# Fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas

Proyecto de Investigación

Luis Alberto Ramírez Castellanos

Licenciatura en Matemáticas

Asesora

Laura Marcela Elles Ardila

Universidad Nacional Abierta y a Distancia-UNAD

Escuela Ciencias de la Educación-ECEDU

Septiembre 2021

## Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que a lo largo de la historia han contribuido a la construcción de las matematicas hasta nuestros días, y aún a las personas que lo seguirán haciendo en el futuro, en beneficio del conocimiento humano.

# Ficha RAE

| Resumen analítico especializado (RAE) | |
|---|---|
| **Titulo** | Fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas. |
| **Modalidad de trabajo de grado** | Proyecto de investigación. |
| **Autores** | Luis Alberto Ramirez Castellanos |
| **Institución** | Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD. |
| **Fecha** | Septiembre de 2021. |
| **Palabras claves** | Circunferencia osculatriz, curvatura, geometría, radio de curvatura, trigonometría. |
| **Descripción** | Existe una fórmula definida en el calculo que permite calcular la curvatura de una curva plana, y su demostración rigurosa usa los conceptos desarrollados por el cálculo multivariado y vectorial, y tiene diferentes versiones dependiendo del sistema de coordenadas que se usen, sin embargo, es posible abordar la construcción de la fórmula que mide la curvatura de una curva plana utilizando los conceptos básicos de la geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares, también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones, identidades e inversas, resultando así, una nueva |

| | |
|---|---|
| | fórmula que utiliza funciones trigonométricas y es funcional y equivalente a su homóloga definida en el cálculo. |
| **Contenidos** | **Construcción de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas**<br>Aquí se deduce una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas, y se utilizan ejemplos para probar la funcionalidad de la nueva fórmula.<br>**Dominio de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas**<br>Se define el dominio de la nueva fórmula.<br>**Otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas**<br>Se utilizan las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas para deducir otras versiones de la nueva fórmula de la curvatura de una curva plana. |
| **Metodología** | **Definición del enfoque**: en el presente proyecto de investigación se utiliza el enfoque cuantitativo, que según Hernández (2014), permite ser objetivo en la descripción, explicación y comprobación de la fórmula buscada, de manera que se genere la teoría que pruebe la fórmula mediante el uso de la lógica deductiva en la teoría relacionada, fundamental para el planteamiento de la investigación y las demás etapas del proceso, utilizando procedimientos rigurosos, estructurados y objetivos que confirmen la validez de los resultados. |

| | |
|---|---|
| | **Planteamiento del problema:** En este punto se formula el problema como una pregunta: ¿Cómo Construir una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas?<br><br>La formulación de esta pregunta implica la posibilidad de realizar una prueba empírica, es decir, que la funcionalidad de la formula desarrollada pueda ser comprobada mediante la resolución de algún ejemplo. Aquí también se desarrolla los objetivos y la justificación de la investigación.<br><br>**Técnica:** Documental, en la que se hace una revisión analítica de la literatura relacionada con la temática de la investigación, como la definición y antecedentes del concepto de curvatura de una curva, radio de curvatura, circunferencia osculatriz, construcción vectorial de la fórmula de la curvatura, la fórmula de la longitud de arco, las variaciones de la fórmula de curvatura de acuerdo al sistema de coordenadas utilizadas, los conceptos de la geometría analítica para construir la nueva fórmula como la función de la circunferencia, las coordenadas polares, la pendiente de rectas perpendiculares, la derivación en calculo y las funciones trigonométricas junto con sus inversas, desarrollando así el marco teórico.<br><br>**Alcance de la investigación**: En este proyecto de investigación se utiliza el estudio de alcance exploratorio, que según Hernández (2014) se emplea para estudiar un tema novedoso que no se ha abordado antes, ya que se indaga acerca |

| | |
|---|---|
| | de la fórmula de la curvatura de la curva plana desde una nueva perspectiva que permite utilizar en su definición funciones trigonométricas. |
| **Conclusiones** | Para un correcto desarrollo de este proyecto de investigación, se definió, de acuerdo con el estudio de la literatura relacionada al tema, el concepto de curvatura como la razón de cambio de la recta tangente en un punto de la curva respecto al cambio de la longitud de arco, determinándose así la formula (1) y (2). También se definió el concepto de radio de curvatura como el reciproco de la curvatura, y se interpreta como el radio que tendría una circunferencia, llamada osculatriz, si tuviese la misma curvatura que tiene la curva definida por una cierta función continua y doblemente diferenciable en un punto determinado.<br>Conociendo la definición de los principales conceptos, se procede a utilizar un razonamiento diferente al utilizado para construir la fórmula de la curvatura, y consiste en calcular primero el radio de curvatura utilizando conceptos básicos de geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares, también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones coseno y tangente inversa. Para hallar dicho radio, primero se hallan la primera y la segunda derivada de la |

