EQUAÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU: COMPARATIVO DAS PRAXEOLOGIAS EM DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVRO DIDÁTICO[1]

Degree equation of the first polynomial: Comparison of praxeologias in official documents and textbook

Edelweis Jose Tavares Barbosa
Anna Paula Avelar Brito Lima

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa de doutorado em andamento cujo objetivo consistiu em caracterizar, analisar e comparar as relações institucionais existentes nos programas de ensino nacional e o programa regional de Pernambuco e três coleções didáticas sobre o ensino de equações polinomial do primeiro grau à luz da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) como um processo de análise que admite reconstruir a organização matemática existente no cerne de uma determinada instituição de ensino. Os resultados indicam que a equação do primeiro grau é justificada como uma ferramenta para resolver problemas e não tem sua organização matemática caracterizadas nos documentos oficiais. Já em relação aos livros didáticos, as transposições didáticas realizadas nessas coleções relativas ao conceito de equação do primeiro grau falham em não deixar clara a transição dos métodos de resolução aritméticos para os métodos de resolução algébricos, assim como não realizarem adequadamente a passagem da Aritmética para Álgebra.

Palavras-chave: Equação polinomial do primeiro grau. Teoria Antropológica do Didático. Organização Matemática.

Abstract

This article presents the results of a research doctorate in progress whose objective was to analyze and compare the existing institutional relations in the national educational programs and the regional program of Pernambuco and three teaching collections, on the teaching of polynomial equations of the first degree to light Anthropological theory of Didactic (CHEVALLARD, 1999), as a process of analysis that admits to reconstruct the existing mathematics organization at the heart of a particular educational institution. The results indicate that the first-degree equation is justified as a tool to solve problems and do not have their mathematical organization featured in the official documents. In relation to the didactic transpositions textbooks made in these collections related to the concept of equation of first degree fail to not make clear the transition from arithmetic resolution methods for algebraic solving methods, as well as not properly carry out the transition from Arithmetic to Algebra.

Keywords: Polynomial equation of the first degree. Anthropological Theory of Didactic. organization Mathematics.

Introdução

Os estudos no âmbito do ensino e da aprendizagem da matemática continuam tendo destaque no Brasil e em outros países a partir

[1] Este artigo é uma ampliação do texto apresentado no VI SIPEM, 2015.

dos mais diversos referenciais teóricos. Neste estudo, escolhemos adotar como referencial teórico e metodológico a Didática da Matemática de Influência Francesa. Destacamos que essa área de conhecimento se integra a uma grande área denominada no Brasil de Educação Matemática. Esse campo de investigação por que optamos surgiu na França, no final dos anos 60 e início dos anos 70 do século passado, quando são fundados os Institutos de Pesquisas no Ensino da Matemática (IREM).

Para Gálvez (1996), as pesquisas relacionadas à Didática da Matemática propõem, entre outros aspectos, investigar o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos da matemática, particularmente, a explicar os fenômenos didáticos relativos às relações entre o ensino e aprendizagem da matemática. Esse campo de investigação não se propõe a explicar e a buscar somente uma boa maneira de ensinar, mas deve ser capaz também de oferecer resultados que permitam melhorar o funcionamento do ensino.

A visão clássica do ensino da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, geralmente letras, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Como consequência, a Álgebra escolar tem servido para ensinar, apenas, um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo real (KAPUT, 2005).

Nesse contexto, a Álgebra escolar não se restringe ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (KIERAN, 2007). Dessa maneira, os alunos necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, adequadamente, a simbologia para registrar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

A construção do conhecimento matemático é mediada, em sala de aula, pelo professor, que se apoia no *texto de saber* (CHEVALLARD, 1991), que aparece no livro didático, fruto de um processo de transposição didática.

Entretanto, Chevallard (1998) parte do princípio de que não existe um mundo institucional ideal, no qual as atividades humanas sejam geridas por praxeologias bem apropriadas que permitam realizar todas as tarefas desejadas de uma maneira eficaz, segura e inteligente. Esse pesquisador acrescenta que as praxeologias envelhecem à medida que seus elementos (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias ou teorias) perdem seus créditos ou tornam-se opacos, dando origem à constituição de novas praxeologias, necessárias ao melhor funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas (tipos de problemas) que se apresentam a essa instituição.

