CONSTITUCIÓN DEL OBJETO FRACTAL EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DEL CURSO TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

BRIANNA LORENA DIAZ BARRETO
LICETH ANDREA CASALLAS HERNANDEZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR LEBEM
BOGOTÁ D.C
AÑO 2016-I

CONSTITUCIÓN DEL OBJETO FRACTAL EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DEL CURSO TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

BRIANNA LORENA DIAZ BARRETO
LICETH ANDREA CASALLAS HERNANDEZ

MONOGRAFÍA PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADAS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR LEBEM
BOGOTÁ D.C
2016-I

Dedico este primer logro a mi hermosa madre quien con su esfuerzo, apoyo y dedicación me ha brindado más de lo que he podido desear. Mil besos y abrazos.

Liceth Casallas H.

Dedico de todo corazón este trabajo a mi madre por ser a lo largo de toda mi vida madre y padre, brindándome un amor incondicional y siempre apoyarme para salir adelante.

Brianna Díaz B.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos principalmente a Rosalba Hernandez y Maribel Díaz, nuestras madres, quienes a lo largo de nuestras vidas han cumplido el papel de madre y padre, por su apoyo al darnos siempre palabras de aliento para culminar esta primera etapa de nuestras vidas, también por ser cómplices y patrocinadoras de nuestras locuras.

A nuestro director de grado Jaime Romero, quien nos abrió las puertas de su casa, dedicó tiempo y esfuerzo, convirtiéndose en nuestro guía y en un ejemplo a seguir en cuanto a la dedicación, profesionalismo en la labor docente, en especial en hacer las cosas con gran pasión. Esperamos que los tintos generadores de nuestras reflexiones de la vida y de la educación a lo largo de estos años de trabajo, no sean los últimos.

A nuestros compañeros de la carrera por compartir este largo camino, en especial a Aura y Claudia con quienes compartimos absolutamente todas nuestras experiencias, convirtiéndonos en grandes amigas y compañeras de estudio.

Finalmente a toda la comunidad LEBEM, a todos los profesores que nos formaron a lo largo de este proceso, brindándonos sus conocimientos y sus consejos, además de alentarnos para ser docentes innovadoras y transformadoras en la educación. A los estudiantes del curso transición aritmética álgebra 2015-1, por darnos la oportunidad de desarrollar esta investigación, por su colaboración y participación, esperamos volverlos a ver en otro momento.

CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE CUADROS

RESUMEN

El presente trabajo pretende describir los resultados de investigación allegados por un par de estudiantes para profesoras de matemáticas, sobre la constitución del objeto fractal llevada a cabo por un grupo de estudiantes. La propuesta de aprendizaje se desarrolló en el espacio de formación transición aritmética álgebra del proyecto curricular LEBEM de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en un ambiente de aprendizaje diseñado teniendo en cuenta la fenomenología didáctica propia de la corriente didáctica de educación matemática realista. Los resultados son obtenidos mediante el uso de la metodología de investigación experimento de enseñanza.

Para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se realizó el diseño de cuatro situaciones desarrolladas con los estudiantes del curso transición aritmética álgebra durante el periodo académico 2015-I; dicho espacio de formación cuenta con una intensidad horaria de 6 horas semanales; la propuesta es aplicada durante 9 semanas y las cuatro situaciones diseñadas se desarrollaron consecutivamente. Los datos se generan a partir de la información recolectada desde los informes entregados por los estudiantes y a partir de algunas observaciones de clase realizadas por las investigadoras. El análisis de los datos es realizado teniendo en cuenta las características del objeto fractal a constituir paulatinamente en cada situación; en relación con la manera en que emerge, la atención se focaliza en el uso y aplicabilidad que los estudiantes hacen del objeto fractal en cada situación. La finalidad de este análisis es generar elementos para describir el proceso de constitución del objeto fractal, así como resaltar las reflexiones generadas alrededor del ambiente de aprendizaje conformado por un grupo de estudiantes para profesores.

PALABRAS CLAVE: Experimento de enseñanza, fenomenología didáctica, objeto fractal, objetos mentales, educación matemática realista, matematización.

ABSTRACT

This paper aims to describe the results of research associates for a couple of students to teachers of mathematics on the establishment of the fractal object carried out by a group of students. The proposal was developed in learning training space algebra arithmetic transition, curricular project LEBEM, of the Francisco José de Caldas District University, in a learning environment designed taking into account the own didactic phenomenology of current teaching realistic mathematics education. The results are obtained by using research methodology teaching experiment.

KEYWORDS: Experiment teaching, didactic phenomenology, fractal object, mental objects, realistic mathematics education, mathematisation.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se describe el proceso de constitución del objeto fractal llevado a cabo por un grupo de estudiantes del curso transición aritmética álgebra del proyecto curricular LEBEM, esta descripción se realiza a partir de identificar la manera en que se constituyeron los cuatro aspectos del objeto fractal considerados para plantear y desarrollar tanto la propuesta de aprendizaje como el ambiente de aprendizaje en sí; estos son: convergencia, iteración, densidad y formas autocontenidas.

En el primer apartado del presente escrito se expone la pertinencia de la propuesta de investigación y su desarrollo en el curso transición aritmética álgebra, así como el porqué de la elección del uso de la fenomenología didáctica para su orientación, en relación con el planteamiento de una posible fenomenología del objeto fractal generada dentro de un experimento de enseñanza. En el segundo apartado se presenta el problema de investigación abordado para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje. En el tercer apartado se encuentran los objetivos propuestos por las investigadoras para poder desarrollar el trabajo de investigación. En el cuarto apartado se describe cómo la fenomenología del objeto fractal es concebida dentro de la corriente Didáctica llamada Educación Matemática Realista y cómo ésta se complementa con el método de investigación experimento de enseñanza; además se realiza la descripción de las características del objeto fractal así como la identificación de las características del objeto que son planteadas en el planteamiento de una posible fenomenología del objeto fractal.

Posteriormente, en el quinto apartado se describe los resultados obtenidos con la aplicación de cada una de las situaciones, a partir de la descripción detallada del proceso de matematización generado. Por último, en el sexto apartado se realizan las conclusiones allegadas a la propuesta de aprendizaje, en la que se sintetiza el proceso de constitución del objeto fractal llevado a cabo por los estudiantes así como la indicación de algunas recomendaciones a tener en cuenta para una nueva realización de la propuesta.

1. JUSTIFICACIÓN

La intención de realizar esta investigación surge a raíz de concordar con la idea de las nuevas corrientes didácticas enfocadas en el establecimiento de un cambio en los métodos de aprendizaje y los métodos de enseñanza de la matemática, pues como investigadoras no estamos de acuerdo con el enfoque mecanicista que se le ha dado a la enseñanza de las matemáticas modernas, por este motivo se emplea la fenomenología didáctica propia de la corriente didáctica de educación matemática realista en el desarrollo de la propuesta de aprendizaje. Así pues, la fenomenología didáctica aporta elementos teóricos y prácticos en la constitución de un experimento de enseñanza consistente con un enfoque epistemológico de las matemáticas en tanto actividad humana, posible de ser aprendida dentro de un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Se usa como metodología de investigación los experimentos de enseñanza, puesto que permiten al investigador experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamientos de sus estudiantes, en esta metodología se espera que *“el alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones.”* (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011).

Con el uso del experimento de enseñanza como metodología de investigación y la fenomenología didáctica como método involucrado en la enseñanza y el aprendizaje; es decir, con este método el profesor-investigador genera su ruta de enseñanza desplegada en una propuesta de aprendizaje. Con la propuesta se pretende brindar a la comunidad educativa, especialmente a la comunidad de educadores en matemáticas, la descripción de procesos de matematización empleados por un grupo de estudiantes en la constitución del objeto fractal así como el establecimiento de una posible fenomenología del mismo. Para cumplir con este último, se acogen algunas características de la geometría fractal como autosemejanza y recursividad que permiten un acercamiento intuitivo a ésta.

Los resultados obtenidos en esta investigación muestran aspectos asociados a la resignificación de objetos de la matemática escolar, relacionados con la resignificación de objetos mentales como autosemejanza e iteración; muestran también que estas resignificaciones ocurrieron mediante el vínculo entre algunas ideas sobre la enseñanza de las matemáticas, según la perspectiva de la educación matemática realista (EMR), con el diseño de situaciones cercanas al contexto de los estudiantes de tal manera que le sean razonables, imaginables y posibles; así éstos puedan resignificar la matemática como actividad organizadora de distintas esferas de nuestro entorno social y natural. (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

El uso de la fenomenología didáctica, propia de la EMR, quiere enfatizar en la importancia de generar diferentes interacciones entre los participantes de los actos de enseñanza y de aprendizaje; es decir, el aprendizaje de determinado objeto matemático, en aula, requiere tanto de la interacción entre los estudiantes como de la interacción de éstos con el profesor. En la EMR el papel principal del profesor es el de orientador y mediador de las producciones matemáticas que los estudiantes están poniendo en juego; de tal manera se potencia el proceso de aprendizaje de los estudiantes y las interaccciones entre ellos se hacen más significativas.

La investigación realizada aporta en el planteamiento de una posible fenomenología del objeto fractal poniéndola al servicio de la constitución de distintos objetos mentales. La fenomenología aquí expuesta puede ser graduada y enriquecida de acuerdo al nivel escolar en el que se pretenda disponer; los objetos mentales pretendidos así como su estructura y formalidad son posibles en tanto organizadores de fenómenos involucrables en situaciones apropiadas para desarrollar currículos de matemáticas en la educación básica, media, secundaria y terciaria. En relación con la propuesta de aprendizaje, aporta en la identificación de características del diseño de situaciones bajo el enfoque de la EMR, ligadas al contexto del estudiante, cercanas a su realidad, entendiendo la realidad no como compuesta sólo de situaciones cotidianas, sino, también, de situaciones de las que los estudiantes pueden hacer sentido aunque no las enfrenten diariamente.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las matemáticas a lo largo de la historia han sido cambiantes, con el paso del tiempo aparecen nuevas aplicaciones, conceptos, objetos etc, signos de su constante evolución; con la cantidad de contenido matemático existente más el que irá surgiendo, es natural que tanto en didactas como educadores matemáticos surja la preocupación sobre qué contenidos deberían estar conformando las matemáticas escolares y, más aún, cómo se les debe disponer en el contexto escolar. Aunque dentro de algunas corrientes de educación matemática se ha planteado que metodologías como la resolución de problemas con enfoque socio constructivista, permiten darle al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas un aire más dinámico, más flexible y más ligado a la práctica de los matemáticos, queda todavía por resolver la cuestión delicada de los contenidos.

La EMR surge durante los años 70, de origen conlleva la intención de cambiar el enfoque mecanicista de la enseñanza de las matemáticas. Esta teoría tiene como uno de sus principios que las matemáticas son una actividad humana, pues el hombre por naturaleza explora, observa, crea, realiza acciones que lo llevan eventualmente a procesos de generalización como fruto de su aprendizaje, lo que le permite organizar su realidad y las matemáticas mismas. Hans Freudenthal, su autor inicial, denomina "matematización" a esta manera de organizar la realidad; es decir, es una modelización de la realidad. En palabras de algunos de sus discípulos "*la matemática no sólo se brinda para modelizar otras realidades sino que en sí misma encierra regularidades. Ella se construye con base en la generalización de patrones*." (Bressan & Gallego, 2010).

Así pues, matematizar implica generalizar patrones y entonces, hay que identificarlos, pero, la *"[…] identificación de patrones requiere el reconocimiento de semejanzas y diferencias y la detección de los rasgos fundamentales que conforman una estructura de aquellos no esenciales a la misma*" (Bressan &

Gallego, 2010), el objeto fractal por sus características ligadas a procesos dinámicos y recursivos tanto visuales como algebraicos se presta a su matematización a partir de la generalización de los patrones que dan cuenta de su estructura –conectada a la similaridad, la recursión y la convergencia– y la generación de procesos dinámicos expresables mediante software dinámico. Dicho esto, hay que resaltar que a su través se pueden abordar algunas de las cuestiones didácticas antes mencionadas: 1) puede ser empleado para potenciar el aprendizaje de diversos objetos matemáticos logrando presentar posibilidades para un currículo de matemáticas escolares coherente, altamente complejo y novedoso que sin embargo no renuncia al tratamiento de la proporción y la semejanza tan útiles en la elaboración de estrategias de linealización y en el tratamiento de formas y características del continuo; 2) permite relacionar orgánicamente mediante matematización objetos y modos de las matemáticas griegas (geometría sintética), matemáticas europeas del siglo XVII (geometría analítica) y matemáticas del siglo XX (geometría fractal).

Esta investigación presenta entonces elementos de diseño, gestión y evaluación de una secuencia didáctica que se instala en la opción de permear el currículo de las matemáticas escolares al respecto de objetos y de relaciones entre los actores involucrados en el acto de educativo. Es decir, hace parte del esfuerzo de investigadores y profesores por transformar las matemáticas de la escuela presentando alternativas documentadas, como las dispuestas en los siguientes trabajos:

- "*Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales"* (Castro, Díaz, & Palacios, 2011).
- *"El uso de fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software cabrí "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-variacional""* (Puerto, 2013).

- *“FRACTAL: formas de reconocer el mundo a través de cálculos matemáticos totalmente nuevos y atractivos, la aventura del saber”* (Holpf", 2013).

En tanto docentes en formación, tomando en cuenta características del objeto fractal y de la matematización en EMR, diseñamos una propuesta de aprendizaje centrada en una fenomenología del objeto fractal, empezando por promover una experimentación en contextos geométricos que requiere del uso de objetos matemáticos que poseen características de fractal. Dicha propuesta está dirigida a futuros profesores de matemáticas.

Con el fin de que el aprendizaje de las matemáticas logre responder a la creciente necesidad de renovar y hacer trascendente el currículo, queremos aportar en el desarrollo de una propuesta de aprendizaje con estudiantes para profesor que les permita resignificar sus conocimientos matemáticos, pues de acuerdo con (Llinares, 2008) *“En los programas de formación de profesores, plantearse qué significa aprender a enseñar matemáticas desde la perspectiva de «aprender una práctica» implica entender la noción de práctica como: realizar unas tareas (sistema de actividades) para lograr un fin, hacer uso de unos instrumentos, y justificar su uso.”* Que además les brinda una forma de aprendizaje del objeto fractal que les serviría de ejemplo a imitar en su quehacer como futuros docentes.

Lograr desarrollar una propuesta de aprendizaje en la que el objeto fractal es aprendido a través de integrar características que lo conforman con una propuesta didáctica que acoge la matematización según Freudenthal y la EMR, es una opción que permite el pasaje de un objeto de la matemática a un espacio de formación de profesores, coherente con un currículo orientado por principios que incluyen los de unas matemáticas para todos (MESCUD, 2002) presentes también en la EMR (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004) y (Bressan & Gallego, 2010).

En fin, el desarrollo de dicha propuesta busca ayudar a formar profesores de matemáticas con vivencias de una práctica didáctica en y desda la modelación/matematización. Provocando que la incorporen en sus futuras prácticas profesionales y aborden problemas didácticos como: reconstrucción de maneras de argumentar, constitución y reconstitución de significados, accesibilidad de los conocimientos matemáticos, entre otros.

Se consideró pertinente trabajar en el curso de transición aritmética álgebra, puesto que es un curso en el que se abordan varios objetos matemáticos que habitan de una manera natural en el desarrollo de la fenomenología del objeto fractal, permitiendo que se pueda ver el comportamiento y evolución de estos objetos, en donde principalmente va a destacar el objeto proporcionalidad, al centrar su trabajo en la multiplicación y la estructura multiplicativa, objetos como cambio de unidad y funciones lineales dan paso a características de los fractales como la iteración, formas autocontenidas, densidad y convergencia, al estar presentes en los cambios de unidad, por ejemplo, las series geométricas que se relacionan directamente con las iteraciones, proporción continua y expresiones algebraicas que generan la autocontención. Lo anterior lleva a que a partir del reconocimiento de la formación de profesores como una práctica, la matemática para todos como un quehacer de la escuela, la conveniencia de darle un nuevo aire al currículo se plantee la siguiente pregunta:

¿Cómo es la constitución del objeto mental *fractal* desde los procesos de matematización en un grupo de estudiantes del espacio de formación transición aritmética álgebra a partir de un diseño que busca fomentar el aprendizaje de una práctica de enseñanza de la matemática desde una perspectiva realista?

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

- Describir el proceso de constitución del objeto fractal en un grupo de estudiantes para profesores del curso transición aritmética álgebra del proyecto curricular LEBEM, generado a partir de la constitución de aspectos como convergencia, iteración, densidad y formas autocontenidas.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar una serie de situaciones imaginables dentro del contexto de los estudiantes para profesor que les permitan constituir el objeto fractal.
- Describir los procesos de matematización generados por los estudiantes para profesores en la solución de cada una de las situaciones y su matematización progresiva.
- Identificar aspectos de la matematización progresiva llevada a cabo por los estudiantes para profesores en el desarrollo de la propuesta de aprendizaje.
- Describir los diferentes modelos, razonamientos, estrategias que los estudiantes para profesores desarrollaron en el proceso de solución de las situaciones propuestas.
- Reflexionar sobre aspectos relacionados con la formación de docentes que emergen en el desarrollo de la propuesta de aprendizaje.

4. MARCO TEÓRICO- METODOLÓGICO

En este apartado se describen los aspectos teóricos y metodológicos en los que se basa el desarrollo de la propuesta de aprendizaje, a continuación se describen aspectos sobre el diseño de la propuesta a partir de la metodología de investigación experimento de enseñanza, la gestión de la propuesta con los estudiantes, el diseño de las situaciones, cómo es entendida y aplicada la fenomenología didáctica empleada en la educación matemática realista (EMR)[1] dentro de la propuesta de aprendizaje, así como la constitución de la fenomenología del objeto fractal que se desarrolla.

La presente propuesta de aprendizaje se desarrolla bajo la metodología de investigación experimento de enseñanza cuyo propósito es generar un ambiente de aprendizaje orientado por la fenomenología didáctica, empleada por la EMR cuyo fundador es Hans Freudenthal, quien de acuerdo con (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004) se opone al enfoque de la matemática moderna así como al enfoque mecanicista de la matemática, Freudenthal plantea que la enseñanza de la matemática debe darse conectada a la realidad del alumno, reconociendo que es más importante hacer matemáticas que aprender un concepto o producto terminado, y por lo tanto se debe pensar en la matemática como una actividad humana.

En relación con lo anterior Freudenthal afirma que la matemática surge entonces como matematización[2] (organización) de la realidad, y que se aprenden mejor haciéndolas; es por ello que en la presente propuesta de aprendizaje se plantean situaciones que requieren ser matematizadas (organizadas) por los estudiantes a

[1] A lo largo de este escrito se emplearán las siglas EMR para hacer referencia a la Educación Matemática Realista.

[2] Freudenthal usa la palabra "matematizar" en un sentido amplio: es una forma de organización que también incorpora la disciplina matemática. Al elegir el término "organizar", Freudenthal también indica que, para él, matematizar no es estrictamente una traslación a un sistema estructurado de símbolos. (Gravemeijer & Teruel, 2000). Traducido por Bressan y otros.

partir de la constitución[3] de los objetos mentales involucrables en cada una de ellas.

Vale la pena decir que en coherencia con la teoría, el diseño de las situaciones se enfoca en permitir la constitución del objeto fractal conectada a la realidad de los estudiantes, en este caso estudiantes para profesor de tal manera que sean realizables, imaginables o razonables para ellos. Hay que aclarar que en el término "educación matemática realística*" […]* <u>*realística debe interpretarse como referida a la experiencia real, no a la vida real de todos los días.*</u> (Gravemeijer & Teruel, 2000).

4.1 Aspectos conceptuales de la metodología de investigación en relación con la propuesta de aprendizaje

- 4.1.1 Metodología de investigación: para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se ha elegido como metodología de investigación el experimento de enseñanza que tiene como propósito generar un ambiente de aprendizaje. El experimento de enseñanza "*consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores"* (Steffe y Thompson, 2000) citado en (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011) y se caracteriza por la no distinción entre docente e investigador, ya que *"La característica principal de estos estudios es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos"* (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000) citado por (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011).

En el caso de esta propuesta de aprendizaje los participantes del experimento de enseñanza son dos estudiantes para profesoras de matemáticas y el docente

[3] En la EMR una de las premisas de gran importancia es que los conceptos, objetos matemáticos no son adquiridos, son constituidos o reconstituidos según la experiencia que se tenga en su uso

titular del espacio de formación en el que es aplicada –director de la presente propuesta-, quienes cumplen el papel de investigadoras observadoras-participantes y docente investigador respectivamente, así como los (20) estudiantes del espacio de formación. El experimento de enseñanza diseñado consiste en el desarrollo de cuatro episodios de enseñanza, cada uno orientado desde el enfoque didáctico de fenomenología didáctica, que buscan generar un ambiente de aprendizaje cuya referencia son situaciones de la *vida real*, cercanas al contexto de los estudiantes.

El experimento de enseñanza y la fenomenología didáctica cumplen funciones específicas en esta propuesta de aprendizaje. La primera es empleada como metodología de investigación, permitiendo que se genere un ambiente de aprendizaje así como la orientación sobre el papel y la actividad de las investigadoras; la segunda es empleada como la metodología de enseñanza, a partir de la cual se orienta el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, lo que permite que la una se constituya como complemento de la otra, puesto que en ambas se espera que tanto el estudiante como los investigadores construyan conocimiento a partir de situaciones realizables y reales en el contexto de los estudiantes.

- 4.1.2 Fenomenología didáctica: para poder dar una definición clara de lo que es la fenomenología didáctica hay que partir de la definición dada por Freudenthal quien a partir de definir “fenomenología” logra enmarcar de manera clara lo que es entonces fenomenología didáctica, de acuerdo con la traducción realizada por Puig (2001) de Freudenthal (1983) la definición de fenomenología es:

  “La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología,

describir este noumenon[4] *en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos".* (Puig, 2001)

Es decir, los conceptos matemáticos van organizando estructuras más complejas que sean afines a éstos, por ejemplo los números organizan el fenómeno de la cantidad, y a su vez la cantidad sirve como organizadora de las estructuras multiplicativas; cada vez se va haciendo una abstracción más compleja del concepto, hasta llevarlo a las más complejas estructuras matemáticas, esto haría parte de la fenomenología de determinado concepto (Freudenthal, 1983). Cuando se decide prestar atención, sobre las formas en las que se dan estas relaciones entre conceptos matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se hablaría de una fenomenología didáctica de determinado concepto o estructura matemática que se podrían llamar fenómenos. Para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se identifican una posible fenomenología del objeto fractal, a partir de la descripción de los noumenon y phainomena que lo organizan, esta fenomenología será explicada con detalle en la sección de este apartado llamada **fenomenología del objeto fractal**.

En esta fenomenología la palabra concepto de acuerdo con Freudenthal (1983) traducido por Puig (2001) tiene un doble significado:

> *"La palabra alemana para concepto es Begriff, que, etimológicamente, es una traducción del latín "conceptus" y también de "comprehensio", por lo que puede significar tanto "concepto" como "comprensión".* (Puig, 2001)

[4] Freudenthal define los términos noumenon y phainomenon, en cuanto al primero se refiere a que son los objetos de pensamiento (objetos matemáticos) y el segundo como el trabajo que se puede hacer con los objetos matemáticos, Freudenthal (1893)

De tal modo por ejemplo como lo expresa Freudenthal, se habla de concepto de número y comprensión de número, concepto de espacio e intuición geométrica, para el caso del concepto fractal se hablaría de concepto de fractal y comprensión fractal, así como de la comprensión y concepto de todos los noumenos que se presenten en la constitución del objeto fractal. Freudenthal expone que ese doble sentido de "concepto" siempre ha estado presente, sin embargo ha predominado a lo largo del tiempo hablar de la adquisición de conceptos, por lo cual en esta teoría se busca lograr generar comprensión de conceptos, mediante la matematización (organización) de fenómenos, entonces no se habla de adquisición sino de constitución de objetos mentales de tal forma que se debe *empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización* (Puig, 2001).

- 4.1.3 Fenomenología del objeto fractal: en esta sección se describe una posible fenomenología del objeto fractal organizada mediante cuatro aspectos matemáticos, estos son las formas autocontenidas, la iteración, la convergencia y la densidad, los fenómenos en los cuales se centra la matematización son la semejanza, a través de la constitución de los objetos mentales como correspondencia y proporcionalidad, la iteración mediante la generación de un proceso geométrico que permite generar formas autocontenidas en diferente escala, y la razón áurea que permite el análisis de contextos geométricos en los cuales se encuentra presente.

Para generar una posible fenomenología del objeto fractal y plantear los noumenon que lo organizan, es necesario partir de definir qué es un fractal y cuáles son sus características.

El término fractal es empleado por Benoit Mandelbrot al describir su geometría, la geometría fractal, esta geometría se caracteriza por hacer referencia a problemas de la naturaleza y la elección de herramientas matemáticas. Mandelbrot en su teoría no da una definición formal de lo que se podría denominar fractal, en su libro “los objetos fractales: forma, azar y dimensión”, realiza una especie de glosario se define fractal como:

> ***“Fractal. adj*** *sentido intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintos cuyas escalas son muy variados y cubren una gama muy amplia.”* (Mandelbrot B. , 1993)

Dentro del desarrollo que hace Mandelbrot de su teoría no existe distinción entre conjunto y objeto fractal, para él *“la palabra fractal no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objeto naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados”.* (Mandelbrot B. , 1993). Hay que aclarar que para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje el referirse a *objeto fractal* se está haciendo uso de la terminología empleada por la fenomenología didáctica en la EMR sin que pierda el sentido que Mandelbrot le otorga, puesto que en el proceso de constitución del objeto fractal por parte de los estudiantes mediante la organización (matematización) de las situaciones planteadas, se busca que acudiendo al principio de realidad logren interpretar objeto fractal como: *objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal.* (Mandelbrot B. , 1993).

En los diferentes desarrollos de la geometría fractal se ha logrado distinguir que los objetos fractales presentan las siguientes características principales:

- Autosemejanza: ésta hace referencia a que el fractal como un todo está formado por varias copias de sí mismo, sólo que reducidas y puestas en diferente posición; o, dicho de otra manera: el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala. (Sabogal & Arenas, 2011), es decir, sin importar la escala a la que se mire presenta la misma forma que el todo.

Los fractales trabajados en el desarrollo de la propuesta de aprendizaje cumplen con ser fractales escalantes, es decir, invariantes por cambio de escala, pues el término escalante es definido por (Mandelbrot B. , 1993) como aquello referido a "*una figura geométrica o un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que estén a diferentes escala y pueden estar ligeramente deformados".* Estos fractales son construidos mediante la transformación de semejanza lo que los hace ser autosemejantes pues de acuerdo con (Mandelbrot, 1983) *un fractal que es invariante por la transformación geométrica de semejanza, en el sentido ordinario, se dice autosemejante.*

Dado que la construcción de los fractales es mediante la transformación de semejanza, la semejanza es uno de los principales objetos mentales que permiten constituir el objeto fractal, que a su vez requiere de objetos mentales para ser constituida, como lo son la correspondencia y la proporcionalidad.

Estos dos objetos mentales aparecen en cada una de las situaciones propuestas, la correspondencia surge a partir de poder determinar las figuras que son semejantes entre sí, para esto se requiere poder determinar a qué parte constitutiva de una figura le corresponde una parte constitutiva de otra, al encontrarse relacionadas entre sí, como la relación que se presenta es de semejanza, se debe poder establecer una *correspondencia idéntica* entre las partes que conforman la figura sobre la que se trabaja.