| | |
|---|---|
| | función de la circunferencia osculatriz, ya que estas determinan la inclinación de la tangente a la curva y la razón de cambio de dicha tangente, y al igualarlo con la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ que define la curva, se halla dicho radio de curvatura. Con la construcción de la fórmula (6) se da respuesta a la pregunta del planteamiento del problema de este proyecto de investigación.<br>Con el propósito de mostrar que la construcción de la fórmula (6) es correcta, se resuelven los ejemplos 1 y 2 como evidencia de la funcionalidad de la nueva fórmula.<br>Ahora, para caracterizar adecuadamente la fórmula (6), se define el Dominio de dicha formula de manera que está definida para $\{x \in R \mid f'(x) \neq 0\}$.<br>Para resolver el problema expuesto en el párrafo anterior de que la fórmula podría no estar definida para todo valor de $x$, dependiendo del tipo de función que defina la curva, se utiliza la identidad (8) de la tabla 1 para obtener una versión mejorada de la fórmula (6), obteniendo la fórmula (9) definida para todo $x \in R$.<br>Así mismo se pueden utilizar las demás identidades de la tabla 1 para construir otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas como se muestra en los ejemplos 3 y 4. Y utilizando la identidad (8) para obtener le identidad (7) mediante artificios |

| | |
|---|---|
| | algebraicos, se obtiene una demostración rigurosa de la fórmula (6).<br>Es interesante mencionar que para comprender la construcción de la fórmula (6) no es necesario tener conocimientos avanzados de cálculo vectorial, basta solo con tener conocimientos básicos de geometría analítica, trigonometría plana y diferenciación.<br>Es probable que se puedan usar funciones trigonométricas para expresar la fórmula de la curvatura de una curva en el plano tridimensional, y una generalización de este tipo puede ser un tema muy interesante para un próximo proyecto de investigación.<br>Se concluyen estas ideas resaltando la enorme riqueza, flexibilidad y diversidad que presentan las matematicas, ya que, como lo muestra este trabajo y muchos otros temas, existen varias maneras de abordar un tema, demostrar un teorema o construir una teoría. |
| **Referencias** | Ariza, D. (2017). *Cálculo multivariado*. Fundación Universitaria del Área Andina<br>Claro, F. (2018). *Invención Y Descubrimiento en Ciencia Y Música*. Humanitas (07172168), 23(89), 76–91.<br>Ferreirós, G. & García, M. (2018). *¿«Natural» y «euclidiana»? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas*. Theoria, 33(2), 325–344. https://doi- |

| | |
|---|---|
| | org.bibliotecavirtual.unad.edu.co/10.1387/theoria.17839<br>Fonseca, J. (2016). *Elementos para el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela*. Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. 3(1). 51-58.<br>Guichard, D. (2021). *Single and Multivariable Calculus*. https://www.whitman.edu/mathematics/multivariable/multivariable.pdf<br>Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). México: McGraw-Hill education.<br>Logares, M. (2018). *Las geometrías y otras revoluciones*. CSIC.<br>Palomares, F. & Monsoriu, J. (2016). *Curvas en el espacio: un laboratorio virtual*. Modelling in Science Education and Learning, 9(1), 87-96.<br>Ramírez, J. (2014). *Analogía del concepto de curvatura en diferentes espacios geométricos* (tesis de maestría). Universidad tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.<br>Rodríguez, R., & Concepción, C. (2011). *Curvas maravillosas* (Doctoral dissertation). Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.<br>Rondón, J. (2011). *Álgebra, trigonometría y geometría Analítica* (2ª ed.). Universidad nacional abierta y a distancia. |

| | |
|---|---|
| | Salcedo, C., Angulo, E. & Quiñones, Y. (2013). *Centros de curvatura y circunferencia osculatriz de curvas en S^ 2*. Scientia et technica, 18(3), 569-574.<br>Steward, J. (2015). *Multivariable calculus* (eight edition). Cengage learning.<br>Steward, J. (2015). *Single Variable Calculus: Early Transcendentals* (8a ed.). Cengage learning.<br>Weisstein, E. (s.f.). *Inverse Trigonometric Functions*. MathWorld.Wolfram. Recuperado el 18 de julio de 2021 de https://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html<br>Salazar, C., Botero, D., & Giraldo, L. (2020). *Enseñanza y aprendizaje del razonamiento deductivo e inductivo a través de las ciencias naturales*. Educación y Humanismo, 22(38). https://doi-org.bibliotecavirtual.unad.edu.co/10.17081/eduhum.22.38.3732<br>Zill, D., & Wright, W. (2014). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (4ª ed.). McGraw-Hill. |

