor absoluto. O una parábola. Pero para que sea la hipérbole le hace falta la otra parte, además la hipérbole es recta.

Llama la atención de este grupo que, en el planteamiento de hipótesis sobre el tipo de curva, va más allá de pensar que la curva corresponde a una parábola, estableciendo un abanico de posibilidades que permiten establecer amplios caminos de solución. Esta misma situación se observa al momento usar el plano de referencia, puesto que argumentan que la curva puede estar en cualquier tipo de plano, lo que lleva a pensar que no sólo tiene en mente el plano cartesiano, sino que amplían su mirada a otro tipo de planos, por lo que dicha afirmación se ubica dentro de la categoría *utilización del plano de referencia*, como usado implícitamente sin que se manifieste mediante algún tipo de representación gráfica, pero por los argumentos enunciados se logra establecer la conjetura acerca que la curva puede ubicarse en distintos planos.

Para esta primera fase el grupo parte con una serie de conjeturas que le permite observar las características de otro tipo de curvas aparte de la parábola, tal es el caso de la hipérbole, además de tener en cuenta otro tipo de planos de referencia y no solo el plano cartesiano, este tipo de estrategias en la resolución de problemas es muy favorable pues permite a los estudiantes realizar consultas de diferentes objetos matemáticos, lo que les ayuda a ampliar sus conocimientos, al igual que les permite ir descartando objetos que no correspondan a las características de la curva del problema con argumentos matemáticos y no solo por intuición.

Fase intermedia Grupo 4

Los estudiantes en esta fase exteriorizan que la curva corresponde a una parábola, aunque manifiestan que no tienen consultas acerca del tema por lo que se evidencia que su aporte fue permeado por el concepto de sus compañeros, abandonando los otros caminos de solución.

El grupo expone la siguiente idea: “De la experimentación y de lo observado se puede decir que se trata de una figura bidimensional”. Tal parece que han consultado referencias que trabajen representaciones bidimensionales y tridimensionales con el fin de establecer la distinción de representación dan.

Registro fonoaudiológico 07-03-16 a partir del minuto 23’’

Estudiante 1: y pues si se dice que es una parábola o una hipérbola,

Estudiante 2: ¿Pero no dijiste que no podía ser una hipérbola?

Estudiante 1: Si, pero es que encontré un documento que me hizo pensar que sí era, solo que es que muestra que la hipérbola es con una inclinación diferente en el cono, entonces la parábola y la hipérbola, entonces la hipérbola está en una inclinación 1 y la parábola -1 o al revés. Entonces encontré otra figura, el hiperboloide o algo así…ah sí, el hiperboloide, pero tengo un problema porque ese va como unido, es que siempre lo muestran unido.

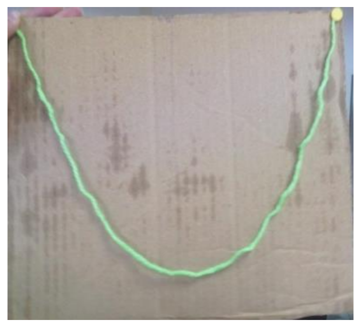
Del dialogo anterior se puede establecer que los estudiantes no poseen una certeza en cuento al tipo de curva, es decir no posee los argumentos matemáticos que les permita establecer la naturaleza de la curva, se evidencia que en esta fase el grupo aun no descarta la posibilidad que la curva corresponda a una hipérbola, lo que hace que se remitan a consultas, encontrando así la superficie de revolución llamada hiperboloide, sin que se identifique la dimensión en la que se encuentra dicho objeto matemático.

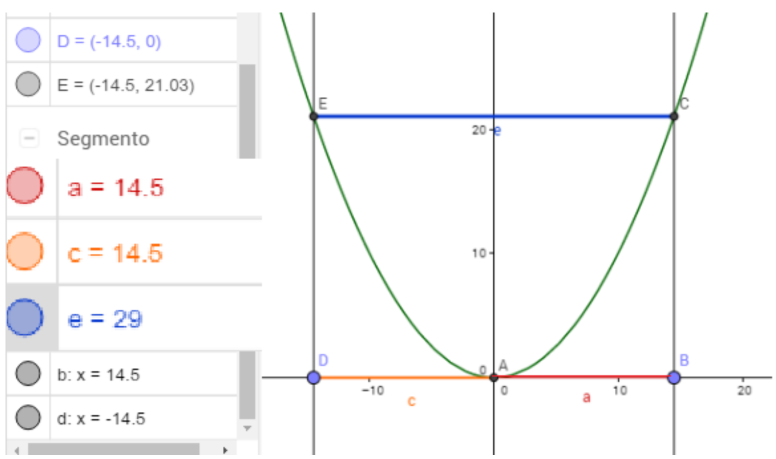
Además de los aportes anteriores, los estudiantes vuelven a poner de manifiesto que visualmente puede ser cualquier curva y que es fundamental, tener los argumentos matemáticos. Tal parece que los estudiantes van más allá de un simple planteamiento generado por la visualización de la curva.

