NÚMEROS PRIMOS E DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS: UM DIAGNÓSTICO COM ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL[1]

Prime numbers and decomposition in prime factors: A diagnosis with students of 6th year of Elementary School

Gabriela dos Santos Barbosa

Resumo[1]

No presente artigo, objetivamos discutir o processo de aprendizagem do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Mais especificamente, vamos apresentar as respostas que um grupo de estudo composto por professores e futuros professores de Matemática oferece para as seguintes questões: de que argumentos os alunos se valem para lidar com situações-problema que envolvem os conceitos de número primo e decomposição em fatores primos? Que procedimentos adotam? Quais são os erros mais cometidos? Este grupo estudou, durante os anos de 2013, 2014 e 2015, uma tese de doutorado que, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolveu e analisou uma intervenção de ensino que favorecesse a construção dos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética por estudantes do 6º ano. Além disso, o grupo aplicou novamente tal intervenção em turmas de 6º ano. As reflexões apresentadas aqui se baseiam nos resultados da aplicação do teste diagnóstico inicial que compunha a intervenção numa turma de 6º ano no início de 2015. Concluiu-se que o processo não é linear; possui continuidades e rupturas. Nele, o estudante comete vários erros e, pautado nas situações que experiência, realiza generalizações.

[1] Este artigo é uma ampliação do texto apresentado no VI SIPEM, 2015.

Palavras-chave: Teorema Fundamental da Aritmética. Números Primos. Teoria dos Campos Conceituais.

Abstract

In this article, we discuss the learning process of the Fundamental Theorem of Arithmetic and the principal concepts associated with it by students of the 6th year of elementary school. More specifically, we present the answers that a study group composed of teachers and future teachers of Mathematics offers to the following questions: What arguments do the students apply to deal with problem situations involving the concepts of prime and decomposition in prime factors? What procedures do they adopt? What are the most errors committed? This group studied during the years 2013, 2014 and 2015, a doctoral thesis that, in the light of the Conceptual Fields Theory, developed and analyzed a teaching intervention favoring the construction of key concepts associated with the Fundamental Theorem of Arithmetic by students the 6th year. In addition, the group again applied such intervention in 6th grade classes. The ideas presented here are based on the results of the implementation of early diagnostic test that made up their activities in 6th grade class at the beginning of 2015. It was concluded that the process is not linear, has continuities and ruptures. In it, the student commits several errors and, based on situations that experience, makes generalizations.

Keywords: Fundamental Theorem of Arithmetic. Prime numbers. Theory of Conceptual Fields.

Introdução

No presente artigo, temos por objetivo discutir o processo de aprendizagem do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e dos principais conceitos associados a ele por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Mais especificamente, procuramos responder às seguintes questões: de que argumentos os alunos se valem para lidar com situações-problema que envolvem os conceitos de números primos e decomposição em fatores primos? Que procedimentos adotam? Quais são os erros mais cometidos?

Segundo Alencar Filho (1988), o TFA garante que todo número natural maior do que um ou é primo ou pode ser decomposto de maneira única num produto de números primos, a menos de permutações dos fatores. Dessa forma, os conceitos que se associam favorecendo a sua compreensão são as relações de múltiplos e fatores que se podem estabelecer entre um par de números naturais e as propriedades que derivam dessas relações, os critérios de divisibilidade, a diferenciação entre primos e compostos e decomposição de um número em fatores primos.

É importante destacar a relevância de tais conceitos dentro do corpo de conhecimentos matemáticos a serem estudados pelos alunos durante os ensinos Fundamental e Médio. Conhecendo alguns critérios de divisibilidade, o aluno pode efetuar cálculos mentais e estimativas. Observando a decomposição de números naturais em fatores primos, podemos obter rapidamente o mínimo múltiplo comum (MMC) e o máximo divisor comum (MDC) desses números, calcular o número de divisores de cada um ou mesmo listá-los.

Tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para 1ª a 4ª séries quanto aquele que se volta para 5ª a 8ª séries distribuem os conteúdos matemáticos a serem trabalhados no Ensino Fundamental em quatro blocos: *números e sistemas de numeração*, *espaço e forma*, *grandezas e medidas* e *tratamento da informação.* O TFA e os demais conceitos associados a ele pertencem ao bloco *números e sistemas de numeração* e, dessa forma, na maioria das escolas brasileiras e nos livros didáticos são apresentados desde o 4º ano (antiga 3ª Série) do Ensino Fundamental, sendo retomado nos anos subsequentes apenas com aumento gradual dos números, cuja decomposição é solicitada aos alunos.

Cabe mencionar ainda que, além de elencar os conteúdos a serem estudados, os PCN refletem sobre o ensino e, no caso do ensino da Aritmética, sugerem uma abordagem mais reflexiva dos números considerando que o aluno deve perceber

> [...] a existência de diversos tipos de números (naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados à medida que deparar com situações-problema, envolvendo operações ou medidas de grandeza, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento matemático. (BRASIL, 1998, p.50)

Em outras palavras, com relação às operações, o trabalho a ser realizado deve concentrar-se na compreensão dos diferentes significados dos números e operações, nas relações existentes entre eles e suas propriedades. Atualmente, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), documento em fase de elaboração pelo Ministério da Educação que visa estabelecer os conhecimentos essenciais cujo acesso e apropriação será direito de todo estudante brasileiro durante sua trajetória na Educação Básica, ano a ano, desde o ingresso na Creche até o final do Ensino Médio, propõe o ensino da aritmética nessa mesma direção.