En cuanto a la proporcionalidad, ésta se presenta al establecer razones a diferente nivel (escala de la figura) entre las partes constitutivas de la figura dada y las generadas mediante el proceso de construcción que logren establecer los estudiantes, además hay que resaltar que en todas las figuras dadas en las cuatro situaciones se mantiene una constante de proporcionalidad el valor de la constante es: ϕ, por lo cual, en cuanto al objeto proporcionalidad la razón áurea cumple un papel fundamental, al trabajarse en las tres primeras situaciones con triángulos áureos cuya razón entre el lado menor y uno de los lados mayores es la razón áurea, así como en la situación 4 al encontrarse los segmentos (ramas) del árbol en esa misma razón.

- Iteración: Es la repetición de "algo" una cantidad "infinita" de veces. Entonces, los fractales se generan a través de iteraciones de un patrón geométrico establecido como fijo un número infinito de veces. (Sabogal & Arenas, 2011).

La iteración está inmersa en un proceso de recursividad en cual un patrón generador relaciona cada elemento, con alguno de los elementos que lo preceden, es decir, se identifica el algoritmo bien sea geométrico o matemático base, a partir de este se construyen o generan nuevos elementos que están ligados al algoritmo base. En los procesos de constitución de este objeto, se encuentra otros objetos mentales como los procesos de unitización, y normación, que están relacionados con procesos multiplicativos en contextos geométricos y algorítmicos.

En las situaciones propuestas se encuentran presentes estos objetos mentales, cuando se les pide a los estudiantes que generan triángulos semejantes en diferentes contextos geométricos, atendiendo a ciertas condiciones, llevándolos a que logren generalizar sus procesos de construcción.

- Dimensión fractal. Sentido genérico: Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. Sentido específico: se aplica a veces a la dimensión de Hausdorff y Besicovitch pero ya no se recomienda tal uso.

A diferencia de las dos anteriores características la dimensión fractal no hace parte de los objetos mentales propuestos para la constitución del objeto fractal, puesto que este aspecto requiere la constitución de objetos matemáticos que superan los desarrollos del espacio de formación en el que se desarrolló la propuesta de aprendizaje. Aunque la dimensión fractal puede ser considerada como una característica muy importante, el no considerarla para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje no afecta a la constitución del objeto fractal a la que se pretende lleguen los estudiantes, pues se busca que estos generen una aproximación intuitiva de lo que es el objeto fractal.

Como se mencionó anteriormente de las tres características mostradas de los fractales, para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se tendrán en cuenta la autosemejanza y la iteración, pero además de estas dos se considera importante abordar otros dos objetos mentales, estos son la convergencia y la densidad. Dichos objetos mentales se encuentran presentes en los procesos de generalización a los que puedan llegar los estudiantes, al intentar plasmar de manera algorítmica los procesos de recursión que hayan construido, mediante uso de sucesiones o series que les permitan representar las razones en las que se encuentran los diferentes elementos que se generan en las iteraciones, también al cuestionarse sobre el posible perímetro o áreas de dichos elementos, estos podría llegar a constituir el objeto convergencia; en cuanto al objeto densidad se hace referencia a la propiedad de los números reales y a la idea de que la parte es igual al todo.

En la ilustración 1, se encuentran relacionados los noumenon en relación con los phainomena que los organizan, mostrando los objetos mentales que permiten constituir cada una de las 4 características descritas, anteriormente con el fin de dar una aproximación de lo que es el objeto fractal.

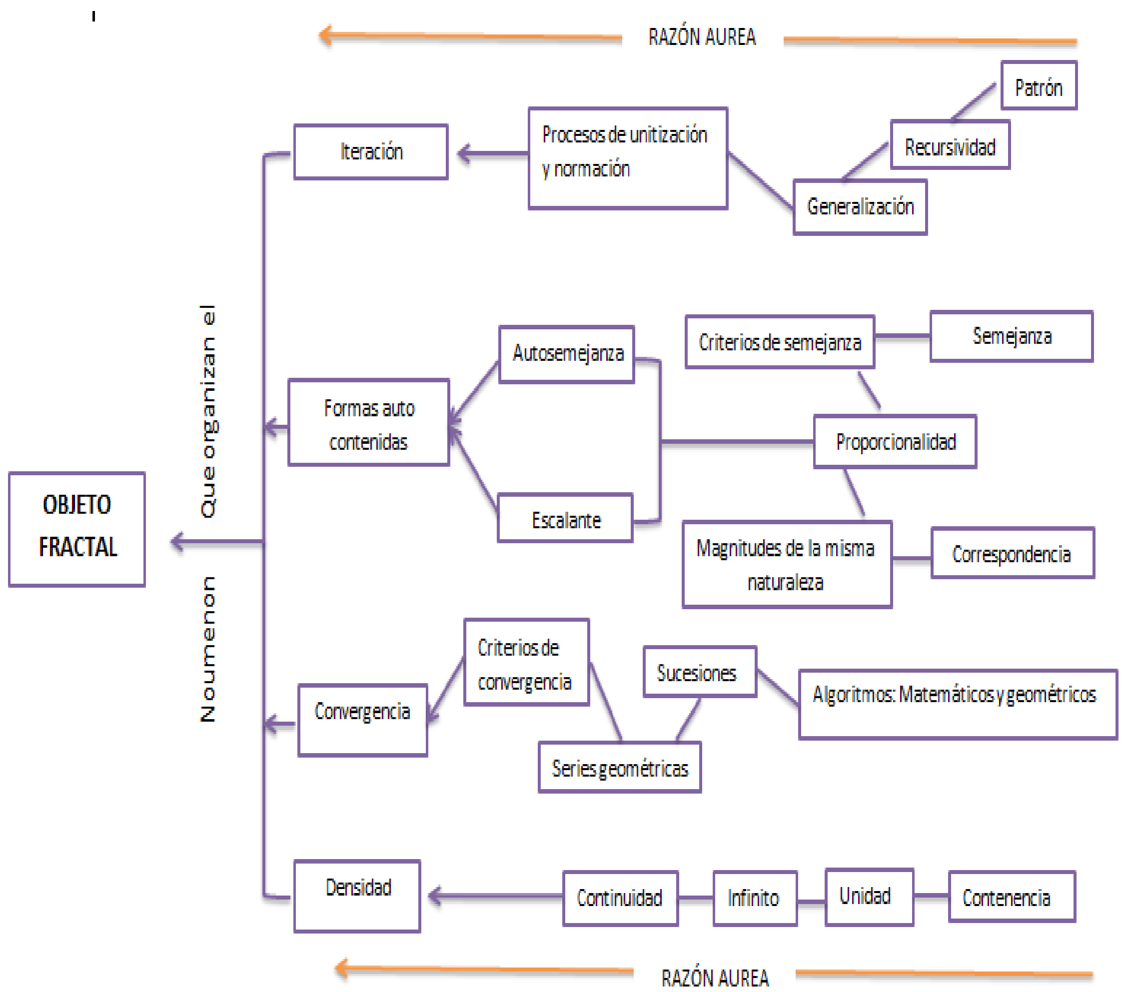


Ilustración 1: Fenomenología del objeto fractal

4.2 Aspectos metodológicos

A continuación se describen los aspectos metodológicos referentes al experimento de enseñanza; fundamentales para la orientación y desarrollo de la presente propuesta de aprendizaje, referentes al diseño y desarrollo de las situaciones; la generación y posterior análisis de los datos a partir de la información obtenida.

- 4.2.1 Diseño de situaciones: El desarrollo de la propuesta de aprendizaje se realiza mediante el diseño y desarrollo de cuatro situaciones en las que paulatinamente se busca constituir el objeto fractal, estas situaciones requieren que los estudiantes lleven a cabo un determinado número de tareas mediante las cuales se abordan objetos mentales que permiten organizar el objeto fractal. Dentro de las situaciones se presentan dos tipos de tareas, tareas auténticas con potencial matemático y tareas matemáticas, dado que la propuesta de aprendizaje es desarrollada en estudiantes para profesor en relación con lo planteado por (Llinares, 2008) las tareas auténticas son tareas profesionales que permiten la interacción entre estudiantes para profesor mientras las resuelven.

El uso de tareas auténticas permite considerar uno de los principios de la EMR, el principio de realidad, con este se busca que las situaciones presentadas a los estudiantes sean cercanas al contexto en el que se desenvuelven, de tal forma que sean imaginables y desarrollables a partir de su sentido común. Las actividades llevan a que los estudiantes inicien matematizando un tema real, para posteriormente reflexionar y analizar sobre su propia actividad matemática. Las situaciones son diseñadas de tal manera que permiten a los estudiantes generar *modelos*[5] flexibles que puedan ser aplicados en las diferentes tareas, permitiendo que su desarrollo sea dinámico en cuanto a poder reconstruir su pensamiento recurriendo a niveles inferiores de constitución de los objetos mentales desde los cuales se generaron heurísticas, formas de pensamiento, estrategias etc. que pueden contribuir a generar modelos más abstractos en niveles más avanzados de matematización (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

La siguiente ilustración (ilustración 2) muestra de acuerdo con cada situación planteada el tipo de actividad que requiere sea realizada así como los objetos mentales que son constituidos en cada una, se observa que a través de la

[5]Los modelos en la EMR dista del concepto generalizado de modelización matemática, como traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos. En esta corriente el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación. (Gravemeijer & Teruel, 2000), traducido por (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

constitución de objetos mentales como semejanza y correspondencia se inicia el trabajo de constitución del objeto fractal. Cada situación propuesta para el experimento de enseñanza se puede encontrar en los anexos del presente trabajo escrito, la situación 1 anexo 1, situación 2 anexo 2, situación 3 anexo tres y finalmente situación 4 en el anexo 4.

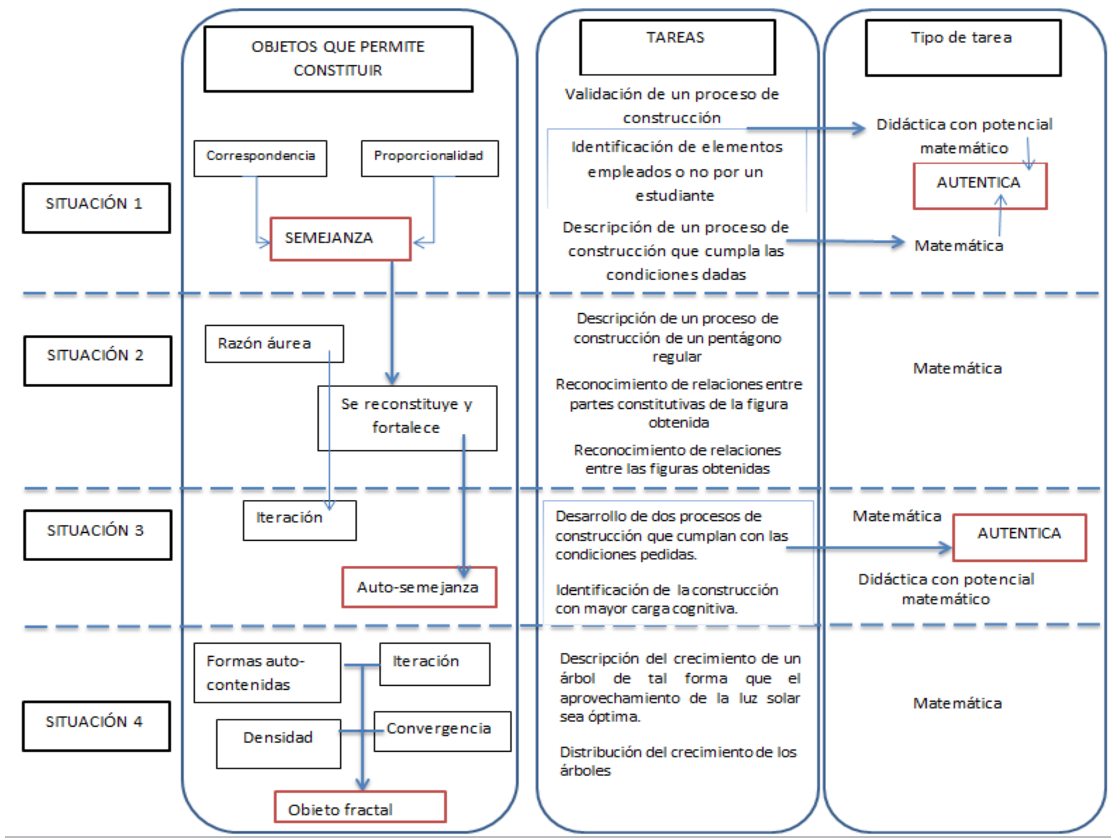


Ilustración 2: Estructura de la propuesta de aprendizaje

Un aspecto importante en el planteamiento de estas situaciones es el surgimiento de cambios planteados por el docente-investigador durante el desarrollo de la propuesta de aprendizaje, ya que durante este proceso constantemente se deben tomar decisiones sobre la manera de fomentar la constitución de los diferentes objetos mentales, principalmente sobre las hipótesis preliminares que se establecieron ya que "*El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo* *este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente”* (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011).

- 4.2.2 Generación y análisis de datos: la información sobre la cual se obtienen los datos es tomada de los informes entregados por los estudiantes, plasman la manera en que llevan a cabo las tareas y la solución a cada situación propuesta, se toma la decisión de considerar únicamente esta fuente de información al ser la más relevante para el cumplimiento de los propósitos de la propuesta de aprendizaje, en el marco de los experimentos de enseñanza “*los investigadores recogerán mucho más datos de los que podrán analizar y emplear, siendo necesario, a posteriori, distinguir la información relevante de la irrelevante (Hjalmarson Y Lesh,2008)* citado en (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011), ya que durante el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se recolectó información proveniente de informes entregados por los estudiantes, vídeos, exposiciones de los estudiantes y notas de clase.

Los datos son generados mediante un proceso de filtración de la información, al leer cuidadosamente cada uno de los informes se identifican procesos de construcción geométricos o algoritmos, formas de razonamiento, estrategias, dificultades, que estuvieron presentes en el proceso de constitución de los objetos mentales involucrados en cada situación. Los datos se analizan mediante la descripción de las acciones realizadas por los estudiantes en la constitución de los objetos mentales, con la intención de describir los procesos de matematización progresiva llevados a cabo.

Para el desarrollo de esta propuesta de aprendizaje se entiende la matematización progresiva como: “el proceso en el cual los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión que inicia en la matematización de un contenido para luego analizar su propia actividad matemática, la matematización progresiva se complementa con en el principio de reinvención guiada[6]". Freudenthal toma la matematización progresiva bajo dos formas *matematización vertical y matematización horizontal,* (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004) se refiere a ellos como:

- **Matematización horizonta**l: Consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.
- **Matematización vertical**: Se presenta dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En la descripción de los resultados se busca identificar las dos formas de matematización en las acciones de los estudiantes, atendiendo a la realidad matemática de estos, en el caso de los estudiantes para profesor, se podría presentar un caso de matematización horizontal cuando al desarrollar las situaciones los estudiantes se centran en el uso de conceptos adquiridos previamente convirtiéndose en una actividad de rutina. Un caso de matematización vertical cuando reflexionan sobre sus métodos de resolución, las estrategias planteadas, con el fin de reestructurarlas de tal manera que sean más sofisticados, organizados dentro de las matemáticas formales.

- 4.2.3 Actividades realizadas para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje: la propuesta de aprendizaje es desarrollada durante un semestre, el trabajo se dividió en dos partes, la primer parte se basó en el acoplamiento del curso y diseño de las situaciones y herramientas para los estudiantes, se asistió a una sesión de clase por semana con el fin de que

[6] La definición que se presenta de matematización progresiva, es abstraída de algunas ideas expuestas en el documento principios de la educación matemáticas realizar escrito por (bressan , 2004)

se diera una familiarización por parte de las investigadoras con el grupo de trabajo, complementado con una reunión semanal con el director del trabajo de grado[7], para discutir sobre el diseño de las situaciones y herramientas; la segunda parte se basó en el desarrollo de las situaciones en el curso para ello se asistió a todas las sesiones (3 por semana) durante 9 semanas, el trabajo realizado se centró en la observación de las clases y en algunos momentos hubo participación de las investigadoras[8] por medio de exposiciones o aclaraciones dirigidas a los estudiantes previamente acordadas con el docente titular del espacio de formación. En general el papel de las investigadoras en las sesiones de clase es de observadoras no participantes.

- 4.2.4 Metodología de clase**:** Ésta consiste en que los mismos estudiantes organicen grupos heterogéneos de trabajo de 3 a 6 estudiantes; en cada una de las sesiones de clase se exponen avances, nuevos datos, nuevos razonamientos, estrategias encontrados en la solución de cada una de las situaciones, siendo socializados y sometidos a reflexión por todos los estudiantes; esto se hace con la intención de generar una discusión de toda la clase acerca de los métodos de solución y los modelos que usaron los demás grupos, así se genera un diálogo entre toda la clase, puesto que el *"Papel crucial del diálogo como aplicación a interpretaciones, ideas y métodos muestra una vez más que un énfasis en matematizar no implica una actividad solitaria de parte del alumno individual"* (Gravemeijer & Teruel, 2000).

En cuanto a la creación de grupos, para Freudenthal es un aspecto fundamental en los procesos de matematización, puesto que él considera que "los alumnos

[7] Profesor titular del espacio de formación transición aritmética-álgebra en el que se desarrolló la propuesta

[8.] Se aclara que el docente titular es el que dirige las sesiones de clase en todo momento, inclusive cuando las investigadores realizaban algunas exposiciones trabajadores y flojos, ambos pueden mejorar en colaboración" (Gravemeijer & Teruel, 2000). Por la tanto, él aboga por que la educación matemática se dé a través de grupos heterogéneos de trabajo, y de esta manera se dé un aprendizaje colaborativo, cada uno intenta mejorar su aprendizaje y sus resultados, pero también el de sus compañeros.

Con relación a las discusiones que se generen en los grupos, siempre serán direccionadas y guiadas por el docente titular, al tomar el papel de guía en el proceso de la reinvención de la matemática por parte de los estudiantes, en este caso ser el guía en la reinvención de los objetos mentales que se propusieron como organizadores del objeto fractal, en palabras de Freudenthal esto se llama "reinvención guíada" que se entiende como *"…un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar"* [9]; al ser el docente un guía, también se convierte en un mediador entre los estudiantes y las situaciones en juego.

[9] Citado en el artículo "la educación matemática realista: principios en que se sustenta" por (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

5. DESARROLLO DE LA PROPUESTA DE APRENDIZAJE

A continuación se describen los resultados obtenidos de las tareas propuestas. Para realizar esta descripción se consideran los informes entregados por tres grupos de estudiantes del curso transición aritmética álgebra; dichos grupos son elegidos por su constancia en la entrega de informes, lo que permite realizar una mejor descripción de la propuesta de aprendizaje. Los grupos elegidos se nombraron a sí mismos como: los Caballeros de las matemáticas, Proskartenesis y Sua-art.

Teniendo en cuenta las entregas realizadas por los estudiantes como información que hace parte de los datos construidos, se describe la manera en que se fueron constituyendo los objetos mentales en los grupos considerando la información obtenida en cada una de las situaciones propuestas; con estas situaciones se buscaba emergieran gradualmente las siguientes características geométricas del objeto fractal[10]: convergencia, densidad, iteración y formas auto contenidas, a partir de la constitución de objetos matemáticos que las organizan, tales como: semejanza, similaridad, correspondencia entre otros.

En el desarrollo del análisis se encuentra la descripción de los resultados así como imágenes tomadas de los informes entregados por los estudiantes con su transcripción; es decir, en cada una de las imágenes, al lado de ellas se encontrará su correspondiente transcripción, con el fin de permitir una fácil lectura de los desarrollos realizados por los estudiantes, además en algunas imágenes cuando se hace referencia a algún aspecto puntal de su transcripción, este es resaltado en negrita; también en algunos apartados se encuentran esquemas generales de los resultados y acciones realizadas por los estudiantes frente a las

[10] Se puede observar con mayor profundidad la fenomenología del objeto fractal presentada en la sección 4.1.3 del marco teórico metodológico.

situaciones propuestas. Para entender los esquemas es necesario emplear las siguientes convenciones:

$\longrightarrow$ Relación continúa entre los elementos que se conectan

$\dashrightarrow$ Pérdida en la relación de los elementos que se conectan

A continuación se presentan los resultados de cada una de las 4 situaciones que se plantearon para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje.

5.1 Situación 1. Esta situación buscaba que los estudiantes constituyeran objetos mentales como: correspondencia, razón, semejanza y proporcionalidad, que paulatinamente permiten organizar y familiarizarse con fenómenos relacionados con la unidad similar, unitización y normación.

Esta primera situación busca que los estudiantes para profesor se piensen como docentes y no solamente como resolutores de la tarea propuesta; este hecho nos lleva a consolidarla como una actividad didáctica con potencial matemático, pues requería que se reflexionara sobre la solución dada por un estudiante ajeno al grupo de estudiantes para profesor con los que se desarrolla la investigación, y que a su vez estos estudiantes constituyeran los objetos mentales que organizan los fenómenos propuestos.

Uno de los resultados que se obtuvo al analizar los abordajes realizados por los estudiantes, es remitirse desde un primer momento a conceptos formales para dar solución a la situación; contrario a la idea de la constitución de los objetos matemáticos desde la perspectiva de la EMR, pues lo que se busca es aproximarse a los conceptos formales matemáticos, por medio de la constitución de objetos formales como organizadores de los objetos mentales (Bressan 2004).

Lo anterior nos lleva a pensar que los estudiantes se movían en una matemátización vertical, sin embargo, logramos identificar que estos conceptos formales debían tener una resignificación, pues no se está realizando la fenomenología de los conceptos matemáticos, no se describen los noumenon en su relación con los phainomena para los cuales son el medio de organización, (Freudenthal, 1983). Es decir, los objetos matemáticos son manejados por los estudiantes como un "concepto de[11]" más no como la comprensión de dicho concepto, esto se ve reflejado en las distintas enunciaciones de conceptos formales sin que sean empleados como herramientas para describir el fenómeno, por lo tanto, se buscó que estos estudiantes lograrán tener una *resignificación* de los objetos mentales que van empleando, no una reinvención como se plantea en la EMR puesto que estos estudiantes ya se han enfrentado a estos objetos mentales durante su formación como futuros docentes, no es la primera vez que los emplean, por lo tanto, no son objetos nuevos.

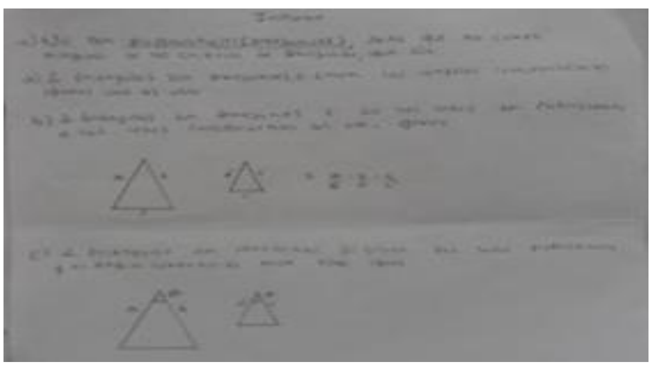


Imagen 1

Transcripción imagen 1:

No son proporcionales (semejantes), dado que no cumplen ninguno de los criterios de semejanza que son:

a. 2 triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales uno al otro.

b. *2 triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales a los lados correspondientes de otro*

En la imagen 1 se observa que se enuncian los criterios de semejanza, para darle peso a su respuesta, en este caso, justificar por qué los triángulos que se generan no son semejantes, pero no se nota un desarrollo de estos criterios en relación con el fenómeno propuesto, incluso se observa que usan otros tipos de triángulos, -los que se observan en la imagen 1-,que no tienen relación con la situación, estos triángulos son usados como medio de representación de los criterios de

[11] Recordemos que Hans Freudenthal (1983) al realizar un análisis semántico del término concepto manifiesta que este tiene una doble significación: concepto de y comprensión.

semejanza; en lo anterior se puede identificar que los criterios de semejanza son empleados como un *concepto de* semejanza, más no se ven relacionados con la situación, y si estos se relacionaran con la situación se generaría la *comprensión* del objeto semejanza.

Para buscar la comprensión desde el punto de vista de la constitución de los objetos mentales, durante el desarrollo de la situación se buscó que los estudiantes reflexionaran sobre cómo empleaban los objetos mentales en la argumentación de la solución, y si estos eran empleados de manera coherente como herramienta para matematizarla. Esta reflexión surge en medio de discusiones orientadas por el docente titular, cada grupo de estudiantes manifestaba las estrategias que emplearon para solucionar el problema, cada estrategia era discutida por todos los grupos, se decidía si la estrategia verdaderamente daba respuesta al problema, y se trataba de identificar las falencias de cada una de las estrategias.

Dentro de los procesos de abordaje empleados por los grupos se observa que el primer objeto mental mencionado es la semejanza, a partir de la enunciación de los criterios de semejanza sin que sean relacionados con la situación, por ejemplo al trabajar en la primera tarea se acude a la enunciación de estos, sin embargo no se evidencia que se haga una comparación entre el proceso realizado en la situación dada y los criterios de semejanza. Este hecho se presenta en los tres grupos como se muestra a continuación en el cuadro 1:

Cuadro 1: Evidencias de los criterios de semejanza, tarea 1

Caballeros de las matemáticas	Suart	Prostkartenesis

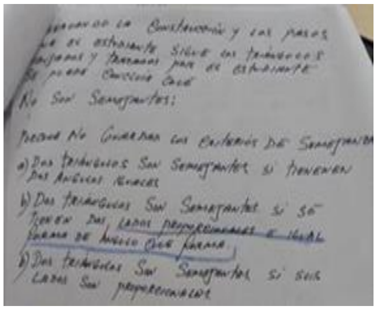


Imagen 2

Transcripción imagen 2:

“porque no cumple con los criterios de semejanza:

a. ***Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.***
b. ***Dos triángulos son semejantes <u>si se tienen dos lados proporcionales e igual forma de ángulo que forma.</u>***
c. ***Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.”***

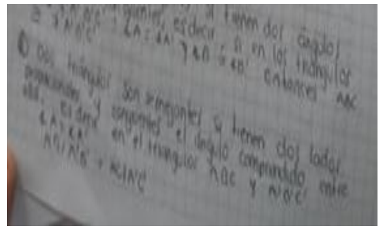


Imagen 3

Transcripción imagen 3:

“**dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y congruentes el ángulo** comprendido entre ellos, es decir en el triángulo ABC y A’B’C’ $<A=<A'$ $AB/A'B' = AC/A'C'$.

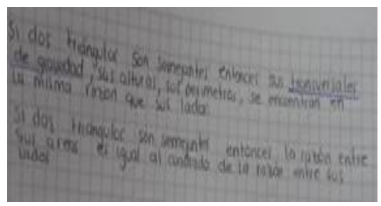


Imagen 4

Transcripción imagen 4:

“Si dos triángulos son semejantes entonces sus transversales de gravedad, sus alturas, sus perímetros, se encuentran en la misma razón que sus lados.

Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre sus lados.”

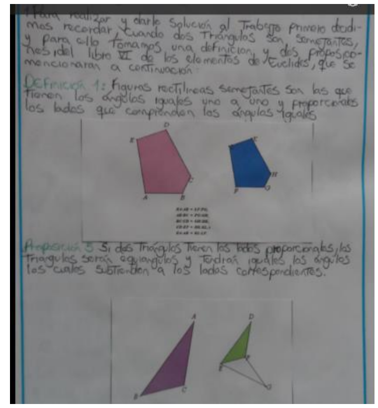


Imagen 5

Transcripción imagen 5:

“para realizar y darle solución al trabajo primero decidimos recordar, cuando dos triángulos son semejantes, y para ello tomamos una definición y dos proposiciones del libro VI de los elementos de Euclides que se mencionarán a continuación:

Definición 1: figuras rectilíneas semejantes son las que tiene los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.”