Fase de exposiciones finales Grupo 4 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

La casilla denominada “lo encontrado” hace referencia a frases mencionadas por los estudiantes a lo largo de la exposición que han sido en algunas ocasiones parafraseadas, o traducidas mediante la idea que estos quieren presentar, esto ha sido tomado tanto de la presencia física en las exposiciones como en diferentes archivos de audio que registran el desarrollo de los momentos de la actividad.

Tabla 8 Análisis grupo 4

<table>
<tr><th>Categorías de análisis</th><th>Lo encontrado</th></tr>
<tr><td>Gráfico inicial</td><td>
Ilustración 25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">La imagen corresponde, a la exploración con los materiales brindados, permitiendo que a través de su observación los estudiantes manifiesten algunas hipótesis en cuanto al tipo de curva.</td></tr>
<tr><td>Objeto solución</td><td>Vértice en (0,0). Distancia entre los chinches. longitud de arco. Lado recto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes parten de la hipótesis que la curva corresponde a una parábola, argumentando que se toma ese camino con el fin de delimitar el problema (recordando que los estudiantes habían elegido como posible solución la hipérbole), para ello inician trazando en la curva una recta que pase por los dos puntos (correspondientes a los dos chinches), dicha curva la nombran como lado recto, la cual sirve como punto de partida en las conjeturas que más adelante se hacen explicitas. Es por tal motivo que para fines de las categorías establecidas esta recta se toma como objeto solución.</td></tr>
<tr><td>Conjeturas</td><td>Es una parábola (características). Es una hoja hipérbola. Media circunferencia tomando como diámetro los 29 cm dados. Abortado por la medida del perímetro que no corresponde a los 60 cm.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dentro de las conjeturas que establece el grupo, se evidencia que éste toma varios caminos,</td></tr>
</table>

algunos de los cuales llega hasta su refutación, mediante la cadena de razonamientos que le siguen a la conjetura, tal es el caso de la hipótesis que la curva puede ser una circunferencia de diámetro 29 cm, pues mediante el análisis algebraico se comprueba que la curva no puede corresponder a una circunferencia dado que su perímetro no corresponde con la medida inicial de la medida de la curda, (dato proporcionado en el enunciado de la situación problema).	
Algebrización	Deducción de la ecuación de la parábola. Longitud de arco. Lado recto
Análisis argumentativo	
Como se había mencionado antes, el grupo continua con la hipótesis que la curva corresponde a una parábola, para ello toman como estrategia identificar los dos puntos correspondientes a los chinches como dos puntos dentro de la curva, estableciendo las posibles coordenadas, además de esto trazan un segmento que pase por dichos puntos, a este segmento posteriormente lo identificaran como el lado recto. Desde allí se establecen ciertas relaciones entre datos, sin que se llegue a una concusión definida, se puede observar que los estudiantes no siguen una cadena lógica de razonamientos, y que la verse enfrentados a nuevos conceptos se atemorizan con el hecho de enfrentarse a ellos. Y es que enfrentarse significa ir mucho más allá, significa indagar, conjeturar, analizar, entro otros.	
Utilización del plano de referencia.	Inexistente como construcción propia.
Análisis argumentativo	
Plano de referencia inexistente como construcción propia, es decir, se hace uso de este mediante el recurso tecnológico en el caso específico se trata del software Geogebra, allí aparece como parte de la construcción, permitiendo a los estudiantes establecer coordenadas de los puntos (chinches) y del segmento que nombran como lado recto. No se establece el plano como elemento base en la deducción del problema.	
Gráfico	 *Ilustración 26*
Análisis argumentativo	
Como se puede observar en la imagen el grupo hace coincidir una parábola teniendo en cuenta el dato inicial correspondiente a los 29 cm sin que se realice una comparación punto a punto de la parábola encontrada con la curva del problema, es por tal motivo que el grupo no logra identificar la diferencia entre la parábola obtenida y la curva del problema, destacando que la curva de la parábola se obtiene como aproximación mediante el uso del software.	
Análisis tomando	No se establece.

en cuenta la axiomática euclidiana.	
Análisis argumentativo	
No se lleva a cabo el cumplimiento de esta categoría, pues para que se diera, el grupo debería haber logrado establecer una correspondencia entre los puntos de la parábola con los puntos de la catenaria, pero tal procedimiento nunca se llevó a cabo puesto que los estudiantes no lograron saltar de paso.	

Los estudiantes parten de un argumento erróneo al establecer como objeto solución el segmento que une los dos puntos establecidos en la curva, los cuales corresponden a los dos chinches, esto hace que en la cadena de razonamientos se presenten inconsistencias, de la misma manera que al no establecer un camino de solución eficaz, hace que la búsqueda se vea perdida, puesto que, aunque los estudiantes hubiesen partido de un razonamiento incorrecto, si sus deducciones hubiesen seguido un norte, se encontrarían con un absurdo lo cual los llevaría a tener una certeza del proceso realizado, finalmente les hubiese permitido establecer relaciones que más tarde sirvieran de apoyo en la resolución del problema.