Tendo como objetivo caracterizar, analisar e comparar as organizações curriculares e as praxeologias matemáticas e didáticas existentes em programas oficiais e o livro didático em torno do ensino de resolução de equações do primeiro grau.

Entendendo que os programas de ensino e o livro didático são instituições transpositivas de saberes a ensinar, procuraremos responder às seguintes questões: quais organizações matemáticas existentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no programa curricular de Pernambuco? Quais as praxeologias estão presentes nos documentos oficiais e no livro didático? Para isso, tomamos como referencial a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard. Assim, apresentamos o artigo em duas seções. A primeira com relação à fundamentação teórica, seleção e caracterização de instituições de ensino. A segunda seção discute os principais resultados e as considerações finais.

Fundamentação teórica

A Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991) constituiu um aporte teórico essencial para embasar este estudo. Nessa teoria, Chevallard (ibidem) ampliou a composição conceitual já existente na didática francesa para analisar fenômenos didáticos, observando também o papel das *instituições*, ou seja, nas relações que elas têm com os saberes escolares e no papel que elas exercem no trabalho de transposição didática desses saberes.

Para Chevallard (ibidem), o saber matemático é algo que é transposto entre instituições, e a Teoria Antropológica do Didático (adiante TAD) fornece um método de análise que permite não somente descrevê-lo, mas também analisar as condições de sua existência em determinadas instituições, isto é, permite analisar as limitações ou potencialidades que se criam entre os objetos de saberes a ensinar nas diferentes instituições.

A TAD permite reconstruir a transposição didática que se efetua sobre o ensino de determinado objeto do saber em determinada instituição e, portanto, do ensino da resolução algébrica de equações do primeiro grau. Desse modo, toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais (CHEVALLARD, 1998). Assim sendo, a TAD considera como elementos primitivos INSTITUIÇÕES (I), INDIVÍDUOS (X) e OBJETO (O). Desse modo, são considerados elementos primitivos: INSTITUIÇÕES (I) pode ser uma realidade que se constitui, tempo de vida, família, sala de aula, escola; INDIVÍDUOS (X) desde cedo são submetidos a certas instituições que as fazem pessoas, e OBJETO (O) é toda entidade material ou imaterial que existe para um ou mais indivíduos. Tudo é objeto, inclusive as pessoas (CHEVALLARD,1999).

São noções básicas nessa teoria as RELAÇÕES PESSOAIS (R (X, O) e as RELAÇÕES INSTITUCIONAIS (RI (O)). Essas instituições são: PRODUÇÃO (academias), UTILIZAÇÃO, ENSINO (escolas) e TRANSPOSITIVAS (noosfera). A expressão *Transposição Didática* justifica-se quando uma instituição-alvo é uma instituição de ensino. Essa teoria também investiga as transformações do saber a fim de torná-lo passível de ser ensinado e aprendido. O saber científico é transformado pela noosfera no saber e no saber ensinado, o qual é veiculado na sala de aula. Desse modo, os documentos oficiais, os livros didáticos são instrumentos que irão nortear a elaboração do saber ensinado para descrever e estudar as condições de existência de determinado objeto do saber no interior de determinada instituição.

A TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, de acordo com Chevallard, acrescenta às noções acima descritas as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar às práticas sociais em geral as atividades matemáticas, como descritas a seguir.

Organização praxeológica

Podemos entender uma organização praxeológica como a realização de certo tipo de tarefa t que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t, através de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Parte do postulado de que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard (1998) de praxeologia, simbolizada pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Chevallard (1998) considera ainda que o par $[T, \tau]$ está relacionado à prática e pode ser compreendido como um saber-fazer, e o par $[\theta,\Theta]$ relacionado à razão, é compreendido como o saber. O autor define assim a organização praxeológica $[T, \tau, \theta, \Theta]$, em que temos um bloco prático $[T, \tau]$, composto das tarefas e técnicas, o chamado saber fazer, e um bloco teórico $[\theta, \Theta]$, composto pelas tecnologias e teorias, o bloco do saber. Considera ainda que a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia relativa a essa técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

Os tipos de *tarefas* (t) que se situam em acordo com o princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza. Eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como por exemplo uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (CHEVALLARD, 1998). Por exemplo, resolva a equação $2x + 5 = 35$. A noção de tarefa, ou especificamente do tipo de tarefa, tendo como um objetivo bem definido, por exemplo, encontrar o valor de x, é um tipo de tarefa, mas calcular não explicita o que é calcular. Assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa, mas somente calcular não seria um tipo de tarefa. Para esse exemplo, calcular é gênero de tarefa.