A construção de conceitos aritméticos

Embora os documentos oficiais sugiram um ensino fundamentado nas propriedades e relações que se estabelecem entre os números, as pesquisas mais recentes em Educação Matemática sinalizam a existência de problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. Observa-se um tratamento mecanizado, com base em exercícios repetitivos e problemas idealizados. Os alunos não têm tido oportunidade de descobrir variações nos algoritmos que possam ser úteis para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e estimativas. Lins e Gimenez reforçam essa constatação ao afirmarem que:

> Os conceitos aritméticos usados na Educação Matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Tem-se esquecido frequentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a ideia simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas" (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínios). (LINS; GIMENEZ, 2000, p.33)

Especificamente sobre o TFA, Coelho et al. (2005) investigaram a compreensão do TFA por professores de Matemática em curso de formação continuada e por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental de São Paulo. As autoras concluíram que, comparativamente, existem diferenças entre os dois grupos. Na maioria das vezes, o grupo de alunos reproduz algoritmos sem saber interpretar cada etapa de suas ações e seus resultados. Voltando-se para o grupo de professores, elas perceberam uma compreensão conceitual mais aprofundada, decorrente do estudo recente da Teoria dos Números no curso de formação continuada que estão frequentando. Este estudo permitiu ainda a conclusão de que é possível criar cursos voltados para estudantes brasileiros de qualquer nível de ensino nos quais a compreensão conceitual seja enfatizada, mas o professor deve estar atento para que essa abordagem não seja perturbada por um ensino prévio muito calcado em algoritmos.

Pesquisas internacionais também motivaram o nosso estudo. Os 11 estudos organizados na obra de Campbell e Zazkis (2002) abordam a Teoria dos Números e discutem questões como o uso da linguagem e das metáforas no seu ensino e as provas e demonstrações na formação de professores. Entre eles, priorizamos os estudos de Campbell (2002) e Teppo (2002), porque se voltam para a estrutura multiplicativa e a decomposição de números em fatores primos, ou seja, nosso objeto matemático.

É um aspecto consensual entre os pesquisadores a relevância do estudo da Teoria Elementar dos Números desde a Educação Básica, porque, aplicando seus conhecimentos da estrutura multiplicativa nesse contexto, os alunos terão oportunidades valiosas para enriquecer sua compreensão das propriedades de multiplicação e divisão. Por meio das respostas e justificativas dos sujeitos a situações-problema que envolvem o conceito de número primo e a decomposição em fatores primos, os três estudos concluíram que alguns alunos frequentemente lidam com tarefas da Teoria dos Números sem usar de modo consciente seus conhecimentos da estrutura multiplicativa. Eles escolhem executar computações quando raciocinar sobre as computações bastaria. As respostas iniciais tendem aos cálculos em vez das inferências com base na observação da forma fatorada do número. Além disso, as respostas iniciais de todos os sujeitos revelam uma tendência para associar fortemente os conceitos de divisibilidade e divisor com a ação de dividir. Também foi típico associar o conceito de múltiplo com multiplicação ou soma de parcelas repetidas.

Assim, reforçamos a necessidade de uma abordagem que priorize a formação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Se a construção de conceitos não for favorecida, o indivíduo enfrentará dificuldades durante sua vida escolar, sobretudo quando confrontado com situações que lhe exijam tomar decisões e estabelecer estratégias de resolução de problemas. As dificuldades poderão fazer-se presentes, inclusive, em níveis de ensino mais elevados. Ideias mal concebidas inicialmente se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos.

Sintetizando os objetivos gerais de um trabalho curricular aritmético diferente do mecanizado baseado em algoritmos que está presente no ensino tradicional, Lins e Gimenez (2000, p.40) propõem que o ensino deva:

> - Buscar a compreensão da quantidade e a observação e a manipulação de processos operativos.
> - Fomentar a criatividade e a sensibilidade na busca de propriedades e relações.
> - Conhecer, assumir e usar uma metodologia heurística, motivando a intuição para ajudar a formulação

de hipóteses, generalizações e, em alguns casos, estratégias indutivas.

- Reconhecer processos dedutivos e iterativos usados na história, tentando reconhecer e identificar seus fundamentos, e reviver suas reflexões.

Influenciadas pelas ideias de Lins e Gimenez (2000) e Coelho et al. (2005), as pesquisas de Barbosa (2008), Groenwald, Franke e Olgin (2009) e Groenwald e Olgin (2010) descrevem intervenções de ensino voltadas para tópicos da Teoria dos Números que foram aplicadas e promoveram a aprendizagem significativa em alunos do Ensino Fundamental.

Groenwald, Franke e Olgin (2009) desenvolveram atividades envolvendo as aplicações da Teoria dos Números à criptografia em turmas de 9º ano. Groenwald e Olgin (2010) retomaram essa proposta inserindo o uso da calculadora como recurso didático, e Barbosa (2008) desenvolveu, aplicou e analisou, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, uma longa intervenção de ensino, composta por dois testes diagnósticos (um inicial e um final) e seis atividades lúdicas visando à compreensão e aplicação na simplificação de cálculos do Teorema Fundamental da Aritmética por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Em suas análises, Barbosa (2008) verificou que o TFA não pode ser ensinado isoladamente, pois existem outros conceitos, já mencionados neste texto, que se associam a ele permitindo a sua compreensão. Além disso, constatou que, com base nos padrões numéricos envolvidos nas situações-problema que vivenciaram, os alunos realizaram generalizações.