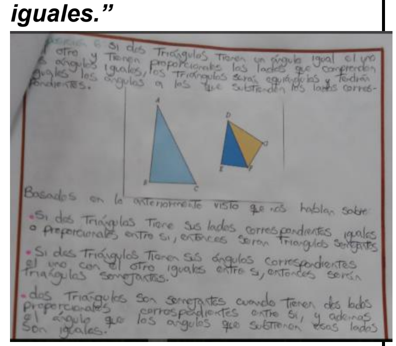


Imagen 6

Transcripción imagen 6:

“Proposición 6: si **dos triángulos un ángulo igual el uno al otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes**.

Basados en lo anteriormente visto que nos hablan sobre.

-**si dos triángulos tiene sus lados**

		correspondientes iguales o proporcionales entre sí, entonces serán triángulos semejantes -si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes el uno con el otro iguales entre sí, entonces serán triángulos semejantes -dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales correspondientes entre sí, y además el ángulo que los ángulos que subtienden esos lados son iguales.”
Los criterios de semejanza son mencionados sin que éstos emerjan o sean relacionados con la situación dada explícitamente, además en la transcripción de los criterios de semejanza se evidencia uso incorrecto e impreciso del lenguaje formal matemático. Como se puede ver en la parte de la transcripción subrayada.	Se evidencia presencia de lenguaje formal sin que se ponga en relación con la tarea propuesta explícitamente, la teoría mencionada no es puesta en relación explícitamente con los procedimientos realizados con la construcción dada.	En este grupo se observa la enunciación de los criterios de semejanza y proposiciones del libro 6 de los elementos que hacen referencia a la semejanza. Además emplean figuras que no tienen relación con la situación dada. Para posteriormente verificar que dichos aspectos mencionados se cumplan en la situación dada, mediante la verificación de las medidas de los lados de los triángulos.

En el cuadro 1 encontramos en la última fila algunas apreciaciones sobre el uso de los criterios de semejanza de cada uno de los grupos en la situación, mediante esto se puede observar que los tres grupos manejan diferentes definiciones de los criterios de semejanza, por ejemplo, en la imagen 2 correspondiente al grupo de los Caballeros de las matemáticas los criterios de semejanza empleados son:

- *a) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.*
- *b) Dos triángulos son semejantes <u>si se tienen dos lados proporcionales e igual forma de ángulo que forma.</u>*
- c) *Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.”*[12]

[12] Se encuentra resaltado en la transcripción de la imagen 2

En cuanto al grupo de Su-art, los criterios de semejanza empleados son los que se pueden observar en las imágenes 3 y 4.

- “dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y congruentes el ángulo comprendido entre ellos, es decir en el triángulo ABC y A’B’C’ <A=<A’ AB/A’B’ = AC/ A’C’.
- “Si dos triángulos son semejantes entonces sus transversales de gravedad, sus alturas, sus perímetros, se encuentran en la misma razón que sus lados.
- Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre sus lados.[13]

El grupo Proskartenesis emplea la definición 1 y proposición 6 del libro VI de los Elementos como se observa en las imágenes 5 y 6, este grupo realiza una enunciación de criterios de semejanza a partir de la definición y proposición tomada, aspecto que los otros grupos no hicieron. Lo que indica que este grupo usa estrategias de solución acudiendo a su experiencia en cuanto al trabajo que han realizado sobre geometría euclidiana, al ser empleada recurrentemente en su proceso de formación como docentes.

- *definición 1: figuras rectilíneas semejantes son las que tiene los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.*
- proposición 6: si dos triángulos un ángulo igual el uno al otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

Basados en lo anteriormente visto que nos hablan sobre.

- -si dos triángulos tienen sus lados correspondientes iguales o proporcionales entre sí, entonces serán triángulos semejantes
- -si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes el uno con el toro iguales entre sí, entonces serán triángulos semejantes
- -dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales correspondientes entre sí, y además el ángulo que los ángulos que subtienden esos lados son iguales.”[14]

Observando las diversas definiciones de los criterios de semejanza empleadas por los estudiantes, se podría decir que se deebe posiblemente a las diferentes fuentes de consulta de las que se tomó la información, tales como páginas web y libros, esto podría ser una razón por la cual los estudiantes se podrían centrar en una Matematización vertical usual del fenómeno; al ser estudiantes para profesor

[13] Se encuentra resaltado en la transcripción de la imagenes 3 y 4
[14] Se encuentra resaltado en la transcripción de la imágenes 5 y 6

la matematización vertical tiene una interpretación diferente, al ser estudiantes que están familiarizados con el uso del lenguaje formal, la matematización claramente es diferente a la que puede presentar por ejemplo, un estudiante de bachillerato, como lo menciona Freudenthal la matematización depende de la realidad del estudiante, en este caso la realidad de ser estudiante para profesor.

> *Una actividad simbólica, por ejemplo, puede ser una actividad de rutina para un estudiante. Esto puede ser un caso de matematización horizontal. Sin embargo, si la misma forma de simbolización involucra para otro estudiante una nueva invención, esto implica matematización vertical. La matematización vertical es más claramente visible si un estudiante explícitamente reemplaza su método de resolución, o su modo de describir por otro que es más sofisticado, mejor organizado, o, más brevemente, más matemático.* (Gravemeijer & Teruel, 2000).

A lo largo de la propuesta de aprendizaje se intenta identificar los procesos de matematización vertical que logren desarrollar los estudiantes. El hecho descrito anteriormente puede ser otro argumento por el cual decimos que se presenta una idea de constitución de los elementos matemáticos de una manera inversa a la que se plantea en la EMR (Freudenthal, 1993).

Relacionando estas acciones de los estudiantes con los niveles en la matematización progresiva, se diría que se empezó en el nivel formal en cuanto al uso de objetos matemáticos, se busca pasar a uno situacional, en la ilustración 3 se observa que para la idea de matematización que se presenta, es el nivel a alcanzar, ya que se busca que los estudiantes lleven a cabo un proceso de reconstrucción como lo menciona (Tall, 1991) de los objetos mentales involucrados; teniendo en cuenta que estos niveles no son jerárquicos sino dinámicos, puesto que se puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido, (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

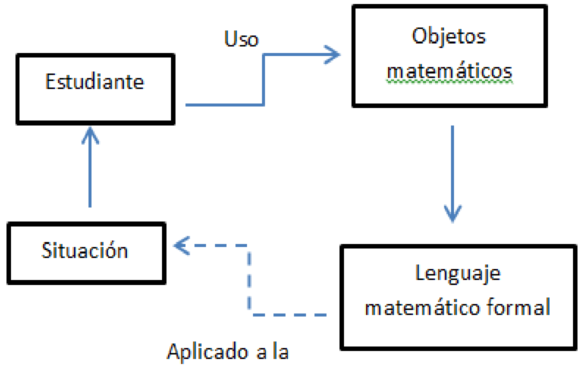


Ilustración 3: Nivel situacional

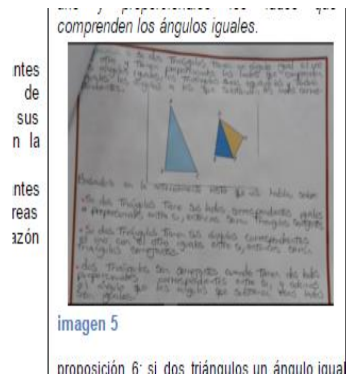


Imagen 7

De manera general se puede observar que se da una enunciación de criterios de semejanza pero ningún grupo toma estas definiciones de tal manera que se empleen como datos para justificar la respuesta dada; un ejemplo claro podría verse en el grupo de Prostkartenesis imágenes 5 y 6, ilustran las definiciones y proposiciones con ejemplos, empleando otras figuras geométricas que no tienen relación con la situación, y en ningún momento muestran las relaciones de los triángulos no se cumple con los criterios de semejanza, las definiciones y proposiciones enunciadas por el grupo.

La mayoría de los estudiantes manifiestan que los triángulos no son semejantes en un primer momento, guiándose por la forma de cada uno de los triángulos como se puede observar en la transcripción resaltada en negrita de la imagen 8, quizás atribuyendo esto a una manera intuitiva de observar la falta de semejanza, aunque sin que las razones se hagan explícitas, sólo observando como aspecto más relevante la conservación de la forma de los nuevos triángulos generados, este argumento va acompañado de tomar medidas a los ángulos y lados de los triángulos.

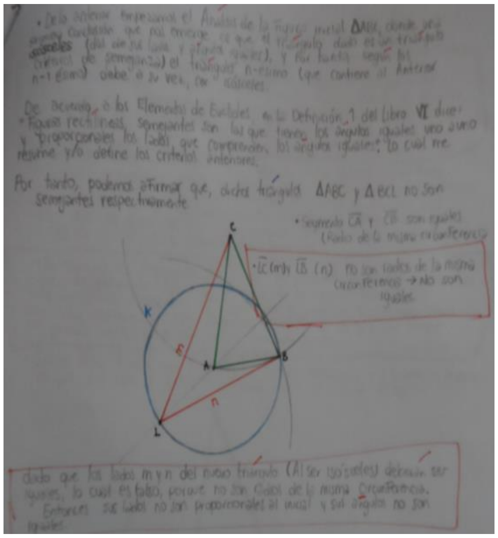


Imagen 8

Transcripción imagen 8:

"empezamos el análisis de la figura inicial ABC donde una primera conclusión que nos emerge es que el triángulo dado es un triángulo isósceles (dos de sus lados y ángulos iguales) y por tanto según los criterios de semejanza el triángulo enésimo (que contiene al n-1 ésimo) debe a su vez, ser isósceles.

De acuerdo a los elementos de Euclides en la definición 1 del libro VI dice:

-Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales lo cual me resume y/o define los criterios anteriores.

Por tanto, podemos afirmar que dichos triángulos ABC y BCL no son semejantes respectivamente"

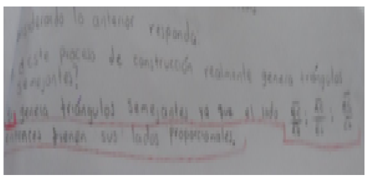
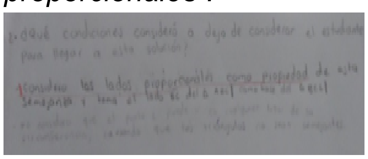
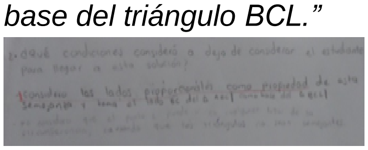
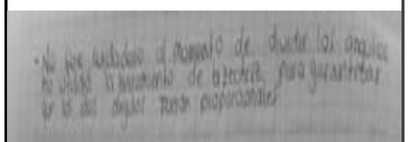
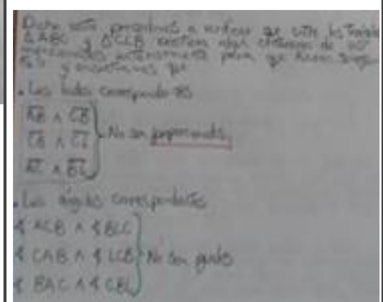
"dado que los lados m y n del nuevo triángulo (al ser isósceles) deberían ser iguales, lo cual es falso porque no son radios de la misma circunferencia entonces sus lados no son proporcionales al inicial y sus ángulos no son iguales".

Lo descrito anteriormente nos indica que los estudiantes en algunos momentos se encuentran también en un nivel de matematización horizontal, en la medida que para ellos es suficiente el tomar medidas de las partes constitutivas de los triángulos para validar el hecho que no se presente semejanza, un inicio de matematización por parte de los estudiantes, se presentaría si ellos logran reflexionar sobre la manera en que se da la construcción del nuevo triángulo pues es desde allí que se debe garantizar la semejanza, ya que se podría tener una situación en la que no se pueda tomar medidas.

Debido a lo encontrado con el objeto semejanza, el más general, se hace necesario hacer reflexionar a los estudiantes sobre los objetos proporcionalidad y correspondencia, en un primer momento aparecen mencionados sin ninguna relación con la situación propuesta; el reflexionar sobre sus usos y sus significados permitiría que se diera la constitución del objeto semejanza, ya que estos dos objetos permiten organizar el fenómeno de la semejanza, así como en el reflexionar sobre el proceso de construcción de triángulos.

Sobre el objeto proporcionalidad encontramos los siguientes enunciados en cada grupo, que se muestran a continuación en el cuadro 2:

Cuadro 2: Enunciación de porporcionalidad

Caballeros de las matemáticas	Suart	Prostkartenesis
 Imagen 9 Transcripción imagen 9: *"Si genera triángulos semejantes, ya que el* $\frac{BC}{AB}:\frac{AC}{BL}:\frac{BC}{CL}$ *entonces tienen sus lados proporcionales".*  Imagen 10 Transcripción imagen 10: *"Considero los lados proporcionales como propiedad de esta semejanza y el lado BC del triángulo ABC, como base del triángulo BCL."*  Imagen 11 Transcripción imagen 11: *"Considero los lados proporcionales como propiedad de esta semejanza y el lado BC del triángulo ABC, como*	 Imagen 12 Trascripción imagen 12: "no fue cuidadoso al momento de dividir los ángulos no utilizó la herramienta bisectriz para **garantizar que los dos ángulos fueran proporcionales**"	 Imagen 13 Trascripción imagen 13 ABC y CLB existiera algún criterio de los mencionados anteriormente para que fueran semejantes y encontramos que: **Los lados correspondientes** $\boldsymbol{AB} \wedge \boldsymbol{CB}$ $\boldsymbol{LB} \wedge \boldsymbol{CL}$ $\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{BL}$ Los ángulos correspondientes $< ACB \;\wedge < BLC$ $< CAB \;\wedge < LCB$ no son iguales $< BAC \;\wedge < CBL$

base del triángulo BCL.” *“No considero que el punto L puede ir en cualquier lugar de la circunferencia, causando que los triángulo no sean semejantes”*		
Menciona que se presenta proporcionalidad entre los lados de los triángulos en la construcción dada. Se hace referencia a la no consideración de condiciones suficientes para que se dé la semejanza entre los triángulos por parte del estudiante.	Para dar validez a su construcción, justifica que su construcción se basó en la copia de ángulos, y así cumpliría con uno de los criterios de semejanza.	Las magnitudes que relacionan son los lados y los ángulos de los triángulos, pero no expresan el criterio que hace corresponder las magnitudes unas con otras. Cuando expresan los lados de los triángulos, usan un lenguaje matemático incorrecto, es decir no usan la simbología para relacionar los lados de los triángulos.

Como se puede observar en la última fila del cuadro 2, los grupos intentan relacionar las partes constitutivas de los triángulos principalmente sus lados, en algunos estudiantes plantean una serie de razones externas, como se evidencia en las partes resaltadas en negrita de la transcripción de las imágenes 9 y 13, relacionan los lados correspondientes de cada uno de los triángulos, además usan el lenguaje matemático formal para denotar la proporcionalidad entre segmentos, planteando las notaciones que se observa en la parte subrayada de la primera imagen del grupo los caballeros (imagen 9), relacionan los lados del triángulo inicial con los lados del nuevo triángulo generado, se podría decir que estaban pensando en el criterio de semejanza que hace referencia a la existencia de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Aparte del uso del lenguaje matemático se observa que usan el término “proporcionalidad” de manera indiscriminada, al aplicarlo a cualquier magnitud de la situación, puesto que relacionan en algunos casos lados con ángulos, o expresan cosas como la que se observa en la parte resaltada en negrita de la transcripción de la imagen 14, manifestando que no son proporcionales, es decir conciben ángulos y lados como magnitudes de la misma naturaleza, desconociendo o pasando por alto que una proporción hace corresponder pares (objetos de una misma naturaleza) que guardan la misma razón entre sí, con pares que tienen la misma razón entre sí (Freudenthal, 1983).

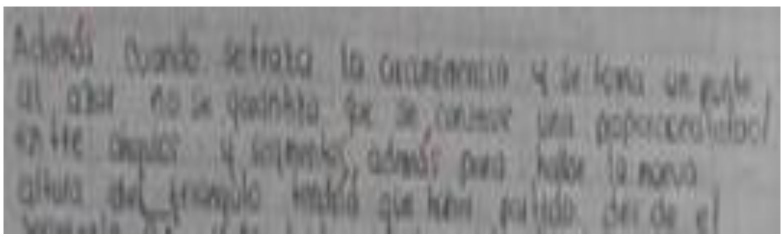


Imagen 14

Transcripción imagen 14

“Además cuando se traza la circunferencia y se toma un punto al azar ***no se garantiza que se construye una proporcionalidad entre ángulos y segmentos****,”*

En la transcripción de las imágenes 15 y 16 en las partes resaltadas en negrita se puede observar la relación que hacen los estudiantes entre los ángulos y la proporcionalidad. Estos dos elementos no se podrían relacionar, puesto que en el contexto de semejanza, refiriéndonos a sus criterios, los ángulos no pueden ser proporcionales, ya que la proporcionalidad se presenta es en los lados que comprenden el ángulo y no en la amplitud del ángulo, en el caso de relacionar los ángulos de un triángulo y otro, la relación a la que se debe hacer referencia es a la amplitud de un ángulo respecto al otro, en este caso esta relación sería la congruencia entre ángulos.

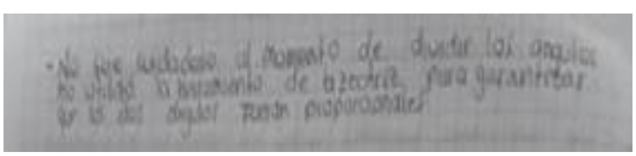


Imagen 15

Trascripción imagen 15: “no fue cuidadoso al momento de dividir los ángulos no utilizó la herramienta bizectriz para **garantizar que los dos ángulos fueran proporcionales**”

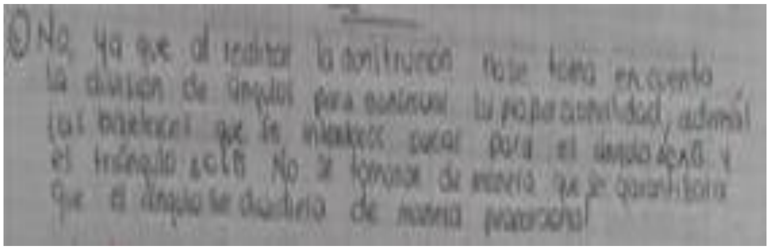


Imagen 16

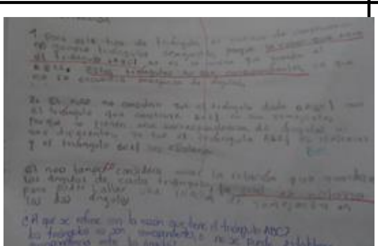
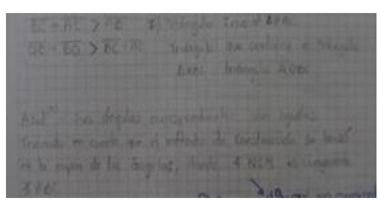
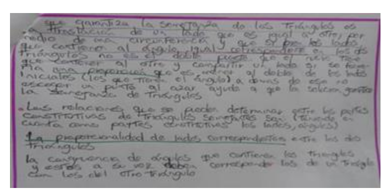
Transcripción imagen 16:

“no ya que al realizar la construcción ***no se toma en cuenta la división de ángulos para conservar la proporcionalidad****,”*

En general se evidencia que el objeto proporcionalidad debe reconstituirse pues es empleado o se hace referencia a él por los estudiantes en situaciones que no son adecuadas como las descritas anteriormente, principalmente cuando relacionan las magnitudes que pertenecen a la misma naturaleza y al momento de establecer razones externas identificar la correspondencia correcta -para este caso la correspondencia idéntica- entre las magnitudes; tal vez estas dificultades se presentaron porque tienen algunas debilidades al realizar e interpretar las correspondencia entre las magnitudes de los triángulos como se puede observar a continuación:

Sobre el objeto Correspondencia encontramos en el cuadro 3 algunos de los desarrollos de los tres grupos.

Cuadro 3: Objeto correspondecia

Caballeros de las matemáticas	Suart	Proskartenesis
 Imagen 17 Transcripción imagen 17: “para este tipo de triángulo el proceso no genera triángulos	 Imagen 18 Transcripción imagen 18: “$BC = AC > \ AB$ triángulo inicial $BC = BO > BC = AC$ triángulo que contiene al triángulo ABC triángulo	 Imagen 19 Transcripción imagen 19: “Lo que garantiza la semejanza de los triángulos es la translación de un lado que es igual a otro, por medio de una circunferencia y que

semejantes, porque la **razón que tiene el triángulo ΔABC** no es la misma que guarda el ΔBCL, estos **triángulos no son correspondientes** ya que no se encuentra semejanza de ángulos.” “porque no tiene una correspondencia de ángulos al ser diferentes, **ya que el triángulo ABC es isósceles y el triángulo BCL es escaleno”**	OBC Azul: **sus ángulos correspondientes son iguales teniendo en cuenta que el método de construcción se basó en la copia de los ángulos donde <NCM es congruente <ABC.”**	si son **los lados que contienen el ángulo igual correspondiente en los dos triángulos** no es el doble puesto que el nuevo tiene que contener al otro y compartir un lado si se forma una proporción que es menor al doble de los lados iniciales (los que tienen el ángulo). Además de eso no escoger un punto al azar ayuda aunque la solución garantice la semejanza de triángulos las relaciones que se pueden determinar entre las partes constitutivas de triángulos semejantes son (teniendo en cuenta como partes constitutivas los lados, ángulos) la proporcionalidad de los lados correspondientes entre los dos triángulos La congruencia de ángulos que contienen los triángulos y estos a su vez deben corresponder los de un triángulo con los del otro.
En el argumento dado de porque no se construyen triángulos semejantes menciona lo que es una razón y una correspondencia atribuyendo el significado de razón a correspondencia y el de correspondiente a semejante, al afirmar “razón del triángulo” y “triángulos correspondientes”, como se puede observar en lo resaltado en negrita en la transcripción de esta imagen..	Para dar validez a su construcción, justifica que su construcción se basó en la copia de ángulos, y así cumpliría con uno de los criterios de semejanza.	Mejoran sus argumentos al momento de justificar los pasos de la construcción de triángulos semejantes. Esto se ve reflejado en la medida que emplean los criterios de semejanza como una herramienta para cumplir con las condiciones de la situación. Se evidencia un avance en el uso de lenguaje formal.

Como se puede observar en la última fila del cuadro 3, anteriormente presentado, el objeto correspondencia aparece en la situación como un objeto dependiente del objeto proporcionalidad, durante el trabajo realizado con los estudiantes se hace énfasis en la identificación de la correspondencia idéntica con el fin de resignificar el objeto proporcionalidad.

Podemos observar en la imagen 17 que el objeto correspondencia es empleado en un principio indiscriminadamente por ejemplo, en afirmaciones como ***"estos <u>triángulos no son correspondientes</u> ya que no se encuentra semejanza*** *de ángulos.",* se evidencia que el objeto correspondencia es empleado en lugar del objeto semejanza, esto nos indica que el objeto correspondencia al igual que el de semejanza son entendidos como un "*concepto de"* por los estudiantes, sin que se presente una comprensión y sean constituidos como objetos mentales.

Al ir trabajando y profundizando este objeto durante las discusiones realizadas en clase, se logra obtener algunos avances respecto a la manera en que se emplean los objetos proporcionalidad y correspondencia, logrando obtener una constitución más compleja del objeto mental, esto se observa al identificar que los estudiantes relacionen el término adecuado con las partes constitutivas de los triángulos y no con los triángulos en sí, como se observa en la trascripciones de las imágenes 18 y 19, específicamente las partes resaltadas en negrita.

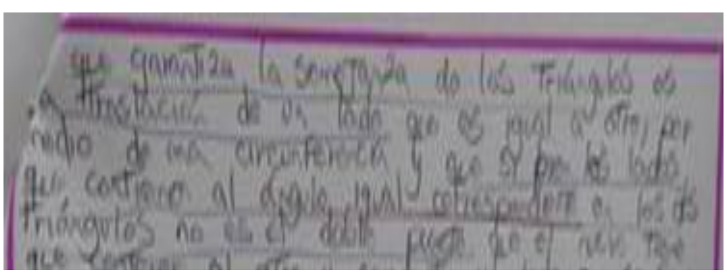


Imagen 20

Transcripción imagen 20: "Lo que garantiza la semejanza de los triángulos es la translación de un lado que es igual a otro, por medio de una circunferencia y que si son **<u>los lados que contienen el ángulo</u> igual correspondiente en los dos triángulos"**

Después de identificar los aspectos anteriores, se hace una reflexión con los estudiantes, una vez hecha, se les pide a los estudiantes que vuelvan a trabajar en la solución de la situación teniendo en cuenta las correcciones y aclaraciones que se les hicieron a la primera entrega del trabajo; en los datos formados a partir de las correcciones hechas por los estudiante, aparecen datos como los que se muestran en la transcripción de la imagen 20**,** se logra identificar que hacen un mejor manejo del lenguaje matemático, y logran relacionar correctamente las partes constitutivas de los triángulos, refiriéndonos específicamente a la parte resaltada en negrita de la transcripción puesto que manifiestan relaciones entre magnitudes de la misma naturaleza, en este caso ***"los lados que contienen el ángulo"*** manifestando que son semejantes, debido al proceso de construcción que realizaron.

Teniendo en cuenta lo anterior podríamos decir que los estudiantes han logrado avanzar en la constitución de los objetos mentales que se han trabajado, lo que indica que estos han empezado a realizar matematización, ya que logran organizar la situación usando los criterios de semejanza, los objetos proporcionalidad y correspondencia como herramientas, para que la solución cumpla con las condiciones pedidas, esto se ve reflejado en las afirmaciones realizadas por los estudiantes mostradas a continuación en la transcripción de la imagen 21, en general se observa que son más claros cuando describen su trabajo en la situación y los objetos mentales a los que se refieren.

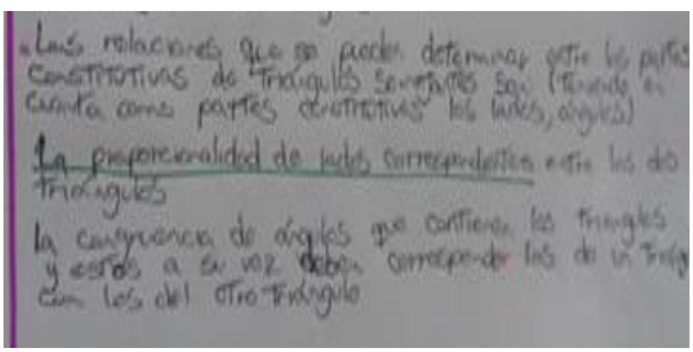

Las relaciones que se pueden determinar entre las partes constitutivas de triángulos semejantes son (teniendo en cuenta como partes constitutivas los lados, ángulos)
La proporcionalidad de lados correspondientes entre los dos triángulos
la congruencia de ángulos que contienen los triangulos y estos a su vez deben corresponder los de un triáng con los del otro triángulo

Imagen 21

Transcripción imagen 21: *las relaciones que se pueden determinar entre las partes constitutivas de triángulos semejantes son (teniendo en cuenta como partes constitutivas los lados, ángulos)*

- *la proporcionalidad de los lados correspondientes entre los dos triángulos*
- *la congruencia de ángulos que contienen los triángulos y estos a su vez deben corresponder los de un triángulo con los del otro*

Siguiendo con las discusiones y aclaraciones en el grupo sobre estos objetos mentales, los estudiantes logran avanzar en comprender cada uno de los objetos que intervienen en la situación dada, pasando del objeto más general, semejanza, hasta el más particular, correspondencia, este último fue la clave para que se lograra poner en acción los objetos reconstituidos frente a la situación, entendiendo que cada una de las partes constituyentes de un triángulo tienen en la situación una parte constituyente correspondiente de la misma naturaleza en el otro triángulo.

