La Enseñanza de las Cónicas Como lugar Geométrico en el Espacio a Través del Aplicativo GeoGebra

Javier Alejandro Hernández García

Monografía para optar por el título de Licenciado en Matemática

Asesor:

Mg. Erika Vanessa Arias Galindo

Universidad Nacional y Abierta a distancia – UNAD

Escuela de Ciencias de la educción – ECEDU, Licenciatura en Matemáticas

Programa de licenciatura en matemática

Tolima

2022

Resumen analítico especializado (RAE)	
Titulo	La Enseñanza de las Cónicas Como lugar Geométrico en el Espacio a Través del Aplicativo GeoGebra
Modalidad de Trabajo de grado	Monografía
Línea de investigación	Esta monografía se encuentra en la línea de investigación Educación y Desarrollo humano de la ECEDU debido a que no se identifica únicamente las problemáticas de aprendizaje de las figuras cónicas en el seno de la educación media sino que se da un paso adelante y se reflexiona sobre algunos elementos para la discusión que pueda revolucionar el espacio de la enseñanza de las matemáticas de acuerdo a las necesidades de los estudiantes y su libre desarrollo humano.
Autores	Javier Alejandro Hernández García. Cód. 1023887527
Institución	Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
Fecha	3 de Octubre de 2022
Descripción	El presente trabajo de monografía sintetiza 1 resultados bajo la asesoría de la licenciada y Magíster Erika Vanessa Arias Galindo. Este trabajo está inscrito en la línea de investigación Educación y Desarrollo humano de la ECEDU. Se hizo un enfoque método lógico de clasificación y organización de masas de documentos para llevar a cabo 1 síntesis y poder alcanzar a construir explicaciones y algunas conclusiones que puedan aportar a la discusión sobre la enseñanza de las matemáticas. Mente se elabora el documento siguiendo las directrices de Normas APA séptima edición.

Fuentes	Antonio Peña, J. A., & Sepulveda Delgado, O. (2020). *Estudio de las cónicas en algunas métricas*. Redipe. https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1115 Bonilla, D. S. L., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). *Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/5634/1/BonillaLasconicasALME2014.pdf Diaz, D. G. (2017). *Construcción de secciones cónicas con GeoGebra, para estudiantes de grado noveno en la I.E.Jorge Villamil Ortega (zona rural de Gigante, Huila).*Unal https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63052 Fernández, E. (2009). Obtenido de Cónicas como lugares geométricos desde un enfoque puntual y global en cabri ii plus: .Funes. http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pdf Gallego, A. P. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/6605/ *Lestòn, P. (ed), (2014) Acta latinoamericana de matemática educativa. Clame* https://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf *Mejía*, A.B. (2003). Obtenido de La segunda ley de Kepler como eslabón entre la geometría analítica y el cálculo integral. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/8293/1/Bell2003Segunda.pdf Pérez Bernal, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas*. Unal.

	https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8094/TRABAJO_DE_GRADO_FINAL_UNAL_Def.pdf?sequence=1&isAllowed=y Quintero, M. A. (2005). *Modelo tridimensional de transversalidad*. Scielo. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872005000200009
Contenidos	● Portada. ● RAE (resumen analítico especializado). ● Tabla de contenido. ● Introducción. ● Justificación. ● Definición del problema. ● Objetivos. ● Marco teórico. ● Aspectos metodológicos. ● Resultados. ● Discusión. ● Conclusiones y recomendaciones. ● Referencias.
Metodologías	Este trabajo se llevó a cabo según las características del enfoque cualitativo del tipo exploratorio y descriptivo porque se mantiene en la línea de a partir de una problemática específica evidenciada lo que da lugar a una pregunta problema sobre la enseñanza de as cónicas, se procede a la recolección a la búsqueda de autores e investigadores de la didáctica de las matemáticas. Siguiendo esta idea las técnicas de información de la investigación documental, se realizó el análisis e interpretación de diferentes textos o trabajos de investigación a nivel nacional en los últimos 10 años que se

	publicaron en bases de datos académicas como Google académico, Scielo, Redalyc, Dialnet, Uniandes entre otros)
Conclusiones	Las cónicas son un tema especial de las matemáticas y se relaciona mucho con el dibujo técnico lo que les convierte en un candidato de interés para los estudiantes de la media. Por supuesto, los profesores de matemáticas están convocados a lleva temas de interés que puedan despertar la curiosidad de los estudiantes, una tendencia a la que se ha inclinado el presente trabajo es a la de ponerlo en el campo de la transversalidad y llevarlo a situaciones del mundo real hacia donde los estudiantes tienen enfocadas la mayoría de sus preguntas. En efecto, hemos designado que las curvas cónicas satisfacen este requisito y pueden convertirse en la base para el diseño de una ruta didáctica para la enseñanza de los cuerpos geométricos. Mediante la disposición el MEN incluyo en el currículo la disposición para la enseñanza de las cónicas como un lugar geométrico descartando el enfoque algebraico (Fernández, 2009). De esta manera se logra que los estudiantes eviten caer en deficiencias de aprendizaje propios de los procesos de cálculo y de datos para la construcción de función, sino que con la identificación de unos parámetros geométricos básicos ya el estudiante este en la capacidad de generar dichas curvas. Se consideró que era una oportunidad para reforzar el aprendizaje de los parámetros geométricos involucrando la modelización de las curvas cónicas en GeoGebra y mejoramiento de la visualización de las mismas por parte de los estudiantes. Una vez que se reconocen las figuras cónicas eran una temática de las matemáticas y orientándolas hacia la idea de que en la geometría se tiene una visión en el en que de la geometría se tiene

	una visión analítica y graficas de las sesiones cónicas en un plano mediante parámetros de foco y mediatriz. Se observa como los conocimientos de las matemáticas no se hicieron a partir de abstracciones alejadas de la realidad sino que todo lo contrario, los matemáticos de la antigüedad dedujeron esas razones lógicas para validarlas conforma a los datos arrojados por las observaciones cada vez más precisas de los movimientos delos cuerpos celestes lo que desemboco en las leyes de Kepler, que hoy en día, siguen rigen el movimiento de los satélites que son enviados desde las estaciones estacionales a orbitar sobre la tierra así como los movimientos de los satélites naturales de cada planeta y de cada sistema solar.
Referencias bibliográficas	• (Antonio Peña y Sepúlveda Delgado, 2020) • (Araujo, 2019) • (Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014) • (Díaz, 2017) • (Fernández, 2009) • (Flores y Gómez, 2013) • (Gallego, A. P. ,2013) • (García y Arriero Villacorta, 2000) • (Graciela, M. (2000) • (Granados y Padilla Escorci, 2020) • (Lestón, 2014) • (Murillo Silva, 2013) • (Pérez Bernal, 2011) • (Romero García, 2019) • (Valbuena Tamara y Berrio Valbuena, 2021)

Contenidos

Tabla de figuras

Resumen

En el siguiente trabajo de monografía presenta una síntesis alrededor de una masa bibliográfica de la que se tuvo disposición en torno a la investigación en didáctica de las matemáticas especialmente en la temática de las figuras cónicas. Se plantea la necesidad de acudir a estrategias novedosas para la enseñanza de las figuras cónicas lo que invita a reflexionar sobre los diferentes enfoques que se han puesto en práctica. En el presente trabajo de monografía se dispone la inclinación de asumir las curvas cónicas como lugares geométricos así como una disposición para llevarlas a un terreno aplicativo en astronomía y la utilización del software GeoGebra libre como una herramienta para mejorar la visualización y la construcción de figuras cónicas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas en la educación media.

Palabra Claves: Matemáticas, Cónicas, Lugar Geométrico, leyes de Kepler, GeoGebra

Abstract

In the following monograph work, he presents a synthesis around a bibliographical mass that was available around the investigation in mathematics didactics, especially in the subject of conic figures. The need to resort to novel strategies for teaching conic figures is raised, which invites us to reflect on the different approaches that have been put into practice. In the present monograph work, the inclination to assume the conic curves as geometric places is arranged, as well as a disposition to take them to an applicative field in astronomy and the use of the free GeoGebra software as a tool to improve the visualization and construction of conic figures. in the context of teaching mathematics in secondary education.

Keywords: Mathematics, Conics, Locus, Kepler's laws, GeoGebra

Introducción

El presente documento presenta un análisis sobre la enseñanza de las cónicas como cuerpos geométricos a partir de las nociones básicas de las mismas…, una temáticas que desde el punto de vista pedagógico. Este elemento puede convertirse en un aliado del proceso de aprendizaje de las secciones cónicas es el aplicativo de GeoGebra debido a su forma cómoda de maniobrar por parte de los usuarios además de ser de gran facilidad y practicidad para fomentar un ambiente nuevo en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, describe la transversalidad entre las matemáticas y la ciencia de la astronomía al evidenciar como las cónicas fueron utilizadas para representar los movimientos celestes a partir de las leyes de Kepler.

Este enfoque permite reforzar el diseño de estrategias de enseñanza para convertir la clase de matemáticas en un escenario interesante para los alumnados de la educación media Las aplicaciones de las cónicas son tan numerosas como apasionantes estando presentes incluso en la explicación de comportamientos climáticos; por esta razón, en el escenario del aula de matemáticas se asume el estudio de cónicas como un punto de partida.

Se realiza una indagación de los estudios e investigaciones que se han realizado en los últimos 10 años a nivel nacional e internacional dentro de los cuales se destacan los trabajos de Araujo (2019), Diaz (2017), Valdez (2016) Zipa (2020).

Justificación

Las investigaciones que se socializan en foros, congresos, simposios, y demás escenarios dedicados a reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas están continuamente promoviendo estrategias nuevas orientadas a recuperar el interés de los estudiantes hacia su clase de matemáticas y consecuentemente mejorar su rendimiento en las pruebas nacionales e internacionales de matemáticas (Zipa, 2020). Particularmente tomando el tema de cónicas se plantea como opción la incorporación de un enfoque transversal con la astronomía debido a que allí las cónicas juegan un rol de no menor importancia. Esta suposición está apoyada por las observaciones de Silva (2013), ya que los resultados de sus observaciones a estudiantes de décimo grado evidenciaban que estos presentaban un interés innato por la astronomía en sus charlas y su tendencia al ver videos de astronomía en su tiempo libre. El bajo rendimiento académico, en general, la apatía y el temor que se manifiesta hacia la matemática hace que los docentes desarrollen nuevas estrategias para acercar el conocimiento a ellos, conservando su desarrollo personal, y la autonomía escolar. Para los estudiantes de décimo grado, el estudio de las leyes físicas, paralelamente con la trigonometría, donde el capítulo de las cónicas se ha tomado de último por efectos del desarrollo del presente trabajo, despierta el interés porque, se puede ver en estas dos áreas, la transversalidad de los conceptos que se han visto en las charlas y videos relacionados con la matemática y la astronomía, en el proyecto de uso del tiempo libre. El presente trabajo pretende contribuir al acercamiento de las cónicas mediante el uso de las aplicaciones de ellas en la astronomía.

En la perspectiva de favorecer la visualización de los parámetros de las figuras cónicas en un ambiente que En un ambiente que mejore el aprendizaje de las mismas desde un enfoque geométrico, no alineado al concepto de función de segundo grado, más propia del enfoque de la aritmética. De acuerdo a como lo plantea Giraldo (2017) Con el software GeoGebra se puede construir las secciones cónicas: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, de tal forma que el estudiante tenga la posibilidad de trabajar la geometría y el álgebra simultáneamente de forma dinámica e integrada observando la diferencia de cada una de ellas definidas como un conjunto de puntos que satisfacen una ecuación algebraica. De esta forma el estudiante conceptualiza propiedades geométricas que le permiten plantear y resolver problemas examinando, conjeturando y verificando con la ayuda del GeoGebra, es decir facilitándole al estudiante la posibilidad de conjeturar y de preguntar del porqué de determinados hechos, llevándolo a explorar otras situaciones (Diaz, 2017) .

Descripción del problema

Las dificultades se evidencian en el aprendizaje de la matemática en el nivel de la educación media

Planteamiento del problema.

Las cónicas constituyen un segmento importante en el cuerpo de la geometría analítica y es llevado al aula, principalmente en los últimos años de la educación media. Según Mosquera (2011), las cónicas son presentadas de tal manera que quedan reducidas al tratamiento algebraico en el que se espera que, después de haber pasado por todas las temáticas de la matemática, el estudiante debe estar en capacidad de resolver y formular problemas que lo lleven a identificar y ~~poder~~ representar las figuras cónicas en planos cartesianos, donde se evidencie los parámetros, así como la construcción misma de las curvas.