Uma *técnica* (τ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas $\tau \in t$. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa t necessita, em princípio, de uma técnica τ relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\tau \in$ t. Ela pode funcionar para uma parte p(τ) das tarefas t e fracassar para t/p (τ). Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de t (CHEVALLARD, 1998). Por exemplo, a multiplicação no conjunto dos números naturais sempre aumenta, mas pode fracassar em outro conjunto numérico.

A *tecnologia* (θ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica τ, cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo t. Na Matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de demonstração. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ·, isto é, em expor por que ela funciona bem. Além disso, a tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (CHEVALARD, 1998).

A *teoria* (Θ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação-produção, [...] retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica. O autor adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (CHEVALLARD, 1998).

Uma organização matemática é elaborada em torno de uma noção, ou conceito, inerente à própria Matemática. As praxeologias matemáticas (adiante OM) são as respostas (a rigor) a questões do tipo como realizar o estudo de determinado assunto. Refere-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias, entre outras, mobilizadas para o estudo de um tema. Por exemplo, encontrar o valor de uma incógnita de uma equação.

Quaisquer que sejam as escolhas adotadas nos cursos dos trabalhos de estudo de dada OM, algumas situações estão necessariamente presentes, mesmo que se apresentem de formas variadas, tanto de forma quantitativa como qualitativamente falando. Essas situações serão denominadas de momentos de estudos, ou momentos didáticos, porque podemos dizer que, qualquer que seja o caminho escolhido, ele conduzirá inevitavelmente a um momento de fixação, ou de institucionalização, ou a um momento que demandará o questionamento do que é válido acerca do que foi construído, que caracteriza o momento de avaliação, entre outros.

O primeiro momento é o primeiro encontro com a organização que está sendo estudada. O segundo é o da exploração do tipo de tarefas t e de elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas. O terceiro momento é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. O quarto é o do trabalho da técnica que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. O quinto momento é o da institucionalização que mostra o que realmente é a OM constituída, apontando os elementos que permanecerão definitivamente na OM e os que serão dispensados.

Finalmente, o sexto momento, o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização e permite relançar o estudo, demanda a retomada de alguns dos momentos, e eventualmente do conjunto do trajeto didático.

Ao organizar essas tarefas, cabe ao professor escolher as técnicas e tecnologias adequadas, ou seja, o papel central do professor é organizar o trabalho do estudante, enquanto ao estudante cabe aceitar o professor como uma ajuda ao estudo. No entanto, o professor deve aos poucos ir se desligando para o estudante tornar-se responsável pelo seu próprio desenvolvimento, adquirindo assim autonomia para realizar seu percurso de estudo. Sendo assim, enquanto numa sala de matemática “fazer um exercício” é uma tarefa eminentemente cooperativa, a subtarefa que incide em estabelecer o enunciado do exercício recai em via de regra no professor: pertence ao seu *topos*[2].

Um dos maiores problemas didáticos frequentemente presentes para o professor é encontrar o ambiente (dar um lugar aos alunos), quer dizer, para criar, segundo sua intenção, e a propósito de cada um dos assuntos estudados,

[2] A palavra grega *topos* significa lugar tomado ou ação desempenhada em um determinado contexto (CHEVALLARD; GRENIER, 1997).

um *topos* adequado, que dá ao aluno o sentimento de ter um "apropriado papel a desempenhar". Na maior parte dos casos, entretanto, uma tarefa didática tem como atores o professor e os alunos: quando o professor efetiva uma tarefa na qual ele opera com autonomia relativa, essa tarefa surge na maioria das vezes como uma subtarefa no seio de uma tarefa mais ampla, em que ele coopera com o aluno. Na efetivação de uma tarefa didática, aluno e professor se agrupam em uma dinâmica instrumentada em que ambos são chamados a desempenhar seus papéis.