En la ilustración 4 se muestra la constitución de los objetos mentales involucrados en la situación, podemos observar que para ser constituido el objeto semejanza fue necesario abordar los objetos proporcionalidad y correspondencia, debido a que en un primer momento los estudiantes evocan el objeto semejanza a través de los criterios de semejanza pero no son relacionados y aplicados en la situación, esto se realiza con el fin de que el objeto semejanza sea constituido a partir de los dado en la situación y no quede como un concepto enunciado sin ninguna aplicación.

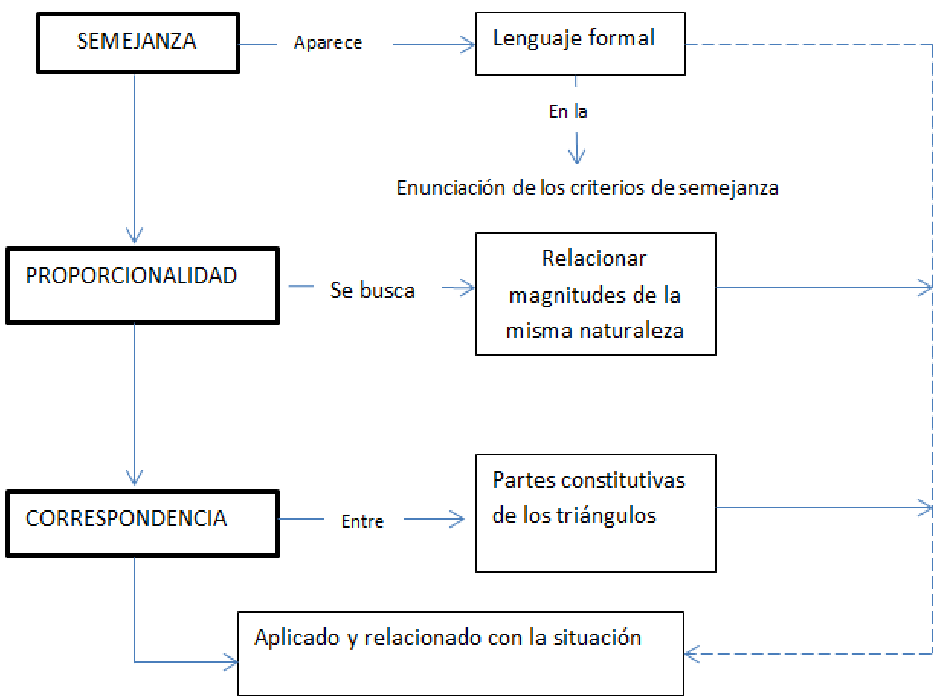


Ilustración 4: Objetos mentales requeridos en la situacion y la manera en que se constituyen

Al momento de discutir sobre las diferentes correspondencias que se podrían establecer entre lados de un triángulo con relación al otro y los ángulos de uno en relación con el otro, se pudo identificar una correspondencia idéntica al generar razones iguales entre los segmentos que conforman los triángulos y congruencia en los ángulos, como única forma de obtener semejanza, así que comprender el objeto más particular llevó a que los estudiantes tuvieran una mayor comprensión del objeto general (semejanza); argumentar la solución pensando en que si las características de la correspondencia idéntica se cumplieran generarían el establecimiento de una secuencia de triángulos semejantes.

En forma general los grupos a lo largo de las entregas de la primera tarea se centran en mejorar sus argumentos para justificar el proceso de obtención de triángulos semejantes, además en mejorar el uso del lenguaje formal relacionado los objetos que organizan el objeto fractal, se observa que en el trabajo realizado por los estudiantes se hace mención implícitamente a procesos de recursividad, específicamente cuando hacen uso de expresiones como *"si repetimos este proceso infinitas veces", "así sucesivamente"* entre otras, como se puede observar en la transcripción de la Imagen 22 en las partes resaltadas en negrita.

Transcripción imagen 22:

*"**si se repite el proceso infinitas veces** se consigue armar una sucesión de triángulos semejantes"*

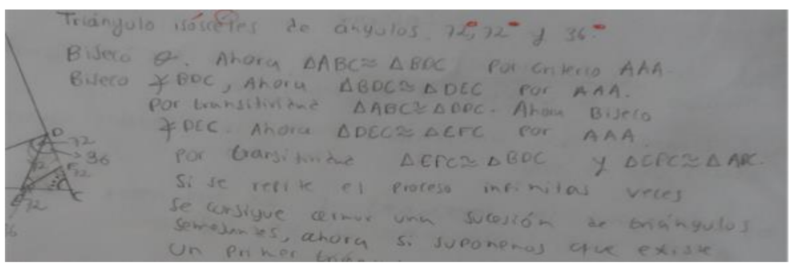


Imagen 22

En cuanto al objeto similaridad, algunos estudiantes indican que *"si el primer triángulo es isósceles, el siguiente debe serlo, para que los triángulos sean semejantes*", esto nos podría llevar a pensar que ellos reconocen la semejanza de triángulos como un elemento que organiza el objeto similaridad; se observa en el proceso de construcción de la secuencia de triángulos que los estudiantes buscan que se presente "una invarianza de las razones internas" del triángulo (Freudenthal, 1983), y de este modo garantizar que se construyan triángulos semejantes al triángulo dado, esto se ve reflejado en afirmaciones como la mostrada en la transcripción de la imagen 23:

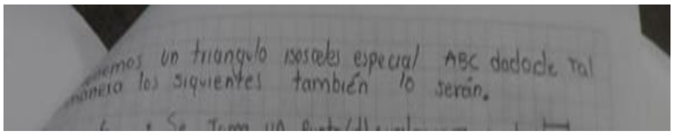


Imagen 23

Transcripción imagen 23: *"Tenemos un triángulo isósceles especial ABC dado de tal manera los siguientes también lo serán"*

Un último aspecto a tener en cuenta es que algunos estudiantes empiezan a indicar algunas características del triángulo dado como se observa en la parte resalta en negrita de la transcripción de la imagen 24, hacen referencia a los ángulos que tiene este triángulo, este hecho es importante pues el triángulo con el que inicialmente estaban trabajando no era un triángulo cualquiera, ya que tenía algunas características especiales que son relevantes para el trabajo que se realizará en las situaciones posteriores, como por ejemplo en la segunda situación.

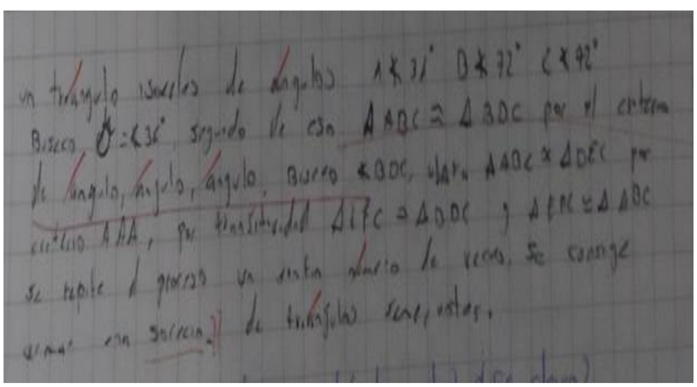


Imagen 24

Transcripción imagen 24: ***"Un triángulo isósceles de ángulos** $<\mathbf{36^\circ}<\mathbf{72^\circ}<\mathbf{72^\circ}$, biseco $A=36^\circ$, segundo de eso $\Delta ABC=\Delta BDC$ por el criterio de ángulo, ángulo, ángulo biseco $<BDC\ldots$".*

5.2 Situación 2 (Petagoneando desde lo dado): en esta situación se buscaba constituir objetos metales como: proporción áurea, similaridad y recursividad, para profundizar en la constitución de las características del objeto fractal. Además, en esta actividad se daba como herramienta de exploración el recurso del software Geogebra.

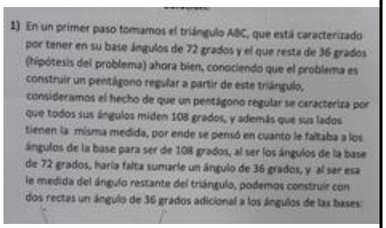
La situación presentada a los estudiantes consistía en realizar tres tareas: la primera, generar un proceso de construcción de un pentágono a partir de un triángulo especial dado; la segunda, identificar relaciones entre el lado del triángulo y el pentágono construido; y, la tercera, identificar relaciones entre los triángulos que se pueden formar en el pentágono. También en esta actividad se pretendía hacer más explícito el objeto similaridad asociándolo a procesos de unitización y normación.

La actividad realizada por los estudiantes estuvo centrada en el desarrollo de la primer tarea, es por ello que el análisis de los datos generados a partir de las construcciones realizadas por los estudiantes, están enfocados en la descripción de la reconstitución de los objetos mentales involucrados en la tarea a partir de la caracterización del proceso de construcción y el razonamiento dado en cada grupo. A continuación se muestran las diferentes construcciones que realizaron los grupos, mencionando sus razonamientos de partida y los desarrollos realizados.

Las construcciones realizadas por la mayoría de los grupos toman como referencia completar los ángulos del lado menor del triángulo dado -ángulo de 72°- para construir un ángulo de 108° grados y obtener el pentágono regular, como se observa en las siguientes imágenes presentes en el cuadro 4.

Cuadro 4: Construcciones de los grupos

Los Caballeros de las matemáticas	Sua-art	Proskartenesis

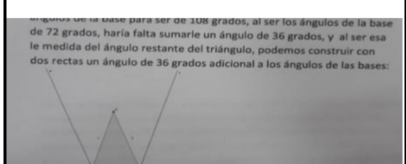


1) En un primer paso tomamos el triángulo ABC, que está caracterizado por tener en su base ángulos de 72 grados y el que resta de 36 grados (hipótesis del problema) ahora bien, conociendo que el problema es construir un pentágono regular a partir de este triángulo, consideramos el hecho de que un pentágono regular se caracteriza por que todos sus ángulos miden 108 grados, y además que sus lados tienen la misma medida, por ende se pensó en cuanto le faltaba a los ángulos de la base para ser de 108 grados, al ser los ángulos de la base de 72 grados, haría falta sumarle un ángulo de 36 grados, y al ser esa le medida del ángulo restante del triángulo, podemos construir con dos rectas un ángulo de 36 grados adicional a los ángulos de las bases:

Imagen 25

Transcripción imagen 25:

"En un primer paso tomamos el triángulos ABC, que está caracterizado por tener en su base ángulos de 72 grados y el que resta de 36 grados (hipótesis del problema) ahora bien, conociendo que el problema es construir un pentágono regular a partir de este triángulo ***consideramos el hecho de que un pentágono regular se caracteriza porque todos sus ángulos miden 108 grados****, y además que sus lados tienen la misma medida, por ende se pensó en cuánto le falta a los ángulos de la base para ser de 108 grados …"*

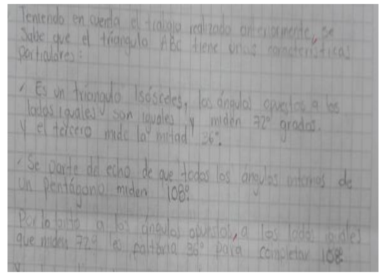


ángulos de la base para ser de 108 grados, al ser los ángulos de la base de 72 grados, haría falta sumarle un ángulo de 36 grados, y al ser esa le medida del ángulo restante del triángulo, podemos construir con dos rectas un ángulo de 36 grados adicional a los ángulos de las bases:

Imagen 26

Transcripción imagen 26:

"Haría falta sumarle un ángulo de 36 grados, y al ser esa la medida del ángulo restante del triángulo, podemos construir con dos rectas un ángulo de 36 grados adicional a los ángulos de las bases."



Teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente, se sabe que el triángulo ABC tiene unas características particulares:

✓ Es un triangulo Isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales y miden 72° grados. Y el tercero mide la mitad 36°.

✓ Se parte del echo de que todos los ángulos internos de un pentágono miden 108°.

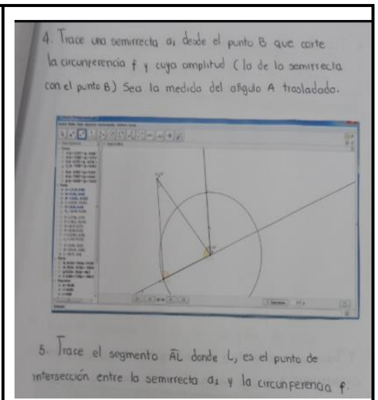
Por lo tanto a los ángulos opuestos a los lados iguales que miden 72° les faltaría 36° para completar 108°.

Imagen 27

Transcripción imagen 27:

"teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente se sabe que el triángulo ABC tiene una características especiales, se parte del echo de que todos los ángulos de un pentágono miden 108°.

por lo tanto a los ángulos opuestos a los lados iguales que miden 72° les faltaría 36° para completar 108°"



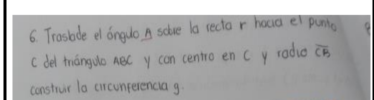
4. Trace una semirrecta a_1 desde el punto B que corte la circunferencia f y cuya amplitud (la de la semirrecta con el punto B) Sea la medida del ángulo A trasladado.

5. Trace el segmento $\overline{AL}$ donde L_1 es el punto de intersección entre la semirrecta a_1 y la circunferencia f.

Imagen 28

Transcripción imagen 28:

"trace una semirrecta a_1 desde el punto B que corte la circunferencia f y cuya amplitud (la de la semirrecta con el punto B) sea la de la medida del ángulo A trasladado"



6. Traslade el ángulo A sobre la recta r hacia el punto C del triángulo ABC y con centro en C y radio $\overline{CB}$ construir la circunferencia g.

Imagen 29

Transcripción imagen 29:

*"**traslade el ángulo A sobre la recta r hacia el punto C del triángulo ABC** y con centro en C y radio CB construir l circunferencia g."*

Como se observa en cada una de las imágenes del cuadro anterior, los estudiantes centran su proceso de construcción en “completar” el ángulo de un pentágono regular a partir de los ángulos conformados por el lado menor del triángulo y un lado igual del triángulo. Sin embargo, pasan por alto el hecho que la medida del ángulo menor del triángulo era el que complementa el ángulo comprendido por el lado menor del triángulo y un lado igual para obtener el deseado, es decir, se basaron en las características de un pentágono regular más no en las características del triángulo que les permitía construir dicho pentágono. Además se observa que las construcciones parten de las medidas de los ángulos limitando que el proceso sea general, es decir, al tomar las medidas piensan en que el pentágono construido cumpla con unas características medibles específicas y no en la construcción de un pentágono generado a partir de un proceso geométrico que no esté basado en medidas.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos indicar que los estudiantes buscan información por fuera de la situación para poder desarrollarla, al igual que con la situación 1 los estudiantes pasan por alto los elementos de ésta, que les brindan herramientas para pensar en un proceso de construcción, es decir, tratan de adecuar la situación con la información que han encontrado por fuera de ella, como se evidencia en la parte resaltada de la transcripción en negrita de la imagen 25, manifiestan que todos los ángulos de un pentágono regular deben medir 108°.

En los datos obtenidos se presenta más de una construcción por cada grupo, se evidencia que el hecho descrito anteriormente es la base para generar el pentágono, exceptuando una construcción del grupo Proskartenesis y una del grupo Suar-art que aunque en su proceso de construcción copia el ángulo menor del triángulo en ningún momento hacen referencia a las medidas, como podemos observar en la transcripción de la imagen 29, específicamente la parte resaltada en negrita, describen cómo trasladan el ángulo.

En unos de los procesos de construcción del grupo suar-art, observamos que este se realiza sin que se tomen medidas de los ángulos, aunque se toma como centro de la construcción el trasladar uno de los ángulos conformado por el lado menor del triángulo y un lado igual del mismo. Esta traslación se genera a partir de la prolongación de dos lados del triángulo, garantizando que en el proceso de construcción se traslade por completo el triángulo, lo que podría verse como una rotación del triángulo inicial, como se observa en las imágenes 30, 31 y 32, los estudiantes prolongan el lado menor y uno de los lados mayores, para posteriormente construir el triángulo inicial, este proceso es repetido en cada uno de los triángulos obtenidos.

Imagen 30

Imagen 31

Imagen 32

En esta construcción se puede identificar el uso de un proceso geométrico recursivo para la generación del pentágono, ya que se toma la información de la situación desarrollando una secuencia de pasos para construir la unidad de referencia con la cual se genera el pentágono, se puede identificar un proceso de unitización se toma como unidad de referencia el triángulo dado y el proceso de construir nuevos triángulos a partir de él, y una normación cuando se analizan los pasos de construcción que generan el pentágono. El reconocimiento de procesos de unitización y normación en las construcciones realizadas, es un avance en la constitución del objeto fractal ya que se empiezan a generar procesos iterativos, lo que permite acercarnos al objeto similaridad. Esto lo podemos observar en la transcripción de la imagen 33, se emplean palabras como ***"así sucesivamente"*** que hacen referencia implícita a un proceso de recursividad.

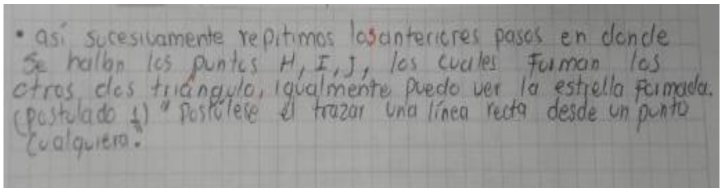

• así sucesivamente repitimos los anteriores pasos en donde se hallan los puntos H, I, J, los cuales forman los otros dos triángulo, igualmente puedo ver la estrella formada. (postulado 1) " Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera."

Imagen 33

Transcripción imagen 33: ***"Así sucesivamente repetimos los anteriores pasos*** *en se hallan los puntos M,I,J, los cuales forman los otros dos triángulos, igualmente puede ver la estrella formada…"*

En las construcciones realizadas podemos identificar un caso en el que un estudiante construye un pentágono sin considerar el triángulo dado y las características de este, como se evidencia en la imagen 34.

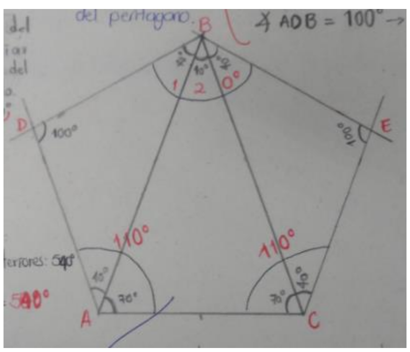


Imagen 34

Se observa que para el estudiante los ángulos mayores del triángulo son de 70° y no de 72°; en la construcción se le pedía generar un pentágono regular y el pentágono construido no es regular, al tener ángulos de 100°, 120° y 110°. Dado que el estudiante no parte de la situación dada para trabajar en la tarea, este llega a construir un pentágono que no cumple con las condiciones pedidas.

Otro proceso de construcción realizado por los estudiantes, estuvo basado en trazar la bisectriz interna de uno de los ángulos del lado menor del triángulo, ya que tomaron la solución de la situación 1, como punto de partida para solucionar lo que se les pedía. Pues se dan cuenta que el triángulo que usaron en la situación 1 está relacionado con el de la nueva situación, al tener los ángulos correspondientes iguales entre sí, esto lo podemos observar en la transcripción de la Imagen 35 específicamente en la parte resaltada en negrita.

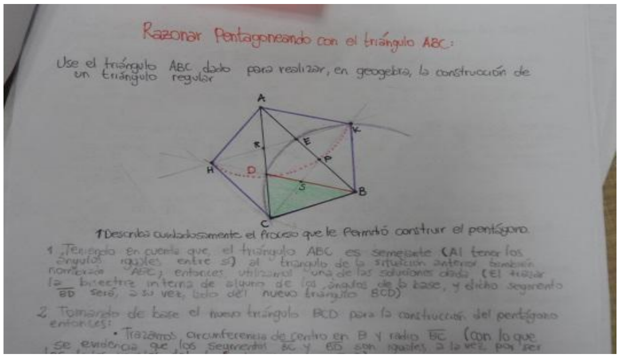
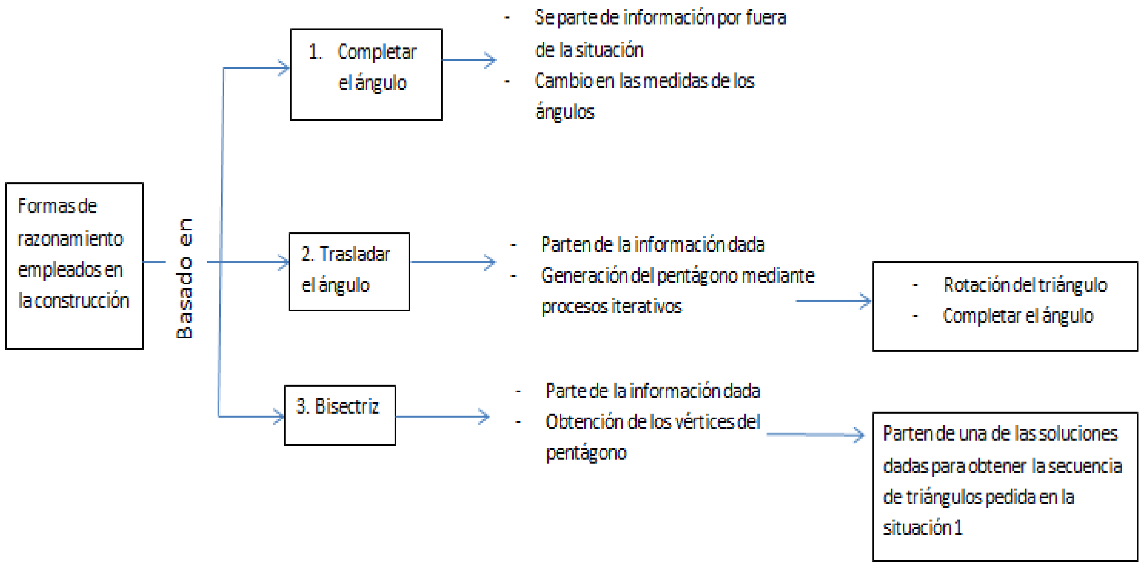


Imagen 35

Transcripción imagen 35: ***"teniendo en cuenta que el triángulo ABC es semejante (al tener los ángulos iguales entre sí), el triángulo de la situación anterior también nombrado ABC****, entonces utilizamos una de las soluciones dada (el trazar la bisectriz interna de alguno de los ángulos de la base, y dicho segmento BD, será su vez lado del nuevo triángulo BCD)"*

A partir de las construcciones dadas por los estudiantes para construir el pentágono podemos identificar tres razonamientos, estos se pueden observar en la ilustración 3, en la primera encontramos los procesos de construcción que se basan en completar el ángulo, refiriéndonos a aquellos que buscan obtener un ángulo de 108° -ángulo interno de un pentágono regular-. Identificamos que los estudiantes buscan información por fuera de la situación indicando que no parten del contexto dado en la situación, lo que generó que un estudiante cambie los ángulos del triángulo y que otros busquen elementos de la matemática formal para trabajar en la situación de tal manera que logren obtener los elementos indagados. Basándonos en esto se busca que los estudiantes logren llegar a un nivel situacional, ya que no están empleando elementos de la situación como herramienta para solucionarla.

Ilustración 5: **Procedimientos empleados en la solución de la situación**



En cuanto al segundo y tercer razonamiento podemos indicar que estos estudiantes parten en un nivel situacional, debido a que su proceso de construcción toma la información dada en la situación, lo que permite que se vayan acercando a un nivel referencial, ya que logran crear un modelo de la situación empleando procesos iterativos obteniendo construcciones como la que se observa en la imagen 32. Aunque los dos procesos de construcción parten de tomar los datos empleados en la situación, la tercera forma de construir el pentágono por parte de los estudiantes requiere un nivel de constitución de los elementos presentes en la situación más alto, ya que no es suficiente los desarrollos que han realizado hasta ahora con los objetos para dar solución a esta nueva situación.

Refiriéndonos a la segunda y tercera tarea propuesta a los estudiantes, las cuales consisten en identificar las relaciones existentes entre el triángulo y el pentágono construido, así como las relaciones entre los triángulos que se forman dentro del pentágono, podemos identificar en referencia al objeto similaridad y el surgimiento del objeto razón áurea lo siguiente:

- Relaciones entre el triángulo y el pentágono: se pretendía que los estudiantes identificaran las siguientes relacione: (1) el lado menor del triángulo es el lado del pentágono regular que se quiere construir, (2) los lados iguales del triángulo son diagonales del pentágono, (3) el lado menor del triángulo con los lados iguales se encuentra en extrema y media razón, así mismo el lado del pentágono con sus diagonales se encuentra en extrema y media razón. Estas relaciones son identificadas por los estudiantes como se puede observar en las transcripciones de las imágenes 36, 37, 38, 39 y 40 en cada una de las imágenes se indica la relación a la cual hace referencia con el número correspondiente.

Transcripción imagen 36: *"las relaciones que podemos plantear entre* ***los lados triángulo y los lados del pentágono, determinan dos diagonales del pentágono construido hablando de los lados del triángulo****."* **(2)**

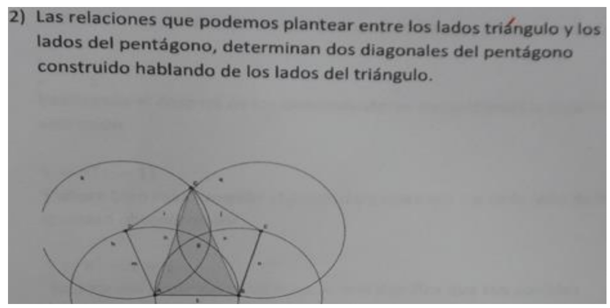


Imagen 36

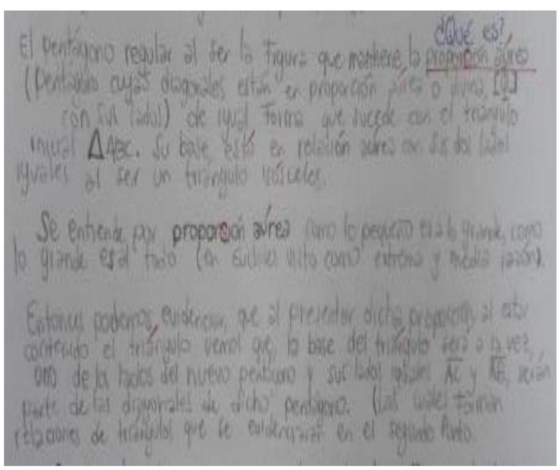


Imagen 37

Transcripción imagen 37: *"****El pentágono regular al ser las figuras que mantienen la proporción áurea (pentágono cuyas diagonales están en proporción áurea o divina (fi) con sus lados de igual forma que sucede con el triángulo inicial ABC, su base está en relación***

áurea con sus lados iguales al ser un triángulo isósceles*"* **(3)**

"entonces podemos evidenciar que al presentar dicha proporción al estar contenido el triángulo tenemos que ***la base del triángulo será a la vez uno de los lados del nuevo pentágono y sus lados iguales AC y AB, serán parte de las diagonales de dicho pentágono.****"*

(1)

Transcripción imagen 38: ***"se puede establecer la siguiente relación AC/BD=BP/PA se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón, cuando la recta entera (AC) es el segmento mayor como el segmento mayor (CP es la segmento menor (PA)"*** **(3)**

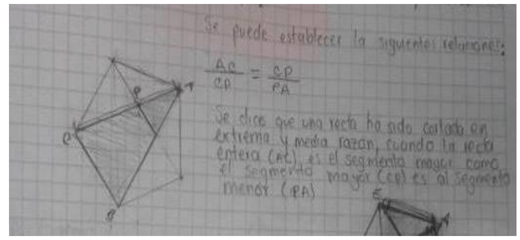


Imagen 38

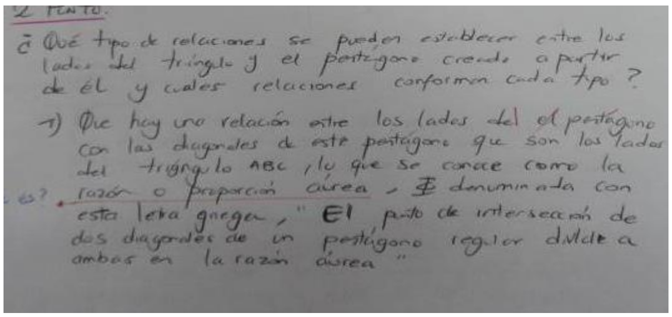


Imagen 39

Transcripción imagen 39: *"Que hay una relación entre los lados del el pentágono con* ***las diagonales de este pentágono que son los lados del triángulo ABC*** **(2)***, lo que se conoce como la razón áurea o proporción áurea...* ***el punto de intersección de dos diagonales de un pentágono regular divide a ambos en la razón áurea"*** **(3)**

Transcripción imagen 40:

*"****en la estrella existe una razón áurea o razón de extrema y media razón, ya que el segmento AC es al segmento JC, como el segmento JC es al segmento JA****, ya que el segmento AC está dividido por paralelas entonces por Ta-les se puede R* ***semejanza o proporción AC/CJ=JC/JA y asi con todos las diagonales que están inscritas en el pentágono"*** **(3)**

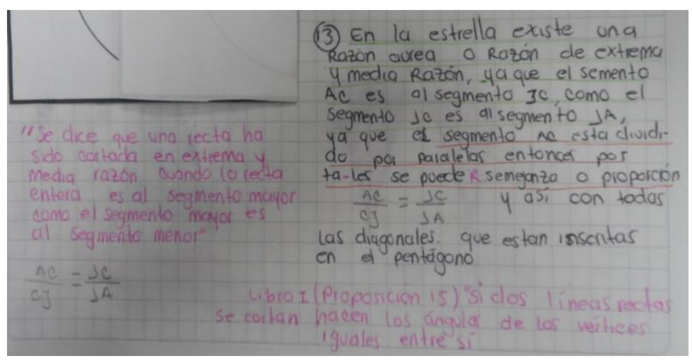


Imagen 40

Con relación a los dos primeros aspectos podemos observar que estos se fueron identificando, gracias al proceso de construcción que realizó cada grupo, dado que los estudiantes lograron identificar que la razón entre los lados del triángulo era la misma que entre los lados del pentágono y sus diagonales, como se evidencia en la parte de la transcripción resaltada en negrita de las imágenes anteriores, al identificar estas relaciones en la situación los estudiantes logran tomar la información más relevante del problema y así hacer explícita la existencia de la proporción áurea, lo cual era uno de los objetivos de la situación.