Además, El enfoque algebraico prioriza la enseñanza de ecuaciones y algoritmos para luego asociar representaciones gráficas como funciones de segundo grado, dejando sobre el ambiente un panorama desalentador en cuanto a las limitaciones de la enseñanza de las cónicas y el propósito de las mismas al no salirse del enfoque algebraico de tabulación de datos para obtener una curva (Garcia,2019).

Por ende, Un primer paso en recuperar la enseñanza de las cónicas está en la actualización de los DBA en 2016 "**Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones**". Esta reducción de la enseñanza de las cónicas priorizando ecuaciones, algoritmos y encajándolas con representaciones de funciones a partir de tabulación de datos en un plano cartesiano no favorece el interés de los estudiantes hacia su clase de matemáticas sino que además este enfoque se interpone en prácticamente todas las temáticas que se enseñan en matemáticas durante todo el bachillerato dejando muchas preocupaciones sobre el perfil del estudiante en cuanto a sus competencias matematices logradas (Beltrán, 2019).

Según (Pérez, 2004) La representación en el plano de las figuras cónicas en las aulas de clase de matemáticas se realiza de una manera tal que al estudiante se le dificulta dar una interpretación espacial de las mismas y si a esto le añadimos que la generación de cónicas dependen de puntos y medidas con las que los alumnos aún no han interactuado la carencia de preconceptos aún no han asimilados se puede concluir que los estudiantes no alcanzan la condición de hacer una interpretación correcta de las curvas cónicas.

Esta problemática descrita invita a reflexionar sobre la enseñanza de las cónicas y la necesidad de fomentar estrategias novedosas utilizando herramientas físicas tanto como computacionales. En la presente investigación se tiene en cuenta el software libre GeoGebra para introducir en el aula de matemáticas las relaciones, propiedades y conceptos asociados a las cónicas. En conclusión, mediante el aplicativo de GeoGebra se puede incentivar el tratamiento de curvas cónicas a partir de sus características que las hacen ver como un lugar geométrico y no necesariamente como una función de segundo grado; es decir, dar un tratamiento de lasa cónicas en el contexto de la geometría y no en el contexto del algebra.

El carácter innovador de este enfoque se da porque, por ejemplo, partiendo de la elipse, se pueden crear las otras formas cónicas (hipérbolas, parábolas) ya que solo dependen del ángulo que se forma entre el plano y el eje del cono. Así pues, se considera la pertinencia de abordar las cónicas desde el punto de vista geométrico y haciéndolas más evidentes con el aprovechamiento de las herramientas de las tecnologías de la información y de la comunicación.

Las anteriores consideraciones no permite plantear el siguiente cuestionamiento*: ¿Cuál es impacto de utilizar el aplicativo GeoGebra en la enseñanza de las cónicas reconociéndolas como un cuerpo de la geometría en la enseñanza de las cónicas en la educación media?*

Objetivos

Objetivo general

Analizar la incidencia que tiene GeoGebra en la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico y su aplicación en la astronomía, describiendo las principales investigaciones para dinamizar una clase de matemáticas.

Objetivos específicos

Realizar un modelo explicativo de las cónicas en un enfoque geométrico tomando como base el elemento directriz.

Establecer como las cónicas son utilizadas para describir movimientos de cuerpos celestes, explicando situaciones específicas de modelación matemática.

Utilizar el aplicativo GeoGebra como instrumento tecnológico para lograr una visualización de cómo se construyen curvas cónicas en un enfoque geométrico y poniéndolas de una vez en aplicación a la rama de la astronomía como modelos utilizados para la descripción de orbes celestes.

Marco Teórico

Se examinarán las tres categorías que componen el presente documento de monografía. La primera categoría es una descripción de las figuras cónicas como cuerpos geométricos manteniéndose al margen del enfoque algebraico como funciones de segundo grado. La segunda categoría es la de las cónicas aplicadas a las leyes del movimiento interplanetario de Kepler y la tercera categoría es la de GeoGebra como elemento didáctico de la enseñanza de las sesiones cónicas, así como el reconocimiento de las leyes de Kepler mediante procesos de modelización que se llevan a cabo en la plataforma en línea y gratuita geómetra.

Descripción de las cónicas como cuerpos geométricos

A continuación, se describirá de manera detallada las definiciones de cada una de las nociones de las cónicas, iniciando con la circunferencia, la elipse, hipérbola

Circunferencia

Se conoce como el lugar geométrico de un número de puntos los cuales son equidistantes al punto fijo denominado: centro.

Simbólicamente se puede interpretar que una circunferencia C está definida por puntos $\mathrm{d}(\mathrm{X},0) = \mathrm{r}$. Como a ambos lados de la igualdad se obtienen valores positivos se puede establecer como el cuadrado $\left(d(P,0)\right)^2 = r^2$

Si $X = (x, y)$ es un punto coordenado cualquiera de la circunferencia y sea $O = (a, b)$ el centro, entonces se construye la relación.

$$\left(d(P,0)\right)^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = r^2$$

Se deduce que

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = r^2$$

Si el centro se encuentra en el origen la ecuación queda como

$$X^2 + X^2 = r^2$$

Quedando como resultante la ecuación para una circunferencia (ilustración 1) con $r > 0$ y centro $O = (a, b)$

A continuación, se tiene una construcción de los parámetros geométricos de la circunferencia (ver figura 1)

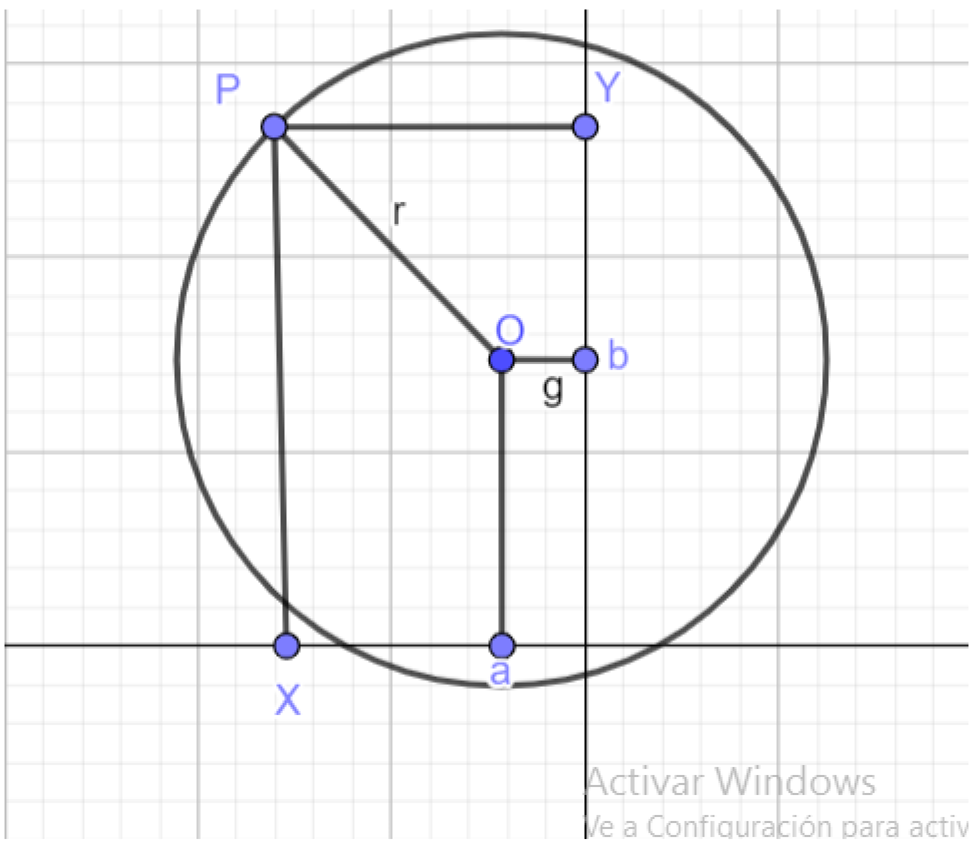

Figura 1 Representaciòn de una circunferencia en Geogebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Elipse

Se conoce como el lugar geométrico donde la suma de las distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

Simbólicamente, la elipse se caracteriza por puntos P tales que $d(P, F_1) + d(X, F_2) = 2a$. Para efectos de hacer los cálculos más prácticos se puede asumir que los focos se encuentran sobre la recta $Y = 0$ y que en esta recta se encuentren los focos. así, si se considera que la elipse tiene centro en el origen y las coordenadas de los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$

De lo anterior se puede concluir que dado un punto $P = (X, Y)$ de la elipse se obtiene:

$$d(P, F_1) + d(X, F_2) = \sqrt{(X-c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X+c)^2 + Y^2} = 2a$$

Despejando se obtiene

$$\sqrt{(X-c)^2 + Y^2} = 2a - \sqrt{(X+c)^2 + Y^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad

$$\left|\sqrt{(X-c)^2 + Y^2}\right|^2 = \left|2a - \sqrt{(X+c)^2 + Y^2}\right|^2$$

Eliminando las raíces con los cuadrados y resolviendo el binomio cuadrado perfecto se obtiene.

$$(X-c)^2 + Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} + (X+c)^2 + Y^2$$

$$X^2 - 2cX + C^2 + Y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} + X^2 + 2cX + c^2 + y^2$$

Simplificando

$$-2C = 4a^2 - 4a\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} + 2cX$$

Despejando la raíz cuadrada

$$4a\sqrt{(X+c)^2 + Y^2} = 4a^2 + 4cX$$

El 4 se elimina y elevando al cuadrado se obtiene

$$\left(a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}\right)^2 = (a^2+cX)^2$$

Operando

$$a^2(X+c)^2 + a^2Y^2 = a^4 + 2a^2cX + c^2X^2$$

$$a^2X^2 + 2a^2cX + a^2c^2 + a^2Y^2 = a^4 + 2a^2cX + c^2X^2$$

Simplificando y reagrupando se obtiene

$$a^2X^2 - c^2X^2 + a^2Y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)X^2 + a^2Y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad entre $a^2(a^2-c^2)$ se obtiene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(a^2-c^2)} = 1$$

Si asumimos que $a^2 - c^2 = b^2$ y si b >0 se obtiene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

A continuación se tiene una construcción de los parámetros geométricos de la Elipse (ver figura 2)

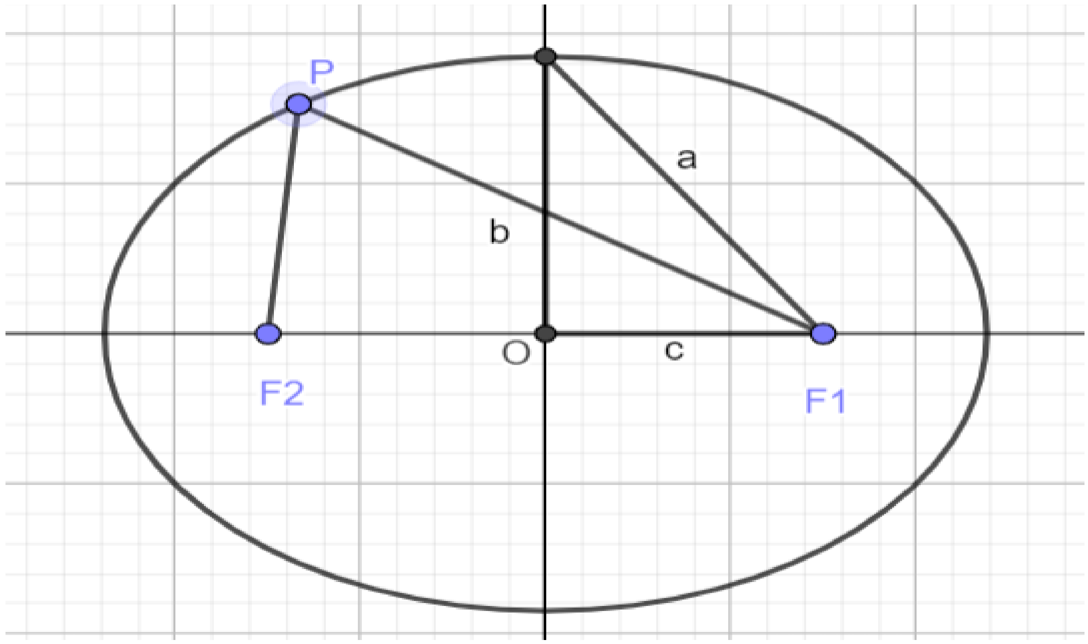

Figura 2 Representacion de una elipse en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Del mismo modo se establece la ecuación de una elipse que no esté centrada en el origen

$$\frac{(X - X0)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y0)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola

Es el lugar geométrico donde el conjunto de punto contiene una diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante.