Análisis del proceso seguido por el grupo 5

Fase de exploración Grupo 5

En estafase el grupo inicia explorando con la curva, se observa que le realiza alteraciones a la representación, es decir, toma el centro de masa y lo alarga hasta que tome forma de línea recta, además argumentan que no les es posible identificar una hipótesis de curva, pero que por las observaciones de sus compañeros pueden intuir que se trata de una parábola, aceptando que no tienen claridad en cuanto a las características de las parábolas, por lo que no les es posible apropiarse de la hipótesis que la curva corresponde a una de ellas. Por lo tanto, el grupo no establece *conjeturas,* las cuales se tienen planteadas como una de las categorías de análisis.

Se resalta del grupo que logra establecer la ubicación del plano, realizando una representación en el material, ubicando el centro de masa en las coordenadas en (0,0), aunque se infiere mediante sus intervenciones, que para el grupo la curva toma únicamente valores discretos, puesto que se relacionan directamente las coordenadas con la longitud de la curva, dato proporcionado en el enunciado del problema.

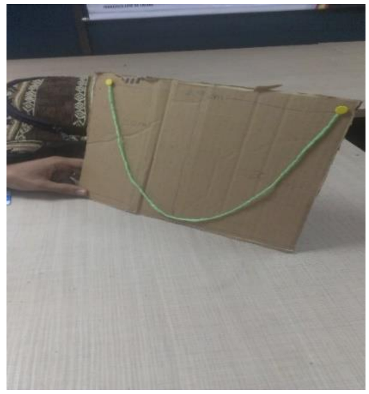


Ilustración 27

En la imagen se observa la representación del plano, al igual que para los valores que se ubican en el primer cuadrante del plano, lo estudiantes argumentan que esa distancia de cuerda debe ser de 30 cm, luego los valores que debe tomar la curva en las coordenadas de x, sólo deben ser valores discretos. Siendo estos argumentos válidos para ubicarse dentro de la categoría *utilización del plano de referencia*.

Fase intermedia Grupo 5

Al aceptar los estudiantes en la fase de exploración su desconocimiento sobre la parábola y sus características, para esta sesión refieren algunas consultas, por lo cual manifiestan que la curva corresponde a una función cuadrática, además que buscan nombrar las condiciones que deben cumplir una curva, iniciando con el foco. Tal como se puede observar en las siguientes intervenciones (registro fonoaudiológico fechado del 11-03-16, a partir del minuto 51)

Estudiante: Vamos a hablar de la función cuadrática, con un punto de simetría en la coordenada (0,0). (señalan el material proporcionado en la fase de experimentación, en este está representado el plano de referencia, ubicando el centro de masa en el origen).

Mediante la intervención del grupo se observa que el estudiante no identifica el concepto de simetría pues lo refiere a una coordenada.

Estudiante: Existe en un punto en el eje y, que llamaremos el foco, entonces a este punto siempre van a equidistar todos los puntos.

Con la anterior intervención se evidencia que el grupo realizó una consulta en cuanto a las características de las parábolas, luego no es capaz de ponerlas en juego en la curva del problema, ya que lo que hicieron fue aprenderse las definiciones, puesto que las recitan, pero se evidencia que no están interiorizadas ya que a la hora de pedirle al grupo que las establezca en la curva del problema no logra hacerlo.

Investigadora: y el foco ¿cómo lo establezco?, ¿cómo es el foco?, por ejemplo, en esta curva, si es parábola ¿cómo es el foco?

Los estudiantes no logran responder al cuestionamiento por lo que de nuevo recaen en repetir la definición de foco tomada de las consultas realizadas. Todas las intervenciones que se realizan están amarradas a la definición, sin que intervengan datos de la situación problema. Además, no muestran claridad entre la distinción de función cuadrática y parábola puesto que algunas veces para nombrar el objeto lo refieren como ecuación cuadrática y otras veces como parábola.

Finalmente refieren que de llegarse a comprobar que la curva corresponde a una parábola, su ecuación deberá ser de la siguiente forma:

$$f(x) = y^2 + m$$

Sin embargo, al interior del grupo se genera una discusión preguntándose si ¿Es necesario establecer un plano para establecer la ecuación?

Por las intervenciones del grupo se observa que la hipótesis de solución encaminó su trabajo de resolución de la situación problema, sin embrago, las consultas teóricas en cambio de vislumbrar el camino, hicieron que los estudiantes se centran en ellas dándose un abandono de la curva propuesta.