A compreensão do TFA demandou dos alunos o percurso de um longo caminho que teve início na distinção entre divisões exatas e não exatas, passando pelos conceitos de múltiplo e fator e suas propriedades, conceitos de primos e compostos e decomposição em fatores primos. Esse percurso, no entanto, não é linear. Nele os alunos cometem e superam parcial ou totalmente determinados erros, levantam, testam, validam ou refutam hipóteses. Além disso, podem recorrer a materiais manipulativos e utilizar várias representações como desenhos, tabelas, além do registro numérico tradicional. Resumindo os resultados da sua pesquisa, Barbosa (2008) sinaliza a necessidade de um trabalho voltado para a Teoria dos Números que faça distinções entre: (a) números inteiros e números racionais não negativos; (b) unidades indivisíveis e divisíveis; (c) divisão de número inteiro com resto e divisão de número racional; (d) abordagens inteiras e fracionais para a divisão com resto usando calculadoras; e (e) divisão quotitativa e partitiva. É o trabalho de Barbosa (2008) que retomamos neste estudo.

O método

Nessa pesquisa, aplicamos novamente o teste diagnóstico proposto por Barbosa (2008) em outra turma de 6º ano de uma escola particular do Rio de Janeiro e, debruçados sobre os resultados deste teste, temos como objetivos específicos:

- Descrever as estratégias empregadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem os principais conceitos associados ao TFA;
- Identificar os erros cometidos pelos alunos quando confrontados com situações que envolvam os principais conceitos associados ao TFA.

Nossa pesquisa é uma pesquisa qualitativa em educação com características de um estudo de caso. Tendência crescente no panorama educacional, a pesquisa qualitativa vem-se voltando, especialmente, para o interior da escola. Nessa aproximação, procura captar seu cotidiano, extraindo dele os elementos capazes de construir novos conhecimentos a respeito desse universo (LÜDKE; ANDRÉ 2001; EZPELETA; ROCKWELL, 1986). Reconhece-se a importância de se analisar o que se passa em sala de aula, sobretudo na situação de ensino e aprendizagem, usando metodologias de cunho mais qualitativo. Nossa intenção não é generalizar dados nem apresentar estatísticas, uma vez que nossa amostra é pequena (uma turma de 27 alunos de uma turma de sexto ano de uma escola particular do Rio de Janeiro), mas sim oferecer uma análise qualitativa do desempenho dos alunos e contribuir para a discussão mais ampla sobre a melhoria do ensino da aritmética na Educação Básica.

Por se tratar de uma análise qualitativa, buscamos o suporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais. Essa teoria cognitivista, desenvolvida pelo francês Gerard Vergnaud, tem fundamentado muitas pesquisas sobre a compreensão de conceitos na Matemática e na Física nos últimos anos.

Entre os principais marcos dessa teoria, estão as noções de campo conceitual e de conceito. Para Vergnaud (2009), um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Ele se associa a muitos outros, compondo um campo conceitual. Além disso, um conceito é uma terna composta pelas situações que lhe dão sentido, pelos invariantes operatórios de cada classe de situações e pelas suas representações. Só podemos dizer que um aluno domina um conceito quando ele dá conta dessa terna. Segundo Barbosa (2008), também no teste diagnóstico é possível perceber as influências da Teoria dos Campos Conceituais. O teste abarca uma gama de conceitos e não apenas um conceito isolado, e é composto por situações-problema que favorecem, entre outras coisas, a utilização de várias representações e a mobilização de vários esquemas mentais. O sujeito é visto como construtor do seu conhecimento.

O teste foi aplicado em uma aula dupla de 100 minutos. Durante toda a aplicação, estivemos presentes na sala juntamente com a professora de Matemática da turma. Os alunos trabalharam individualmente e não podiam consultar nenhum material escrito, podiam somente manipular as embalagens e formas (embalagens de ovos, formas de gelo e formas para bombons e pirulitos) citadas na primeira questão do teste, que foram mostradas para toda a turma no início do teste e disponibilizadas para quem as solicitasse.

A correção e a análise foram feitas por nosso grupo de estudos formado por professores da rede pública de Duque de Caxias e por alunos e professores da Licenciatura em Matemática da Faculdade de Educação da Baixada Fluminense (FEBF), que se encontraram uma tarde por semana nas instalações da FEBF de março a julho de 2015. Para a análise dos testes, valorizamos os registros dos alunos e, quando não os compreendíamos, realizávamos entrevistas informais solicitando-lhes que descrevessem as estratégias que empregavam. Além disso, observamos as condutas dos alunos durante a aplicação, tomando nota de gestos, comentários e questões levantadas por eles.

O teste

O teste é um material escrito com nove questões, sendo três delas com subitens.

Antes de autorizarmos os alunos a começar, fizemos uma leitura em voz alta e pausada para a turma. Além do material manipulativo já descrito, os alunos tinham à disposição folhas de rascunho para efetuar os cálculos que julgassem necessários. Entre os diversos conceitos relacionados ao TFA, de acordo com Barbosa (2008), a Tabela 1 a seguir oferece uma síntese:

Tabela 1 – Panorama das questões.

Bloco	Questões
Representação para produtos envolvendo três fatores.	Q1a e Q1b
Produção e manipulação de igualdades matemáticas com base na reversibilidade entre multiplicação e divisão.	Q1a, Q1b, Q9a, Q9b e Q9c
Identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores.	Q3, Q4 e Q5
Identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos.	Q6 e Q7
Uso da decomposição dos números em fatores primos para simplificar cálculos.	Q8a, Q8b, Q8c, Q8d

Fonte: Barbosa, 2008.

Com relação à descrição desses itens, Barbosa (2008, p.90) esclarece que:

> Sabemos da Matemática formal que o produto só pode ser efetuado, por definição, entre dois fatores. O que estamos nomeando produto de três fatores corresponde ao emprego da propriedade associativa da multiplicação.