Simbólicamente se define una hipérbola sobre los puntos P donde se está determinado que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ cuya curva se puede expresar en coordenadas cartesianas.

Para hacer más prácticos los cálculos puede considerarse que los focos se encuentran sobre la recta $y = 0$ y centro en el origen. Los focos están determinados por coordenadas

$F_1(c.0)$ y $F_2 = (-c,0)$ de tal manera la hipérbola está definida para un punto P cualquiera de la forma.

$$\sqrt{(X-c)^2+Y^2} - \sqrt{(X+c)^2+Y^2} = 2a$$

Despejando la primera raíz se obtiene

$$\sqrt{(X-c)^2+Y^2} = 2a + \sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{(X-c)^2+Y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(X+c)^2+Y^2}\right)^2$$

Las raíces se anulan y se obtiene

$$(X-c)^2 + Y^2 = 4a^2 + (X+c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

$$X^2 + c^2 - 2cX = 4a^2 + X^2 + c^2 + 2cX + 4a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

Se anulan términos iguales a ambos lados quedando

$$-4cX - 4a^2 = 4a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad entre 4 se obtiene

$$-cX - a^2 = a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos términos de la igualdad se obtiene

$$(-cX - a^2)^2 = \left(\sqrt{(X+c)^2+Y^2}\right)^2$$

Se desarrollan los respectivos cuadrados

$$c^2X^2 + a^4 + 2a^2cX = a^2(X+c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2X^2 + a^4 + 2a^2cX = a^2X^2 + a^2c^2 + 2a^2cX + a^2y^2$$

Eliminando términos semejantes se obtiene

$$c^2X^2 + a^4 = a^2X^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2X^2 - a^2X^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)X^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad entre $a^2(c^2 - a^2)$ se obtiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Podemos definir que $c^2 - a^2 = b^2$ y se concluye finalmente que

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

A continuación se tiene una construcción de los parámetros geométricos de la hipérbola (ver figura 3)

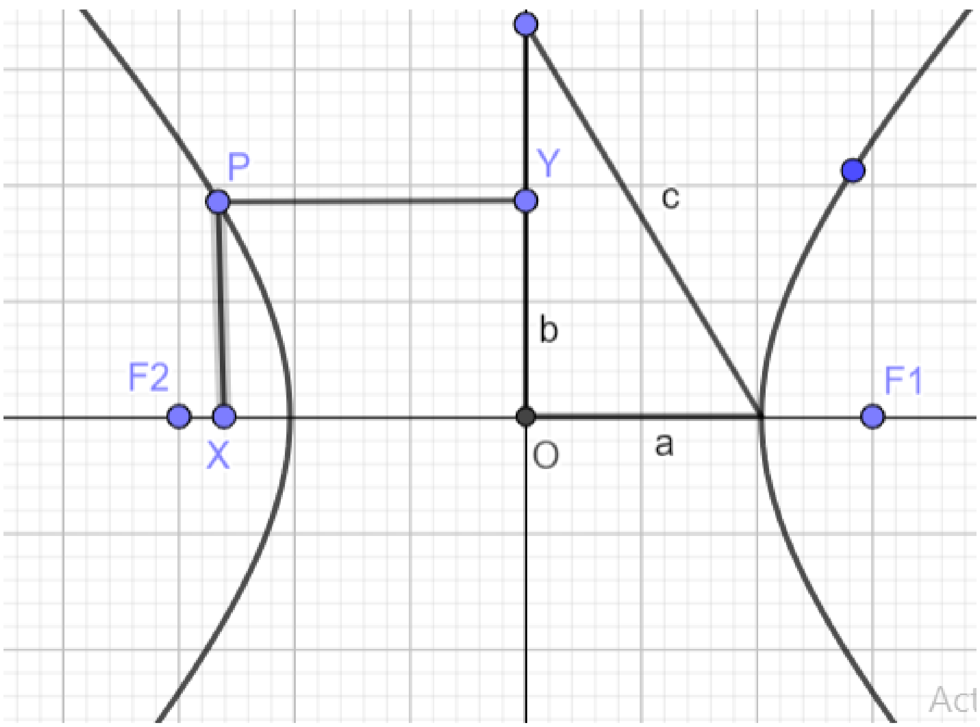

Figura 3 Representacion de una hipérbola en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Parábola

Es el lugar geométrico donde un conjunto de puntos del plano es equidistante a un punto fijo (llamado foco) y también a una recta denominada: directriz.

Simbólicamente se tiene un punto $P = (X, Y)$ donde se debe cumplir que $d(X, F) = d(X, l)$ y puede considerarse para hacer más prácticos los cálculos que el foco se encuentre sobre la recta $y = 0$ y sea perpendicular a la recta l. Además el foco tiene coordenadas $F = c, 0)$. Entonces

$$d(X, l) = \sqrt{(X + c)^2 + (Y - Y)^2} = X + c$$

De la igualdad se puede concluir que

$$d(X, F) = d(X, l)$$

$$\sqrt{(X - c)^2 + Y^2} = X + c$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad la expresión se reduce a

$$(X - c)^2 + Y^2 = (X + c)^2$$

$$X^2 + c^2 - 2cX + Y^2 = X^2 + c^2 + 2cX$$

Eliminando términos semejantes se obtiene

$$Y^2 = 4cX$$

Llámese $p = 2c$ obteniedo

$$Y^2 = 2pX$$

El termino p indica la distancia al vértice $O = (0,0)$ y la directriz recta l (ver figura 4)

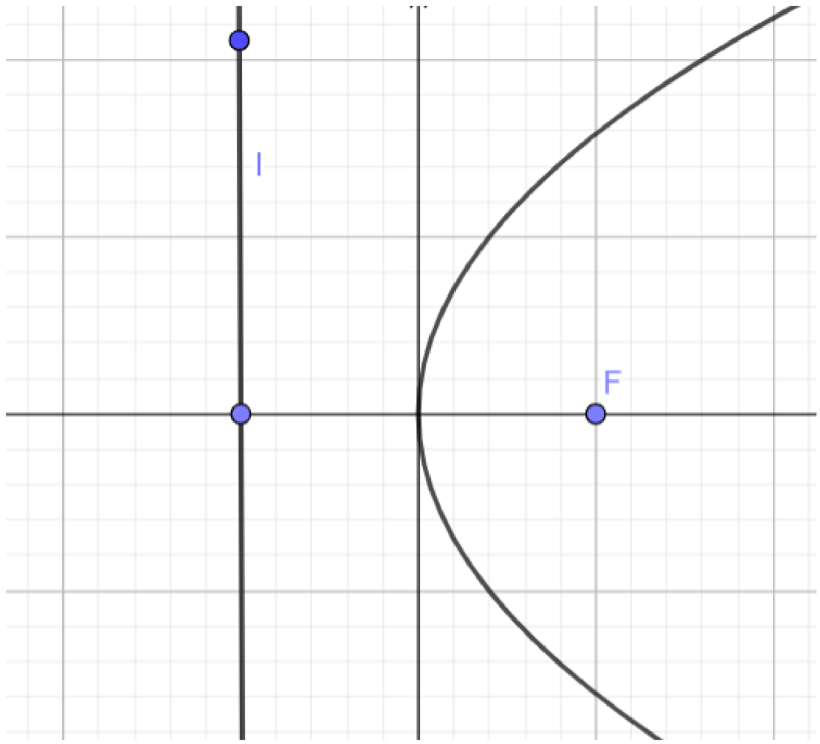

Figura 4 Representacion de una parábola en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Como se ha mencionado en capítulos anteriores las TICs permiten una visualización más adecuada y una construcción más práctica de las curvas cónicas sin alterar el modus operandi de la matemática como un corpus que se basa en un conjunto de reglas y procedimientos que inexorablemente deben ser aplicados y recogidos por los alumnados. Adicionalmente, a las representaciones visuales se puede observar las aplicaciones de las curvas cónicas en el área de la astronomía como elemento que puede dinamizar las estrategias de aula y darle un enfoque más dinámico a la clase de matemáticas. En el siguiente apartado, se observará como las curvas cónicas fueron utilizadas en su momento por los astrónomos en su interés de describir los movimientos planetarios con el mayor grado de precisión posible lo que se catalogó como las leyes Kepler que posteriormente recogió Newton como base para la introducción de la teoría de la gravitación universal impulsando así la primer teoría cosmológica del funcionamiento de los sistemas solares en términos de una base geométrica sólida que hoy en día sigue teniendo total validez para cuerpos que se muevan a velocidades no muy cercanas a la velocidad de la luz.

Cónicas aplicadas a las leyes del movimiento interplanetario de Kepler

Primera ley de Kepler

"los planetas describen orbitas elípticas con el sol en uno de sus focos". (Ver figura 5)

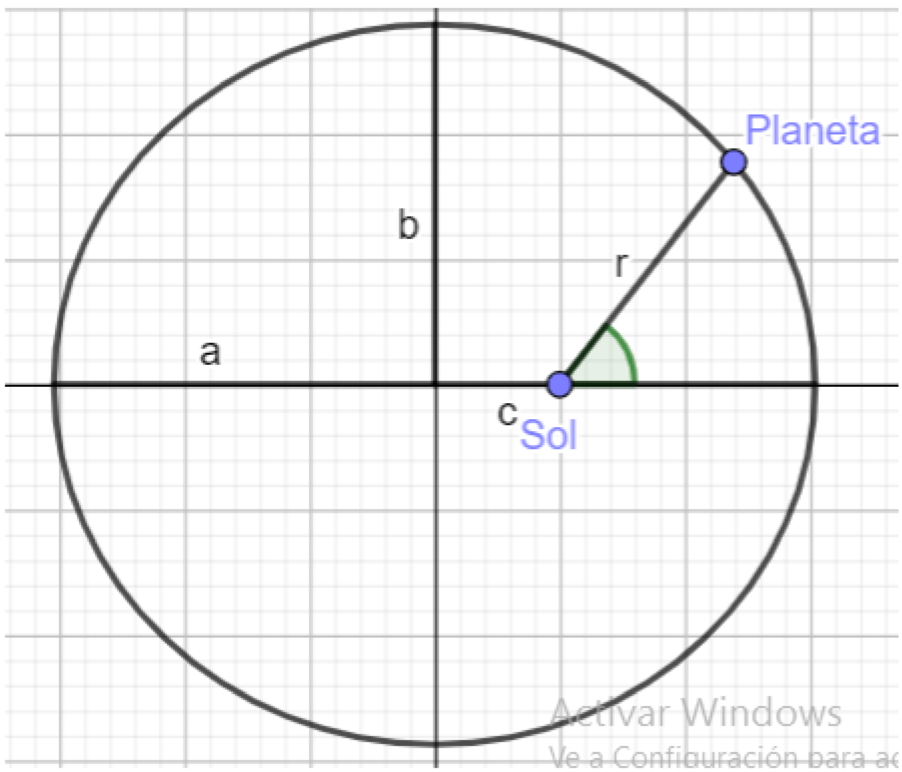

Figura 5 Representación de una órbita planetaria con poca excentricidad.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Se asume como r_1 la distancia más cercana al foco, ósea cuando $\alpha = 0$ y se asume comor_2 la distancia más lejana al foco, ósea cuando $\alpha = \pi$. Ahora bien, los parámetros orbitales aplicados a la elipse geométrica son los siguientes:

- Semieje mayor: $a = (r_2 + r_1)/2$
- Semieje menor: b
- Semidistancia focal: $c = (r_2 - r_1)/2$
- La relación entre los semiejes es: $a^2 = b^2 + c^2$
- La excentricidad se define como el cociente: $e = c/a$

Segunda ley

"El vector de posición de cualquier planeta con respecto del sol (vector que tiene el origen en el sol y su extremo en el planeta) barre áreas iguales en tiempo iguales. (ver figura 6)