En cuanto al tercer aspecto se observa que los estudiantes logran identificar la proporción áurea existente entre las relaciones posibles entre los lados del triángulo y el pentágono, sobre esta relación algunos estudiantes intentan justificarla desde el proceso geométrico planteando la proporción existente entre las razones de los segmentos esto se puede observar en las transcripciones de la imagen 38 y 40, otros estudiantes intentan validarla mediante un proceso algebraico como se observa en la trascripción de las imágenes 41, 42, 43 y 44.

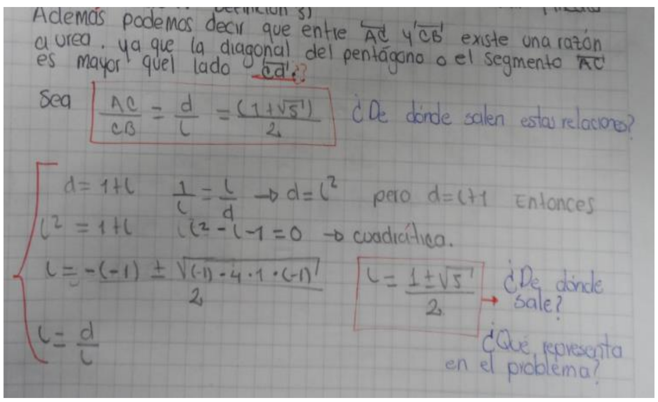


Imagen 41

Transcripción imagen 41: *"además podemos decir que entre AC y CB existe una razón áurea, ya que la diagonal del pentágono o el segmento AC es mayor que el lado CD. Sea* $\frac{AC}{CB}=\frac{d}{l}=\frac{(1+\sqrt{5}}{2}$

$$\boldsymbol{d=1+l\ \frac{1}{l}=\frac{1}{d}\rightarrow d=l^2\ pero\ d=l+1}$$

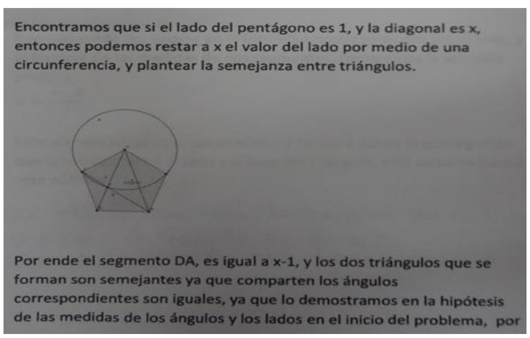
Entonces

$$\boldsymbol{l^2=1+l\ l^2=-l-1=0\rightarrow cuadrática}$$

$$\boldsymbol{l=\frac{-(-1)\mp\sqrt{(-1)-4*1*(-1)}}{2}\ l=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\ l=\frac{d}{l}}$$

Por un lado, algunos estudiantes que plantean desarrollos algebraicos no son claros en demostrar cómo emergen esos planteamientos algebraicos de la situación como por ejemplo los que se observan en la transcripción de la imagen 41, por lo cual podríamos indicar que estos estudiantes al tomar elementos de la matemática formal, moviéndose dentro de una matematización vertical, intentan relacionar la información para crear un modelo de la situación, si lograran generarlo podrían llegar a un nivel referencial.

Por otro lado, un grupo de estudiantes plantea desarrollos algebraicos a partir de la situación, tomando las relaciones que permiten generar dichos planteamientos, validados desde las relaciones establecidas, esto nos indica que los estudiantes se mueven dentro de una matematización horizontal al establecer las relaciones dadas en la situación y en una matematización vertical al establecer elementos formales para describir las relaciones encontradas a partir de la información obtenida en la situación, permitiéndoles moverse dentro de la situación de una manera dinámica, en la cual se pueden remitir a la situación anterior y además avanzar en la solución de la nueva situación (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004), esto se logra identificar en las justificaciones que se observan en la transcripciones de las imágenes 42, 43 y 44.

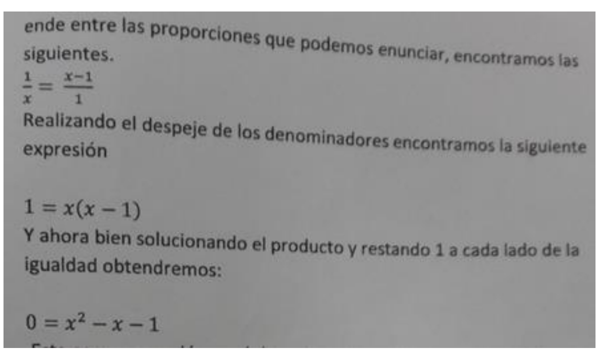


Encontramos que si el lado del pentágono es 1, y la diagonal es x, entonces podemos restar a x el valor del lado por medio de una circunferencia, y plantear la semejanza entre triángulos.

Por ende el segmento DA, es igual a x-1, y los dos triángulos que se forman son semejantes ya que comparten los ángulos correspondientes son iguales, ya que lo demostramos en la hipótesis de las medidas de los ángulos y los lados en el inicio del problema, por

Imagen 42

Transcripción imagen 42: *"encontramos que si el lado del pentágono es 1, y la diagonal es X, entonces podemos restar a x el valor del lado por medio de una circunferencia y plantear la semejanza entre triángulos, por ende el segmento DA, es igual a X-1, y los dos triángulos que se forman son semejantes ya que comparte los ángulos correspondientes son iguales, ya que lo demostramos en la hipótesis de las medidas de los ángulos y los lados en el inicio del problema, por"*



ende entre las proporciones que podemos enunciar, encontramos las siguientes.

$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$

Realizando el despeje de los denominadores encontramos la siguiente expresión

$1 = x(x-1)$

Y ahora bien solucionando el producto y restando 1 a cada lado de la igualdad obtendremos:

$0 = x^2 - x - 1$

Imagen 43

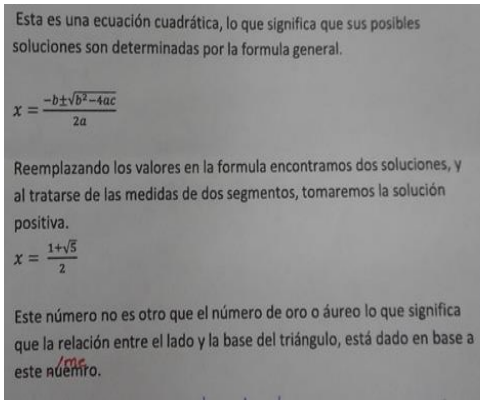
Transcripción imagen 43: *"ende entre las proporciones que podemos enunciar, encontramos las siguientes:*

$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$

Realizando el despeje de los denominadores la siguiente expresión 1=x(x-1)

Y ahora bien solucionando el producto y restando 1 a cada lado de la igualdad obtenemos

$0=x^2-x-1$



Esta es una ecuación cuadrática, lo que significa que sus posibles soluciones son determinadas por la formula general.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Reemplazando los valores en la formula encontramos dos soluciones, y al tratarse de las medidas de dos segmentos, tomaremos la solución positiva.

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Este número no es otro que el número de oro o áureo lo que significa que la relación entre el lado y la base del triángulo, está dado en base a este número.

Imagen 44

Transcripción imagen 44:

Esta es una ecuación cuadrática*, lo que significa que sus posibles soluciones son determinadas por la fórmula general* $X=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

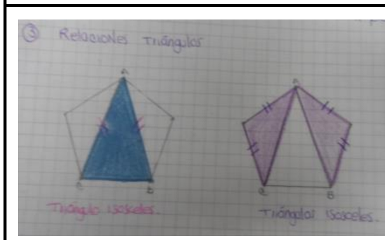
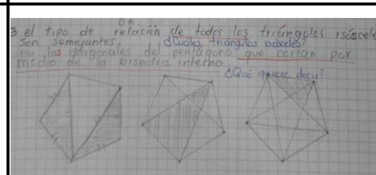
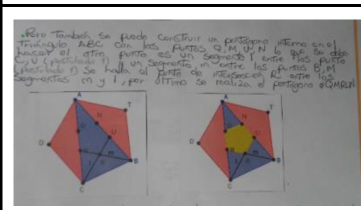
Reemplazando los valores en la fórmula encontramos dos soluciones y el tratarse de las medidas de dos segmentos tomamos la solución positiva

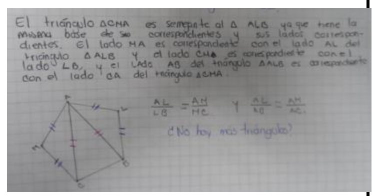
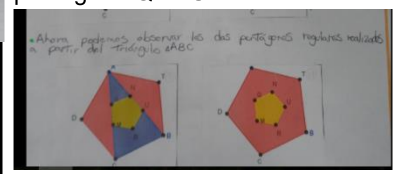
$X=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *Este número no es otro que el número de oro o áureo lo que significa que la relación entre el lado y la base del triángulo, está dado en base a este número.*

Con la identificación de las relaciones anteriores se pretendía fomentar la construcción de todos los triángulos posibles dentro del pentágono, y así identificar triángulos semejantes generados en la construcción, estas relaciones son:

- Relaciones entre los triángulos formados: (1) dentro del pentágono aparecen dos tipos de triángulos isósceles, (2) se generan triángulos semejantes a los dos tipos de triángulos isósceles. Estas relaciones son identificadas por los estudiantes y se observa además que un grupo logra generar un pentágono semejante al pentágono construido (3), en el cuadro 5 se muestran evidencias de las relaciones identificadas por los estudiantes.

Cuadro 5: Relaciones entre los triángulos

1. Dos tipos de triángulos isósceles	2. Triángulos semejantes	3. Pentágonos semejantes
 Imagen 45 Transcripción imagen 45: “relaciones triángulos: triángulos	 Imagen 46 Transcripción imagen 46: “el tipo de relaciones de **<u>todos los</u>**	 Imagen 48 Transcripción imagen 48: “pero también se puede construir un pentágono interno en el triángulo ABC con los puntos Q; M,U, N lo

isósceles”	**<u>triángulos isósceles son semejantes”</u>**  Imagen 47 Transcripción imagen 47: “el triángulo CNA es semejante al ALB ya que tiene la misma base correspondiente y sus lados correspondientes. el lado MA es correspondiente con el lado LB, y el lado AB del triángulo ALB es correspondiente con el lado BA del triángulo CNA”	que se debe hacer el otro punto es un segmento I entre los puntos C, V (postulado 1), y un segmento m entre los puntos B, N (postulado 1) se halla el punto de intersección entre el segmento m y I, por último realizamos el pentágono QMRUN”  Imagen 49 Transcripción imagen 49: “ahora podemos observar los dos pentágonos regulares realizados a partir del triángulo ABC”

Los estudiantes indican que se forman dos tipos de triángulos isósceles, en la mayoría de construcciones se destacan tres triángulos, el triángulo dado y dos triángulos isósceles que comparten un lado con el triángulo dado como se observa en la imagen 45 y 46, son los triángulos a los que hacen mayor referencia los estudiantes, en algunos casos son los únicos triángulos que logran identificar.

En cuanto a las relaciones que establecen entre los triángulos formados se observa que los estudiantes determinan dos grupos de triángulos semejantes, uno triángulo isósceles llamado sublime, de ángulos 72°, 72° y 36° y otros triángulos isósceles obtusángulo de ángulos 36°, 36° y 108°.

Esta acción de identificar triángulos semejantes está relacionada con el objeto similaridad, como se puede identificar en la afirmación realizada en la imagen 46 ***<u>“todos los triángulos isósceles son semejantes”</u>***; logrando identificar triángulos semejantes al triángulo dado dentro del pentágono construido, además los estudiantes identifican que todos los triángulos guardan entre sus lados la razón áurea -con esto justifican que los triángulos son semejantes-, como podemos observar a continuación:

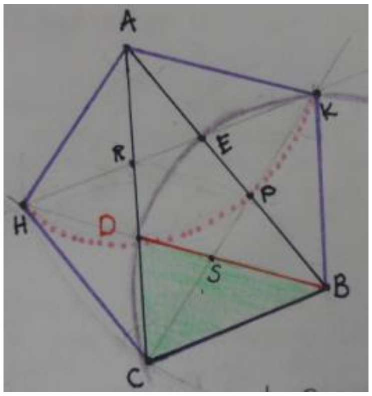


Imagen 51

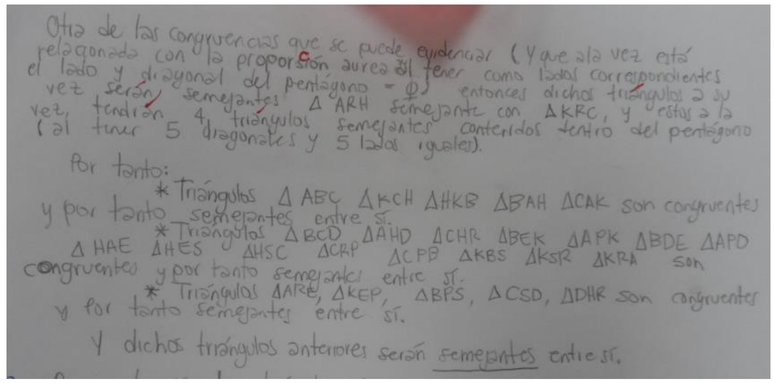


Imagen 50

Transcripción imagen 51: *“otra de las congruencias que se pueden evidenciar (y que a la vez está relacionado con la proporción aurea al tener como lados correspondientes el lado y la diagonal del pentágono) entonces dichos triángulos a su vez serán semejantes ARH semejante con KRC y estos a la vez tendrán 4 triángulos semejantes contenidos dentro del pentágono (al tener 5 diagonales y 5 lados iguales)*

Por tanto:

- *los triángulos ABC, KCH, HKB, BAH, CAK son congruentes y por tanto semejantes entre sí*
- *triángulo BCD, AHD, CHR, BEK, APK, BDE, APD, HAE; HES, HSC, CRP, CPB, KBS, KRA son congruentes y por tanto semejantes entre sí*
- *triángulos ARE, KEP, BPS, CSD, DHR, son congruentes y por tanto semejantes entre si y **dichos triángulos anteriores serán semejantes entre sí**”*

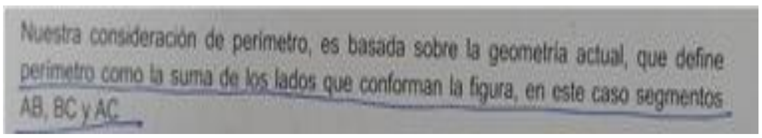
En las afirmaciones realizadas por los estudiantes se puede observar que ellos logran identificar el objeto similaridad en sus construcciones, como podemos observar en la imagen 50 se muestra la representación obtenida y en la imagen 51 las relaciones que se pueden establecer entre los triángulos generados en la construcción, observamos que el estudiante reconoce tres grupos de triángulos isósceles que son semejantes entre sí, siendo el mismo triángulo a diferente escala formado dentro del pentágono –parte resaltada en negrita de la transcripción-, además de estos triángulos los estudiantes identifican que se puede formar un pentágono semejante al pentágono construido como se muestra en las imágenes 48 y 49, convirtiéndose esto en un primer acercamiento para reconocer figuras autosimilares, y como lo menciona (Confrey, 1994) “una estructura similar se construye mediante rompimientos similares repetidos.” y en este caso los estudiantes logran identificar esos rompimientos en la construcción generada.

De manera general en el trabajo realizado por los estudiantes en referencia con la segunda situación, observamos que los objetos similaridad, correspondencia y proporcionalidad se presentan con mayor dominio, lo que nos indica que se ha avanzado en la reconstitución de estos objetos, además los estudiantes logran reconocer a partir de la exploración de la situación, que un proceso de construcción puede ser visto como un algoritmo generador. Este hecho es relevante ya que hace parte fundamental de la constitución de la fenomenología del objeto fractal planteada para el desarrollo de esta propuesta de aprendizaje. Por lo cual la tercera situación hace hincapié en el reconocimiento de este objeto.

5.3 Situación 3 (Argumentando desde lo dado): esta situación requería que los estudiantes llevarán a cabo tres tareas, la primera consistía en construir un segmento igual al perímetro del triángulo dado, y a partir de él, generar triángulos semejantes al triángulo dado; la segunda tarea consistía en que a partir de cualquier segmento $\overline{AB}$ construir triángulos semejantes al triángulo dado y la tercera argumentar cuál de las dos situaciones requería una mayor carga cognitiva.

Para el desarrollo del análisis consideramos elementos empleados por los estudiantes en relación con las dos primeras tareas, principalmente aquellos relacionados con el objeto semejanza y la generación de figuras autosimilares. En cuanto a la tercera tarea consideramos la reflexión realizada sobre identificar cuál de las tareas anteriores requiere mayor carga cognitiva.

En cuanto al desarrollo de la primera tarea observamos en las construcciones realizadas, que los estudiantes logran construir un segmento igual al perímetro del triángulo dado, el proceso empleado por los tres grupos es el mismo, sin embargo, al generar triángulos semejantes los procedimientos empleados son diferentes. El proceso de construcción dado por los tres grupos parte de la definición de perímetro, como se puede observar en la parte de la transcripción de la imagen 52 que está resaltada en negrita.



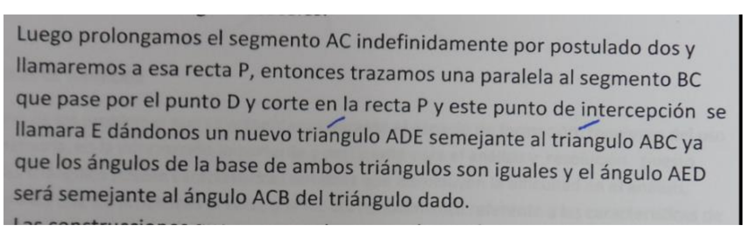
Nuestra consideración de perímetro, es basada sobre la geometría actual, que define perímetro como la suma de los lados que conforman la figura, en este caso segmentos AB, BC y AC

Imagen 52

Transcripción imagen 52: *"nuestra consideración de perímetro es basada sobre la geometría actual, que* ***define perímetro como la suma de los lados que conforman la figura****, en este caso segmento AB,BC y AC"*

Partiendo de esta definición, la forma de construir el segmento es prolongar el lado menor del triángulo y trasladar los lados iguales del triángulo en dicho segmento, se puede observar que esta primer parte de la tarea no les causó gran dificultad, ya que se apoyaron en la definición formal y en algunas proposiciones del libro Elementos, empleándolas de manera que les permitiera cumplir con una de las condiciones de la tarea.

Otro aspecto relevante de esta primer tarea, está relacionado con construir un triángulo semejante al dado, con relación a esto se observa que ya no se toma tan a la ligera la construcción de triángulos semejantes, puesto que van realizando la construcción verificando que se cumpla alguno de los criterios de semejanza, esto se puede observar en la imagen 53 en la parte de la transcripción resaltada en negrita, se hace alusión al criterio de semejanza: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.



Luego prolongamos el segmento AC indefinidamente por postulado dos y llamaremos a esa recta P, entonces trazamos una paralela al segmento BC que pase por el punto D y corte en la recta P y este punto de intercepción se llamara E dándonos un nuevo triángulo ADE semejante al triángulo ABC ya que los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales y el ángulo AED será semejante al ángulo ACB del triángulo dado.

Imagen 53

Transcripción imagen 53: *"dándonos un nuevo triángulo ADE semejantes al triángulo ABC* ***ya que los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales y el ángulo AED será semejante el ángulo ACB del triángulo dado****"*

En la segunda tarea observamos que los estudiantes en algunos casos omiten algunos de los requisitos de la situación, por ejemplo, un grupo emplea la solución de la primera tarea sin considerar que la construcción debe partir de un segmento cualquiera, otro genera triángulos semejantes entre sí pero no semejantes al triángulo dado, como se expone a continuación.

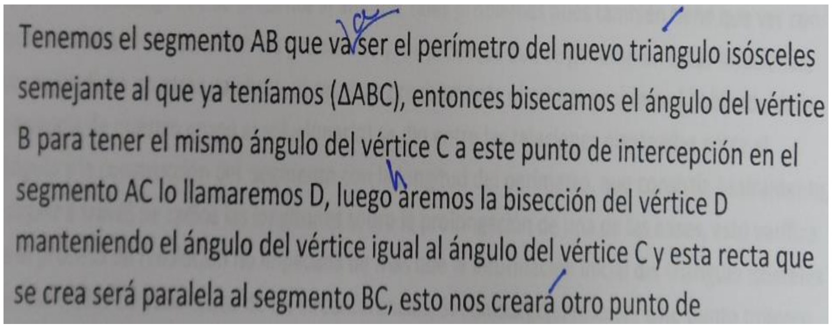

Tenemos el segmento AB que va ser el perímetro del nuevo triangulo isósceles semejante al que ya teníamos (ΔABC), entonces bisecamos el ángulo del vértice B para tener el mismo ángulo del vértice C a este punto de intercepción en el segmento AC lo llamaremos D, luego aremos la bisección del vértice D manteniendo el ángulo del vértice igual al ángulo del vértice C y esta recta que se crea será paralela al segmento BC, esto nos creará otro punto de

Imagen 54

Transcripción imagen 54: "tenemos el segmento AB que va a ser el perímetro del nuevo triángulo isósceles semejante al que ya teníamos (ABC), entonces bisecamos el ángulo del vértice B para tener el mismo ángulo del vértice C a este punto de intersección en el segmento AC lo llamaremos D, luego aremos la bisección del vértice D…"

En la transcripción de la imagen 54 se evidencia que los estudiantes construyen triángulos semejantes al triángulo dado partiendo del segmento igual al perímetro del triángulo dado, la tarea requería que construyeran triángulos semejantes al triángulo dado partiendo de un segmento cualquiera, indicando que el procedimiento planteado no se hace de manera general, sólo se emplean los datos dados en la situación.

Otro grupo de estudiantes da un procedimiento muy general sin emplear los datos del problema obteniendo triángulos semejantes entre sí, sin embargo estos triángulos no son semejantes al triángulo dado. En la imagen 55 se observa la construcción realizada por los estudiantes.

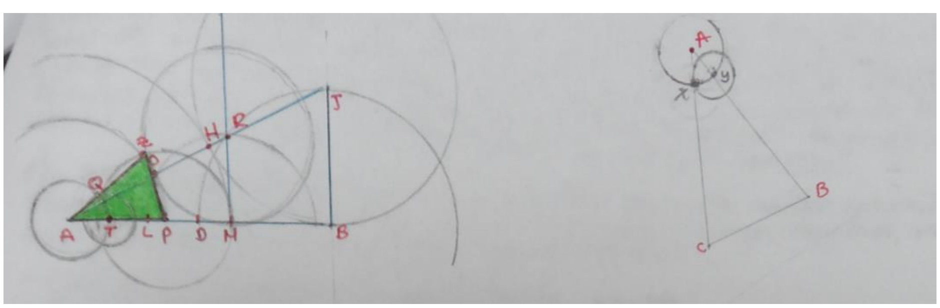
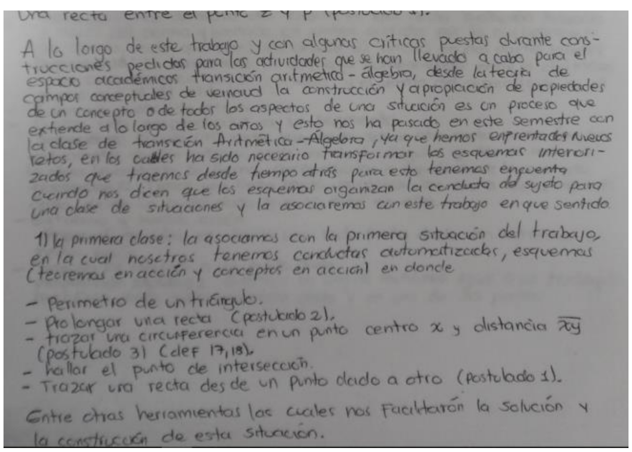


Imagen 55

Observamos en la imagen 55 que los triángulos semejantes entre sí son triángulos rectángulos y no triángulos isósceles como el triángulo dado, el triángulo dado aparece en la parte derecha de la imagen.

Al desarrollar la segunda tarea se evidencia una falta de consideración de los datos del problemas, como se ha mencionado, pero al momento de realizar la tercera tarea, los estudiantes realizan una reflexión y logran reconstruir su proceso, en cuanto al uso de los distintos objetos mentales que les permiten realizar las tareas, como se observa en las imágenes 56 y 57.

El proceso de reflexión realizado por los estudiantes considerando las diferentes sesiones de clase, evidencian sus avances en el desarrollo de las tareas, reconociendo que esos objetos mentales involucrados en cada tarea se convierten en una herramienta que les permite desarrollar con mayor eficiencia la tarea propuesta, como se evidencia en la parte resaltada en negrita en la transcripción de la imagen 56 los estudiantes hacen mención al uso de teoremas y conceptos como herramientas que les facilitan llevar a cabo la tarea.