Equações do primeiro grau: elementos

O estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita baseia-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios. Esse anel é simbolizado usualmente por $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}$ representando o corpo dos números reais e consiste das expressões formais $p(x) = a_0 + ... + a_n x^n$, n um número natural, no qual se definem as operações de adição de dois polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real, as quais se supõem, satisfazem as propriedades expressas nas regras usuais da Álgebra.

A operação de adição de dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1 x ... + a_n x^n$ com um polinômio $q(x) = b_0 + b_1 x ... + b_n x^n$ é definida por:

$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1 x ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x ... + b_n x^n)$ $= (a_0 + b_{0'}) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ pertencem a $\mathbb{R}[x]$,

a) $p(x) + q(x) = p(x) + q(x)$
b) $[p(x) + q(x)] + (r) = q(x) + [p(x) + r(x)]$
c) $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x)$, em que $0(x)$ representa um polinômio nulo $0_0 + 0x + ... 0x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
d) Para todo $p(x) = a_0 + a_1 x + ... a_n x^n$ existe o polinômio $p'(x)$ tal que $p(x) + p'(x) = 0(x)$.
Sabe-se que $p'(x) = (-a_0) + (-a_1)x ... + (-a_n)x^n$

A operação de multiplicação de um número real k por um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ é definida por:

$kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + ... + (ka_n)x^n$

e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $p(x)$, e $q(x)$ $\mathbb{R}[x]$,

a) $k[p(x) + q(x)] = kp(x) + kq(x)$
b) $k_1[k_2 p(x)] = (k_1 k_2) p(x)$
c) $1p(x) = p(x)$

O polinômio, assim definido, tem grau n se $a_n \neq 0$. No caso em que $n = 1$, dizemos que $p(x) = a_0 + a_1 x$ tem grau 1. Nesse caso, $p(x)$ é denominado polinômio do primeiro grau na indeterminada x.

Por outro lado, para cada polinômio $p(x) = a_0 + a_1 ... + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, é possível definir uma função polinomial f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicada por $f(x) = a_n x^n + ... a_0$. A função assim definida associa a cada número $k \in \mathbb{R}$ em $f(k) \in \mathbb{R}$.

Se existe um número $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0$, dizemos que k é raiz (zero) de $f(x)$. Nesse caso, para determinar as raízes do polinômio, é necessário determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $a_n x^n + ... + a_0 = 0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n. No caso em que $n = 1$, temos uma equação polinomial do primeiro grau $(a_0 + a_1 x = 0)$, que é o nosso objeto de estudo. Os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $a_n x^n + ... + a_0 = 0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n. No caso em que $n = 1$, temos uma equação polinomial do 1° grau $(a_0 + a_1 x = 0)$, que é o nosso objeto de estudo. Os números reais tais que $f(\propto) = 0$ são denominados soluções da equação $f(x) = 0$.

Com base nas definições anteriores, denomina-se equação do 1° grau toda equação na forma $ax + b = 0$, em que a incógnita possui expoente 1. A equação do primeiro grau é chamada linear, pois sua representação gráfica é uma linha reta. Assim, para a pesquisa fizemos uma modelização *a priori* com base em Araújo (2009), conforme descrito a seguir.

Modelização *a priori*

Partimos da classificação realizada por Chevallard (1994) sobre os procedimentos de resoluções de equações do primeiro grau em duas categorias: (1) equações do tipo $ax + b = c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos e (2) equações do tipo $a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ com $a_1 \neq 0$.

No entanto, nem sempre as equações do polinomial do primeiro grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Frequentemente, numa atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dntre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x) = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$, em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais, na variável x, que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax + b$, e $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mas que podem ser reduzidas a essa forma por processo de desenvolvimento e redução.

Portanto, para este estudo, classificamos e caracterizamos *a priori* os seguintes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, no campo do $\mathbb{R}$, em quatro categorias: (a) resolver equação uma equação do tipo $ax + b = c$(t_1), como por exemplo $2x – 1 = 15$; (b) resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma (t_2), por exemplo, $3(x + 3) + x = 5$; (c) resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$(t_3), por exemplo, $2x – 2 = x + 10$; (d) resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$ expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica (t_4), por exemplo, $6(x – 2) + 4x = 2x – 1$.