Fase de Exposiciones finales grupo 5 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

Tabla 9 Análisis grupo 5

Categorías de análisis	**Lo encontrado**
Gráfico inicial	 *Ilustración 28* En la imagen 29 se observa al estudiante en la fase de experimentación con la curva halándola del centro de masa.
Análisis argumentativo	
La imagen anterior se establece como gráfico inicial ya que fue el primer acercamiento de los estudiantes a fin de comprender el enunciado de la situación problema. Puesto que afirmaban que no tenían la información suficiente de tipos de curva como para poder establecer una hipótesis de solución del problema.	
Objeto solución	Vértice ubicado en las coordenas (0,0)
Análisis argumentativo	
El grupo establece como punto de partida el vértice en (0,0), quedando la curva dividida en los dos cuadrantes, asignando a la curva que se ubica en el primer cuadrante el valor de 30 cm. Los estudiantes realizan la asignación anterior puesto que, dentro de los datos del enunciado del problema la longitud de la lana correspondía 60cm, lo que los llevó a trazar por el punto	

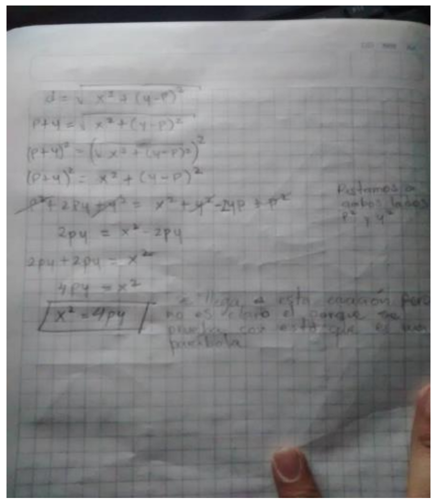
<table>
<tr><td colspan="2">medio entre la distancia de los chinches el eje y, adjudicando la longitud de curva como divida por el eje y.</td></tr>
<tr><td>Conjeturas</td><td>Parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo establece una única conjetura la cual corresponde a que la curva es una parábola, se infiere que esta conjetura se da producto de la retroalimentación con los demás grupos. Allí se observa que a los estudiantes se ven permeados por el proceso de sus demás compañeros.</td></tr>
<tr><td>Algebrización</td><td>Relaciones pitagóricas, posible uso de la marcación de un triángulo rectángulo. Con el fin de observar distancias. Medición mediante un instrumento.


Ilustración 29</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la imagen se observa que los estudiantes al inferir que la curva corresponde a una parábola inmediatamente se dirigen a la deducción de la ecuación general de la parábola, pero sin que la inferencia se dé involucrando los datos de la curva, puesto que simplemente se sigue la deducción de la ecuación general. Destacando el esfuerzo del grupo por comprender el análisis que se da en el trasfondo de la deducción de una ecuación general, sin embargo, no es suficiente sino se realiza el contraste con los datos del problema.</td></tr>
<tr><td>Utilización del plano de referencia.</td><td>No se da como construcción propia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tal como se mencionó en la fase de exploración, el grupo tomó el plano cartesiano como método de abordaje a fin de analizar la curva, sin embargo, en las siguientes fases, fue abandonado completamente, haciendo uso de este, únicamente como soporte en la demostración de la deducción de la ecuación general, y no como recurso propio en la construcción de conceptos o estrategia de resolución del problema plateado.   Por lo que, los estudiantes lo toman como recurso puesto que está puesto dentro de las consultas, y no porque se reconozca su utilidad.</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td></td></tr>
</table>

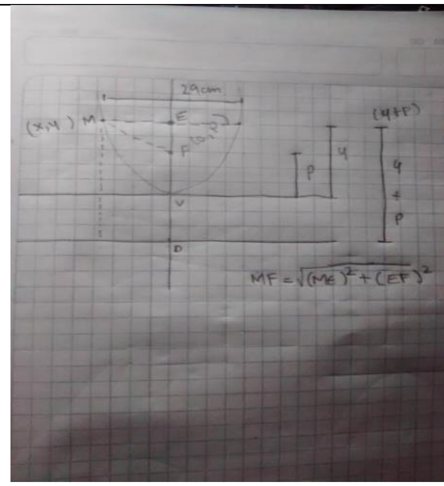
<table>
<tr><td></td><td>

Ilustración 30

En esta imagen se puede observar la deducción de la ecuación general de una parábola con vértice (0,0). Teniendo en cuenta las distancias tanto del foco al vértice como de la directriz al foco.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta imagen se toma como grafico final, ya que en ella los estudiantes realizan y una representación de la curva, estableciendo el vértice y la distancia entre los puntos (chinches) proporcionada dentro de los datos del enunciado, sin embargo, dichos datos no se ponen en juego en la deducción de la expresión asociada, puesto que el grupo se interesa por seguir los pasos de abordaje de deducción de la ecuación general dejando de lado los datos del problema.</td></tr>
<tr><td>Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana.</td><td>No se establece.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">No se establece una cadena de razonamientos consecuentes con la situación problema, es decir, los estudiantes poseen un camino de abordaje en primera instancia teniendo en cuenta el problema, pero dicho camino es abandonado por ir en busca de procesos generales, en los que no se tiene en cuenta la curva del problema, es por esto que no se da un contraste entre los conceptos consultados y la curva, dando como resultado una categoría inexistente, pues para que se diera un cumplimiento en consecuencia con la categoría, era necesario que los estudiantes tomaran las consultas como propias y las pusieran en juego dentro de la curva del problema, a fin de encontrar argumentos válidos que les permitiera establecer el tipo de curva del problema planteado.</td></tr>
</table>

Dentro de la fase de exploración se evidencia un buen desempeño en cuanto a abordaje del problema, pues al interior del grupo se establecen estrategias de resolución tales como el uso del plano cartesiano que les permite iniciar con el establecimiento de conjeturas es por ello que centro de las tareas que se propone el grupo se acuerda consultar referentes que les permita establecer el tipo de curva del problema, sin embargo, en lo que refiere a las siguientes fases, el grupo se encuentra con el obstáculo de situar por encima de los aportes propios los aportes de las consultas, dando como resultado un proceso en el cual se sigue la dinámica de resolución de la ecuación general propuesta por los consultados, abandonando todo tipo de producción propia, ya que se centran los esfuerzos en entender la producción de otros, en este caso de los referentes teóricos utilizados.