A lo largo de este trabajo y con algunas críticas puestas durante construcciones pedidas para las actividades que se han llevado a cabo para el espacio académicos transición aritmetica - álgebra, desde la teoría de campos conceptuales de vergnaud la construcción y apropiación de propiedades de un concepto o de todos los aspectos de una situación es un proceso que extiende a lo largo de los años y esto nos ha pasado en este semestre con la clase de transición Aritmética - Álgebra, ya que hemos enfrentados nuevos retos, en los cuales ha sido necesario transformar los esquemas interiorizados que traemos desde tiempo atrás para esto tenemos encuenta cuando nos dicen que los esquemas organizan la conducta del sujeto para una clase de situaciones y la asociaremos con este trabajo en que sentido

1) la primera clase: la asociamos con la primera situación del trabajo, en la cual nosotros tenemos conductas automatizadas, esquemas (teoremas en acción y conceptos en acción) en donde

- Perimetro de un triángulo.
- Prolongar una recta (postulado 2).
- trazar una circunferencia en un punto centro x y distancia $\overline{xy}$ (postulado 3) (def 17, 18).
- hallar el punto de intersección.
- Trazar una recta desde un punto dado a otro (postulado 1).

Entre otras herramientas los cuales nos Facilitarón la solución y la construcción de esta situación.

Imagen 56

Transcripción imagen 56: *"1) la primer clase. la asociamos con la primer solución del trabajo en el cual nosotros tenemos conductas automatizadas,* ***esquemas (teoremas en acción y conceptos en acción) en donde:***

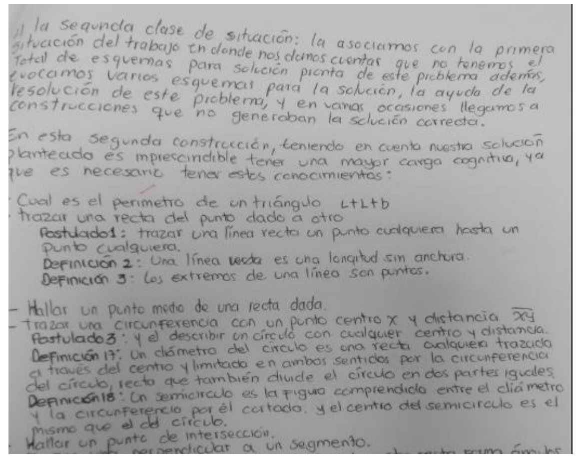
- ***perímetro de un triángulo***
- ***prolongar una recta (postulado 2)...***

entre otras herramientas las cuales nos facilitaron la solución y construcción de esta situación*"*

Transcripción imagen 57:

“la segunda clase de situación: la asociamos con la primera situación del trabajo en donde nos dimos cuenta que no tenemos el total de esquemas para la solución pronta de este problema además, evocamos varios esquemas para la solución, la ayuda para la resolución de este problema, y en varias ocasiones llegamos a construcciones que no generaban la solución correcta.

En esta segunda construcción, teniendo en cuenta nuestra solución planteada es imprescindible tener mayor carga cognitiva, ya que es necesario tener estos conocimientos…”


la segunda clase de situación: la asociamos con la primera situación del trabajo en donde nos damos cuentas que no tenemos el total de esquemas para solución pronta de este problema además, evocamos varios esquemas para la solución, la ayuda de la resolución de este problema, y en varias ocasiones llegamos a construcciones que no generaban la solución correcta.

En esta segunda construcción, teniendo en cuenta nuestra solución planteada es imprescindible tener una mayor carga cognitiva, ya que es necesario tener estos conocimientos:

- Cual es el perimetro de un triángulo L+L+b
- trazar una recta del punto dado a otro
  - Postulado 1: trazar una línea recta un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
  - Definición 2: Una línea recta es una longitud sin anchura.
  - Definición 3: Los extremos de una línea son puntos.
- Hallar un punto medio de una recta dada.
- trazar una circunferencia con un punto centro x y distancia $\overline{xy}$
  - Postulado 3: y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
  - Definición 17: Un diámetro del circulo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.
  - Definición 18: Un semicirculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada, y el centro del semicirculo es el mismo que el del círculo.
  - punto de intersección.
- Hallar un punto perpendicular a un segmento.

Imagen 57

Los estudiantes logran generar triángulos semejantes en una situación que les permite tener mayor libertad en elegir el procedimiento, sin embargo al darles más condiciones, limitando sus formas de proceder como se evidencia en la segunda tarea, los estudiantes no logran generalizar los objetos mentales de tal forma que puedan ser empleados en otras situaciones, observamos que para los estudiantes el desarrollo de la primer tarea fue más fácil y en la segunda, poder dar un procedimiento que genere triángulos semejantes les resulta más complejo como ellos mismos afirman ***“dado que en el primero abordamos situaciones conocidas y se resuelven fácilmente por un proceso iterativo de suma de segmentos … en cambio, el segundo mezcla elementos tratados en el primer problema”*** esto lo podemos observar en la transcripción de la imagen 58 resaltado en negrita.

La reflexión realizada por los estudiantes surge al identificar cuál de las dos tareas anteriores tiene mayor carga cognitiva como se observa en la transcripción de la imagen 58, los grupos identifican que la segunda tarea tiene mayor carga cognitiva, ya que asocian la carga cognitiva con requerir mayor uso de objetos mentales en la solución de la situación así como el uso de razonamientos traídos a colación en situaciones anteriores.

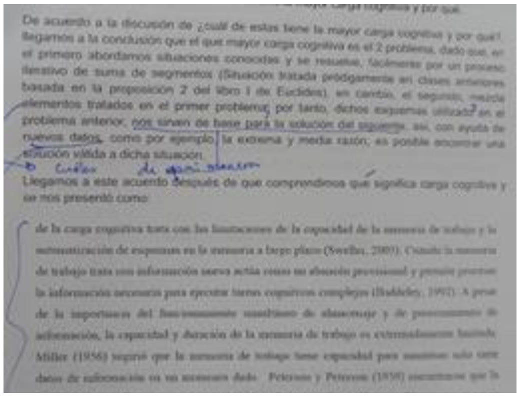


Imagen 58

Transcripción imagen 58: *"De acuerdo con la discusión de ¿cuál de las dos tiene mayor carga cognitiva y por qué? llegamos a la conclusión que el que* ***mayor carga cognitiva es el 2 problema, dado que en el primero abordamos situaciones conocidas y se resuelven fácilmente por un proceso iterativo de suma de segmentos … en cambio, el segundo mezcla elementos tratados en el primer problema*** *por tanto, dichos esquemas utilizados en el problema anterior , nos sirven de base para la solución del siguiente, así, con ayuda de nuevos datos, como por ejemplo la extrema y media razón, es posible encontrar una solución válida a dicha situación.*

Al observar los resultados obtenidos de las tres tareas en relación con los niveles progresivos de matematización, estos indican que los estudiantes hasta este momento logran ser conscientes que es necesario dar formalidad en cuanto al correcto uso del lenguaje matemático y mayor coherencia en el uso y aplicación de los objetos mentales al desarrollar las tareas propuestas en la situación. Lo que lleva a decir que los estudiantes han logrado avanzar en cuanto a su proceso de matematización, al ser capaces de reflexionar y explorar sobre los elementos empleados en las situaciones anteriores que les son útiles, así como la necesidad de constituir nuevos elementos para desarrollar las tareas que se requerían en la situación.

Sin embargo, en cuanto a la constitución de los objetos mentales en esta actividad no se logra generar un avance significativo, ya que los estudiantes no generan nuevos objetos mentales a los ya construidos en actividades anteriores, sin lograr llegar a la generalización y apropiación de estos.

El trabajo de los estudiantes en las situaciones 1 a 3, requirió generar una resignificación de los objetos mentales involucrados, por lo cual, su desarrollo tomó un tiempo mayor al esperado, por ejemplo, en el desarrollo de la primer situación se necesitaron cerca de tres semanas de trabajo y reflexión entre los estudiantes, para llegar a acuerdos en el uso del lenguaje matemático, las formas de justificar, ya que tenían dificultad en plasmar las ideas desarrolladas en clase de manera escrita. Paulatinamente los estudiantes fueron mejorando en los aspectos anteriormente mencionados en el trabajo de las situaciones 2 y 3, cuyo desarrollo tomó cerca de tres semanas más.

Al ir avanzando en la constitución de los objetos mentales presentes a lo largo de las situaciones, se intenta explicitar los cuatro objetos mentales propuestos para constituir el objeto fractal en el desarrollo de la situación 4.

5. 4 Situación 4 (plausibilidad de la teoría de la evolución): con esta situación se pretendía constituir el objeto fractal a través de sus características considerando el trabajo realizado desde las situaciones anteriores. En la situación se les planteó un caso en el que se discutía la mejor forma en la que debería crecer un árbol, de tal manera que sus hojas y ramas aprovechasen la luz solar de manera óptima. Para que los estudiantes pudieran realizar fácilmente exploraciones del comportamiento de un árbol se les enseñó a crear herramientas en el recurso Geogebra.

De acuerdo con los datos obtenidos en la situación se pudo observar que los tres grupos exploraron con el recurso geogebra, en lo realizado se observa que primeramente empezaron a variar la razón entre los segmentos que representan las ramificaciones del árbol, para observar cómo se daba el comportamiento de este en cuanto a su crecimiento al realizar varias ramificaciones. Los estudiantes observan que las ramas en algunos casos se solapan y al buscar una forma de evitar este comportamiento buscan la razón en que se deben encontrar las ramas del árbol.

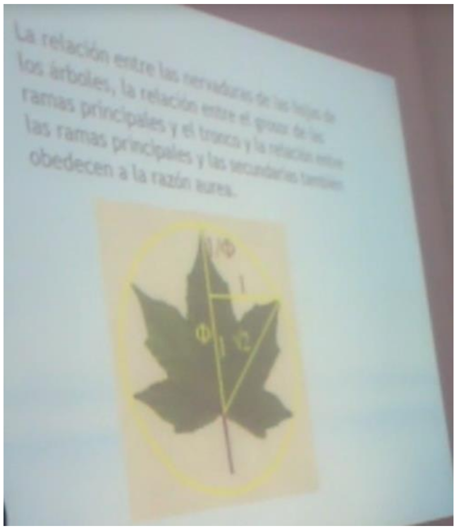
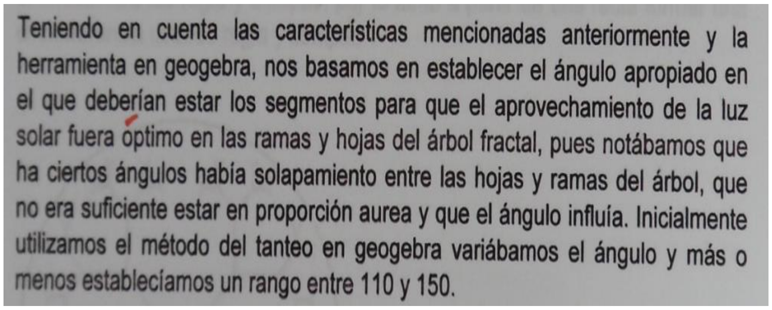


Imagen 59

Transcripción imagen 59: *"la relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles, la relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, la relación entre las ramas principales y las secundarias también obedecen a la razón áurea"*

Los estudiantes buscan información sobre relaciones que se pueden establecer en el crecimiento de plantas, como se observa en la transcripción de la imagen 59 se expresan relaciones entre las diferentes partes del árbol como las hojas, las ramas y el tallo, considerando el tamaño y el grosor entre estos, lo que lleva a encontrar que una vez más la razón áurea está presente, por ende los estudiantes construyen las ramificaciones del árbol manteniendo su crecimiento en razón áurea, lo que parece solucionar el solapamiento de las ramas, y de esta manera se lograría obtener un mejor aprovechamiento de la luz solar.

Sin embargo, al realizar iteraciones del crecimiento del árbol considerando lo anterior, los estudiantes observan que luego de varias iteraciones, las ramas se siguen solapando, por lo cual mantener el crecimiento a razón áurea no es suficiente, esto los lleva a considerar el ángulo formado entre las ramas, como se puede observar en la transcripción de la imagen 60, específicamente en las partes resaltadas en negrita hacen alusión a la influencia del ángulo en la construcción del árbol.



Teniendo en cuenta las características mencionadas anteriormente y la herramienta en geogebra, nos basamos en establecer el ángulo apropiado en el que deberían estar los segmentos para que el aprovechamiento de la luz solar fuera óptimo en las ramas y hojas del árbol fractal, pues notábamos que ha ciertos ángulos había solapamiento entre las hojas y ramas del árbol, que no era suficiente estar en proporción aurea y que el ángulo influía. Inicialmente utilizamos el método del tanteo en geogebra variábamos el ángulo y más o menos establecíamos un rango entre 110 y 150.

Imagen 60

Transcripción imagen 60:

"teniendo en cuenta las características mencionadas anteriormente y la herramienta geogebra, ***nos basamos en establecer el ángulo apropiado en el que deberían estar los segmentos*** *para que el aprovechamiento de la luz solar fuera óptimo en las ramas y hojas del árbol fractal, pues* ***notábamos que ha ciertos ángulos había solapamiento entre las hojas y ramas del árbol, que no era suficiente estar en proporción áurea y que el ángulo influía.*** *inicialmente utilizamos el método de tanteo en geogebra variábamos el ángulo y más o menos establecíamos un rango entre 110 y 150.*

Al realizar indagaciones en referencia al ángulo, los estudiantes encuentran que la razón áurea se puede relacionar con el ángulo, ya que éste se forma con segmentos que se encuentran en razón áurea, en la imagen 61 se observa el proceso de cómo hayan el ángulo áureo y en la parte de la transcripción resaltada en negrita se menciona que al construir el árbol manteniendo el ángulo áureo se evita el solapamiento de las ramas.

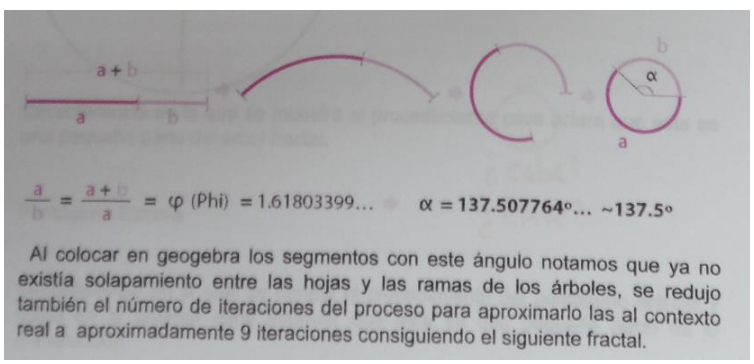


Imagen 61

Transcripción imagen 61:

*"****Al colocar en geogebra los segmentos con este ángulo notamos que ya no existía solapamiento entre las hojas y las ramas de los árboles,*** *se redujo también el número de iteraciones del proceso para aproximarlo las al contexto real a aproximadamente 9 iteraciones consiguiendo el siguiente fractal."*

Al unir las dos características, como lo son el mantener las ramas a un crecimiento en razón áurea y que el ángulo formado por estas sea áureo, los estudiantes logran construir el árbol de tal manera que se cumpla con las condiciones pedidas en la situación.

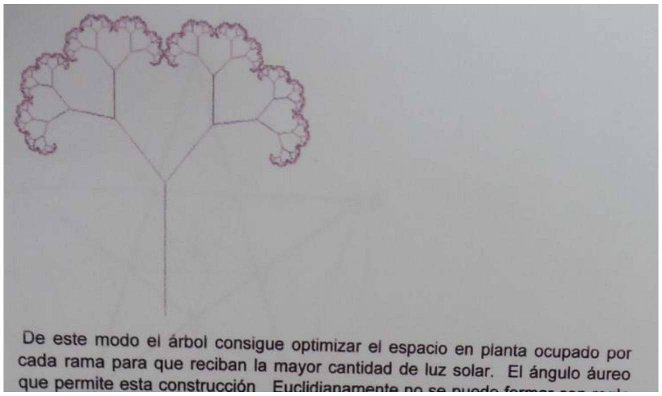


Imagen 62

Transcripción imagen 62: *"De este modo el árbol consigue optimizar el espacio en planta ocupado por cada rama para que reciban la mayor cantidad de luz solar…"*

En esta situación observamos que para lograr construir un árbol que cumpliera con las condiciones pedidas, fue necesario que los estudiantes buscarán datos presentes en la naturaleza, llegando a encontrar que mediante el objeto fractal se logran comprender muchas de las estructuras naturales, al ser relevante los estudiantes indagan sobre este objeto, reconociendo algunas características que les permiten comprender el contexto de la situación. Las características abordadas hacen que se evoquen objetos mentales trabajados en situaciones anteriores como la autosimilaridad, los procesos de recursividad y la razón áurea. En las imágenes 63 y 64 se observa que los estudiantes hacen mención al objeto autosimilaridad que organiza a los fractales en general (imagen 63) y específicamente el árbol (imagen 64).

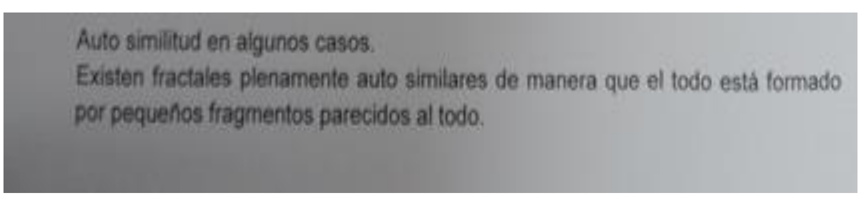

Auto similitud en algunos casos.
Existen fractales plenamente auto similares de manera que el todo está formado por pequeños fragmentos parecidos al todo.

Imagen 63

Transcripción imagen 63: *"Auto similitud en algunos casos.*

existen fractales plenamente auto similares de manera que el todo está formado por pequeños fragmentos parecidos al todo"

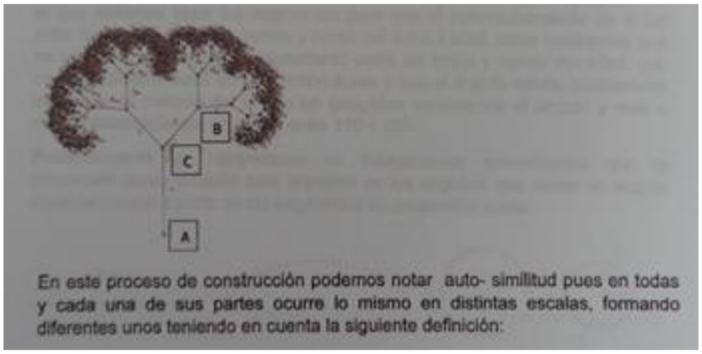
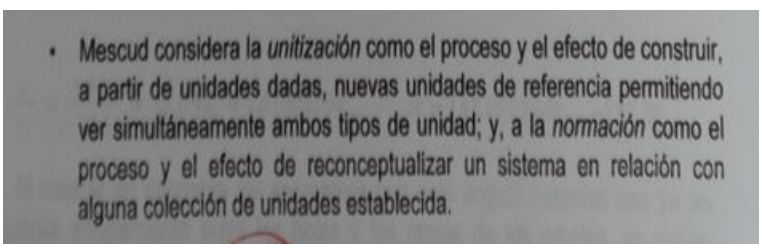


Imagen 64

Transcripción imagen 64: *"En este proceso de construcción podemos notar auto-similitud pues en todas y cada una de sus partes ocurre lo mismo en distintas escalas, formando..."*

Al identificarse la autosimilaridad como uno de los objetos que organizan el objeto fractal los estudiantes a través del proceso de construcción identifican otros objetos presentes en la situación que están vinculados a procesos de unitización que permiten constituir el objeto autosimilaridad; estos se presentan al reconocer que en el árbol cada rama puede ser tomada como una unidad generada a partir de la inmediatamente anterior y que a su vez permite generar la rama siguiente, de acuerdo con la definición que toman mostrada en la imagen 65 la forma en que se generan las ramas puede ser reconocida como un proceso de unitización y normación, objetos que ayudan a constituir el objeto autosimilaridad.



- Mescud considera la *unitización* como el proceso y el efecto de construir, a partir de unidades dadas, nuevas unidades de referencia permitiendo ver simultáneamente ambos tipos de unidad; y, a la *normación* como el proceso y el efecto de reconceptualizar un sistema en relación con alguna colección de unidades establecida.

Imagen 65

Transcripción imagen 65: *"Mescud considera la unitización como el proceso y el efecto de construir a partir de unidades dadas, nuevas unidades de referencia permitiendo ver simultáneamente ambos tipos de unidad, y , a la normación como el proceso y el efecto de conceptualizar un sistema en relación con alguna colección de unidades establecidas".*

En la situaciones 1 a 3 se trabaja implícitamente con procesos de normación y unitización, así como la autosemejanza y procesos de recursión; además en cada una de ellas la razón áurea es un elemento fundamental con el cual los estudiantes se han familiarizado, como ya se ha podido evidenciar en los resultados de las situaciones anteriores. En la situación 4 el uso de estos objetos se hace explícito, ya que la situación requería que los estudiantes emplearán los elementos ya constituidos para poder abordarla de una manera más natural.

A lo largo del desarrollo de estas 4 situaciones paulatinamente se ha logrado constituir dos de los aspectos mencionados para el desarrollo de esta propuesta de aprendizaje que permiten constituir el objeto fractal, iteración y formas autocontenidas; de los dos aspectos restantes sólo se logra abordar en el desarrollo de esta situación de manera implícita la convergencia al surgir inquietudes referentes al papel de la razón áurea en el árbol construido, la relación que se puede establecer entre el árbol y el conjunto de cantor[15], en cuanto al aspecto densidad no se logra trabajar a lo largo de la propuesta de aprendizaje.

Anteriormente hemos mencionado los resultados obtenidos en cuanto a las formas autocontenidas mediante la autosimilitud presente en el árbol, a continuación mostramos los resultados obtenidos en cuanto a la convergencia, aclaramos que fue un aspecto que no se trabajó explícitamente y los datos obtenidos surgen de ideas mencionadas por los estudiantes que no fueron desarrolladas en su totalidad, debido al tiempo en el que se estaba aplicando esta situación, pues el espacio de formación en el que se desarrolló la propuesta de aprendizaje estaba por culminar el calendario académico, además del largo tiempo dedicado a las primeras situaciones en la constitución de los objetos semejanza, proporcionalidad y correspondencia que eran importantes para poder constituir el objeto fractal.

En la imagen 66 observamos la relación que los estudiantes dan entre un segmento dividido en extrema y media razón con el tronco y las ramas del árbol, que cumplen con esa misma razón, además en la transcripción se identifica una idea de convergencia al indicar que la suma de la longitud de las ramas es igual a uno, por lo cual converge a uno, esta afirmación surge a partir de preguntarles a

[15] el conjunto de cantor aparece al trabajar sobre aspectos generales de los fractales, en una exposición realizada por las investigadoras como un ejemplo de fractal usual y se realizan algunos desarrollos algorítmicos con el fin de afianzar algunos conceptos, mostrando el comportamiento fractal de este conjunto.

los estudiantes, por ejemplo, ¿si al sumar la longitud de las ramas y el tronco del árbol en un proceso infinito se lograría obtener un valor finito?.

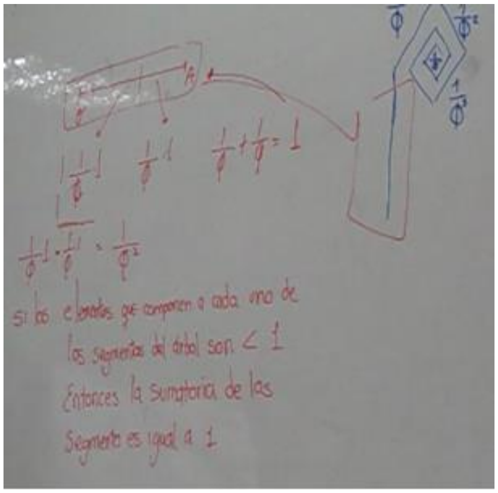


Imagen 66

Transcripción imagen 66: *"si los elementos que componen a cada uno de los segmentos del árbol son < 1, entonces la sumatoria de los segmentos es igual a 1"*

Este grupo de estudiantes intenta desarrollar un procedimiento algorítmico similar al que se había desarrollado con el conjunto de Cantor, sin embargo se identifica que la afirmación realizada es errónea, posteriormente un estudiante desarrolla un proceso algorítmico que evidencia el error al que se había llegado, el procedimiento realizado por el estudiante se muestra en las siguientes imágenes 67 y 68:

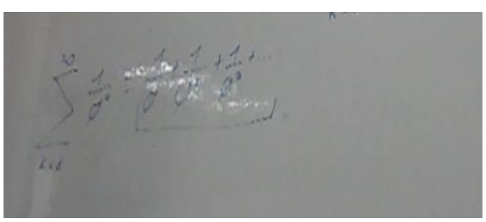


Imagen 67

Transcripción imagen 67:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^3} + \cdots$$

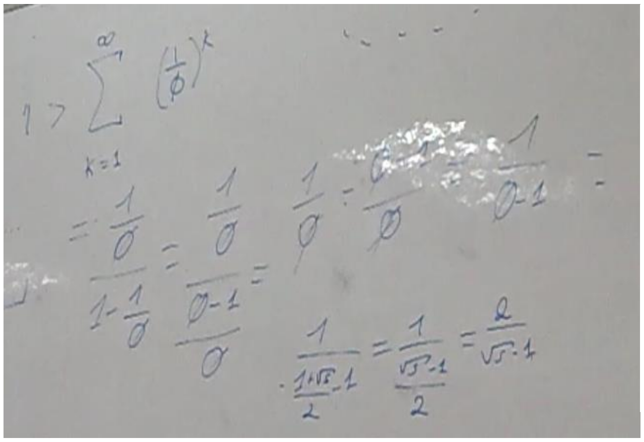


Imagen 68

Transcripción imagen68:

$$1 > \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^k$$

$$= \frac{\frac{1}{\varphi}}{1-\frac{1}{\varphi}} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{\varphi-1}{\varphi}} = \frac{1}{\varphi} \div \frac{\varphi-1}{\varphi} \dots$$

En la imagen 68 se muestra el desarrollo algorítmico de la idea expuesta por el estudiante, indica que la sumatoria de todas las longitudes de las ramas es mayor a uno, concluyendo que el valor al que se llega no es otro que el número φ demostrando de esa manera que la primera afirmación que se había realizado es falsa, es decir, la afirmación que la suma de la medida de los segmentos que conforman el árbol es igual a 1 es errónea y se concluye que aunque se tiene un proceso infinito de sumas el valor al que se llega es un valor determinado.

A partir de lo anterior se podría decir que los estudiantes al tener en cuenta que la razón existente entre las ramificaciones del árbol es (1/ φ), y al referirse a ***"los elementos que componen a cada uno de los segmentos del árbol",*** -parte de la trascripción de la imagen 68 resaltado en negrita-, se refieren a cada una de las razones que hay entre los segmentos (ramas) del árbol, y al afirmar que estas razones son menores que 1,va a tender a un determinado valor, en este caso ellos postulan que ese valor va ser 1, puesto que toman el tronco del árbol como la unidad.

Con un desarrollo más profundo de esto, se hubiese podido empezar a hablar sobre las propiedades de la convergencia en este caso haber hecho referencia a que si la razón de la serie es menor que uno la serie converge a un determinado valor, y también hacer hincapié en que aunque se parte de la unidad no siempre la serie convergerá a 1, esto se puede observar en las imágenes 67 y 68.

Al finalizar el trabajo realizado en la situación cuatro, se empieza a generar discusiones que llevan a reflexionar si los aspectos del objeto fractal se habían trabajado en situaciones anteriores, reconociendo que principalmente los aspectos como la iteración y las formas autocontenidas han estado presentes a lo largo del trabajado, además se les pide que intenten generar un sistema de referencia que les permita hablar sobre lo que han encontrado y para esto se les pide a los estudiantes que vuelvan a abordar algunas de las situaciones anteriores identificando estos objetos mentales.

A continuación analizamos los datos obtenidos a partir de la identificación de las características del objeto fractal realizada por los estudiantes sobre las tres primeras situaciones. En cuanto a las formas autocontenidas los estudiantes desarrollan representaciones de las soluciones dadas a las situaciones, ya que reconocen que el proceso geométrico con el cual daban solución a la situación se convierte en su patrón de iteración, mediante el cual obtienen la misma figura a diferentes escalas.