Por fim, cabe ainda explicar que Barbosa (2008) emprega a expressão *manipulação de igualdades matemáticas* para se referir à obtenção de outras igualdades a partir de uma dada. Por exemplo, da igualdade *8 : 2 = 4*, podem ser obtidas as igualdades *8 : 4 = 2* e *2 x 4 = 8*.

Descrição e análise do desempenho dos alunos

A média de acertos da turma no teste foi de 35%. A segunda questão não teve acertos, e muitos alunos a deixaram completamente em branco. Por isso, ela não é considerada neste estudo. Tais dados nos sugerem que, embora os assuntos apresentados no teste já tenham sido trabalhados nos dois anos anteriores, ainda é necessário retomá-los e aprofundar as reflexões junto aos alunos para que eles avancem em seus processos de significação. A fim de compreendermos os aspectos mais dificultosos para os alunos nesse processo, passamos à descrição e análise do desempenho dos alunos por bloco de questão.

Desempenho nas questões de representação para "produtos envolvendo três fatores" (Q1a e Q1b)

O primeiro bloco é formado pelos dois itens da primeira questão, descritos no quadro a seguir.

Quadro 1 – Questões Q1a e Q1b do teste diagnóstico.

1) Você está observando embalagens para ovos e para bombons e fôrmas para fazer bombons, pirulitos e gelo. As embalagens são: uma delas para uma dúzia de ovos e outra para 15 bombons FERRERO. Com as fôrmas posso fazer 12 bombons *flor* ou 20 coraçõezinhos ou 3 pirulitos. Ou ainda 18 cubinhos de gelo.

   a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a sentença?
   Desenho

   Igualdade matemática: ___ x 2 x ___ = ___

   b) E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?
   Desenho

   Igualdade matemática: ___ x ___ x 5 = ___

Fonte: Barbosa, 2008.

Para Barbosa (2008), por meio dessa questão é possível "investigar se os alunos são capazes de atribuir significados para e estabelecer correspondência entre as diferentes representações e o produto de três números" (p.91). Como pode ser observado na Figura 3.1, para cada situação proposta existem duas representações distintas: os desenhos e as igualdades matemáticas. Como Coelho et al. (2005) e Barbosa (2008) sinalizam, o raciocínio sobre estruturas multiplicativas podem favorecer a compreensão da decomposição em fatores primos e seu uso na simplificação de cálculos. Por isso, julgamos importante avaliar o desempenho dos alunos nesse tipo de questão.

Disponibilizamos sobre a mesa da professora os materiais que mencionamos nos dois itens para que os alunos os manipulassem, caso necessitassem. Nossa expectativa era de que eles tivessem pouca necessidade de fazer isso, bastando-lhes observá-los a certa distância. Entretanto, todos queriam ter em mãos as formas e as embalagens. Alguns queriam pegar no material por curiosidade, outros para conferir o que fizeram inicialmente, sem a manipulação. Foram considerados corretos os desenhos dos objetos que descreviam a organização retangular das unidades que os compunham. Por exemplo, no caso da embalagem de ovo, o desenho esperado era aquele que descreve a organização retangular de seis fileiras, cada uma com duas unidades. No caso da embalagem de bombom, tratava-se de outra organização retangular, sendo cinco fileiras, cada uma com três unidades. A posição dos retângulos poderia variar em função do ângulo de observação dos alunos. Os desenhos dos retângulos deveriam ser repetidos o número de vezes que as embalagens eram citadas nos enunciados das questões. As igualdades esperadas eram *5 x 2 x 6 = 60* e *4 x 3 x 5 = 60*, respectivamente.

O primeiro item teve aproximadamente 40% de acertos, e o segundo, 38%. O erro mais comum foi representar apenas uma embalagem, desconsiderando o número de embalagens sugerido nos enunciados. Nesses casos, as igualdades matemáticas produzidas foram *2 x 6 = 12* e *3 x 5 = 15,* e os alunos não fizeram uso do espaço destinado para o terceiro número que deveria ser usado para indicar o número de embalagens. Esse tipo de erro nos sugere duas interpretações possíveis: a primeira é que os alunos tiveram dificuldade na leitura e interpretação dos enunciados, não compreendendo o que lhes era solicitado, e a segunda é que esses alunos ou parte deles ainda não conseguem atribuir significado ao produto envolvendo três números. Ainda não dominam plenamente a classe de situações que envolvem o produto de três números. Dessa forma, aproximam essas situações daquelas que envolvem o produto de dois números, que já dominam plenamente, e dão-lhes o mesmo tratamento. Como são classes distintas, o mesmo tratamento os conduz ao erro.

Outro erro bastante frequente foi desenhar qualquer representação retangular que representasse o total de unidades. Assim, cientes de que o número de unidades de ovos e bombons é 60, os alunos desenhavam qualquer configuração retangular cujo produto do número de linhas pelo número de colunas fosse 60. Esse procedimento também foi verificado nos desenhos por embalagem. Cientes de que, na embalagem dos ovos, havia 12 unidades e, na embalagem de bombons, havia 15 unidades, os alunos desenhavam qualquer configuração retangular cujo produto do número de linhas pelo número de colunas fosse, respectivamente, 12 e 15. Para nós, isso pode ser uma evidência de um ensino de matemática que sempre enfatizou o resultado de cálculos, deixando para segundo plano ou desconsiderando o significado dos números envolvidos nos cálculos.

Para Vergnaud (1990), esquema é a organização invariante da ação do sujeito para dar conta de uma classe de situações. Sendo assim, entendendo que os itens a e b pertencem à mesma classe de situações. Nos registros dos alunos que acertaram, foi possível reconhecermos o esquema mobilizado pelos alunos para transferir o conteúdo do texto escrito no enunciado para o desenho: desenhar uma coluna com a quantidade de elementos informados e repetir esse procedimento até obter o total de unidades que haviam calculado mentalmente ou no rascunho.