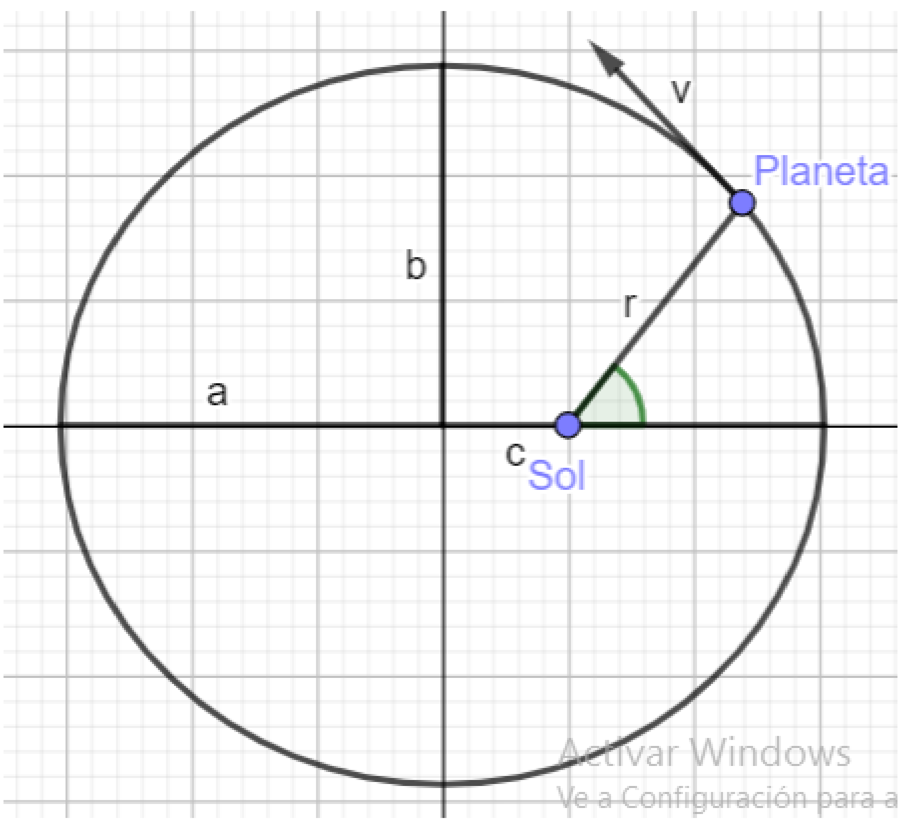

Figura 5 Representacion de la Velocidad del planeta en terminos de áreas barridas en determinados intervalos de tiempo.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Sea A_1 el área barrida en un intervalo de tiempo t y A_2 otra área barrida en un intervalo de tiempo t, analíticamente queda

$$\frac{A_1}{t} = \frac{A_2}{t}$$

Se define la velocidad areolar como el cociente del área entre el tiempo

$$V = \frac{A_1}{t}$$

Según, las leyes de Kepler hacen referencia a elipses de baja excentricidad por lo que llama la atención como en algunos libros de texto se suelen presentar representaciones de elipses con unas excentricidades muy grandes que dejan muchos cuestionamientos sobre el análisis de las velocidades areolares de los planetas. Las implicaciones didácticas de mostrar representaciones de orbitas con excentricidades altas en aras de diferenciarlas de circunferencias dejan dificultades en la interpretación física de la velocidad.

Por ejemplo, los libros de texto usan datos astronómicos reales de donde se quedan caracterizadas orbitas con poca excentricidad las cuales se pueden considerar como aproximadamente circunferencias y en la representación de la tercera ley se procede de manera análoga. Pero entonces se genera una dificultad con la primera ley al enfatizar en que las orbitas son elípticas mientras que en la segunda y tercera ley los datos astronómicos arrojan elipses aproximadamente circulares lo que puede generar inconsistencias conceptuales en los estudiantes quienes no han hecho una contextualización histórica de las teorías de Kepler.

Tercera ley

"Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r)."

$$T^2 = Kr^3$$

Donde $k = 3.0 * \frac{10^{-19}s^2}{m^3}$ y es la constante de Kepler y r coincide con el eje mayor de la elipse.

Se observa como el periodo depende especialmente del eje mayor de la elipse.

Algunos elementos para la pedagogía

La tercera ley de Kepler es deducible a partir de la ley de gravitación de Newton universal asumiendo orbitas circulares y teniendo cuenta la fuerza centrípeta.

$$Fc = ma = m\omega^2 r$$

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Igualando se obtiene

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r$$

Reagrupando

$$GM = \frac{(2\boldsymbol{\pi})^2}{T^2}\ r^3$$

Despejando el periodo se obtiene

$$T^2 = \frac{4\boldsymbol{\pi}^2}{GM} r^3$$

Como $4\boldsymbol{\pi}^2$,G, y M son constantes se designa una constante K de tal manera que se obtiene

$$T^2 = Kr^3$$

Si $k = \frac{4\boldsymbol{\pi}^2}{GM}$ entonces se puede demostrar que para una masa solar $M = 1.98 * 10^{30} kg$

$$k = \frac{4\boldsymbol{\pi}^2}{GM} = \frac{4\boldsymbol{\pi}^2}{6.67 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg * s^2} * 1.98 * 10^{30} kg} = 2.99 * 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$$

Cálculo de la posición del planeta en función del periodo si la masa del planeta es M_1

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} = r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{\frac{4\boldsymbol{\pi}^2}{GM_1}}}$$

Cálculo del periodo en función del de la posición

$$T = \sqrt{Kr^3}$$

Enseñanza de las cónicas con GeoGebra

Se puede inculcar la noción de jóvenes investigadores resaltando la importancia del software GeoGebra como un elemento de las TICs que puede impactar de manera positiva el aprendizaje de las matemáticas ya que permite una interacción entre el estudiante y el aplicativo de tal manera que puede observar y diseñar simulaciones además de adquirir la destreza de modelar los resultados obtenidos para ser sometidos a análisis e interpretación. Lo anterior plantea la posibilidad de incorporar el software GeoGebra en los lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas de la educación media. Ahora bien, los nuevos desafíos de la educación matemática reclaman la incorporación de los escenarios de modelación matemáticas no solo en las investigaciones sobre enseñanza de las matemáticas sino en el día a día como tal en las aulas de clase de matemáticas (Valdés, 2019). Siguiendo al autor mencionado, esta incorporación se suma al estado de consolidación de las matemáticas en Colombia mediante las políticas públicas implementadas en materia de educación por parte del ministerio de educación nacional.

La utilización de GeoGebra en la modelación de curvas cónicas siguiendo a (Fernández, 2013) se construyen figuras cónicas en el software libre GeoGebra lo que permite a la población estudiantil analizar prácticas y medir las diferentes construcciones de cada una de las figuras.

Circunferencia

Recordando la circunferencia como el lugar geométrico en el que un conjunto de puntos equidista del punto denominado centro y cuya distancia desde éste a cada punto se denomina radio.

Diríjase al menú y seleccione la opción “circunferencia dado su Centro y su Radio (ver figura 7).

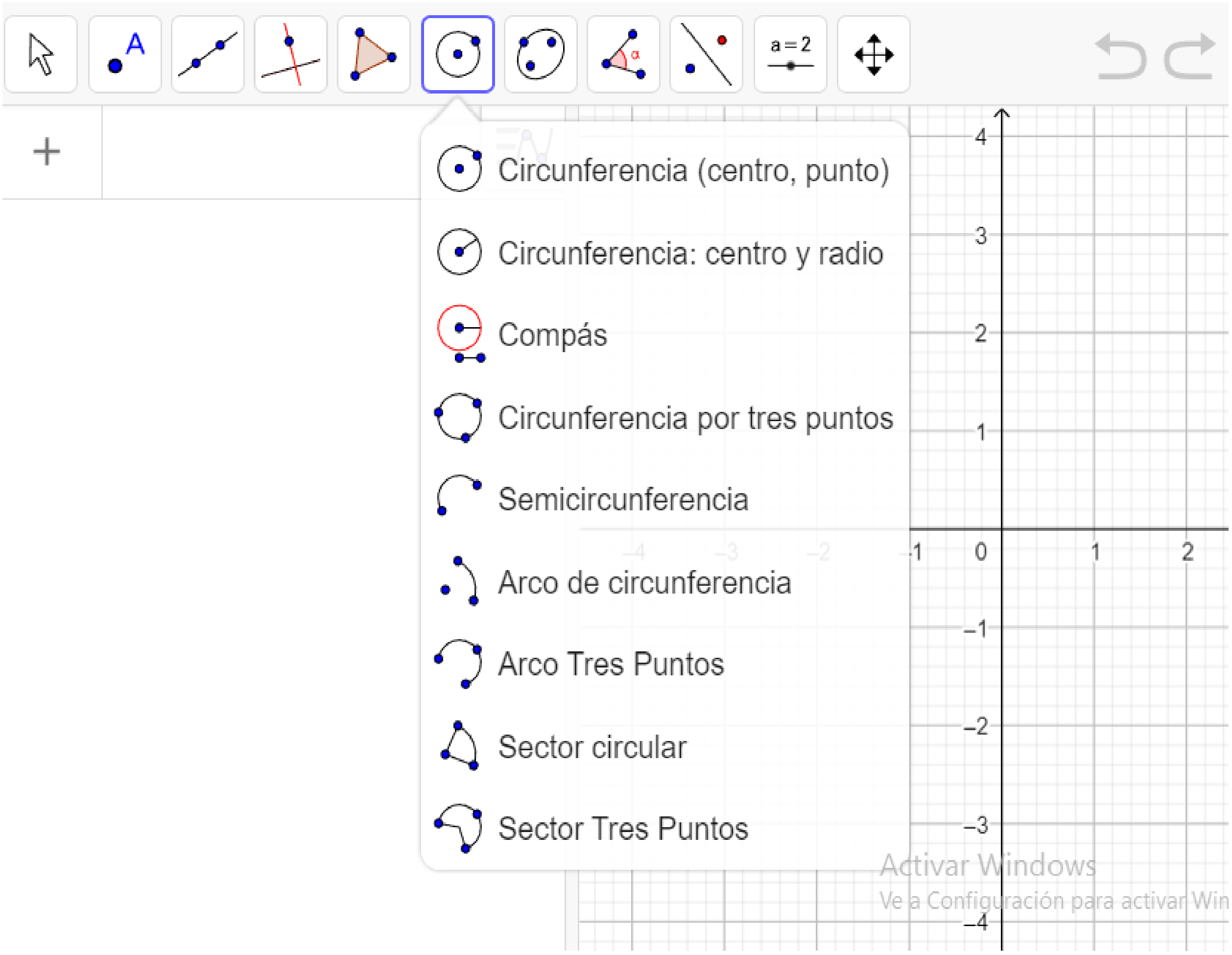

Figura 7 Representación de la barra de herramientas GeoGebra software en línea Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Habiendo elegido la opción representada en la figura anterior, ahora se procede a dar un valor para el radio por lo que el aplicativo abre una ventana para para indicarle que valor le va a asignar al radio. (Ver figura 8)