Para resolver tais subtipos de tarefas foram identificadas e categorizadas *a priori* as seguintes técnicas (τ): a) testar a igualdade (τ_{TI}), por tentativas e erros; b) transpor termos ou coeficientes (τ_{TTC}), invertendo as operações; c) neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade; d) reagrupar os termos semelhantes (τ_{RTS}), invertendo o sinal dos termos transpostos.

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas τ_2 e τ_4, temos também a seguinte técnica: e) desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE}), eliminando parênteses e/ou agrupando termos semelhantes. Enfim, dependendo das variáveis mobilizadas na construção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem às técnicas mistas.

Para justificar as técnicas caracterizadas acima para resolver equações do primeiro grau com uma incógnita, foram identificadas e caracterizadas *a priori* as seguintes tecnologias: a) princípios de equivalência entre equações: equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}); b) princípio aditivo: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; c) princípio multiplicativo: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; d) propriedades das operações inversas em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ_{POI}): 1) se a, b, c são números reais tais que a + b = c, então a = b – c; 2) se a, b e c são números reais tais que a.b=c, então a = c ÷ b, b ≠ 0; 3) propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei do cancelamento: 1) se $a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$; 2) se $a.b = a.c \Leftrightarrow b = c$ com $a \neq 0$; 3) propriedades distributivas (θ_{PDM}): Se k,a,b,c e e d são números reais, então $k(a + b) = ka + kb$ e $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

A seguir, descrevemos os passos metodológicos adotados, bem como as etapas que serão realizadas até o momento na pesquisa e alguns resultados parciais.

Metodologia

A nossa questão metodológica da pesquisa tem como arcabouço teórico e modelo analítico dessa pesquisa a Teoria Antropológica do Didático. Assumindo a tese de Chevallard (1994), de que a TAD fornece os elementos necessários à caracterização do ensino de determinado saber matemático que se realiza no interior de determinada instituição de ensino, sendo nosso foco o ensino fundamental brasileiro especificamente o programa curricular nacional e o programa regional de Pernambuco e o objeto de estudo são as equações polinomiais do primeiro grau.

A metodologia seguida para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas sobre o ensino de equações do primeiro grau constitui-se na modelização *a priori* das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno da resolução de equações do primeiro grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos.

Para isso, analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de ensino e o Programa Curricular do Estado de Pernambuco (PCPE). Desse modo, a pesquisa está divida em duas fases: na primeira fase, identificam-se elementos das praxeologias matemáticas e didáticas existentes nos documentos oficiais; na segunda fase, caracterizam-se as praxeologias matemáticas e didáticas existentes em três livros (Matemática, Praticando Matemática e Tempo de Matemática) didáticos, que são as instituições de transposição didática (externas) de saberes a ensinar.

Resultados

Assim, o primeiro documento analisado foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Esse documento preconiza que o estudo da Álgebra é proposto para ser introduzido no bloco de "números e operações" por meio de atividades em que o estudante amplie os seguintes conceitos e procedimentos (BRASIL, 1998, p.72):

> - Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas.
> - Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.
> - Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

O Quadro 1 mostra o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional explícita existente nos PCN (BRASIL, 1998) para o ensino da Álgebra no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Quadro 1 – Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do 1º grau no PCN.

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas.	(Não explícita)	Propriedade das operações numéricas.
Traduzir sentenças matemática da linguagem usual para a forma algébrica.	(Não explícita)	(Não explícita)

Fonte: autoria própria.

Além do que, nesse documento, afirma-se que nesse ciclo (6º e 7º ano) sejam desenvolvidas tarefas no sentido de permitir aos estudantes compreender a noção de variável e reconhecer a expressão algébrica como uma forma de demonstrar relações existentes entre variação de duas grandezas.

Ainda sobre o ensino de equações do primeiro grau, foi verificado que as orientações relativas ao *ensino*, considerando os PCN (BRASIL, 1998), não fornecem elementos que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes.

Em relação à metodologia de ensino, esse documento propõe que o professor tenha um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, fazendo uso de recursos diversos em sala de aula tais como: a resolução de problemas; história da matemática; os jogos e uso de tecnologias. Essa nova proposta de trabalho está associada ao *topos* pedagógico esperado do professor, que é o encarregado por incluir os processos aplicados e as diferenças encontradas, provocar o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais apropriadas.