Nesse caso, inferimos que o aluno reconhece na ação, embora não consiga generalizar formalmente que o total de unidades é múltiplo do número de elementos de cada coluna e adiciona seguramente parcelas repetidas desse número até obter o total. Por ser um conhecimento presente na ação do aluno para dar conta da situação, trata-se do que Vergnaud (1990) nomeia teorema-em-ação. Os conceitos de adição, de multiplicação como a soma de parcelas repetidas, a reversibilidade entre multiplicação e divisão, as noções de representação retangular, de coluna, de unidade e de igualdade são também invariantes operatórios presentes nessa ação, mas como elementos constituintes do teorema-em-ação, e, por isso, são exemplos de conceitos-em-ação.

Desempenho nas questões de produção e manipulação de igualdades matemáticas (Q1a, Q1b, Q9a, Q9b, Q9c)

Além das questões Q1a e Q1b apresentadas na seção anterior, o segundo bloco ainda é composto pelas questões Q9a, Q9b e Q9c, que são apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Questões Q9a, Q9b e Q9c do teste diagnóstico.

9) Resolva a questão abaixo:
a) Dividi 50 por 5. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a __________. Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens. Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:
b) Dividi __________ por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8. Explicação:
c) Dividi 36 por ____________. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 2. Explicação:

Fonte: Barbosa, 2008.

Segundo as pesquisas de Campbell e Zazkiz (2002), o uso da decomposição em fatores primos para favorecer o cálculo mental e a otimização de cálculos, de um modo geral, pressupõe que o sujeito saiba escrever igualdades matemáticas que envolvam multiplicações e saiba, também, manipular essas igualdades, obtendo outras a partir de uma conhecida. Por isso, no segundo bloco, apresentamos duas questões: uma com dois itens (Q1a e Q1b), cujo objetivo é produzir igualdades matemáticas para representar situações do campo multiplicativo, e a outra, com três itens, (Q9a, Q9b e Q9c), que requer a manipulação de duas igualdades simultaneamente.

Nos três itens da questão 9 são oferecidos textos em que algum termo é desconhecido e deve ser identificado. Para resolver Q9a, basta que o aluno realize as operações na ordem em que são enunciadas. O último resultado é o valor procurado. Assim, nossa expectativa era que os alunos não sentissem maiores dificuldades ao solucioná-la, o que foi confirmado pelos 92% de acerto.

Já em Q9b e Q9c, os termos desconhecidos poderiam ser obtidos por meio da escrita de igualdades matemáticas e da aplicação de conhecimentos da reversibilidade entre multiplicação e divisão. Por exemplo, para resolver Q9b, o aluno deveria escrever $a : 3 = b$ e $b : 2 = 8$. Manipulando a última igualdade, obteria $b = 8 \times 2 = 16$ e, substituindo b na primeira igualdade, identificaria $a = 16 \times 3 = 48$. Entretanto, dos 27 alunos apenas 3 adotaram esse procedimento. Os restantes recorreram às tentativas e estimativas.

O erro mais comum foi cometido pelos alunos que consideravam apenas uma das duas ações informadas no texto. Assim, para Q9b, uma resposta frequente foi 16, pois os alunos só consideravam a parte final do enunciado *"Dividi o quociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o quociente igual a 8"*. Entendemos que esse procedimento é consequência da obtenção, embora mental, de igualdades matemáticas a partir da igualdade $a : 2 = 8$. Houve, ainda, casos em que os alunos também buscavam mentalmente, mas, por meio de tentativas, o número que, dividido por 2, resulta em 8.

A estimativa e o uso da reversibilidade entre multiplicação e divisão também foram os procedimentos predominantes nas soluções corretas. Eles predominaram inteira ou parcialmente nas soluções. No último caso, tivemos o que chamamos de estratégia mista. O aluno empregava a reversibilidade para resolver parte do enunciado e, em seguida, fazia estimativas para resolver a parte que restava.

Pudemos verificar um exemplo da estratégia mista no registro deixado por um aluno no teste. Para resolver Q9c, o aluno empregou a reversibilidade para obter o número 4 e estimou o número que deveria multiplicar por 4 para obter 36. As expressões 4×1, 4×2, 4×3, 4×4, 4×5, 4×6 deixadas no espaço destinado à explicação mostraram a busca do aluno até encontrar o número 36.

Sendo assim, constatamos que a reversibilidade entre a multiplicação e a divisão foi um conhecimento subjacente às ações dos alunos, ou seja, um teorema-em-ação. Entre os conceitos que lhe dão sustentação, designados conceitos-em-ação, temos os algoritmos das duas operações e as tabuadas.

Com base na análise das soluções dos alunos, inferimos ainda sobre o grau de dificuldade das questões Q9b e Q9c. São questões extremamente complexas, pois requerem a identificação sucessiva de dois termos desconhecidos e a coordenação de mais de um esquema mental.

Desempenho nas questões de identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores (Q3, Q4 e Q5)

Para compreender a decomposição de um número em fatores primos e, consequentemente, usá-la na otimização de cálculos e na realização de cálculos mentais, é preciso, antes de tudo, que o aluno admita a possibilidade de decompor um número em fatores, ou seja, escrevê-lo como produto de dois ou mais fatores. Nossa experiência, adquirida lecionando Matemática para turmas do Ensino Fundamental há cerca de 20 anos, associada às pesquisas de Campbell e Zazkis (2002), sugeriu-nos que esta não é uma ideia facilmente concebida pelos alunos.