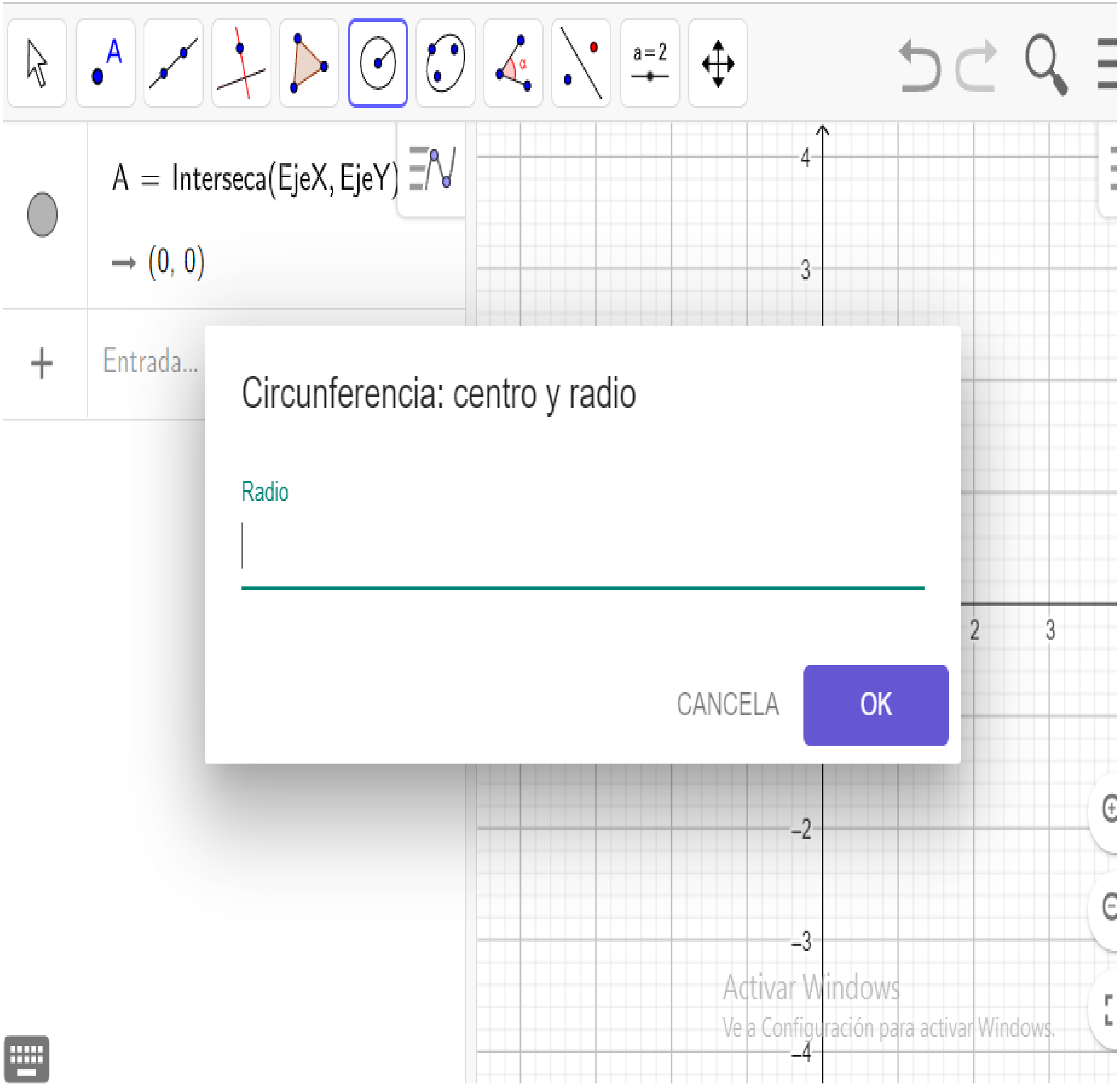

Figura 8 Espacio donde se indica el valor del radio de la circunferencia.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Para efectos ilustrativos se ha colocado un radio de cinco unidades (5u) y a continuación, se observa cómo queda construida de una manera muy cómoda para el usuario una circunferencia con centro en el origen del plano y un radio de cinco unidades. Se observa como en la barra izquierda aparece también las coordenadas del punto centro, así como la ecuación de la circunferencia generada. (Ver figura 9)

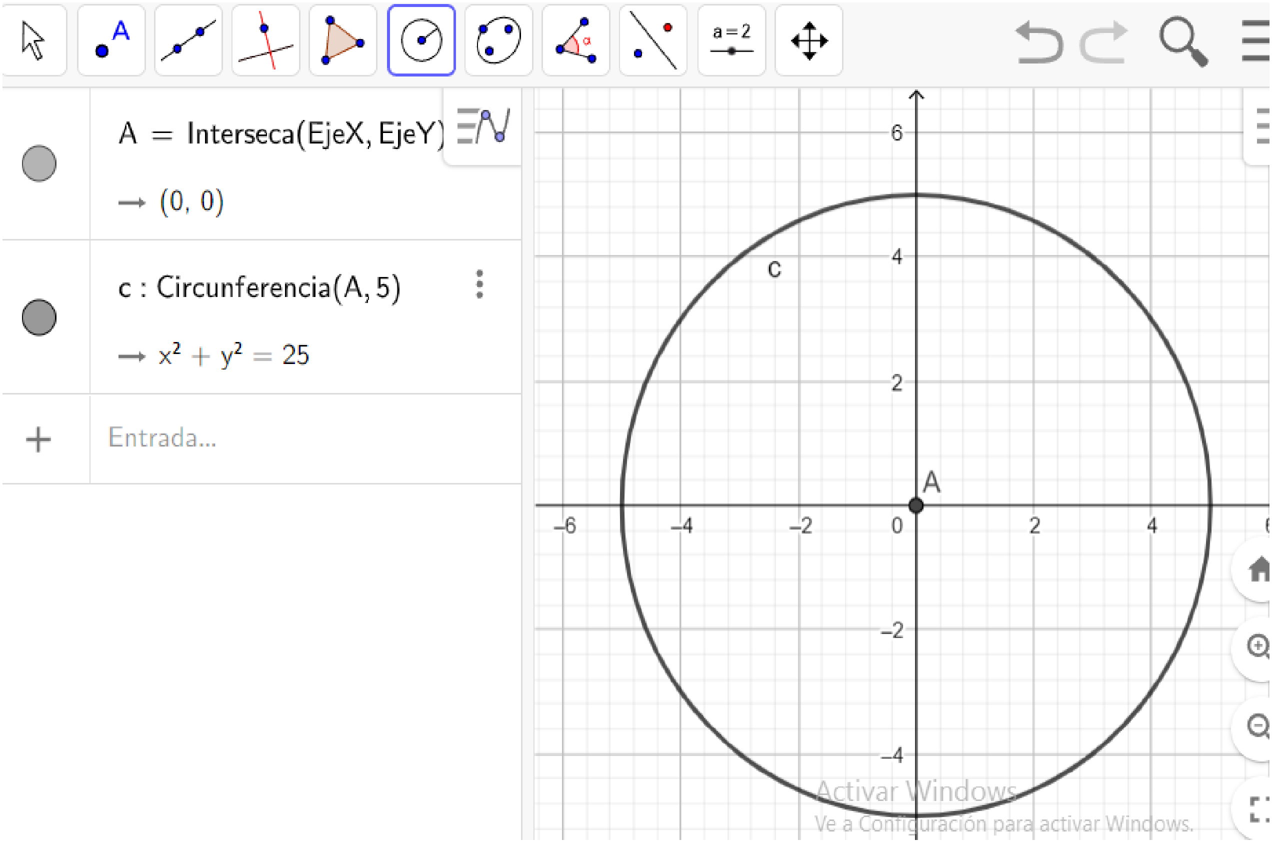

Figura 6 Circunferencia de radio 2 construida en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Elipse

Recordando la definición de la Elipse como aquel lugar Geométrico donde la suma de sus distancia a dos puntos denominados focos F1 y F2 es constante.

Diríjase al Menú de opciones y escoja la opción Elipse (ver figura 10)

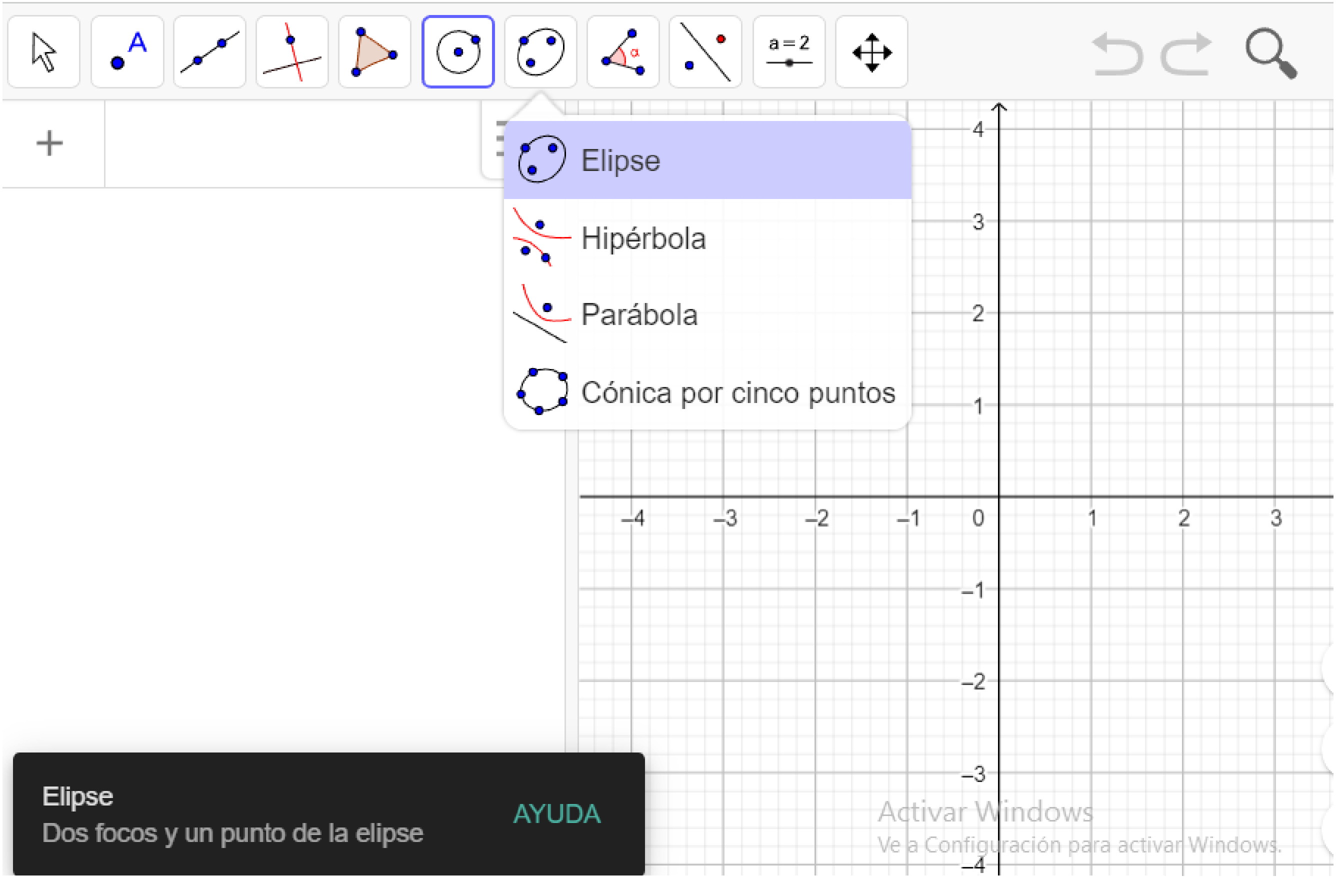

Figura 7 Barra de herramientas para crear una elipse.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

El software le indica que elija los dos puntos que vayan a ser los focos, para efectos ilustrativos se ha dispuesto de los puntos sea f1= (0,-2) y f2=(0,2). (Ver figura 11)