Após as análises desse documento de referência nacional, fizemos a análise do documento regional do estado de Pernambuco. Os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco (2012) propõem que:

> As equações de primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido. Assim, cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econô-

> micos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. É preciso, porém, levar em consideração que a passagem acima referida não se dá na forma de uma ruptura, pois há estudantes que sistematicamente buscam procedimentos aritméticos, sempre que é possível. (PERNAMBUCO, 2012 p.102)

Esse documento acrescenta ainda os seguintes exemplos: resolver problemas de partilha e de transformação (por exemplo: dentro de dois anos a minha idade será o dobro da idade que você tinha há dois anos...), fazendo uso das representações simbólicas. Estabelecer a técnica da equivalência (metáfora da balança) para resolver equações de primeiro grau do tipo A(x) = B(x), sendo A(x) e B(x) expressões polinomiais. O Quadro 2 a seguir mostra o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explicita:

Quadro 2 – Praxeologia matemática existente sobre a equação do 1º grau nos Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental e Médio de Pernambuco.

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Resolver problemas de partilha e de transformação.	Transpor termos ou coeficientes.	Propriedade das operações inversas.
Traduzir sentenças matemática da linguagem usual para a forma algébrica.	Neutralizar termos e coeficientes.	Princípio de equivalência.

Fonte: autoria própria.

Em relação ao *topos* pedagógico e didático, um ensino que aceite e aprecie os saberes e as práticas dos cidadãos e das comunidades locais. Ou seja, desenvolvendo as competências e habilidades que cooperem inteiramente para auxiliar o cidadão em sua formação crítica da sociedade. Finalizando as análises dos documentos oficiais, analisamos os três livros didáticos.

Os temas algébricos são tratados em capítulos próprios ou em capítulos referentes aos números e operações. No livro *Matemática*, as noções algébricas são introduzidas oficialmente por meio do cálculo algébrico. Já no livro *Tempo de Matemática,* as noções algébricas são apresentadas como sendo um processo envolvendo igualdades que são as equações. No terceiro livro, *Praticando Matemática*, as noções algébricas são introduzidas oficialmente por meio do cálculo algébrico.

A organização matemática e a análise das coleções à luz das praxeologias matemáticas relativas à resolução de equações polinomiais do primeiro grau permitiu-nos identificar as seguintes organizações matemáticas pontuais relativas ao:

Subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax + b = c$). Os resultados mostram que o livro *Matemática e Praticando Matemática* os exercícios relativos a esse subtipo de tarefa foram inicialmente propostos para serem resolvidos por meio de técnica justificada por meio das propriedades das operações inversas (θ_{POI}). Já o livro *Tempo de Matemática* faz o inverso, apresenta primeiro as propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

Subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $A(x) = c$). Os resultados mostram que no livro *Matemática* e no livro *Tempo de Matemática* os autores não demonstram essa tarefa de forma explicita. Já no livro *Praticando Matemática* foram apresentadas as tarefas. Assim, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para ser resolvidos por meio da técnica mista $\tau_{DRE\_TTC,}$ oficializada por meio de exemplos. Nos livros, essa técnica mista implica desenvolver e reduzir a expressão $A(x)$ à forma por meio da técnica $\tau_{DRE.}$. Essa técnica auxiliar τ_{DRE} é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}).

Subtipo de tarefa t_3 (resolver equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$). Os resultados indicam que nas coleções os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para ser resolvidos por meio da técnica τ_{NTC}, cuja sistematização é amarrada em regras que se apoiam nas propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

Subtipo de tarefa t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x) = A_2(x)$). Os resultados mostram que no livro *Matemática* os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para ser resolvidos por meio da mobilização da técnica mista τ_{DRE_NTC}, sistematizada por meio de exemplos. A técnica auxiliar é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}) e a técnica τ_{NTC}, por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}). O Quadro 3 abaixo apresenta um resumo das tarefas e tecnologias de cada livro:

Quadro 3 – Comparações das técnicas dos três livros.