Por otro lado, se hace evidente que los estudiantes sienten que han finalizado un problema cuando lograr obtener una expresión algebraica, puesto que se da una suficiencia cuando se obtiene una expresión, así esta no esté en relación explicita con los datos del problema, ni siquiera que haya sido evaluada con las condiciones del problema mismo.

Análisis del proceso seguido por el grupo 6

***Fase de exploración* Grupo 6**

Esta fase el grupo la desarrolla extra clase, ya que los estudiantes no asistieron a la primera sesión, es por ello que no se tienen evidencias ni registros de las primeras conjeturas de los estudiantes.

***Fase intermedia* Grupo 6**

A partir de conversaciones con los demás compañeros del espacio de formación los estudiantes explican loa avances en tono al problema, tal como se puede observar a continuación: (registro fonoaudiológico fechado del 11-03-16, a partir del minuto 1'')

Estudiante: A partir del problema planteado, nosotros investigamos que podría ser una *Función cuadrática.*

Investigadora: Una función cuadrática.

Estudiante: Con lo que habíamos visto en problemas, entonces habíamos visto que podíamos hallar los puntos en la circunferencia unitaria, entonces nos queda un triángulo.

Allí se puede observar que el grupo plantea una hipótesis del tipo de curva, además refieren que el concepto de función cuadrática ha sido trabajado en otros espacios de formación. Por ello se puede establecer que les es familiar el concepto de función cuadrática, apropiándose de ella, intentando establecer mediante la circunferencia unitaria puntos de corte como estrategia de resolución.

Estudiante: A partir de eso, este **x** al cuadrado lo dividimos en una cuadrática, para hallar las raíces.

Investigadora: Ah ¿están hallando las raíces de la…?

Estudiante: No, pero todavía no.

Investigadora: ¿de esta (hace referencia a la curva del problema) o de una curva cualquiera?

Estudiante: No, de una curva cualquiera, y a partir de esto buscamos y se puede a partir de esto, se puede llegar a la forma que buscamos, de la función cuadrática. Y ahí vamos.

Fase de Exposiciones finales grupo 6 (registro fonoaudiológico 19-03-16)

Tabla 10 Análisis grupo 6

<table>
<tr><th>Categorías de análisis</th><th>Lo encontrado</th></tr>
<tr><td>Gráfico inicial</td><td>Desconocido.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El gráfico inicial del grupo se desconoce, ya que como se mencionó en la fase de experimentación, el grupo no se hizo presente por lo que sus conjeturas y avances se dieron extra clase.</td></tr>
<tr><td>Objeto solución</td><td>Partir de las secciones cónicas. Se establece la distancia entre los chinches, por lo que se toma lo puntos de las coordenadas teniendo en cuenta el punto medio de la medida inicial. Tal como se observa en esta imagen:

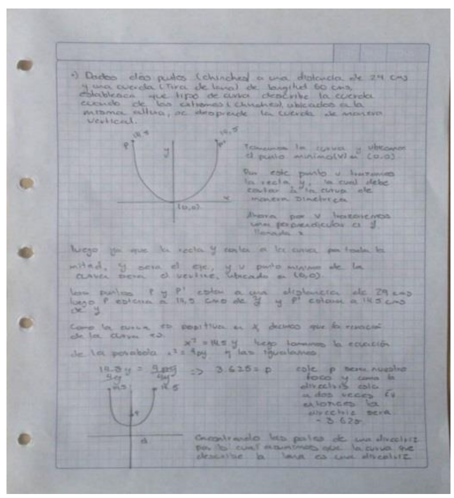
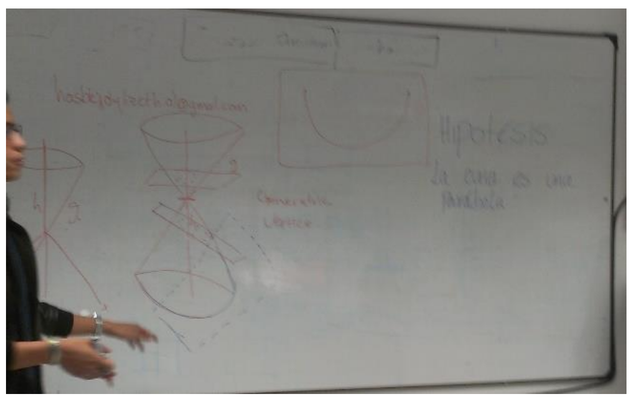