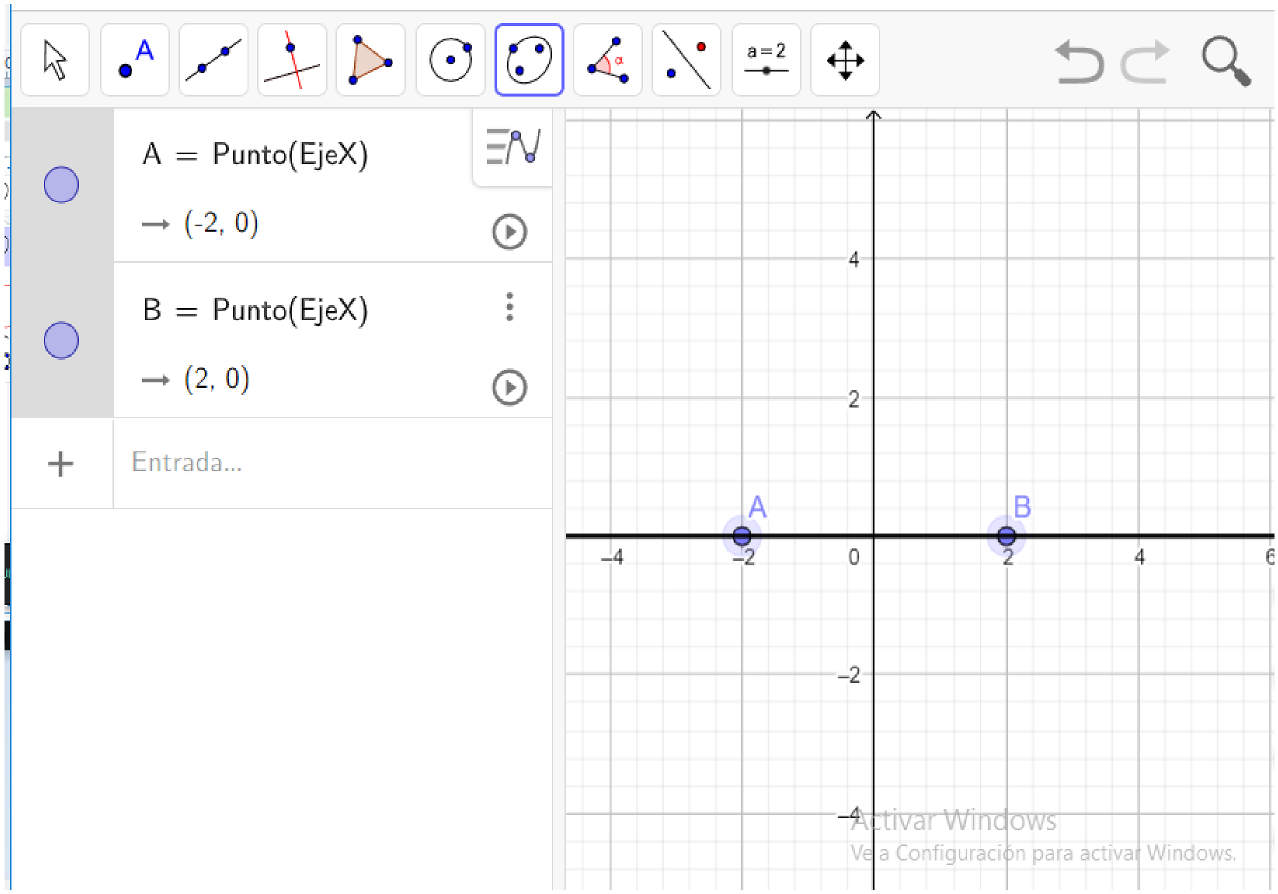

Figura 8 Dos puntos focales que va a contener la elipse.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Genere con el cursor una figura ovalada que le vaya dando la forma de Elipse a la figura que se ha generado. Observe como en la barra izquierda del aplicativo aparece los puntos focales, las coordenadas de un punto C contenido en la Elipse y la ecuación de la elipse planteada como una ecuación de segundo grado. (Ver figura 12)

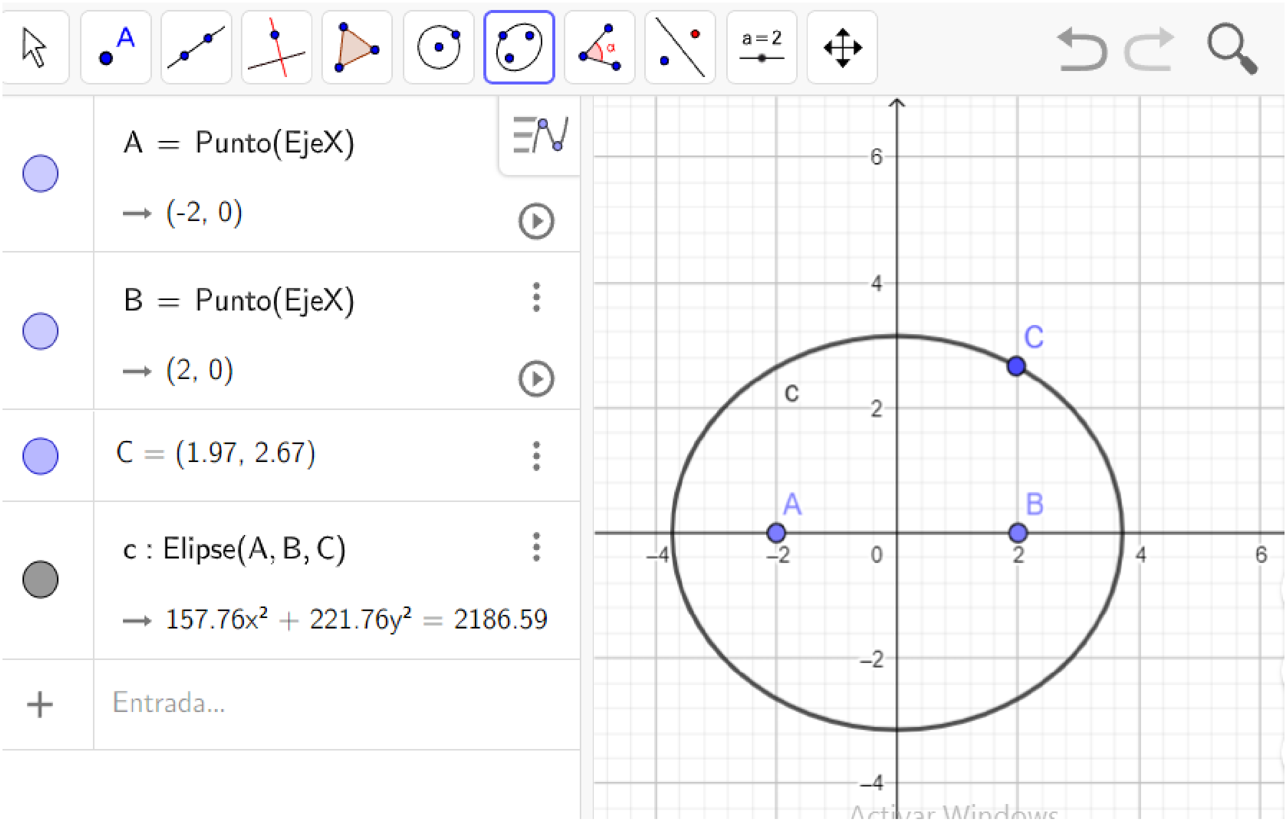

Figura 9: Elipse modelada en GeoGebra
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Parábola

Recordando la definición de la parábola como el lugar geométrico en el que un conjunto de puntos equidista de recta l denominada directriz y de un punto fijo F denominado foco.

Vaya al menú desplegable y elija la opción parábola (ver figura 13).

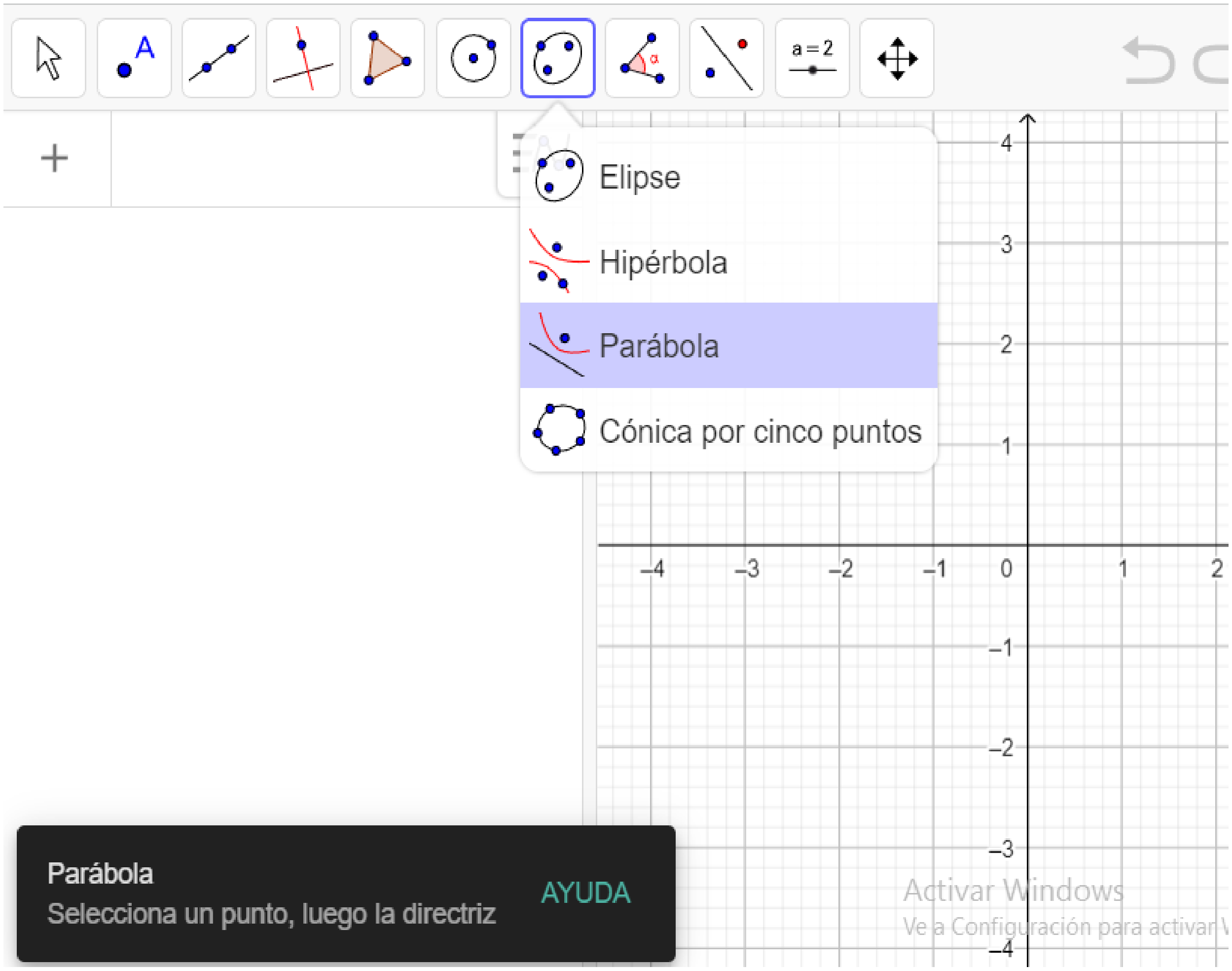

Figura 10 Barra de herramientas en GeoGebra para escoger la parábola.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

De clic en el lugar donde fuera a quedar ubicado el foco de la parábola y automáticamente el Software, desplegará la figura y con el mouse se la da la forma requerida por el usuario hasta que quede finalmente plasmada sobre el plano cartesiano. (Ver figura 14)

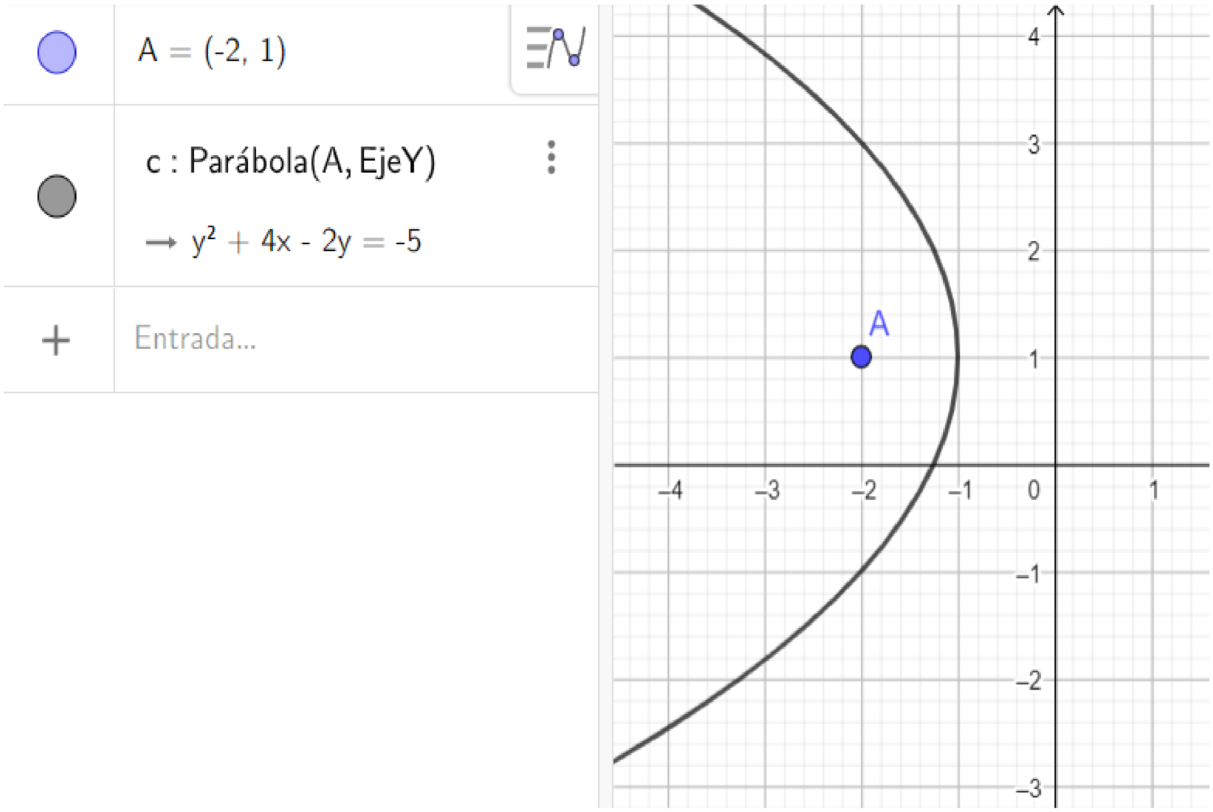

Figura 11 Parábola ocnstruida en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Hipérbola

Recordando la definición de la hipérbola como el lugar geométrico donde la distancia de un conjunto de puntos a dos puntos definidos como focos es constante.