Subtipo de tarefas	***Livro Matemática***		***Tempo de Matemática***		***Praticando Matemática***	
	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia
t_1: $ax + b = c$	τ_{TTC}	θ_{POI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{TTC}	θ_{POI}
			τ_{TTC}	θ_{POI}		
t_2: $A(x) = c$	Não explicita		Não explicita		$\tau_{DRE-TTC}$	θ_{PDM}
t_3: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	τ_{NTC}	θ_{PGI}	Não explicita		τ_{NTC}	θ_{PGI}
t_4: $A_1(x) = A_2(x)$	$\tau_{DRE-NTC}$	$\theta_{PDM}-\theta_{PGI}$	$\tau_{DRE-NTC}$	$\theta_{PDM}-\theta_{PGI}$	$\tau_{ED\_DRE-TTC}$	$\theta_{PDM}-\theta_{PGI}$

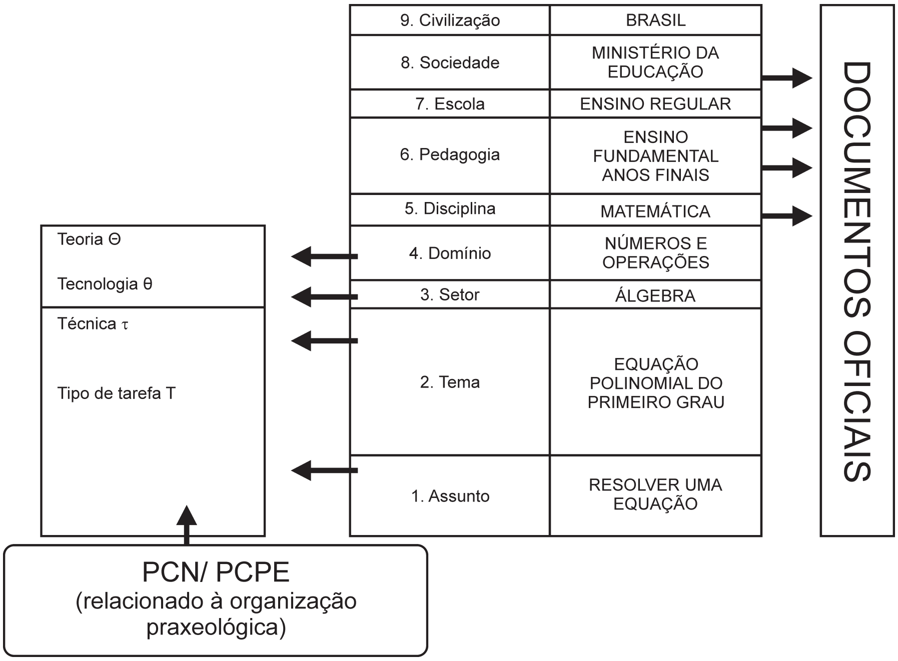
Fonte: autoria própria.

Nesse contexto, Chevallard (1999) afirma que o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula e a maneira como fazê-lo em relação ao aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber. No entanto, acreditamos que o livro didático é um meio que exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente. Assim, analisamos esses três livros que foram usados no cotidiano escolar dos professores pesquisados.

Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação didática a correspondência entre as organizações matemática e didática. Desse modo, estabelece um determinado saber em uma escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações, seu nicho (são as funções que eles exercem) e o hábitat (é o lugar onde há objetos matemáticos nos quais se encontram um saber). Chevallard faz uso desses termos como metáfora. O autor busca nos termos da ecologia essas ideias para tentar explicar as relações entre os objetos e o estudo desses objetos em si mesmos (ALMOULOUD, 2007, p 113).

De acordo com Chacón (2008, p.73), existe uma correlação entre as “organizações matemática OM e os níveis de codeterminação didática C-DD”. Os níveis que se localizam sob o nível da disciplina são organizados de forma agregada a uma organização matemática OM complexa progressiva (pontual, local, regional e global). Conforme figura a seguir:

Figura 1 – Níveis de codeterminação didática, a praxeologia matemática, a organização didática dos documentos oficiais PCN/PCPE.



Fonte: adaptado de Artigue e Wislow (2010, p.7).

Destacamos um exemplo simples para cada nível hierárquico no contexto da nossa pesquisa: os níveis genéricos 7, 8 e 9 (superiores), o intermediário (pedagogia) e os específicos no âmbito matemático 1, 2, 3, 5 e 6 (inferiores). Entretanto, Artigue e Winslow (2010, p.7) ressaltam que os estudos comparativos expõem alguns níveis, mas raramente todos os níveis de codeterminação.