Tanto em nossa prática profissional como na leitura dos artigos organizados por esses pesquisadores, percebemos que há alunos que, diante de um número, aplicam processos para fazer sua decomposição em fatores, obtêm-na satisfatoriamente, entretanto, não associam a decomposição que obtiveram ao número tomado inicialmente no processo. Assim, por exemplo, o aluno obtém *2 x 3 x 5* a partir do 30, mas não reconhece que 30 pode ser substituído por *2 x 3 x 5* em determinadas situações-problema. É por isso que as questões do terceiro bloco estão relacionadas à identificação dos fatores de um número e à sua decomposição em fatores. No Quadro 3, temos as três questões (Q3, Q4 e Q5) que o compõem.

Quadro 3 – Questões Q3, Q4 e Q5 do teste diagnóstico.

3) João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36

ou ______x ______= 36 ou _____x_____ = 36

4) Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15, poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

5) O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

Fonte: Barbosa, 2008.

Na primeira, foi solicitado dos alunos esgotar todas as possibilidades de decompor um número em um produto de dois fatores. Na segunda e na terceira questão, propusemos o reconhecimento dos fatores de um número composto e de um número primo, respectivamente, por meio da observação das decomposições feitas na questão anterior. Como as noções de múltiplo e fator já haviam sido estudadas nos anos anteriores, esperávamos que os alunos relembrassem essas noções, mas isso não lhes foi possível. Os percentuais de acerto em Q3, Q4 e Q5 foram, respectivamente, 38%, 15% e 29%.

Em Q4 e Q5, cálculos errados e a identificação dos fatores com os produtos foram as causas dos erros cometidos pelos alunos. Por exemplo, ao produzirem a falsa igualdade *3 x 13 = 36*, alguns alunos indicavam 3 e 13 como fatores de 36. Já ao identificarem os fatores com o produto, os alunos, em vez de escreverem que os fatores de 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, consideravam que a resposta certa era os produtos que haviam escrito na questão anterior: *2 x 18, 3 x 12, 4 x 9, 6 x 6, 1 x 36*. Assim, aqueles que cometeram esse tipo de erro escreveram que o 36 possui 5 fatores. Esse equívoco foi bastante frequente e, com base nas pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) e Barbosa (2002), inferimos que tal ocorrência revela a tendência dos alunos para associar fatores à divisão e múltiplos à multiplicação.

Voltando-nos para Q3, as omissões dos produtos *3 x 12*, *2 x 18*, *6 x 6* e *1 x 36* foram os erros que nos chamaram atenção. Os produtos *3 x 12* e *2 x 18* foram esquecidos, pois, como verificamos nos diálogos informais com os alunos, não constam nas tabuadas de 1 a 10, que eles memorizaram desde os anos iniciais, e era exatamente nelas que eles buscavam produtos que resultassem em 36. Já as omissões dos produtos *6 x 6* e *1 x 36* ocorreram porque, para os alunos, era necessário que os números a serem multiplicados fossem diferentes e não fazia sentido que o próprio 36 fosse usado como fator.

Cabe mencionar ainda que, não tendo escrito todos os produtos, sobravam lacunas em branco que, em alguns casos, foram preenchidas invertendo-se a ordem dos fatores de produtos que já haviam sido utilizados. Por exemplo, um aluno que não escreveu os produtos *3 x 12* e *2 x 18*, aplicou a propriedade comutativa e preencheu as lacunas que haviam sobrado com *4 x 9* e *9 x 4*. Mesmo as falsas igualdades, provenientes de erros de cálculos, tiveram a ordem dos fatores invertida. Essa atitude dos alunos foi um exemplo do processo de equilibração e acomodação de esquemas, descrito por Vergnaud (1990) na Teoria dos Campos Conceituais. Eles possuíam esquemas suficientes para dar conta do preenchimento de algumas lacunas: aquelas cujos pares de números se encontram nas tabuadas de 1 a 10. Mas encontrar os pares cujo produto é 36 que não constam nas tabuadas de 1 a 10 constituiu-se uma situação conflituosa para eles. Assim, foram buscar na bagagem de esquemas, que já dominavam algum esquema que pudesse ajudá-los a lidar com a situação. Encontraram este que tem como invariante operatório a propriedade comutativa da multiplicação. Entretanto, ele não contribuiu para que o conflito fosse desfeito. Afinal, desconsiderando-se a ordem, os pares eram os mesmos, e aqueles esperados não foram encontrados.

Além da observação das tabuadas, outro procedimento empregado pelos alunos em Q3 foi a busca dos fatores com base na reversibilidade entre multiplicação e divisão. Um esquema muito comum empregado para a obtenção dos fatores de 36 foi realizar a divisão desse número pela sequência dos números naturais e selecionar aqueles cuja divisão foi exata. Trata-se de um esquema em que os alunos tinham, inclusive, o controle de suas ações: sabiam que o processo não deveria ser repetido indefinidamente. Alguns o interrompiam quando dividiam por 18, alegando que "depois do 18, que é o meio, só o 36 mesmo", e outros o interrompiam apenas quando dividiam por 36. Nas divisões, por sua vez, ora armavam cálculos, ora empregavam critérios de divisibilidade. Acertavam frequentemente quando usavam os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 e erravam os critérios por 3 e 9.

Desempenho nas questões de identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos (Q6 e Q7)

O quarto bloco teve objetivos semelhantes ao terceiro, mas nele procuramos enfatizar a identificação dos fatores primos de um número e a decomposição de números naturais em fatores primos. O quadro 4 apresenta as duas questões referentes a este bloco:

Quadro 4 – Questões Q6 e Q7 do teste diagnóstico.

6) Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

Fonte: Barbosa, 2008.