Vaya al menú desplegable y elija la opción hipérbola (ver figura 15)

Figura 12 Barra de herramintas en Geo para elegir la hipérbola.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

El software le pedirá que elija dos puntos que serán los focos de la hipérbola, para efectos ilustrativos se definió los puntos coordenados f1 = (0,-2) y f2 = (0,2). (Ver figura 16)

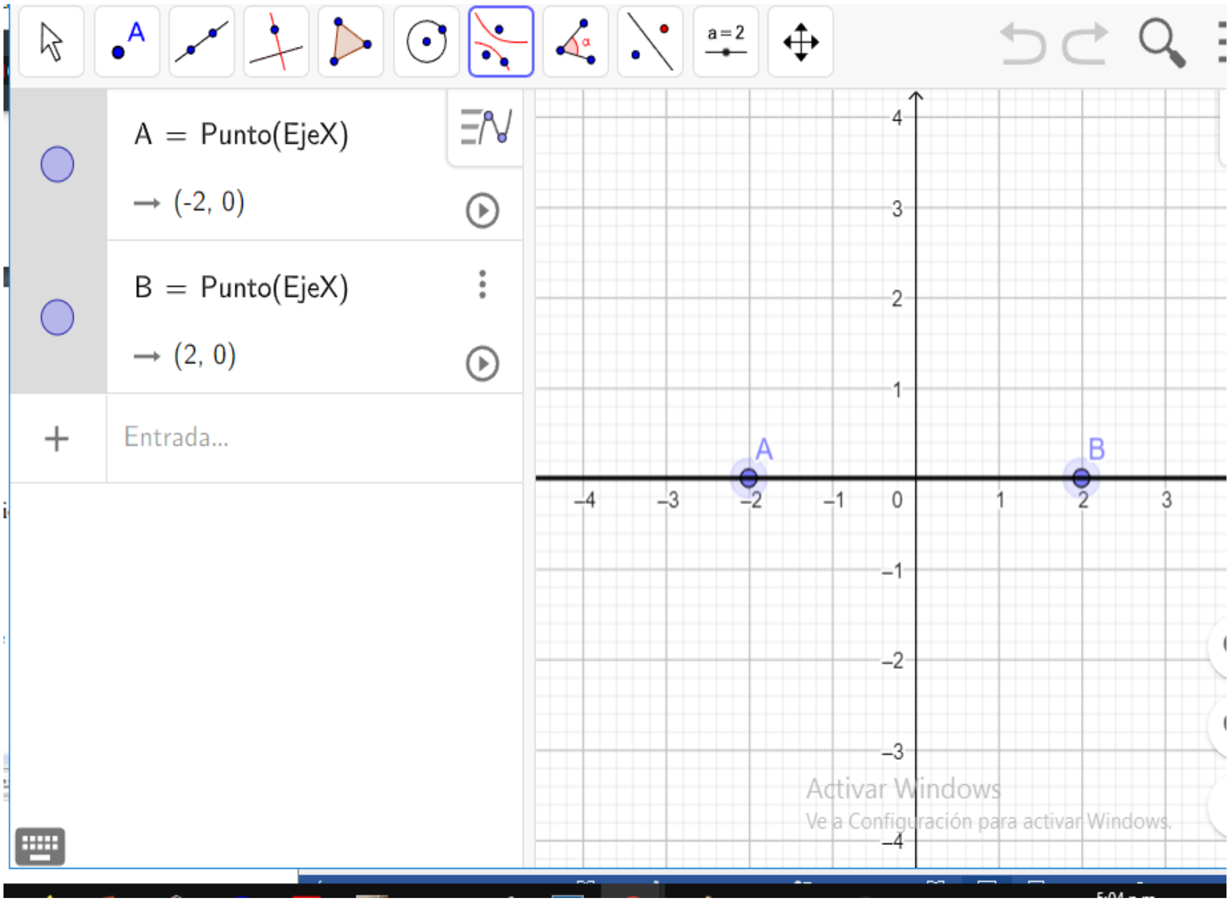

Figura 13 Ubicación de los puntos focales que a tener la hipérbola.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Luego de definir los puntos focales puede con el cursor dar forma a la figura y en la parte de la barra de la izquierda aparecen las coordenadas de los puntos focales, punto C que se encuentra en la curva y la ecuación de la hipérbola planteada como una ecuación de segundo grado (ver figura 17).

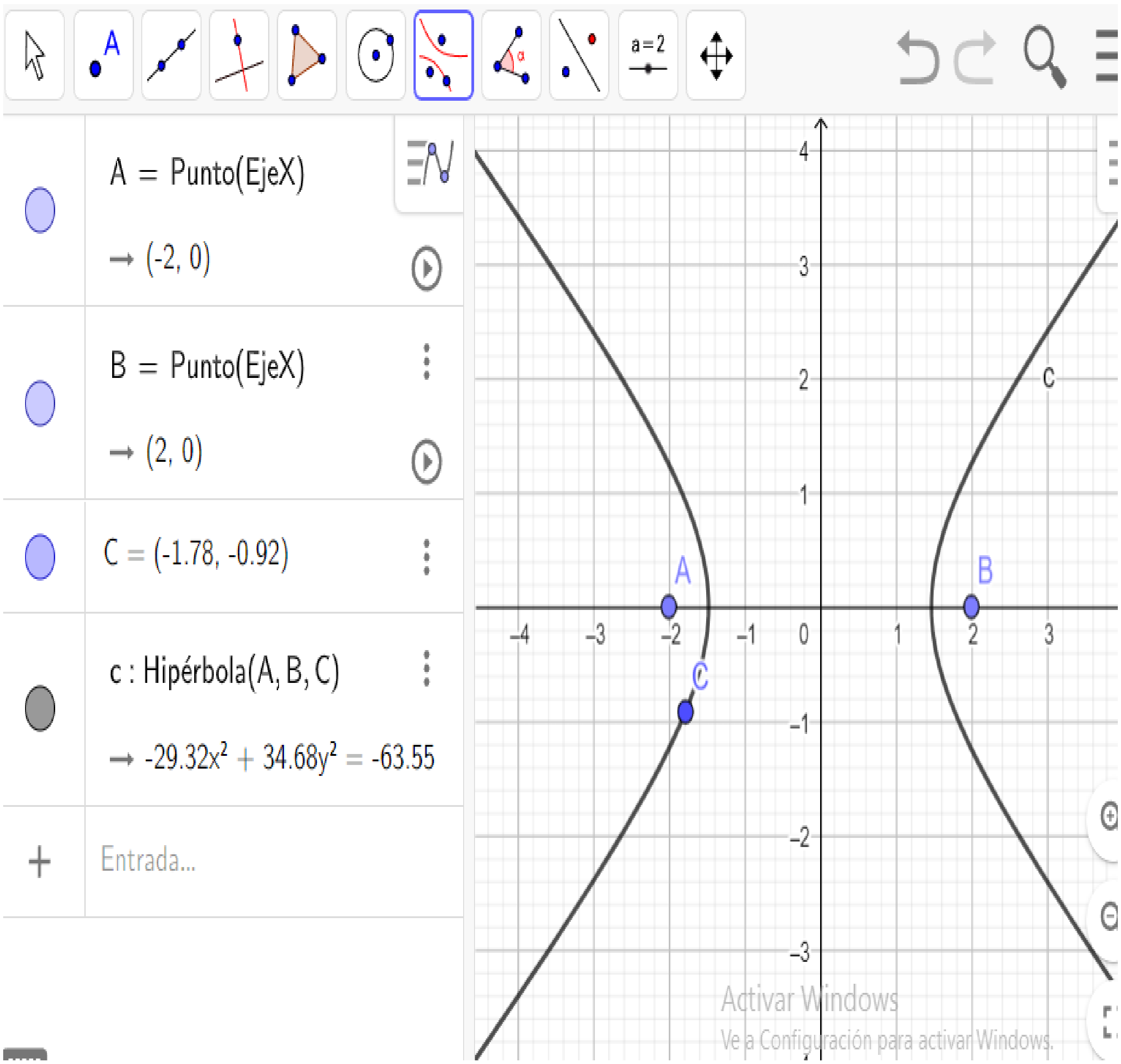

Figura 14 Hipérbola contruida en GeoGebra.
Geogebra (clásico) [Free Software Foundation]. 2022.

Resultados

Este trabajo se llevó a cabo según las características del enfoque cualitativo del tipo exploratorio y descriptivo porque se mantiene en la línea de a partir de una problemática específica evidenciada lo que da lugar a una pregunta problema sobre la enseñanza de as cónicas, se procede a la recolección a la búsqueda de autores e investigadores de la didáctica de las matemáticas. Cabe mencionar que este enfoque permite elaborar las preguntas y las hipostasis durante la recolección de datos, es decir, ya estaba identificada la problemática de la enseñanza de las cónicas antes de la revisión bibliográfica, sin embargo, la pregunta problema como tal quedó se tuvo que plantear durante el proceso de revisión porque hubo nuevos elementos que en este caso fue la diferenciación entre la enseñanza de las cónicas desde la aritmética frente a su realización en geometría. Solo en este momento supimos que la pregunta debía pasar a un plano más objetivo reconociendo las ventajas de reconocer las cónicas como lugares geométricos y precisamente plantear la cuestión de su enseñanza. Como lo menciona (Sampieri, 2020) las preguntas de la investigación cualitativa pueden ser perfeccionadas durante el proceso de la investigación para poder responderlas. De esta manera podemos estar de acuerdo en que, a partir de una problemática planteada, se encuentran documentos, tesis o textos que hablan del tema y de los cuales se sacan conclusiones.

Siguiendo esta idea las técnicas de información de la investigación documental, se realizó el análisis e interpretación de diferentes textos o trabajos de investigación a nivel nacional en los últimos 10 años que se publicaron en bases de datos académicas como Google académico, Scielo, Redalyc, Dialnet, Uniandes entre otros)

Se pretende desarrollar un texto argumentativo con en torno a cómo plantear la enseñanza de las sesiones cónicas desde la rama de la geometría manteniéndose al margen del modelo de función de segundo grafo. Se ha realizado un copilado de autores para presentar y organizar un marco teórico en torno a las curvas de alas cónicas. Po r supuesto, se debe establecer una organización de los procedimientos racionales para llevar a cabo el logro del objetivo de la manera más práctica.

Inicialmente, se necesita una base conceptual para definir cada una de las curvas cónicas en términos de parámetros geométricos como los focos y la mediatriz, en este punto (Araùjo, 2019) está de acuerdo en que el esquema de enseñanza de las cónicas como un lugar geométrico no lleva a las dificultades de operación y manejo de datos de las funciones lineales de segundo grado sino que basta con la asunción de algunas nociones básicas como focos y mediatriz, la se está en capacidad de modelar cualquiera de las cuatro formas de cónicas.