# Tabla de contenido

## Introducción

El presente trabajo se basa en un tema importante en el estudio de la geometría, y especialmente en el cálculo y la geometría diferencial, y es el concepto de curvatura de una curva definida por una función, que tiene sus orígenes en el concepto de curvatura relacionada con la circunferencia osculatriz que desarrolló Leibniz, y la definición de curvatura dada por Euler al iniciar el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas. El concepto de curvatura inicia con el planteamiento de medir la curvatura de una curva en el espacio bidimensional de un plano, y posteriormente se generalizan a otras dimensiones. Considerando la medición de la curvatura de una curva en el plano bidimensional, existe una formula definida en el calculo que permite calcular dicha curvatura, y su demostración rigurosa usa los conceptos desarrollados por el cálculo multivariado y vectorial, y tiene diferentes versiones dependiendo del sistema de coordenadas que se usen, sin embargo, es posible abordar la construcción de la fórmula que mide la curvatura de una curva plana utilizando los conceptos básicos de la geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares; también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones, identidades e inversas, resultando así, una nueva fórmula que utiliza funciones trigonométricas y es funcional y equivalente a su homóloga definida en el cálculo.

De manera que en este trabajo se deduce una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas, se utilizan ejemplos para probar la funcionalidad de la nueva fórmula, se define el dominio de la nueva fórmula y se utilizan las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas para deducir otras versiones de la nueva fórmula de la curvatura de una curva plana.

## Planteamiento del problema

¿Cómo Construir una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas?

El estudio de la curvatura de una curva definida por una función se remonta a los siglos XVII y XVIII con los matemáticos Gottfried Leibniz y Leonard Euler, quienes desarrollaron inicialmente este concepto definiendo a la curvatura de una curva como la razón de cambio de la dirección de la recta tangente a la curva respecto a la distancia $s$ de esta, relacionándola con la circunferencia osculatriz.

Así en la actualidad, en base a estos conceptos, se pueden encontrar en los libros de textos de calculo la definición y la construcción de una formula que permite calcular la curvatura de una curva, utilizando conceptos esenciales en el calculo multivariado, como lo es el vector tangente, la tangente unitaria, y la longitud de arco, y así mismo se pueden encontrar variantes a la formula según la forma en que se expresen las variables y el tipo de coordenadas que se utilice para la función, aunque esencialmente sigue siendo la misma fórmula.

Ahora considerando lo expuesto anteriormente, vale la pena cuestionarse si es la única forma que hay de medir la curvatura de una curva, es decir, ¿existirá alguna otra forma de medir la curvatura de una curva? ¿existirá algún otro razonamiento que permita construir la fórmula de la curvatura de una curva sin tener que utilizar los conceptos del calculo multivariado como lo es el vector tangente, la tangente unitaria, y la longitud de arco? ¿será posible utilizar las funciones trigonométricas para tal fin, ya que son tan importantes en la geometría?

Para responder a estas preguntas es necesario entender el significado de la curvatura de una curva, y utilizar los conceptos básicos de la geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares, también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones, identidades e inversas, de manera que se pueda construir una nueva fórmula a partir de un razonamiento alterno al conocido, que utiliza funciones trigonométricas y es funcional y equivalente a su homóloga definida en el cálculo.

Las matemáticas presentan cualidades de incalculable riqueza, que permite, desde diversos ángulos y puntos de vistas, abordar sus temas, esto, aparte de llegar a los mismos resultados, también conlleva a poder ver otras opciones que de otro modo no hubiese podido analizarse, no solo utilizando el razonamiento lógico y el pensamiento deductivos, sino también de la creatividad y la imaginación, alcanzando otras visiones de la geometría, tomando como punto de partida las propiedades de las figuras en sus representaciones visuales y algebraicas. Este es el caso presentado en este trabajo, en el que se estudia la curvatura desde otra perspectiva que deja encontrar una nueva fórmula, utilizando un pensamiento lateral que, con una manera creativa, se organizan razonamientos estratégicamente, que de otra forma podrían ser ignorados.

## Justificación

El presente trabajo representa un aporte importante en el campo de las matemáticas, ya que se muestran nuevas aportaciones en geométricos, desde otras perspectivas, que permite diversificar el pensamiento matemático en esta área, y demuestra la riqueza del pensamiento matemático al crear nuevos caminos que desvelan nuevas demostraciones y formulas.