Considerações finais

Os resultados acima mostram, no que diz respeito às relações institucionais, os resultados obtidos das análises dos documentos oficiais (nacional e regional). Apontam que o ensino das equações polinomiais do primeiro grau é implicitamente demonstrado como uma ferramenta para resolver problemas de situações sociais. Além disso, esses documentos analisados não fornecem dados que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes em torno da resolução de equações do primeiro grau. No entanto, podemos constatar uma evolução no documento regional em relação aos Parâmetros Curriculares nacionais (PCN) no que concerne aos conteúdos.

As equações do primeiro grau são justificadas como ferramenta para resolver problemas e não têm sua organização matemática caracterizadas nos documentos oficiais. A metáfora da balança está presente nos documentos como recurso didático e, bem como a preocupação de não utilizar esse artifício apenas como manipulação.

As transposições didáticas realizadas nessas coleções relativas ao conceito de equação do primeiro grau falham em não deixar clara a transição dos métodos de resolução aritméticos para os métodos de resolução algébricos, assim como por não realizar adequadamente a passagem da Aritmética para Álgebra. O mesmo constata-se na não justificação na transformação das tarefas e técnicas. O uso da metáfora da balança de dois pratos está presente nas três coleções didáticas.

Referências

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. Praticando Matemática, 7. 3.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção Praticando Matemática).

ARAÚJO, A. J. de. *O ensino de Álgebra no Brasil e na França: um estudo sobre o ensino de equações do 1° grau à luz da teoria antropológica do didático*. Tese de doutorado, UFPE, 2009.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. p.218.

ARTIGUE, M.; WINSLOW, C. International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.31, n.1 (2010), p.47-82.

BARBOSA, E. J. T.; LINS, A. F. Equação do Primeiro Grau: um estudo das organizações matemática e didática. In: *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife/PE, junho de 2011.

______.Organizações praxeológicas: equação do primeiro grau em livros didáticos do 7° ano do ensino fundamental. In: *Anais do V Seminário de Pesquisa em Educação Matemática*. Petrópolis/RJ, outubro de 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries). Matemática. Brasília/DF, 1998. 142 p.

CHACON, A. M. A. *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica.* THÈSE Du Doctorat De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier en *Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques* Spécialité: Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHEVALLARD, Y. (1991). *Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE. Traductión: Claudia Gilman. Título original: Chevallard, Y. (1984), La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In : *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, p.221-266.

CHEVALLARD, Y.;BOSCH, M.; GASCON, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique. In: *Petit X n° 5,* IREM, Grenoble, 1984.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie. *Petit x n° 19,* IREM de Grenoble, p.43-75, 1989.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. Actes de l'U.E. de la Rochelle, 1998.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie. *Petit x n° 19*, IREM de Grenoble, p.43-75, 1989.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisieme partie. *Petit x n° 30*, IREM de Grenoble, p.5-38, 1990.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E.* de la Rochelle, 1998.

______. Organiser l'etude 1. Structures et Fonctions. In : DORIER, J.-L. et al. (Eds.). *Actes de la 1 lieme Ecole d'ete de didactique des mathematiques* – corps –21–30 Aout 2001, Grenoble: La Pensée Sauvage, p.3-22.

______. Dimension ibstrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique.Séminaire de didactique des mathématiques et de L'informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble. 1991.

______. La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique, 1991.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.19, n.2, p.221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. ; GRENIER, D. *Les topos de l'élêve. Actes d e la IX école d' étê de didactique des mathématiques de Houlgate*, França, 1997.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma [et al.]. *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Trad. Juan Acuña Liorens. Porto Alegre: Artes Medicas, 1996.

IMENES, L. M. Matemática. Imenes & Lellis. Obra em 4v. para alunos de 6° ao 9° ano. São Paulo: Moderna, 2010.

KAPUT, J. *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Disponível em: <http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2013.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

______. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER JR., F.K. (Ed.). *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p.707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.

NAME, M. A. *Tempo de Matemática, 7:* ensino fundamental. 2.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2010.

NCTM. *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM, 2007.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco 2012.

Edelweis Jose Tavares Barbosa – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) (CAA). E-mail: edelweisb@yahoo.com.br

Anna Paula Avelar Brito Lima – Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFPE) . E-mail: apbrito@gmail.com