Como se observa, em Q6, os alunos deveriam decidir se um número era primo utilizando a definição de número primo apresentada no enunciado, e, em Q7, foi solicitada a decomposição de um número em fatores primos. Esperávamos que eles, pelo menos, relembrassem as técnicas de decomposição de um número em fatores primos que estudaram exaustivamente nos anos anteriores, o que não ocorreu. Além disso, tanto nesse bloco como no anterior, esperávamos que o fato de certas definições serem apresentadas nos enunciados, bastando aos alunos apenas interpretá-los, favorecesse a resolução das questões, mas isto também não ocorreu, e o percentual de acertos de Q6 foi 55%, e Q7 não teve acerto.

Reconhecer as estratégias empregadas pelos alunos que acertaram Q6 demandou algumas entrevistas e conversas informais. Isso porque nenhum deles deixou registros por escrito no teste. Embora houvesse espaço para isso, eles apenas escreveram suas respostas. Entre os que acertaram, a estratégia foi testar a sequência dos números naturais, listando mentalmente os fatores de cada número. Quando encontravam um fator diferente de 1 e do próprio número, partiam para testar o número seguinte.

Em Q6, também chamou a nossa atenção a reincidência de alguns alunos na identificação de conceitos ligados ao TFA com a multiplicação e a divisão. Assim como no bloco anterior em que os alunos identificaram os conceitos de fator e múltiplo com, respectivamente, divisão e multiplicação, nesse bloco identificaram o conceito de primo com uma multiplicação. Para responder Q6, por exemplo, um aluno escreveu "3 x 3, 5 x 5", enquanto outro escreveu "1 x 5 e 1 x 7".

Cabe mencionar ainda que, em Q6, quando os alunos listavam apenas números e não multiplicações, eles erravam por incluir algum número ímpar que não é primo em suas respostas. Nesse caso, os alunos incluíram o número 9. Em conversas informais conosco sobre esse fato, alguns justificaram suas respostas com comentários como "todo número ímpar é "primo" e "todo número primo é ímpar". Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, esses comentários revelam falsos teoremas-em-ação empregados pelos alunos.

Já em Q7, entre os erros cometidos, destacamos três tipos. O primeiro tipo está associado à dificuldade dos alunos de aceitar a decomposição em mais de dois fatores, dificuldade essa que já se fez presente no primeiro bloco de atividades. Para resolver a questão, o grupo que cometeu esse tipo de erro listou os pares que usou para responder Q3.

O segundo tipo de erro corresponde a recorrer ao raciocínio aditivo para dar conta da situação. Nesse caso, em vez de decompor 36 em fatores primos, os alunos decompuseram o número em parcelas. Em algumas decomposições, as parcelas eram números compostos, em outras, os alunos cuidaram de escolher parcelas que fossem números primos, como foi o caso de um aluno que decompôs 36 em 12 parcelas iguais a 3. Esse tipo de erro é mais um exemplo da aproximação de esquemas feita pelos alunos quando estão diante de situações que não dominam plenamente, fato mencionado por Vergnaud (1990). Ainda não dominando plenamente as estruturas multiplicativas, os alunos empregavam o raciocínio aditivo para resolver problemas relacionados a essas estruturas, o que os conduziu a erros.

No terceiro tipo de erro, os alunos não apresentavam decomposições e sim produziam a escrita na medida em que efetuavam os cálculos para decompor 36. Sendo assim, um aluno escreveu "36 : 2 = 18 : 3 = 6 : 2 = 3 : 3 = 1". Essa escrita deixa claro que o aluno efetuou os cálculos necessários à decomposição, mas escreveu falsas igualdades matemáticas o que, em momentos subsequentes, não lhes favoreceriam avançar na construção dos conceitos. Para nós, essas escritas foram evidências de que nem todos os alunos compreendiam de fato o conceito de decomposição em fatores primos. Afinal, segundo Vergnaud (1990), as simbologias associadas ao conceito formam um dos conjuntos que o compõem. Julgamos que o uso dessa simbologia inadequada certamente ofereceria algum tipo de obstáculo na interpretação e no uso que deveriam fazer da decomposição de números em fatores primos.

Desempenho nas questões de uso da decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos (Q8a, Q8b, Q8c e Q8d)

Finalmente, o quinto bloco serviu como instrumento para que identificássemos como os alunos procediam para obter o quociente entre dois números escritos em suas formas fatoradas e se reconheciam e aplicavam em situação-problema a reversibilidade que existe entre a multiplicação e a divisão. O Quadro 5 apresenta as questões que compõem esse bloco:

Quadro 5 – Q8A, Q8B, Q8C, Q8D do teste diagnóstico.

8) Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!
a) João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....
b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......
c) Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......
d) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ......

Fonte: Barbosa, 2008.

O objetivo central de toda a intervenção de ensino era criar condições para que os alunos operassem com a decomposição dos números em fatores primos e realizassem simplificações e cálculos mentais. Com essas questões, desejávamos investigar se já realizavam tais ações. Assim, tínhamos a expectativa de que eles eliminassem fatores comuns para simplificar a obtenção do quociente, entretanto isto não aconteceu. Todos os alunos empregaram a mesma estratégia: efetuaram os produtos para, em seguida, calcular o quociente entre os resultados. Os erros produzidos decorreram apenas de erros de cálculos. Este, na verdade, é um resultado que reforça as ideias de Campbell (2002), Brown et al. (2002) e Teppo (2002) quando afirmam que, se não for feito um trabalho conceitual dos principais conceitos da Teoria dos Números, os alunos tenderão a calcular em vez de inferir com base nas decomposições dos números. Nas próximas duas seções, retomamos as questões que nortearam nosso estudo e tentamos sintetizar suas respostas com base nessa tendência que os alunos evidenciaram em suas resoluções.