A lo largo de la historia, la geometría ha estado muy unida al desarrollo de otras ciencias, y su estudio y profundización ha encontrado aplicabilidad en otros campos del conocimiento humano, como lo es la cartografía, la física aplicada y teórica, la mecánica, la náutica, la arquitectura, la topografía, la geografía, entre otras. La geometría se basa principalmente en el estudio del espacio y las formas, sus relaciones, propiedades y características, lo cual ha alimentado un vasto conocimiento en esta rama de las matemáticas.

Un tema importante en el estudio de la geometría, y especialmente en el cálculo y la geometría diferencial es el concepto de curvatura y radio de curvatura como su inverso, dichos conceptos inician con el planteamiento de medir la curvatura de una curva en el espacio bidimensional de un plano, y posteriormente se generalizan a otras dimensiones. Considerando la medición de la curvatura de una curva en el plano bidimensional, existe una formula definida en el calculo que permite calcular dicha curvatura, y su demostración rigurosa usa los conceptos desarrollados por el cálculo multivariado y vectorial, sin embargo, es posible abordar la construcción de la fórmula que mide la curvatura de una curva plana utilizando los conceptos básicos de la geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares, también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones, identidades e inversas, resultando así, una nueva fórmula que utiliza funciones trigonométricas y es funcional y equivalente a su homóloga definida en el cálculo, y este es este el propósito de este proyecto de investigación.

Ahora, respecto a las matematicas, y específicamente en geometría y cálculo se pueden plantear las siguientes preguntas, ¿está todo ya creado?¿ya se inventó todo lo que había que inventarse en estas ramas?¿ya se abarco todo el conocimiento en esta área y es inútil buscar algo más?, ¿existe solo una manera de abordar un tema, demostrar propiedades y construir nuevo conocimiento? las respuestas a estas preguntas es un rotundo no, las matemáticas son una ciencia de una gran riqueza, que permite, desde diversos ángulos y puntos de vista, abordar sus temas, esto, aparte de llegar a los mismos resultados, también conlleva a poder ver otras opciones que de otro modo no hubiese podido analizarse, como la relación de la curvatura de una curva plana y las identidades de las funciones trigonométricas inversas, no solo utilizando el razonamiento lógico y el pensamiento deductivos, sino también de la creatividad y la imaginación, alcanzando otras visiones de la geometría, tomando como punto de partida las propiedades de las figuras y funciones en sus representaciones visuales y algebraicas.

# Objetivos

## Objetivo general

Construir una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas, utilizando los estudios y teorías existentes, de manera que dicha formula sea funcional.

## Objetivos específicos

- Explicar la definición y las fórmulas de la curvatura y radio de curvatura de una curva.
- Usar los conceptos de geometría analítica, diferenciación y trigonometría necesarios en la construcción de la nueva fórmula.
- Utilizar ejemplos para probar la funcionalidad de la nueva fórmula.
- Definir el dominio de la nueva fórmula.
- Utilizar las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas para deducir otras versiones de la nueva fórmula de la curvatura de una curva plana.

## Marco referencial

En este punto de desarrollo de las matemáticas, y más específicamente, de la geometría, vale la pena preguntarse, ¿Qué sucede cuando utilizamos las herramientas y conocimientos existentes para abordar temas y problemas conocidos, pero desde otras perspectivas? El resultado es que se llega a nuevas demostraciones, nuevas fórmulas, he incluso a nuevos resultados desconocidos, y esta tendencia de las matemáticas y la geometría, como dice Logares (2018), a romper la tradición para profundizar o avanzar en su desarrollo, se hace firme a lo largo de la historia.

Para obtener resultados en este estudio se utiliza la intuición geometrica universal, que, según Ferreirós & García (2018), es un tipo de cognición geométrica que emerge de manera espontánea en el ser humano, y se utiliza también el pensamiento deductivo, que, según Salazar, Botero & Giraldo (2020), es aquel en el que la conclusión se sigue de sus premisas, como consecuencia lógica de ellas.

El estudio en este proyecto utiliza el pensamiento geométrico y variacional y los sistemas geométricos, algebraicos y analíticos expuestos por Fonseca (2016), y se basa en el concepto de curvatura, de enorme importancia en muchas áreas del conocimiento humano.

“las figuras geométricas elementales tienen una fuerte relación con la observación cotidiana del mundo que nos rodea” (Claro, 2018, p. 81).