Ilustración 31</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo establece como objeto solución el centro de masa de la curva, ubicándolo en la coordenada (0,0). De allí se parte para representar el plano y la posible simetría, resaltando que el grupo da por hecho la simetría sin que se tengan argumentos sólidos obtenidos ya sea por deducción o por cualquier otro método.</td></tr>
<tr><td>Conjeturas</td><td>Secciones cónicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Análisis argumentativo</td></tr>
<tr><td colspan="2">El grupo establece como conjetura que la curva puede corresponder a una sección cónica, remiten que, mediante observación, netamente visual además de consultas pudieron llegar a dicho planteamiento.</td></tr>
<tr><td>Algebrización</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis argumentativo</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se parte del cono con el fin de hacer visible el proceso para llegar a las cónicas. Estableciendo el plano tridimensional. seguido de la intersección entre el cono y un plano. En donde se obtengan la sección cónica deseada, para el caso específico el grupo argumenta que la curva puede corresponder a una parábola. Llama la atención de este grupo que haya elegido como camino de resolución la parábola y no otra sección cónica, sin que se tengan argumentos válidos, al parecer su elección se debe a la hipótesis de la posible curva por la similitud de representación que se comparte entre la curva del problema y la parábola.</td></tr>
<tr><td>Utilización del plano de referencia.</td><td>El plano de referencia cobra especial sentido para este grupo puesto que se hace evidente la necesidad de establecer un medio de representación que haga evidentes la conjeturas pues retomando la imagen de la categoría “objeto solución” la representación de plano se da como conjetura puesto que no se enuncia su construcción se da como método de argumentación en la demostración de la simetría. Asumiendo que el eje y como eje de simetría.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Análisis argumentativo</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>
Ilustración 32</td></tr>
<tr><th colspan="2">Análisis argumentativo</th></tr>
<tr><td colspan="2">En la imagen se observa la representación del cono, allí los estudiantes buscan representar las diferentes secciones cónicas, preocupándose por comprender su procedencia, es decir en esta fase los estudiantes presentas el proceso de obtención de las secciones cónicas, teniendo en cuenta el proceso necesario para llegar a ellas.
Se toma dicha representación como grafico final ya que su hipótesis y único camino de resolución se basó en estas secciones, sin embrago este proceso se vio opacado por la importancia que el grupo da a la comprensión del proceso de la obtención de las secciones cónicas mediante la intersección del plano con el cono. Sin que se pudiese establecer relación alguna con los datos del problema.</td></tr>
<tr><td>Análisis tomando en cuenta la axiomática euclidiana.</td><td>No se establece.</td></tr>
</table>

Análisis argumentativo
El grupo no logra analizar mediante la axiomática euclidiana ya que no contrastan los conceptos consultados con la curva planteada, puesto que los estudiantes dan prioridad a la comprensión y al seguimiento del proceso que se lleva a cabo en la obtención de las secciones cónicas, sin comprender que las consultas deben ser de apoyo en el proceso de resolución y no el fin como lo estableció este grupo.

Se observa que los estudiantes dan prioridad a definir de manera formal las secciones cónicas, mediante consultas realizadas, buscando así llegar a entender todo el engranage de la construcción de dicha definición, sin contrastarlo porteriormente con la situación planteada, es decir, los estudiantes se conforman con la definición sin ponerla en practica en el problema propuesto. Mas adelante sin ningún fundamento matemático definen la curva como una parábola lo que los lleva de igual manera que en la fase inicial a buscar la definición y caracteristicas de la misma.

Por otro lado, se establecen certezas sin que existan algumentos válidos, tal es el caso de suponer que al trazar una recta por el centro de masa, eso garantiza que dicha recta puede ser nombrada como eje de simetría sin que se entre a obsevar detenidamente los puntos de un aldo y del otro. Lo mismo sucede con la hipótesis que la curva es una parábola sin tener la certeza de que se trate de dicha curva el grupo abandonan el problema por ir en busca de la definiciones formales del objeto, sintiendo como resulta la situación.

Análisis grupal por fase

Para este apartado se presenta un análisis observando los resultados por fases para los 6 grupos, con el fin en comprender el proceso llevado cabo en la resolución del problema por los estudiantes.

Se inicia con la fase de exploración:

Fase de exploración	Análisis argumentativo
	Los grupos dan por sentado que la curva corresponde a una parábola sin tener argumentos matemáticos fuertes. Por otro lado, se pudo evidenciar que existe una dificultad en cuanto a la representación del plano, pues no logran ubicarlo, lo que hace que no puedan establecer coordenadas específicas que les permita establecer posibles caminos de solución. Al igual que se asocia directamente la ubicación en el plano con la expresión analítica. Existe entre los grupos una importancia arraigada en la expresión matemática asociada, centrándose toda estrategia de resolución en la búsqueda de dicha expresión.
Fase intermedia	Análisis argumentativo
	Las consultas teóricas se convirtieron en el protagonista del proceso