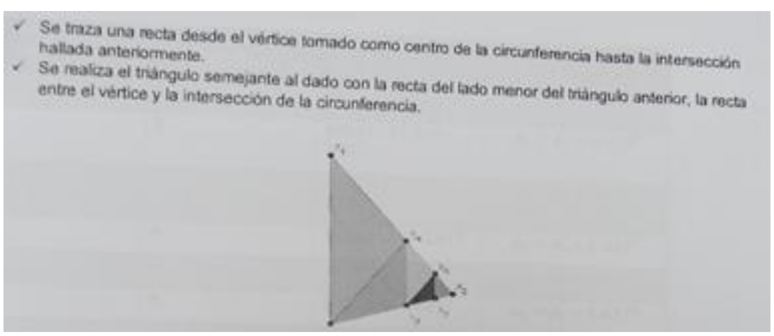


Imagen 69

Transcripción imagen 69: *"-- se traza una recta desde el vértice tomando como centro de la circunferencia hasta la intersección hallada anteriormente*

-se realiza el triángulo semejante al dado con la recta del lado menor del triángulo anterior, la recta entre el vértice y la intersección de la circunferencia."

Se observa en la transcripción de la imagen anterior (imagen 69) los pasos que se deben seguir para poder construir la secuencia de triángulos pedida, en la imagen se observa que al reiterar ese procedimiento se van creando triángulos cada vez más pequeños, que son semejantes entre sí, evidenciando que efectivamente los estudiantes logran reconocer la presencia de un patrón de iteración así como la obtención de formas autocontenidas, por lo tanto figuras geométricas escalantes.

Cuando se habla de la palabra escalante se hace referencia a la definición que da (Maldenbrot 2000), la cual es: “Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el otro, salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas”.

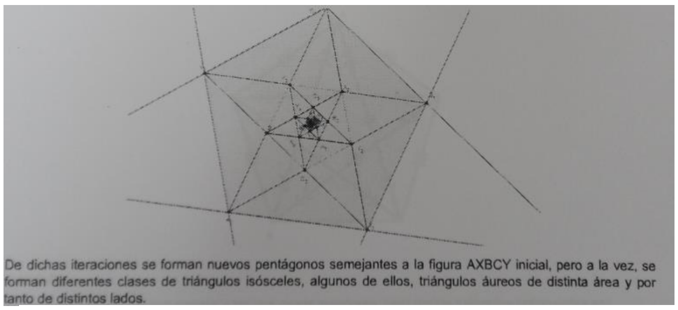


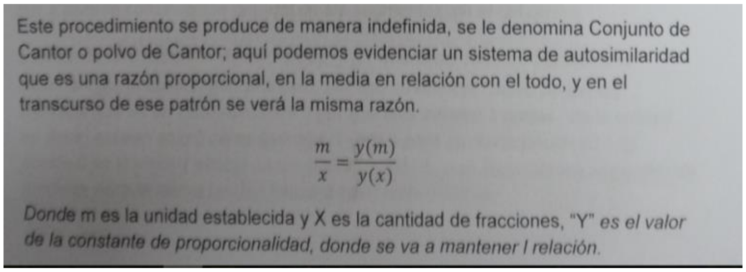
Imagen 70

Transcripción imagen 70:”de dichas iteraciones se forman nuevos pentágonos semejantes a la figura AXBCY inicial, pero a la vez se forman diferentes clases de triángulos isósceles, algunos de ellos triángulos áureos de distintas áreas y por tanto de distintos lados”

El reconocimiento de figuras escalantes, al iterar los pasos de la construcción dentro de la misma figura, no sólo se da en la primera situación, también la logran identificar en la situación dos como se observa en la imagen anterior (imagen 70) esto también indica que en cuanto el avance en la matematización de las situaciones se ha progresado significativamente y que objetos como semejanza han sido constituidos satisfactoriamente.

Puesto que al identificar las formas autocontenidas mediante la autosemejanza así como el poder establecer una constante de proporcionalidad entre las diferentes iteraciones, los estudiantes han logrado identificar que las figuras escalantes obtenidas están formadas por un patrón iterador que para todos los casos tratados es el proceso geométrico o pasos planteados y esto no se aleja de la siguiente idea *“Un objeto se dice recursivo si se contiene a sí mismo como una parte, o si se define por sí mismo”* (Confrey, 1994).

Anteriormente se ha mencionado que los estudiantes a partir de establecer relaciones entre las características del conjunto de cantor con las representaciones obtenidas logran reconocer los aspectos de la geometría fractal presentes en ellas, en la transcripción de la imagen 71 se observa características del conjunto de cantor planteadas por los estudiantes, y en las imágenes 71, 72 y 73 las relaciones que van estableciendo con las representaciones obtenidas.



Este procedimiento se produce de manera indefinida, se le denomina Conjunto de Cantor o polvo de Cantor; aquí podemos evidenciar un sistema de autosimilaridad que es una razón proporcional, en la media en relación con el todo, y en el transcurso de ese patrón se verá la misma razón.

$$\frac{m}{x} = \frac{y(m)}{y(x)}$$

Donde m es la unidad establecida y X es la cantidad de fracciones, "Y" *es el valor de la constante de proporcionalidad, donde se va a mantener I relación.*

Transcripción imagen 71: *"Este procedimiento se produce de manera indefinida, ..., aquí podemos evidenciar un sistema de autosimilaridad que es una razón proporcional, en la media en relación con el todo, y en el transcurso de ese patrón se verá la misma razón.*

$$\frac{m}{x} = \frac{y(m)}{y(x)}$$

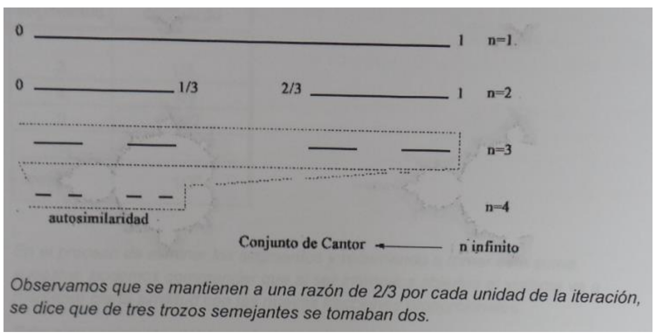


Imagen 72

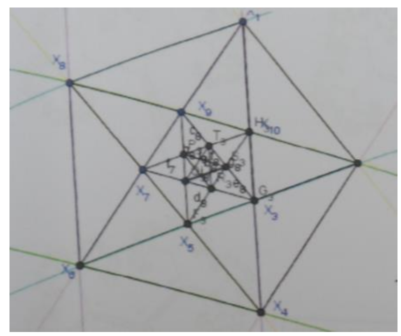
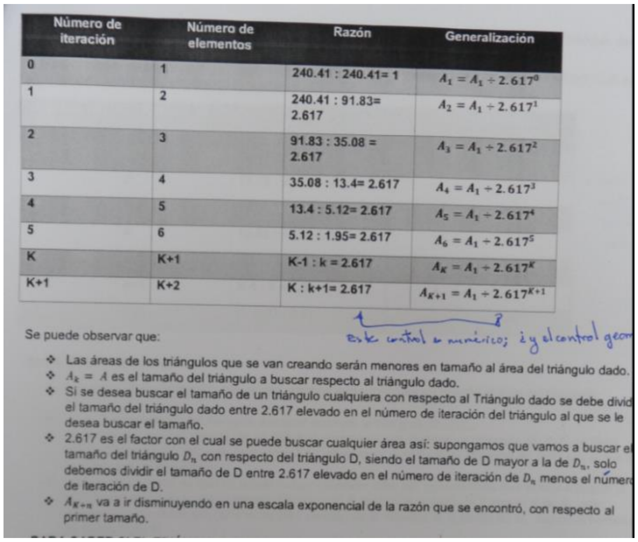


Imagen 73

Donde m es la unidad establecida y X es la cantidad de fracciones, "Y" es el valor de la constante de proporcionalidad, donde se va a mantener l relación.

Es desde esta comparación que los estudiantes empiezan a identificar las formas autocontenidas así como la razón a la que se encuentran con el fin de generar un sistema de referencia, por ejemplo, los triángulos semejantes entre sí, obtenidos al solucionar la primer situación, en la imagen 74 se muestra el procedimiento realizado por los estudiantes y en la parte de la transcripción que se resalta en negrita se evidencia el reconocimiento que la razón entre las áreas de los triángulos formados se mantiene.



Número de iteración	Número de elementos	Razón	Generalización
0	1	240.41 : 240.41= 1	$A_1 = A_1 \div 2.617^0$
1	2	240.41 : 91.83= 2.617	$A_2 = A_1 \div 2.617^1$
2	3	91.83 : 35.08 = 2.617	$A_3 = A_1 \div 2.617^2$
3	4	35.08 : 13.4= 2.617	$A_4 = A_1 \div 2.617^3$
4	5	13.4 : 5.12= 2.617	$A_5 = A_1 \div 2.617^4$
5	6	5.12 : 1.95= 2.617	$A_6 = A_1 \div 2.617^5$
K	K+1	K-1 : k = 2.617	$A_K = A_1 \div 2.617^K$
K+1	K+2	K : k+1= 2.617	$A_{K+1} = A_1 \div 2.617^{K+1}$

Se puede observar que:

este control es numérico; ¿y el control geom

- Las áreas de los triángulos que se van creando serán menores en tamaño al área del triángulo dado.
- $A_k = A$ es el tamaño del triángulo a buscar respecto al triángulo dado.
- Si se desea buscar el tamaño de un triángulo cualquiera con respecto al Triángulo dado se debe divid el tamaño del triángulo dado entre 2.617 elevado en el número de iteración del triángulo al que se le desea buscar el tamaño.
- 2.617 es el factor con el cual se puede buscar cualquier área así: supongamos que vamos a buscar el tamaño del triángulo D_n con respecto del triángulo D, siendo el tamaño de D mayor a la de D_n, solo debemos dividir el tamaño de D entre 2.617 elevado en el número de iteración de D_n menos el númer de iteración de D.
- A_{K+n} va a ir disminuyendo en una escala exponencial de la razón que se encontró, con respecto al primer tamaño.

Imagen 74

Transcripción imagen 74: "*-las áreas de los tri´ngulos que se van creando serán menores en tamaño al área del triángulo dado*

-A_k = A es el tamaño del triángulo a buscar al triángulo dado

***-si se desea buscar el tamaño de un triángulo cualquiera con respecto al triángulo dado se debe dividir el tamaño del triángulo dado entre 2.617 elevado en el número de iteración del triángulo** al que se le desea buscar el tamaño*

***-2.617 es el factor con el cual se puede buscar el tamaño del triángulo D**, … sólo debemos dividir el tamaño de D entre 2.617 elevado al número de iteración de D_k menos el número de iteración de D*

-A_k va a ir disminuyendo en una escala exponencial de la razón que se encontró, con respecto al primer tamaño.

En el trabajo desarrollado por los estudiantes se emplean palabras como "factor", iteración, procesos de generalización que están relacionadas con los aspectos del objeto fractal que se querían constituir, además se observa que el desarrollo algorítmico al que llegan los estudiantes les permite crear un sistema de referencia que les ayuda a describir tanto el proceso de construcción como las diferentes relaciones establecidas. Este desarrollo del sistema de referencia puede constituirse como una herramienta fundamental para empezar a hablar sobre la dimensión fractal aspecto que no fue abordado en el desarrollo de esta propuesta de aprendizaje pero que surge de manera implícita en los procesos de generalización llevado a cabo por los estudiantes se tienen en cuenta el número de figuras semejantes a la figura original y el factor de ampliación para obtener la figura original (Sabogal & Arenas, 2011).

Para cerrar el desarrollo de la propuesta de aprendizaje se les presentó a los estudiantes un video llamado "Fractales: a la caza de la dimensión oculta", se mostraban características de la geometría fractal, aspectos sobre su historia y como esta es aplicada a diferentes ciencias y formas de la naturaleza. Con la proyección de este video, se intenta reflexionar sobre cómo podemos explicar la organización de la naturaleza mediante el uso del objeto fractal, comprendiendo de qué manera lo hace y con qué fines.

Dentro de las reflexiones que los estudiantes hicieron, logran resaltar que la geometría fractal puede ser aplicada a diferentes campos de la ciencia como se puede ver en la transcripción de la imagen 75 mencionan los campos en los que se aplica y de qué manera.

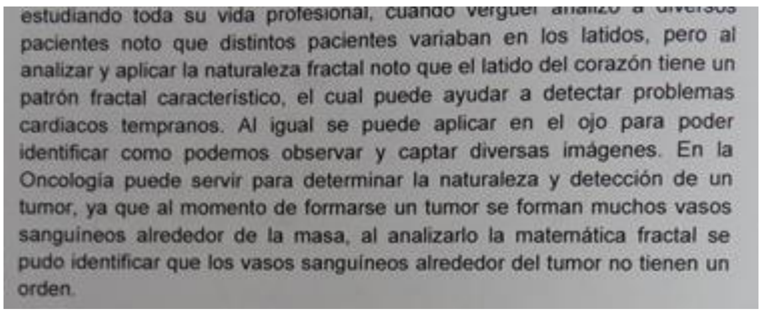

estudiando toda su vida profesional, cuando verguer analizo a diversos pacientes noto que distintos pacientes variaban en los latidos, pero al analizar y aplicar la naturaleza fractal noto que el latido del corazón tiene un patrón fractal característico, el cual puede ayudar a detectar problemas cardiacos tempranos. Al igual se puede aplicar en el ojo para poder identificar como podemos observar y captar diversas imágenes. En la Oncología puede servir para determinar la naturaleza y detección de un tumor, ya que al momento de formarse un tumor se forman muchos vasos sanguíneos alrededor de la masa, al analizarlo la matemática fractal se pudo identificar que los vasos sanguíneos alrededor del tumor no tienen un orden.

Imagen 75

Transcripción imagen 75: *"...noto que distintos pacientes variaban en los latidos, pero al analizar y aplicar la naturaleza fractal noto que el latido del corazón tiene un patrón fractal característico el cual puede ayudar a detectar problemas cardíacos tempranos. al igual se puede aplicar en el ojo para poder identificar como podemos observar y captar diversas imágenes en la oncología puede servir para determinar la naturaleza ya deteccion de un tumor, ya que al momento de formarse un tumor se forman muchos vasos sanguíneos alrededor de la masa, al analizarlo la matemática fractal se pudo identificar que los vasos sanguíneos alrededor del tumor no tiene un orden."*

En la transcripción de la imagen 76 se observa que los estudiantes manifiestan que para explicar el mundo que nos rodea, específicamente lo referente a la naturaleza, no basta la geometría euclidiana, la cual busca la comodidad; si se habla de la naturaleza, ésta busca la perfección y el equilibrio, mediante la geometría fractal.

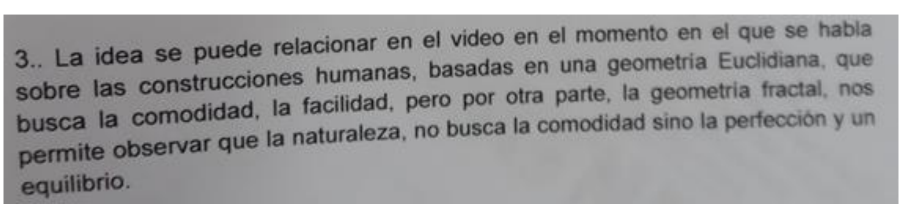

3.. La idea se puede relacionar en el video en el momento en el que se habla sobre las construcciones humanas, basadas en una geometria Euclidiana, que busca la comodidad, la facilidad, pero por otra parte, la geometria fractal, nos permite observar que la naturaleza, no busca la comodidad sino la perfección y un equilibrio.

Imagen 76

Transcripción imagen 76: *"La idea se puede relacionar en el video en el momento en el que se habla sobre las construcciones humanas, basadas en una geometría Euclidiana, que busca la comodidad, la facilidad, pero por otra parte, la geometría fractal, nos permite observar que la naturaleza, no busca la comodidad sino la perfección y un equilibrio."*

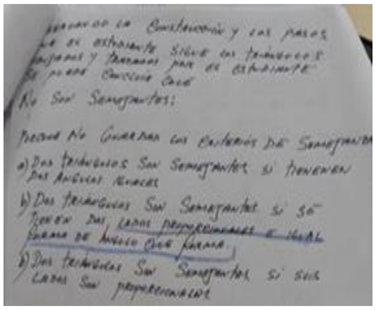
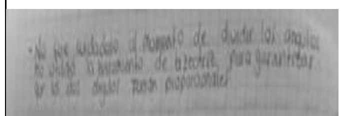
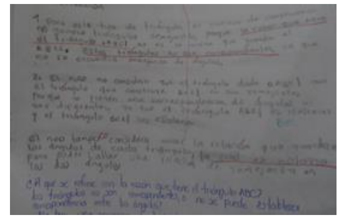
6. CONCLUSIONES

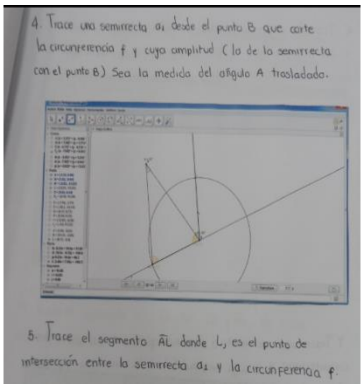
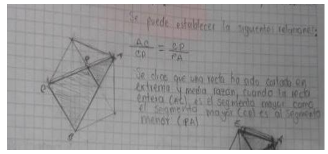
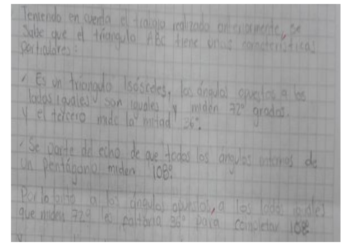
En el desarrollo del experimento de enseñanza emergen dos tipos de conclusiones, el primero en relación con el cumplimiento de los objetivos de investigación planteados y el segundo sobre el espacio de aplicación referente al trabajo con estudiantes para profesor.

En el proceso de constitución del objeto fractal llevado a cabo por los estudiantes se logra identificar una serie de etapas referentes a la manera en que éste se fue dando, en un primer momento el trabajo de los estudiantes estaba caracterizado por hacer mención de definiciones matemáticas y el uso de lenguaje matemático formal aun cuando no obedecieran a la información relacionada con lo pedido en el enunciado de la situación. Por esto el ambiente de aprendizaje posterior se centró tanto en hacer conscientes a los estudiantes acerca de estos dos aspectos cuya presencia se menciona en los resultados obtenidos de la primer situación, evidenciadas en las imágenes 14 a 16 en la página 44 del presente documento como en estimular la resignificación de los objetos matemáticos escolares allí involucrados. Por lo dicho, se puede afirmar que en este momento los estudiantes no han realizado procesos de matematización ya que las definiciones, conceptos y demás, las emplean como enunciados que pueden estar relacionados con la situación, mas no son aplicados.

En un segundo momento, los estudiantes intentan emplear con mayor precisión los conceptos. Así logran usar los objetos mentales correspondientes como herramientas para la solución de las tres primeras situaciones. Las cuales tenían características similares de abordaje, en cuanto al uso específico del triángulo áureo, lo que hace que empiecen a surgir procesos de matematización, en primer lugar matematización horizontal mediante el uso de conceptos familiares para ellos y una matematización vertical cuando progresivamente resignifican estos conceptos, un ejemplo de esto se puede evidenciar en el cuadro 6.

Cuadro 6: Procesos de matematización.

Matematización horizontal	Enunciación de los criterios de semejanza.  Imagen 77 *Transcripción imagen 2:* *“porque no cumple con los criterios de semejanza:* **d.** ***Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.*** **e.** ***Dos triángulos son semejantes <u>si se tienen dos lados proporcionales e igual forma de ángulo que forma.</u>*** **f.** ***Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.”***	Referencia a proporcionalidad y semejanza en magnitudes de diferente naturaleza.  Imagen 78 Trascripción imagen 12: “no fue cuidadoso al momento de dividir los ángulos no utilizó la herramienta bisectriz para **garantizar que los dos ángulos fueran proporcionales**”	Mención del triángulo dado.  Imagen 79 Transcripción imagen 17: “para este tipo de triángulo el proceso no genera triángulos semejantes…” En las primeras situaciones os estudiantes omiten las características del triángulo dado, para este ejemplo para l estudiante no es relevante indagar sobre éstas.

Matematización vertical	Uso de los criterios de semejanza. En el proceso de construcción se garantiza la semejanza.  Imagen 80 Transcripción imagen 28: *"trace una semirrecta a_1 desde el punto B que corte la circunferencia f y cuya amplitud (la de la semirrecta con el punto B) sea la de la medida del ángulo A trasladado"*	Identificación de magnitudes proporcionales.  **Imagen 81** Transcripción imagen 38: ***"se puede establecer la siguiente relación AC/BD=BP/PA se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón, cuando la recta entera (AC) es el segmento mayor como el segmento mayor (CP es la segmento menor (PA)"*** **(3)**	Uso de las características del triángulo dado.  Imagen 82 Transcripción imagen 27: *"teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente se sabe que el triángulo ABC tiene una características especiales, se parte del echo de que todos los ángulos de un pentágono miden 108°.*

Un hecho a destacar es que se puede describir una matematización progresiva en arrancando en un nivel aparentemente formal aunque con poco contenido semántico cuyo vacío se trata de llenar recurriendo a relacionarlos con la situación dada. Dicho de manera más breve, se parte de un nivel formal e intentando llenarlo de sentido se llega a un nivel situacional.

Por último, los estudiantes logran generalizar los objetos mentales, cuando organizan una situación con un contexto diferente a las situaciones que han trabajado, pero que está caracterizada por el uso de los mismos objetos mentales.

Todo esto es posible al llevarse a cabo una “resignificación” guiada por parte del profesor, dándose así un proceso de constitución de objetos mentales inverso al planteado en la EMR.

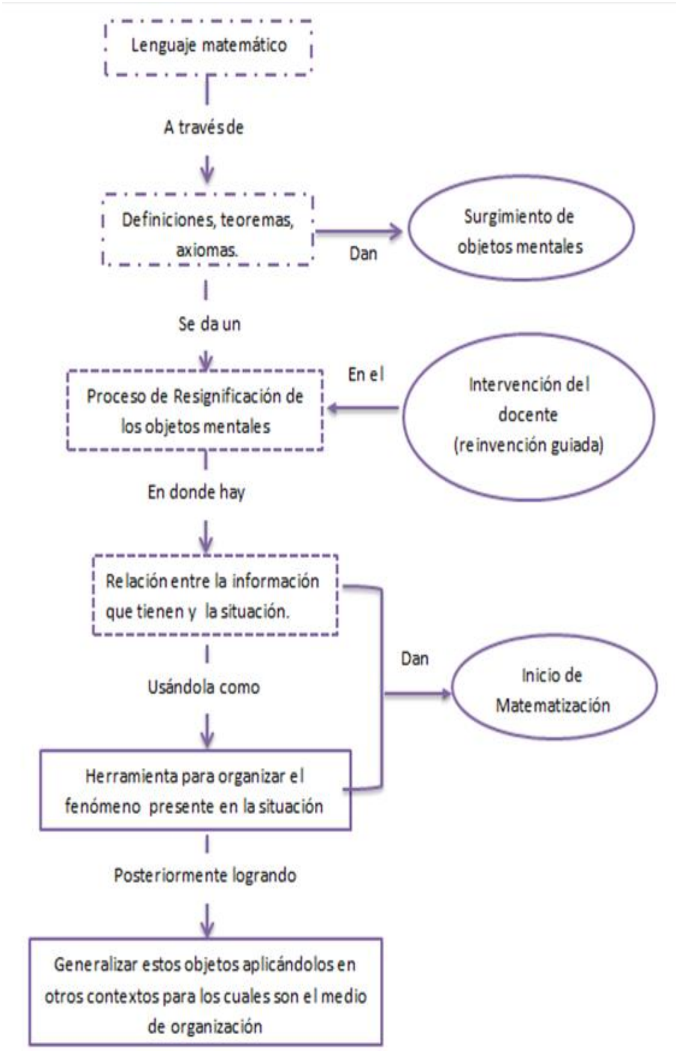
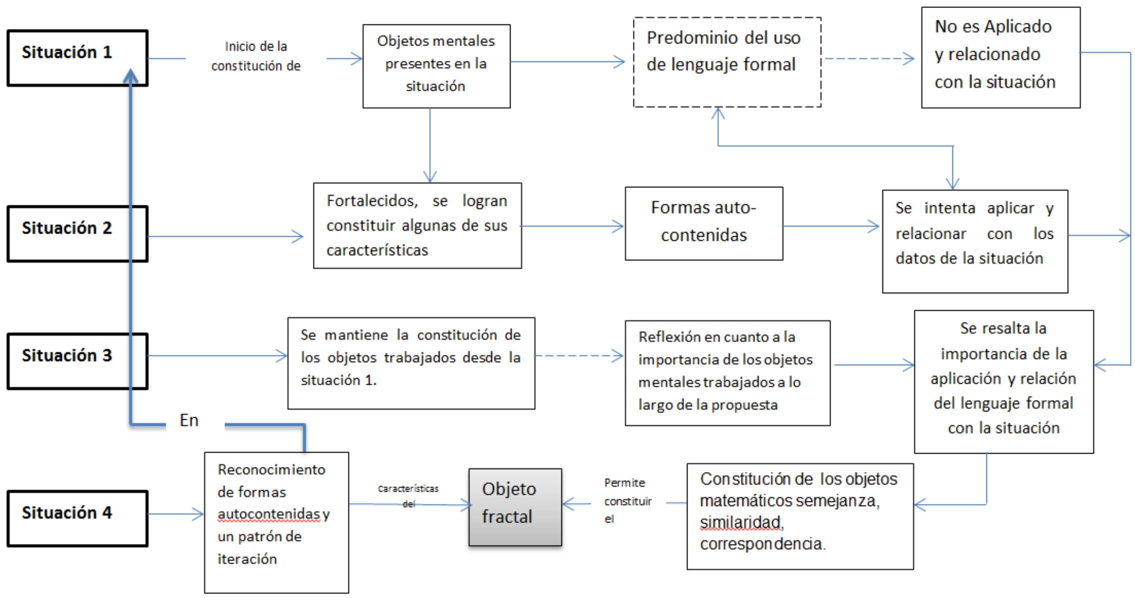


Ilustración 6: Etapas de constitución en los estudiantes.

En la ilustración 6, podemos observar que los dos primeros cuadros, bordeados con segmentos de líneas separados por puntos, están relacionados con la primer etapa, los siguientes dos cuadros, bordeados sólo con segmentos de línea, están relacionados con la segunda etapa, y los últimos con la tercera etapa.

En el desarrollo de la propuesta de aprendizaje, a partir de estas etapas se puede identificar por un lado la constitución del objeto fractal descrito desde los objetos matemáticos, a lo largo de la propuesta de aprendizaje, y por otro lado las etapas de constitución por las cuales pasaron los estudiantes.

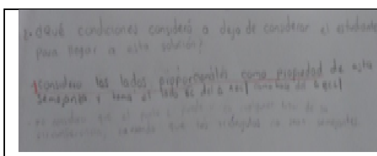
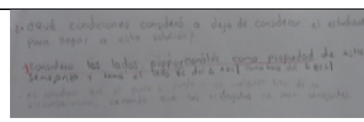
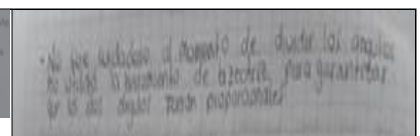
Ilustración 7: Constitución del objeto fractal en la propuesta de aprendizaje



En la ilustración 7 observamos el proceso de constitución del objeto fractal a partir de los objetos mentales involucrados en cada situación, llevado a cabo por los estudiantes a través del desarrollo de las cuatro situaciones planteadas en la propuesta de aprendizaje para que lograran constituir el objeto fractal, de manera general se evidencia que frente a la constitución del objeto fractal se logra llegar a un nivel formal en cuanto a los noumeno referentes a las formas autocontenidas y la iteración, sobre los noumenon convergencia y densidad estos no aparecen explícitamente, por lo cual se desarrolla parcialmente la fenomenología didáctica del objeto fractal propuesta.