De que argumentos os alunos se valem durante o processo de significação citado anteriormente? Que procedimentos adotam?

Iniciamos observando as diferentes estratégias de contagem. Nas situações em que foram levados a contar elementos de um conjunto, as estratégias mais usadas pelos alunos foram contar um a um, contar dois a dois, agrupar os elementos a serem contados e somar grupo a grupo, o número de elementos por grupo. Ora escreviam os cálculos no papel, ora os realizavam mentalmente. Na contagem, algumas vezes, usavam os dedos. Com eles, apontavam os elementos do conjunto ou indicavam as quantidades envolvidas na ação.

Outro aspecto importante foram as diferentes representações. Durante toda a aplicação do teste, não apenas na análise dos registros escritos, reconhecemos o uso de diversas representações para os conceitos envolvidos nas situações: gestos, desenhos, figuras geométricas, tabelas, língua materna, linguagem aritmética (igualdades matemáticas). No uso e na transferência dessas linguagens, alguns alunos não extraíam da situação os elementos necessários ao seu tratamento matemático. Na representação de formas e embalagens, por exemplo, a representação retangular não foi um aspecto relevante para alguns alunos. Ainda com relação à linguagem, os alunos revelaram tendência para produzir igualdades matemáticas com base na sequência de suas ações, o que os conduzia à produção de falsas igualdades matemáticas.

Voltando-nos para a obtenção dos fatores dos números, percebemos que, primeiramente, esta se dava pela busca nas tabuadas. Para obter os fatores de um número, os alunos observavam nas tabuadas de 1 a 10 as igualdades matemáticas nas quais eles figuram. Essa ação tem um domínio de validade restrito, pois, nem todas as decomposições em dois fatores dos números constam nessas tabuadas. Esse procedimento, gradativamente, foi sendo substituído pelas divisões nas quais o quociente assumia valores da sequência dos números naturais. Cabe destacar que o reconhecimento de um número primo também seguiu esse caminho.

É importante ainda mencionar que, conforme a busca dos fatores nas tabuadas foi sendo substituída pelas divisões, os alunos passaram a tentar enunciar critérios de divisibilidade. Quando precisavam decidir se um número é múltiplo de outro ou estimar cálculos nas atividades de decomposição, os alunos tentavam enunciar critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 eram enunciados corretamente. Entretanto, alguns alunos adaptavam esses critérios para outros números e produziam erros.

Quais são os erros mais cometidos?

Como pudemos observar, na maioria das vezes os alunos cometiam erros quando tentavam estender o domínio de validade de certas propriedades dos números naturais ou fazer generalizações. A seguir, listamos os principais erros identificados nas resoluções dos alunos:

- Os múltiplos e fatores de um número são aqueles que constam nas tabuadas de 1 a 10;
- Falsas igualdades matemáticas, como 2 x 3 = 6 + 8 = 14;
- O produto de dois fatores de um número sempre será fator deste número; e
- Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0, 3, 6, 9, é divisível por 3.
- Toda Progressão Aritmética de razão n é sequência dos múltiplos de n;
- Não é possível decompor em mais de dois fatores;
- Não é possível repetir fatores na decomposição;
- Todo número ímpar é primo;
- Todo número primo é ímpar; e
- O conjunto dos múltiplos de um número é finito.

Considerações finais

É preciso lembrar que este estudo e o estudo de Barbosa (2008) foram realizados com amostras escolhidas por conveniência, envolvendo uma quantidade pequena de alunos (turmas com 27 e 22 alunos, respectivamente). Sabemos, portanto, que não temos dados suficientes para fazermos generalizações, mas acreditamos, sim, que os dados que temos contribuem para dar pistas sobre a participação dos alunos nos processo de construção dos conceitos que enfocamos. Como nossos resultados apontam para que os alunos construam significados para o conceito de número primo, para a decomposição em fatores primos e para o Teorema Fundamental da Aritmética, é necessário realizar uma intervenção de ensino minuciosa que vise não só ao teorema, mas a outros conceitos e propriedades associados a ele.

Referências

ALENCAR FILHO, E. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1988.

BARBOSA, G. S. *O Teorema Fundamental da Aritmética:* jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental. (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; São Paulo, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília/DF, 1998.

CAMPBELL, S. Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding. *Learning and Teaching Number Theory*. Ed. Campbell & Zazkis, Ablex Publishing, Westport, 2002.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), p.540-563, 1995.

______. Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 (2), 217-218, 1996.

COELHO, S.; MACHADO, S.; MARANHÃO, C. *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?* Atas do CIBEM V, CD-ROM, Cidade do Porto, 2005.

EZPELETA, J.; ROCKWELL, E. *Pesquisa participante.* São Paulo: Cortez, 1986.

GROENWALD, C. L. O.; FRANKE, R. F.; OLGIN, C. A. Códigos e senhas no Ensino Básico. *Educação Matemática em Revista – RS*. 2009, 41-50.

GROENWALD, C. L. O.; OLGIN, C. A. Criptografia e calculadoras: uma experiência na 8ª série do ensino fundamental. In: GROENWALD, C. L. O.; ROSA, M. (Org.). *Educação Matemática e Calculadoras:* teoria e prática. Canoas/RS: Editora da ULBRA, 2010.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 2000.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Abordagens qualitativas:* pesquisa em educação. São Paulo: EPU, 2001.

TEPPO, A. R. Integrating content and process in classroom mathematics. *Learning and Teaching Number Theory*. Wesport: Ablex Publishing, 2002.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170, 1990.

______. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Trad. Maria Lucia Moro. Curitiba: UFPR Press, 2009.

Gabriela dos Santos Barbosa – Universidade do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: gabrielasb80@hotmail.com