	de resolución, abandonando conjeturas y construcciones propias por ir en busca de comprender tanto conceptos como definiciones. Incluso los grupos buscan comprender la deducción de la ecuación general de la parábola con vértice en las coordenadas (0,0), tanto así que se omiten los datos del problema, lo que hace que la ecuación general no se contraste con la curva del problema.
Fase de exposiciones	Análisis argumentativo
	En esta fase los grupos en su mayoría se preocuparon por mostrar características de las parábolas con sus definiciones formales, asimismo centraron su atención en la deducción de la ecuación general de las parábolas. Se evidenció una suficiencia en los estudiantes cuando revelaban una expresión matemática, es decir que asumen el problema resuelto cuando se obtiene una expresión sea cualquiera su procedencia. Por otro lado, los estudiantes abandonaron completamente la curva del problema, siendo las consultas un impedimento para que los estudiantes abordaran el problema de manera satisfactoria, mediante argumentos propios, es por tal motivo que ningún grupo logró alcanzar la categoría de análisis denominada análisis mediante la axiomática euclidiana pues era necesario que los grupos establecieran una cadena de razonamientos a partir de conjeturas propias observadas en la curva, y que dichas conjeturas desembocaran en la certeza del camino o por el contrario llegasen a una contradicción.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Analizar las acciones de los estudiantes es algo que exige cuidado y mucha atención, puesto que no siempre los resultados son los esperados. A continuación se presentan algunas de las conclusiones de la aplicación de la propuesta de enseñanaza.

- La elección del objeto solución se da dentro de la fase de experimentación, sin embrago, no es tenido en cuenta en los siguientes pasos de reolución. De allí se establece que dicho objeto en los grupos no es reconocido como aspecto fundamental, al contrario de la resolución en Descartes, en donde este es parte indispensable como punto de partida y engranaje de las conjeturas porteriores.
- La intuición producto de la forma de la curva (la curva corresponde a una parábola) permitió que los grupos partieran de una hipótesis definida, pero este hecho no se comprobó mediante argumentos matemáticos sino que se dio por sentado, preocupandose por realizar otro tipo de demostraciones diferentes a la veracidad de la hipótesis inicial.
- Los estudiantes no lograron desprenderse del objeto experimental de representación (curva mediante materiales tangibles), pues creen que esta representación debe darles todos los elementos matemáticos involucrados en la curva, lo que sugiere que no logran desprenderse del objeto experimental; lo que no les permite identificar caracteristicas del objeto matemático abstracto.
- Se videncia un profundo afan en lograr comprender deducciones formales, tanto así, que las exposiciones de consultas teóricas toman un lugar protagonico y son presentadas como un logro visible por parte de los grupos en la resolución de la situación problema.
- En la fase nombrada como fase de experimentación, se hace uso del plano como recurso en la conjetura de datos favorables para la resolución de la situación problemas, sin embrago, en las siguientes fases aparece solamente como producto de consultas teóricas, es decir, viene acampañado de la curva general de la parábola y no como construcción propia. Por otro lado, los grupos toman la curva con una ubicación específica en el plano por lo que no le es claro que el objeto puede ubicarse indistintamente en el plano cartesiano desde que se mantengan los atrtibutos que posee.
- En lo que tiene que ver con el grafico final, éste no se da como construcción propia, sino que es tomado de consultas teóricas, puesto que los grupos no se proponen perseguir un objetivo claro en donde se identifique el tipo de curva por medio de cojeturas, algebrización y uso del plano de referencia, no se interesan por obtener un gráfico propio sino que lo toman de fuentes teóricas, allíde allí se extrae se toma un grafico general de la parábola con vertice en las coordenadas (0,0).

- Dentro de las principales características del método argumentativo en Descartes se encontró en la exposición del proceso de solución el establecimiento y análisis de conjeturas, nombramiento de todos los objetos matemáticos que intervienen en el problema, tanto los conocidos como los desconocidos, establecimiento de igualdad entre los objetos lo que permite la deducción de la ecuación asociada a la curva generada por la resolución y finalmente se representa la curva geométricamente.
- Mediante la aplicación de la propuesta de enseñanza se observó que los estudiantes priorizan en representar un objeto matemático mediante su expresión asociada, es decir, los estudiantes antes de evidenciar una representación geométrica propia, hace evidente la búsqueda de la expresión matemática asociada, aunque no se tenga la certeza del tipo de curva al que se enfrentan, centrando sus esfuerzos en la deducción de una ecuación general que ni da cuenta de la curva ni hace referencia a un tipo especial de parábola que corresponde a la hipótesis inicial del total de los grupos.

- En el desarrollo de la aplicación de la propuesta se encontró que los estudiantes dan por sentado hechos no comprobados, siendo estos producto netamente de la observación y de la comparación con objetos matemáticos conocidos, tal es el caso de la catenaria (curva del problema propuesto) la cual fue asumida por los estudiantes como parábola. Sin que se establecieran argumentos matemáticos de fondo que permitiran establecer relaciones entre las curvas. Ademas de este caso se encontró el que corresponde a la simetría puesto que para los estudiantes el trazar una recta perpendicular al eje x por el vértice, hace que esta recta para los estudiantes se denote como eje de simetría, hecho que no se comprueba mediante ningún método. En la fase inicial del problema Descartes realiza conjeturas a partir de la observación, pero no se queda allí, sino que esto mas adelante le servirá de apoyo en la cadena de razonamientos, logrando establecer su veracidad o por el contrario llegar a una contradiccion, pero de las dos formas logra llegar a haciertos en cuando de argumentos matemáticos se trata. Tal proceso no se llevó a cabo en los grupos de resolución sino que se evidencia que se quedaron en la fase inicial sin lograr transpasar a una demostración formal de la curva, a diferencia de Descartes para quien era necesario establecer la veracidad de cada una de las afirmaciones lanzadas.