El trabajo desarrollado en cuanto a lograr que los estudiantes empelaran de manera consciente el lenguaje formal, cumplió un papel central, ya que sin la resignificación de los objetos semejanza, proporcionalidad y correspondencia, objetos que permiten constituir el objeto fractal, no se habrían podido constituir, y como consecuencia no habría podido lograr los resultados de la propuesta de aprendizaje, aunque llevó a que se invirtiera más tiempo del planeado en la aplicación de las primeras situaciones.

En cuanto a las situaciones que se plantearon en el desarrollo de la propuesta de aprendizaje, se puede decir que estas fueron apropiadas al contexto real de los estudiantes para profesor, al contener la constitución de objeto mentales, generar la reflexión sobre el uso del lenguaje formal y en algunos momentos llevaron a que los estudiantes se pensaran como profesores, como por ejemplo la tarea 2 de la situación 1, se les pedía que reflexionaran sobre la solución dada por un estudiante; aunque esta tarea no tuvo grandes desarrollos ya que las reflexiones que mostraron estaban relacionadas con los objetos matemáticos que consideró el estudiante, más no pensaron en los elementos que lo llevaron a dar esa solución, describiendo lo que no tuvo en cuenta, como se evidencia en las imágenes 10 a 12, que se pueden encontrar en el cuadro 2, en la página 42 del presente documento y que a continuación mostramos.

 Imagen 83 Transcripción imagen 10: *"Considero los lados proporcionales como propiedad de esta semejanza y el lado BC del triángulo ABC, como base del triángulo BCL."*	 Imagen 84 Transcripción imagen 11: *"Considero los lados proporcionales como propiedad de esta semejanza y el lado BC del triángulo ABC, como base del triángulo BCL."* *"No considero que el punto L puede ir en cualquier lugar de la circunferencia, causando que los triángulo no sean semejantes"*	 Imagen 85 Trascripción imagen 12: "no fue cuidadoso al momento de dividir los ángulos no utilizó la herramienta bisectriz para **garantizar que los dos ángulos fueran proporcionales**"

En la situación 3, se les pedía identificar cuál de los dos procesos de construcción descritos tenía mayor carga cognitiva, los estudiantes logran mejorar sus argumentos, reflexionando más en cuanto al proceso cognitivo inmerso en los dos procesos. El trabajar con este tipo de situaciones enriquece la formación de los estudiantes para profesor, “*cuando pensamos en el proceso de llegar a ser profesor de matemáticas (construcción de conocimiento y formas de participar en la comunidad de práctica de ser un profesor) y por tanto en la forma en la que diseñemos las oportunidades para aprender a enseñar matemáticas”*, (Llinares, 2008).

En cuanto a los modelos, razonamientos y estrategias empleadas por los estudiantes, podemos identificar que las estrategias empleadas en un primer momento es el buscar información por fuera de la situación, proveniente de diversas fuentes tales como libros, páginas web, informes de investigación, vídeos entre otras. Otra estrategia empleada es la de buscar información dentro de la situación, como por ejemplo el tomar medidas de manera empírica o identificar aspectos importantes de los elementos en la situación.

Los razonamientos empleados por los estudiantes en el desarrollo de las situaciones se caracterizan por: Indagar sobre objetos formales que pueden ser relacionados con la situación, en un primer momento se limita a la enunciación de los conceptos formales sin que sean relacionados con la situación; emergencia de objetos formales desde el desarrollo de la situación; uso de objetos formales que pueden ser útiles a partir del desarrollo realizado y discutido en clase. Cada una de estas características está relacionada con el uso de una estrategia por parte de los estudiantes, como podemos observar en la ilustración 8.

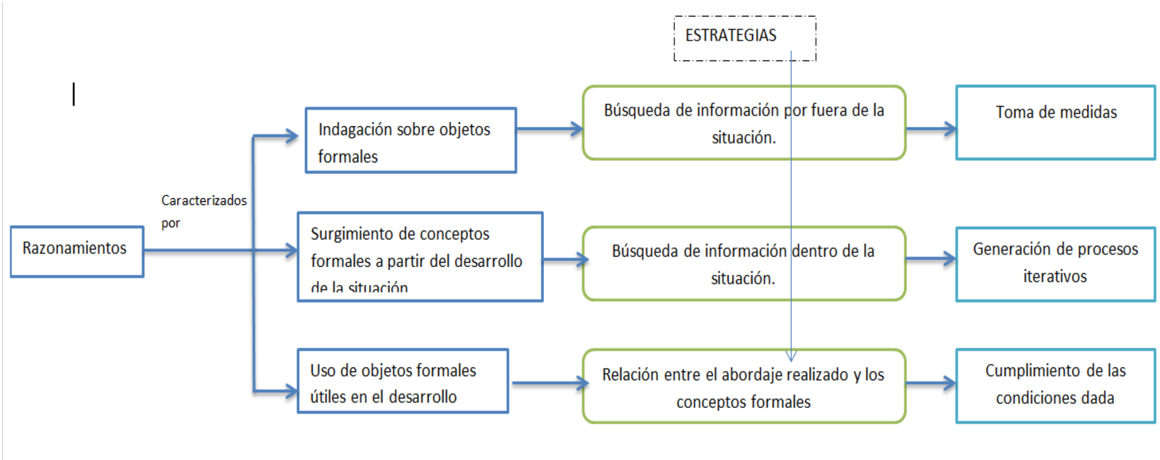
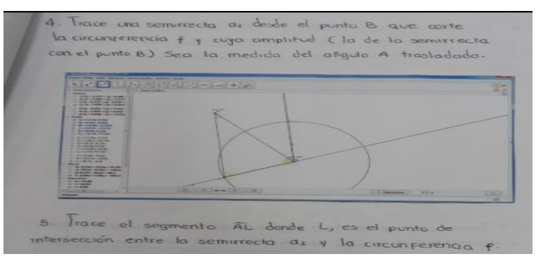


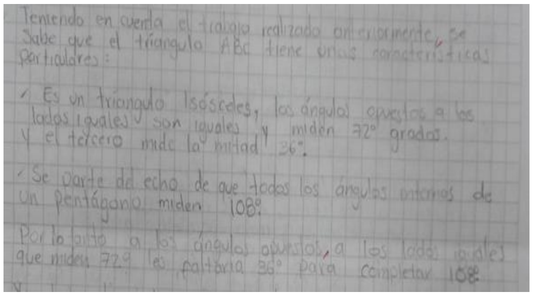
Ilustración 8: Razonamientos Empleados por los estudiantes

Los modelos empleados por los estudiantes son principalmente, modelos algorítmicos tanto numéricos como geométricos. En cuanto a los geométricos podemos hacer alusión a los descritos en la situación 2, se presentan tres formas de construir el pentágono; los estudiantes describen los pasos de construcción y el razonamiento que usaron, como se ve puede observar en la imagen 28 tomada de la página 54 de este escrito.



Transcripción imagen 28: *“trace una semirrecta a_1 desde el punto B que corte la circunferencia f y cuya amplitud (la de la semirrecta con el punto B) sea la de la medida del ángulo A trasladado”*

En esta imagen se describen los primeros pasos geométricos para realizar la construcción del pentágono, basados en la traslación de un ángulo especifico; los estudiantes fundamentaron su construcción haciendo uso de su experiencia con el triángulo ABC en la situación anterior, además de indagar sobre las condiciones que debe cumplir un pentágono regular, la imagen 27 -pág. 54- se pude observar que los estudiantes identifican los ángulo del triángulo ABC y a partir de este completan uno de ángulos del lado menor del triángulo, trasladando el ángulo mayor del triángulo, se observa que estos estudiantes los estudiantes se dan cuenta que los trabajos anteriores realizando en la situaciones 1 les permitieron ser usados como herramienta para la solución de esta situación.



Teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente, se sabe que el triángulo ABC tiene unas características particulares:

✓ Es un triangulo Isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales y miden 72° grados. y el tercero mide la mitad 36°.

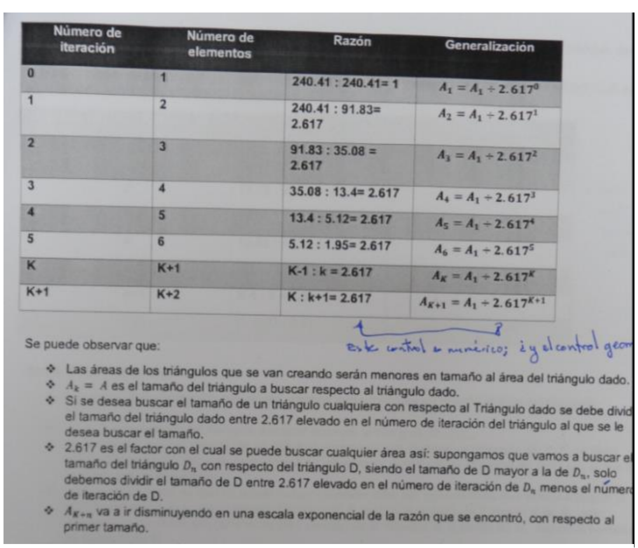
✓ Se parte del echo de que todos los ángulos internos de un pentágono miden 108°.

Por lo tanto a los ángulos opuestos a los lados iguales que miden 72° les faltaría 36° para completar 108°

Transcripción imagen 27: *"teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente se sabe que el triángulo ABC tiene una características especiales, se parte del echo de que todos los ángulos de un pentágono miden 108°.*

por lo tanto a los ángulos opuestos a los lados iguales que miden 72° les faltaría 36° para completar 108°"

En cuanto a los modelos algoritmos numéricos podemos referirnos a los presentes en los nuevos abordajes que realizaron los estudiantes sobre las situaciones, haciendo más explícito los objetos similaridad e iteración, como por ejemplo el desarrollo realizado por un grupo de estudiantes presente en la imagen 74 -pág.84-, se observa un proceso de generalización sobre los nuevos elementos que surgen al iterar el patrón establecido y la razón que se encontraba entre estos nuevos elementos. La intención de este desarrollo es encontrar un algoritmo general que les permita describir el proceso de recursión que se presenta al realizar específicamente un patrón de iteración.



Número de iteración	Número de elementos	Razón	Generalización
0	1	240.41 : 240.41= 1	$A_1 = A_1 \div 2.617^0$
1	2	240.41 : 91.83= 2.617	$A_2 = A_1 \div 2.617^1$
2	3	91.83 : 35.08 = 2.617	$A_3 = A_1 \div 2.617^2$
3	4	35.08 : 13.4= 2.617	$A_4 = A_1 \div 2.617^3$
4	5	13.4 : 5.12= 2.617	$A_5 = A_1 \div 2.617^4$
5	6	5.12 : 1.95= 2.617	$A_6 = A_1 \div 2.617^5$
K	K+1	K-1 : k = 2.617	$A_K = A_1 \div 2.617^K$
K+1	K+2	K : k+1= 2.617	$A_{K+1} = A_1 \div 2.617^{K+1}$

este control es numérico; ¿y el control geom

Se puede observar que:

- Las áreas de los triángulos que se van creando serán menores en tamaño al área del triángulo dado.
- $A_k = A$ es el tamaño del triángulo a buscar respecto al triángulo dado.
- Si se desea buscar el tamaño de un triángulo cualquiera con respecto al Triángulo dado se debe divid el tamaño del triángulo dado entre 2.617 elevado en el número de iteración del triángulo al que se le desea buscar el tamaño.
- 2.617 es el factor con el cual se puede buscar cualquier área así: supongamos que vamos a buscar el tamaño del triángulo D_n con respecto del triángulo D, siendo el tamaño de D mayor a la de D_n, solo debemos dividir el tamaño de D entre 2.617 elevado en el número de iteración de D_n menos el númer de iteración de D.
- A_{K+n} va a ir disminuyendo en una escala exponencial de la razón que se encontró, con respecto al primer tamaño.

Imagen 86

Transcripción imagen 74: "*-las áreas de los tri´ngulos que se van creando serán menores en tamaño al área del triángulo dado*

-A_k = A es el tamaño del triángulo a buscar al triángulo dado

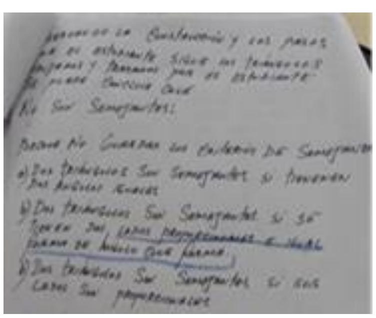
***-si se desea buscar el tamaño de un triángulo cualquiera con respecto al triángulo dado se debe dividir el tamaño del triángulo dado entre 2.617 elevado en el número de iteración del triángulo** al que se le desea buscar el tamaño*

***-2.617 es el factor con el cual se puede buscar el tamaño del triángulo D**, … sólo debemos dividir el tamaño de D entre 2.617 elevado al número de iteración de D_k menos el número de iteración de D*

-A_k va a ir disminuyendo en una escala exponencial de la razón que se encontró, con respecto al primer tamaño.

El trabajar con estudiantes para profesor a lo largo de la propuesta de aprendizaje hizo que emergieran aspectos muy influyentes en la aplicación de ésta, principalmente aspectos relacionados con el uso del lenguaje formal, al ser estudiantes que están familiarizados con su uso, hacen que desde el primer momento se enuncien conceptos formales pero estos no son empleados de manera significativa lo que lleva a buscar estrategias para que los estudiantes logren resignificarlos, esta actividad se centra en el planteamiento de las tareas que se deben pedir para orientar este proceso.

En la EMR se busca generar reconstitución de conceptos matemáticos al ser los estudiantes quienes lo construyen, el docente quien los guía y organiza, en estudiantes para profesor los conceptos ya han sido constituidos pero esta constitución es manejada como un “concepto de” y no como una “comprensión de” es por ello que a lo largo de la propuesta se hace hincapié en la RESIGNIFICACIÓN de los diferentes conceptos a través de generar conciencia sobre la actividad matemática, es decir, reflexionar sobre la manera en que son empleados los conceptos, un ejemplo de esto es la resignificación lograda sobre el concepto de semejanza, que aparece mediante la enunciación de los criterios de semejanza en la primer situación, sin que sean relacionados con ésta como se evidencia en la imagen 2 en la página 39; ya en la situación 3 la semejanza se garantiza desde el proceso de construcción realizado y no sólo en la enunciación de los criterios, como se pudo identificar en la página 70 del análisis, que mostramos en la imagen 87 a continuación.



Transcripción imagen 2:

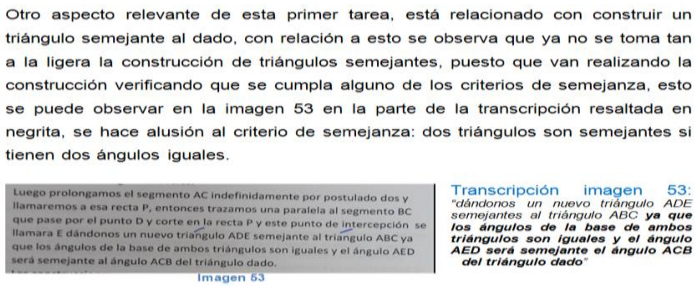
“porque no cumple con los criterios de semejanza:

a. ***Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.***

b. ***Dos triángulos son semejantes <u>si se tienen dos lados proporcionales e igual forma de ángulo que forma.</u>***

c. ***Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.”***

Imagen 2



Otro aspecto relevante de esta primer tarea, está relacionado con construir un triángulo semejante al dado, con relación a esto se observa que ya no se toma tan a la ligera la construcción de triángulos semejantes, puesto que van realizando la construcción verificando que se cumpla alguno de los criterios de semejanza, esto se puede observar en la imagen 53 en la parte de la transcripción resaltada en negrita, se hace alusión al criterio de semejanza: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

Luego prolongamos el segmento AC indefinidamente por postulado dos y llamaremos a esa recta P, entonces trazamos una paralela al segmento BC que pase por el punto D y corte en la recta P y este punto de intercepción se llamara E dándonos un nuevo triangulo ADE semejante al triangulo ABC ya que los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales y el ángulo AED será semejante al ángulo ACB del triángulo dado.

Imagen 53

Transcripción imagen 53: *"dándonos un nuevo triángulo ADE semejantes al triángulo ABC* ***ya que los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales y el ángulo AED será semejante el ángulo ACB del triángulo dado****"*

Imagen 87

Por lo tanto, se busca generar que los estudiantes reflexionen sobre sus razonamientos ganando consciencia de los argumentos que usan, la manera en que los están usando en términos de adecuación, pertinencia y buena formulación, es decir, esta acción de reflexión es una estrategia que conduce a los estudiantes a estructurar los conceptos matemáticos para poder usarlos elocuentemente en sus argumentos, como lo es por ejemplo estructurar un buen sistema de referencia que les permita describir y argumentar su actividad matemática eficientemente. Esto debe ser un aspecto muy importante en la formación de docentes, ya que deben tener un gran dominio de los conceptos matemáticos que pretenden enseñar.

7. RECOMENDACIONES

Para futuros desarrollos de esta propuesta de aprendizaje se recomienda tener en cuenta:

En cuanto a la aplicabilidad de esta propuesta de aprendizaje considerar ciertos aspectos importantes. Uno de ellos es la necesidad de la implementación de instrumentos que permitan el uso de software dinámico, bien sea computadores, tablet, celulares, en los que pueden usar, por ejemplo, el software Geogebra, que les permita a los estudiantes explorar los recursos para ellos creados o generar propios. Esta idea está relacionada con que el objeto fractal habita de *manera natural* en medios digitales, que permiten representarlos tanto algebraica como visualmente. Otro aspecto es el ambiente de aprendizaje que fomente procesos de conversación y reflexión, a través de debates que se puedan dar entre los estudiantes, por último es recomendable que se trabaje con grupos al posibilitar la discusión de ideas, poder discutir la perspectiva del otro, generar debate matemático mejorando la argumentación, es decir, aprender a conversar empleando las matemáticas.

Esta propuesta está ligada a la constitución de objetos mentales específicos, por lo tanto, es necesario introducirle modificaciones de acuerdo a los objetos mentales cuya constitución se pueda promover usando las situaciones propuestas, se considera importante tener en cuenta el curso o grado escolar en el que se pretenda aplicar, puesto que los objetos mentales que se trabajan en la propuesta de aprendizaje se encuentran a lo largo de la educación básica y media, incluso en la superior, variando su complejidad y aplicabilidad, lo que permite que se pueda aplicar en cualquiera de esto niveles variando las tareas de cada situaciones dependiendo del desarrollo del objeto fractal que se quiera dar, pues aquí se plantea un esquema de aplicación.

Si se quisiera profundizar en los alcances de esta propuesta de aprendizaje, además de describir el proceso de constitución del objeto fractal, se puede describir con más detalle el ambiente aprendizaje en el que se desarrolla, y cómo influye en la constitución de los objetos mentales que se pretendan alcanzar.

Anexo 1: Situación 1

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

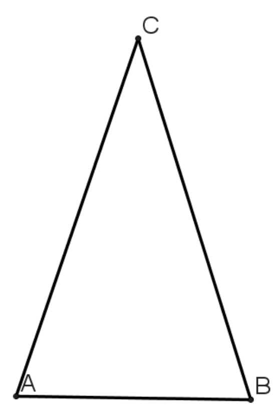
PROYECTO CURRICULAR LEBEM

TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA

SITUACIÓN 1

Un profesor les presenta a sus estudiantes la siguiente situación:

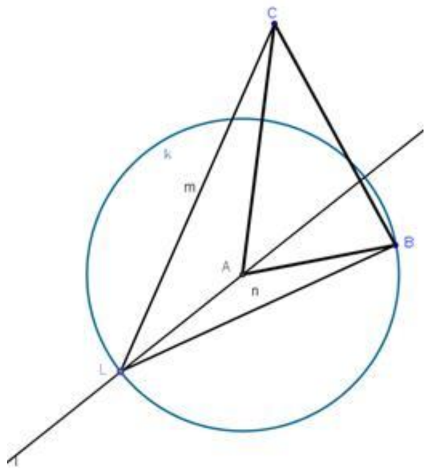
Construya una secuencia de triángulos semejantes a un triángulo ABC*dado de tal manera que el triángulo n-ésimo contengan al triángulo n-1-ésimo y compartan un lado.*



Un estudiante describe el proceso que genera el primer triángulo de la siguiente manera:

- Se traza una circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$
- Se toma un punto L sobre la circunferencia
- La recta l que pasa por el vértice A del triángulo y el punto L sobre la circunferencia, determina la altura del nuevo triángulo
- Se trazan lo segmentos $\overline{CL}$ y $\overline{BL}$

- Se obtiene el triángulo BCL



Considerando lo anterior responda:

1. ¿Este proceso de construcción realmente genera triángulos semejantes?
2. ¿Qué condiciones consideró o dejó de considerar el estudiante para llegar a esta solución?
3. describa procesos que le permita construir triángulos semejantes al triángulo dado con las mismas características descritas, *¿qué garantiza la semejanza entre los triángulos?, ¿qué relaciones se pueden determinar entre la partes constitutivas de triángulos semejantes?*

Anexo 2: Situación 2

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

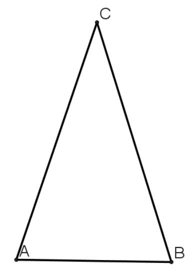
PROYECTO CURRICULAR LEBEM

TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA

SITUACIÓN 2

PENTAGONEANDO DESDE LO DADO

Dado el triángulo ABC construya un pentágono



1. *Describa el proceso que le permitió construir el pentágono*
2. *¿Qué tipo de relaciones se pueden establecer entre el lado del triángulo y el pentágono creado a partir de él?*
3. *¿Qué tipo de relaciones se pueden dar entre los diferentes triángulos que se forman en el pentágono?*

Anexo 3: situación 3

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

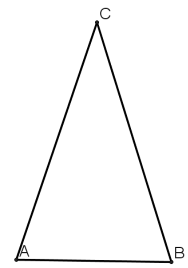
PROYECTO CURRICULAR LEBEM

TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA

SITUACIÓN 3

Considerando las siguientes situaciones; plantee la solución a cada una, discuta y argumente cuál de éstas tiene la mayor carga cognitiva y por qué.

- *Dado el triángulo ABC construya un segmento de longitud igual al perímetro del triángulo, y construya sobre él un triángulo semejante al triángulo ABC.*



- *Dado cualquier segmento* $\overline{AB}$ *construya un triángulo isósceles con perímetro igual a la longitud del segmento, semejante al triángulo ABC*

Anexo 4: situación 4

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR LEBEM

TRANSICIÓN ARITMÉTICA ÁLGEBRA

SITUACIÓN 4

UN ARGUMENTO DE PLAUSIBILIDAD

Los profesores Ordóñez y Darwin, discuten sobre la plausibilidad de la teoría de la evolución; el profesor Ordóñez la intenta refutar, con el argumento de que nunca ha visto aparecer seres humanos de una pareja de chimpancés. Le pide al profesor Darwin un argumento de la plausibilidad de la teoría.

El profesor Darwin le dice que la teoría de la evolución no se aplica a individuos en particular sino a poblaciones; hay individuos que por pequeños cambios genéticos dados paulatinamente desarrollan estructuras más complejas, aprovechables y optimizadas en relación con mayores posibilidades de sobrevivir en cierto medio.

Así que un cambio evolutivo es, con frecuencia, pequeño y su estabilidad le requiere mayor competitividad de la prole del individuo que lo posee, en relación con las de otros individuos de la población a la que todos ellos pertenecen.

Le dice: “intentaré formular un argumento, pero Pr. Ordoñez le pido me ayude a conformarlo. Piense en cómo se da el crecimiento de los árboles en la naturaleza; ellos compiten por la luz solar, en esa competencia se observa que algunas de sus ramas o sus hojas impiden a otras obtener ese recurso; ese hecho debería conducir a la propagación genética de una forma optimizadora del aprovechamiento de la luz solar. Entonces un evolucionista buscaría por la existencia de árboles que hayan desarrollado una estructura de no competencia por la luz solar entre sus ramas y entre sus hojas, ¿si se presenta ese tipo de estructura en los árboles usted aceptaría esta existencia como evidencia de plausibilidad para la teoría de la evolución?” Ya veremos dijo Ordoñez, en principio creo que además debería haber una estructura análoga a la pedida para un árbol ¡pero ahora para todo un bosque!

El profesor Darwin le pide que piense en la representación en el plano de ese crecimiento; le muestra la construcción geométrica alojada en https://tube.geogebra.org/student/m1096855 como un instrumento de exploración con el que intentar determinar si en algún momento es posible que el árbol abarque la mayor área posible sin que sus hojas y ramas compitan por la luz solar. Planteándole las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo sería la distribución de las ramas y las hojas para que el crecimiento origine un aprovechamiento óptimo de la luz solar?
2. ¿Cómo sería la distribución de los árboles en un bosque para que el crecimiento de todos los árboles garantice aprovechar de manera óptima la luz solar?

8. BIBLIOGRAFÍA

Bressan, A., & Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del Maestro*, 5-21.

Bressan, Zolkower, & Gallego. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en didáctica de las matemáticas.

Castro, C., Díaz, L., & Palacios, R. (2011). Secuencia didáctica de la enseñanza de la semejanza utilizando fractales. *Memorias del 20° Encuentro de Gometría y sus Aplicaciones.*, 181-188.

Confrey, J. (1994). Similaridad, Semejanza y Razón de Cambio: Una Nueva Aproximacion a la Multiplicación y a las Funciones Exponenciales. En *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.* (G. MESCUD., Trad., págs. 291-330). New York, State University of New York: Harel, G. and Confrey, J. (Eds.).

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas.* Dordrecht, The Netherlands: D.Reidel.

Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). *HANS FREUDENTHAL, un Matemático en Didáctica y Teoría Curricular.* J.Curriculo Studies.

Hernández, D. M. (1999). *Una propuesta para la enseñanza de la geometría fractal en el bachillerato.* Querétaro: Universidad Autónoma de Querétaro.

Holpf", G. d. (2013). FRACTAL: formas de reconocer el mundo a través de cálculos totalmente nuevos y atractivos, la ventura del saber. *Memorias del 21° encuentro de geometría y sus aplicaciones*, 195-202.

Llinares, S. (2008). CONSTRUYE EL CONOCIMIENTO NECESARIO PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS: Prácticas Sociales y Tecnológicas. *Evaluación e investigación*, 9-30.

Mandelbrot, B. (1983). *La geometría fractal de la naturaleza* (1 edición ed.). (J. Llosa, Trad.) Barcelona: Tusquets.

Mandelbrot, B. (1993). *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión* (3 edición ed.). (L. Josep, Trad.) Barcelona: Tusquets.

MEN. (2014). *Documento Orientador: Foro Educativo Nacional 2014: Ciudadanos Matemáticamente Competentes.* Bogotá DC.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29 (1)*, 75-88.

Pérez, P. (2005). *Talleres sobre geometría fractal aplicados a grupos de estudiantes básica secunadria y media.* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Puerto, J. F. (2013). El uso de fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software cabrí "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-variacional". *Revista científica, edicion especial.*, 737-741.

Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. En H. Freudental, *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas (textos seleccionados)* (págs. 28-33). México: CINVESTAV.

Redondo, A., & Delicado, J. (noviembre de 2004). Actividades de geometria fractal en el aula de secundaria. *SUMA, 47*, 19-28.

Sabogal, S., & Arenas, H. (2011). *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Escuela de matemáticas, Universidad Industrial de Santander.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. *Mathematics Education Research Center*, 3-21.