Luego, basándonos en la meritoria del MEN por la cual insta a las instituciones educativas a la utilización de las herramientas de la modelación de matemática de fácil acceso o gratuito en línea. En este caso de escogió el software de interacción libre para descargar o trabajar en línea GeoGebra. Se procede como una adecuación de las curvas cónicas plasmadas en los desarrollos geométricos a una representación visual elaborada a través de la plataforma conociendo unos pasos muy sencillos porque una razón más para haber escogido este software es su cómodo manejo y fácil de ejecutar para los usuarios. En este sentido (Valdès, 2019) está de acuerdo en que GeoGebra es forma de mejorar la visibilidad de los parámetros geométricos y las formas de las curvas cónicas.

Por supuesto, en este punto se debe tener en cuenta dos tipos de procesos mecánicos a realizar, el primero es aquel en el que se encuentra la figura modelada ya hecha en GeoGebra con sus parámetros geométricos correspondientes de una forma ya terminada, y la otra es la de los procesos propios con los que se le da órdenes al software para que en un “paso a paso” logre el modelamiento de cada una de las figuras cónicas que se quiera. En este punto, se hace necesario enfatizar tanto en el modelamiento visual de las curvas como en las órdenes que se le debe dar a GeoGebra respectivamente.

Finalmente y con base a los planteamientos de (Quintero, 2005) se consideró afianzar los elementos de la ruta didáctica incorporando un componente de transversalidad con la astronomía porque las cónicas son aplicadas en esta ciencia que es la encargada de describir los movimientos de los cuerpos celestes. En este punto autores como (Alexander Bell Mejía, 2003) y (Valdés, Scielo, 2016) están de acuerdo en que tratándose de exponer las matemáticas como una ciencia que si se involucra en su día a día de manera cotidiana, se pueden mostrar al joven este tipo de relaciones que han coexistido desde tiempos muy antiguos en la historia y que son saberes que han provenido de los sabios del pasado a través de generación en generación hasta nosotros.

Por lo anterior se vuelve necesario la identificación de tres categoría pilares en la visualización de un ruta didáctica, el primer es el reconocimiento de una cónica como lugar geométrico, el segundo traduciendo al lenguaje de GeoGebra favoreciendo la interacción entre el joven y las tics y tercero, determinar cómo lo aprendido puede ser aplicado a una ciencia modernizada.

Discusión

El presente trabajo que monografías enfatiza en la visualización de algunos elementos para establecer una ruta didáctica para la enseñanza de las secciones cónica por lo tanto brinda algunos elementos iniciales para la enseñanza más no llega al punto de diseñar como tal una estrategia una guía para ser aplicado implementado en algún aula de clase en particular por lo que este documento no es de tipo investigativo aplicativo sino de reconocimiento de masas de bibliografía asociadas a la temática de la enseñanza de las cónicas

Los autores citados están de acuerdo en que existe un preponderante espacio del álgebra por encima de otras ramas de las matemáticas en este caso observamos como las curvas cónica son implementa das como funciones lineales de segundo para la obtención de parábolas y hipérbolas haciendo uso de los métodos de conteo y despejes del álgebra lo que requiere de una mayor cantidad de pasos antes de llegar a la modulación de la curva resultando en una experiencia todo confortable para los alumnos de la media.

Con base a lo anterior se determina el enfoque de asumir las cónicas como lugares geométricos. En los cuales se determinan unos puntos de referencia denominado focos junto a otros elementos como la directriz ya se está en capacidad de construir una figura cónica.

Con base a las fundamentación teórica de las cónicas. La ruta de aprendizaje puede ser influenciada por el manejo de las tics de una manera guiadas por parte del docente de matemáticas. Plataformas como GeoGebra son de un uso muy cómodo para el usuario lo que con unas pequeñas indicaciones se puede modelar las curvas crónicas en dicha plataforma gratuita en línea.

Finalmente la tota didáctica que involucra a las figuras con ligas sonso aplicación en las leyes del movimiento planetario o denominadas en astronomía las leyes de Kepler. Las leyes de que planteadas das por el astrónomo Johannes Kepler establecieron con gran precisión los movimientos de los planetas lo que indican que las órbitas eran elipse con un determinado grado de ex entre ciudad muy cercanas a la del círculo pero no totalmente la misma es entre ciudad de un círculo

Conclusiones

Las cónicas son un tema especial de las matemáticas y se relaciona mucho con el dibujo técnico lo que les convierte en un candidato de interés para los estudiantes de la media. Por supuesto, los profesores de matemáticas están convocados a lleva temas de interés que puedan despertar la curiosidad de los estudiantes, una tendencia a la que se ha inclinado el presente trabajo es a la de ponerlo en el campo de la transversalidad y llevarlo a situaciones del mundo real hacia donde los estudiantes tienen enfocadas la mayoría de sus preguntas. En efecto, hemos designado que las curvas cónicas satisfacen este requisito y pueden convertirse en la base para el diseño de una ruta didáctica para la enseñanza de los cuerpos geométricos.

Mediante la disposición el MEN incluyo en el currículo la disposición para la enseñanza de las cónicas como un lugar geométrico descartando el enfoque algebraico (Fernández, 2009). De esta manera se logra que los estudiantes eviten caer en deficiencias de aprendizaje propios de los procesos de cálculo y de datos para la construcción de función, sino que con la identificación de unos parámetros geométricos básicos ya el estudiante este en la capacidad de generar dichas curvas. Se consideró que era una oportunidad para reforzar el aprendizaje de los parámetros geométricos involucrando la modelización de las curvas cónicas en GeoGebra y mejoramiento de la visualización de las mismas por parte de los estudiantes.

Una vez que se reconocen las figuras cónicas eran una temática de las matemáticas y orientándolas hacia la idea de que en la geometría se tiene una visión en el en que de la geometría se tiene una visión analítica y graficas de las sesiones cónicas en un plano mediante parámetros de foco y mediatriz. Se observa como los conocimientos de las matemáticas no se hicieron a partir de abstracciones alejadas de la realidad sino que todo lo contrario, los matemáticos de la antigüedad dedujeron esas razones lógicas para validarlas conforma a los datos arrojados por las observaciones cada vez más precisas de los movimientos delos cuerpos celestes lo que desemboco en las leyes de Kepler, que hoy en día, siguen rigen el movimiento de los satélites que son enviados desde las estaciones estacionales a orbitar sobre la tierra así como los movimientos de los satélites naturales de cada planeta y de cada sistema solar.

Recomendaciones

La investigación documental es un proceso sistemático y ordenado que comprende diferentes fases de desarrollo, las cuales van desde la planeación del trabajo hasta su revisión. De acuerdo a (Sampieri, 2000), la investigación documentada consiste en detectar, obtener, y consultar la bibliografía y otros materiales que partes de otros conocimientos y/o informaciones recogidas moderadamente de cualquier realidad, de manera selectiva, de modo que puedan ser útiles para los propósitos de estudio.

Con base a que la presente se enmarca en un campo relativo a la didáctica de las matemáticas, no se podía por menos, traer a colación la intención de transformar de manera creativa y con innovación los escenarios de educación matemática en América Latina. Por lo anterior, el tema de las curvas cónicas se enmarca desde el inicio presente en el aula de clase de matemáticas reconociendo como se ha dado un papel preponderante a la aritmética sobre las demás ramas de las matemáticas lo que ha venido significado resultados poco satisfactorios en el escenario de la educación matemática. En adelante se estructura todo el cuerpo del trabajo tal cual como está definido

Considerando que el presente es un ejercicio de búsqueda que debe involucrar grades masas de respaldo debidamente documentado y reconocidos por las academias acreditadas, se dispuso de escoger un tema que se tomara en el aula de matemáticas de la educación media. Se escogió el tema de las sesiones cónicas que también se encuentra en el Algebra. Con el ímpetu de reconocer las impresiones de diferentes autores se avanza a una etapa de búsqueda de bibliografía y finalmente sacar conclusiones.

El presente trabajo de monografía se basa en autores que han trabajado e investigado en didáctica de las matemáticas para adecuar las necesidades educativas de la población a los desafíos del presente milenio enmarcado en un contexto de interconectividad y globalismo. Por lo anterior acudimos a plataformas como Google académico, Scielo, Redalyc, Dialnet donde reposan investigaciones publicadas recientemente en materia de educación matemáticas, pero en especial autores que hayan trabajado la enseñanza de las sesiones cónicas.

Se determina que existen tres categorías distinguibles para establecer una ruta didáctica hacia la planeación de un ejercicio aplicativo en un futuro. Sin embargo, los elementos iniciales para la determinación de la ruta didáctica fueron: las curvas cónicas reconocidas como lugares geométricos, la modelación de sesiones cónicas en GeoGebra como elemento ligado a la tecnología y, por último, la aplicación de las curvas cónicas en las leyes del movimiento interplanetario de Kepler ligado a la transversalidad.

Se avanza a una presentación escrita de los resultados, así como del proceso de reflexión constante, para lo cual, se establece el modelo de presentación más adecuado para dar a conocer la estructuración y fundamentos de los elementos propositivos de su autor.   Se presenta el cuerpo del trabajo en una plantilla de monografía de acuerdo a los lineamientos de la educación superior. Con base a los últimos detalles ya no de fondo sino de forma se hace una última verificación y entrega del respectivo trabajo final

Referencias

Antonio Peña, J. A., & Sepulveda Delgado, O. (2020). *Estudio de las cónicas en algunas métricas*. Redipe. https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1115

Araujo, A. A. (2019). *Enseñanza de la geometría analítica en la educación media*. Scielo. http://www.scielo.org.co/pdf/rudca/v22n1/0123-4226-rudca-22-01-e1222.pdf

Bonilla, D. S. L., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). *Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/5634/1/BonillaLasconicasALME2014.pdf

Diaz, D. G. (2017). *Construcción de secciones cónicas con GeoGebra, para estudiantes de grado noveno en la I.E.Jorge Villamil Ortega (zona rural de Gigante, Huila).*Unal *https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63052*

Fernández, E. (2009). Obtenido de Cónicas como lugares geométricos desde un enfoque puntual y global en cabri ii plus: .Funes. http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pdf

Flores, Á., & Gómez, A. (2013). *La modelación matemática y la enseñanza de las cónicas*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/4215/1/FloresLamodelacionALME2013.pdf

Gallego, A. P. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de reflexión de las cónicas por medio de la metodología de resolución de problemas. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/6605/

García García, I., & Arriero Villacorta, C. (2000). *Una experiencia con Cabri : las curvas cónicas*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/7467/1/una-experiencia-con-cabri-las.html

Graciela, M. (2000). *Cónicas. . . por siempre cónicas. Un lugar geométrico*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pd

Granados, C. A., & Padilla-Escorci, I. A. (2020). *El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra*. Scielo http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0124-22532021000100118

Lestòn, P. (ed), (2014) Acta latinoamericana de matemática educativa. Clame https://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

Mejía, A.B. (2003). Obtenido de La segunda ley de Kepler como eslabón entre la geometría analítica y el cálculo integral. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/8293/1/Bell2003Segunda.pdf

Murillo Silva, J. A. (2013). *Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía*. Unal. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11822

Pérez Bernal, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas*. Unal. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8094/TRABAJO_DE_GRADO_FINAL_UNAL_Def.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Quintero, M. A. (2005). *Modelo tridimensional de transversalidad*. Scielo. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872005000200009

Romero Garcia, E. (2019). *Secciones Cónicas*. Cetys. https://repositorio.cetys.mx/handle/60000/298?mode=full

Sampieri, R. H. (2000). *Metodología de la investigación.* Uca. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf?fbclid=IwAR3k7-Ma9EjnAMwjPEG7Br5C3PGmMq2_DQo25kVE6Nbp8Sk_NZXY0RvRtYU

Santa, Z., & Jaramillo, C. (2009). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de van hiele*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/770/1/construccion2.pdf

Villa Ochoa, J. A. (2009). *Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos*. Unal. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102/203

Valbuena, S., Tamara-Gutiérrez, D. Y., & Berrio Valbuena, J. (2021). *El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra*. Scielo. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0124-22532021000100118

Valdés, E. A. (2016) *Obtenido de La enseñanza de las ciencias en el nuevo milenio. Retos y sugerencias.* Scielo http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202016000100025

Valdés, E. A. (2019). *El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática*. Scielo.http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S221836202016000100025http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102

Villarraga Marcela, A. A. (2019). *Enseñanza de curvas cónicas con materiales didácticos*. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/14131/

Zipa, C. J. (2020). *Situaciones didácticas para el aprendizaje de las cónicas desde* el concepto de métrica.Uptc. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/3720/1/Situaciones_didacticas_aprendizaje_conicas.pdf