- Los estudiantes no argumentan como lo hace Descartes, puesto que no atraviesan por los pasos que atravesó éste personaje en la resolución de problemas, ya que establecen prioridad en la comprensión de construcciones externas producto de consultas teóricas. Se evidencia que los estudiantes sostienen la creencia que las consultas teóricas son lo único apreciable cuando se trata de mostrar resultados, y que las construcciones propias son solo abordajes simples validos solamente en la fase inicial de la resolución.

- La aplicación de la prueba no dio los resultados esperados ya que no se contaba con que los estudiantes se enfrascaran en las consultas lo que les impidió avanzar en cuanto a las categorías propuestas. Es decir, el grupo centró su busqueda en comprender las construcciones teóricas externas y no en las propias, lo que se vio refelado en un proceso propio de resolución inexistente, en donde se parte de una conjetura producto de la observación pero que más adelante se ve opacada por procesos externos.

Bibliografía

Arboleda, L. C. (2007). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas . *Asocolme* (pág. 10). Bogotá : Asocolme .

Dennis, D. (1997). *René Descartes Curve-Drawing Devices: Experiment in the relations between mechanical motion and symbolic language.* Mathematics Magazine.

Descartes, R. (1637/1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* (Guillermo Quintás; Víctor Navarro traducción) Barcelona: Circulo de lectores.

FERNÁNDEZ S., O., CÁRDENAS A., P. P., & MESA, F. (2006). RENE DESCARTES, UN NUEVO MÉTODO Y UNA NUEVA CIENCIA. *Scientia Et Technica, vol. XII, núm. 32*, 401-406.

Fernández, C. (2011). LA INVESTIGACIÓN: UN VALOR AGREGADO AL PROFESIONAL EN EDUCACION. *Lumen* , 8.

Gil, S. (2011). *Experimentos de Física.* Buenos Aires: Prentince.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción. En J. Carrillo, *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las* (págs. 197-227). Huelva: Universidad de Huelva.

Gonzáles, P. M. (2003). *Lo orígenes de la Geometría Analítica .* Orotava: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Gutiérrez, F. R. (2014). *La Elipse De Apolonio Vista En El Espacio Geogebriano.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ivorra, C. (2 de 9 de 2010). Obtenido de uv: http://www.uv.es/ivorra

MADDY, P. (2003). *REALISM IN MATHEMATIC .* New York: Oxford University .

Mancoso, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century [La filosofia de las matemáticas y la práctica en el siglo XVII].* New York: Oxford.

Paty, M. (1997). MATHESIS UNIVERSALIS E INTELIGIBILIDAD EN DESCARTES . *Memorias del Seminario en Conmemoración de los 400 Años del Nacimiento de René Descartes.* (págs. 135-170). Bogotá : Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales .

Quintero, L. F. (2015). *EL MÉTODO QUE SOLUCIONA PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PROPUESTO POR DESCARTES EN LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO.* Bogotá: Universidad Distrital Franscisco José de Caldas.

Rubio, B. M. (2008). *LAS MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS .* Distrito Federal : CCH Sur.

Rubio, B. M. (04 de 03 de 2013). *Funes.uniandes.* Obtenido de GonzálezLasmatemáticasCiaem2013.pdf: http://funes.uniandes.edu.co/4574/2/Gonz%C3%A1lezLasmatem%C3%A1ticasCiaem2013.pdf

Seguí, V. M. (s.f.). *Álgebra geométricas: notas históricas .* Zaragoza : Universidad de Zaragoza .

Shea, W. R. (1993). *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes .* Madrid : Alianza Editorial .

Socas, M. M. (s.f.). PERSPECTIVAS DE INESTIGACIÓN EN EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO. *Actas del III SEIM* (págs. 266-268). Universidad de La Laguna .

Universidad Nacional Autónoma de Mexico. (2011). Lugar geométrico . *Facultad de Ingenieria* (pág. 5). Mexico D.F : coordinación de matemáticas.

Valles, M. S. (1999). *TÉCNICAS CUALITATIVAS DE INVESTIGACIÓN SOCIAL. REFLEXIÓN METODOLÓGICA Y PRÁCTICA PROFESIONAL .* Madrid : Síntesis .

Vega, N., Rodriguez, S., & Hernandez, A. (2016). *Demostración de la curva.* Bogotá.

Villar, M. C. (2013). La adquisición y el desarrollo lingüístico de los hablantes de herencia de español: Un estudio de caso basado en la investigación-acción en el aula. *Revista Nebrija: de linguistica aplicada a la enseñanza de lenguas*, 12.