Ariza (2017) define a la curvatura como la forma y ritmo con que una curva va cambiando su dirección y en el caso de una curva suave en el plano esto corresponde al cambio de dirección del vector tangente unitario.

La construcción de la fórmula con funciones trigonométricas en este trabajo se basa en un razonamiento alterno al considerado en la construcción de la fórmula de la curvatura de una curva que se encuentra en los libros de texto, como en Steward (2015):

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

La fórmula (1) se construye, definiendo a la curvatura de una curva como la razón de cambio de la dirección de la recta tangente a la curva respecto a la distancia $s$ de esta, es decir:

$$K(x) = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

Donde $\alpha$ es la inclinación de la recta tangente a la curva en un punto, y $s$ es la longitud de arco. Esta definición, según Ramirez (2014), se atribuye al matemático suizo Leonard Euler que inicio el estudio sistemático de la geometría intrínseca de las curvas.

Según Zill & Wright (2014) la construcción de la fórmula de la curvatura con calculo vectorial, inicia con la definición de la función vectorial $r(t)$ de la curva $C$. Ahora, se sabe que $r'(t)$ es el vector tangente en un punto $P$ de la curva $C$, de manera que la tangente unitaria es $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$.

Ahora, si $C$ es parametrizada por una longitud de arco $s$, entonces la tangente unitaria a la curva también está dada por $T(t) = \frac{dr}{ds}$. Se considera también que $|r'(t)|$ se relaciona con la función de longitud de arco $s$ por medio de $|r'(t)| = \frac{ds}{dt}$, y como la curva C es suave y $\frac{ds}{dt} > 0$, utilizando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Y así se tiene que:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr/dt}{ds/dt} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = T(t)$$

Ahora, a medida que $s$ aumenta, $T(t)$ se mueve a lo largo de $C$ cambiando de dirección, pero no de longitud, ya que siempre es de longitud 1. Utilizando la tasa a la cual el vector unitario $T(t)$ cambia de dirección respecto a la longitud de arco, se obtiene un indicador de curvatura expresado como:

$$k = \left|\frac{dT}{ds}\right| \qquad (2)$$

La formula anterior se puede expresar en términos del parámetro $t$, utilizando la regla de la cadena de nuevo, se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} \to \frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt}$$

Así la curvatura se expresa como:

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$$

Ahora para construir la formula (1), se tiene según Steward (2015) que la formula vectorial de la curvatura se puede reescribir así:

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{|r'(t) \text{ x } r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

Así en el caso especial de una curva plana en la que la curva está dada por la función $y = f(x)$, se puede escoger a $x$ como el parámetro y reescribir la función vectorial como $r(x) = x\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$, de manera que $r'(x) = \boldsymbol{i} + f'(x)\boldsymbol{j}$ y $r''(x) = f''(x)\boldsymbol{j}$. Ahora como $\boldsymbol{i}\text{x}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{j}\text{x}\boldsymbol{j} = 0$, se tiene que $r'(x) \text{ x } r''(x) = f''(x)\boldsymbol{k}$. Por otro lado$|r'(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, así que reemplazando todo esto en la formula vectorial de la curvatura, se obtiene la formula (1).

Ahora el radio de curvatura se define como el reciproco de la curvatura, es decir:

$$r(x) = \frac{1}{K(x)} = \frac{\left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

Para explicar por qué el radio de curvatura es reciproco a la curvatura, basta con demostrar que la curvatura de una circunferencia (que se considera la osculatriz) de radio $a$ es $1/a$.

Según Steward (2015) la formula vectorial de una circunferencia parametrizada con centro en el origen del plano y radio $a$ es:

$$r(t) = acost\boldsymbol{i} + asent\boldsymbol{j}$$

Así que $r'(t) = -asent\boldsymbol{i} + acost\boldsymbol{j}$, de manera que $|r'(t)| = a$.

Ahora como $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = -sent\boldsymbol{i} + cost\boldsymbol{j}$, así que $T'(t) = -cost\boldsymbol{i} - sent\boldsymbol{j}$, de manera que $|T'(t)| = 1$, por lo que la curvatura es $k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{1}{a}$

La anterior formula en la que se expresa la curvatura como la inversa del radio de curvatura, según Ramirez (2014), es la primera aproximación formal que se hizo al concepto de curvatura relacionándola con la circunferencia osculatriz (circunferencia tangente en un punto $p$ de la curva), por parte del matemático Alemán Gottfried Leibniz,

El radio de curvatura se interpreta como el radio que tendría una circunferencia con la misma curvatura que tiene la curva en cuestión en un punto dado. De aquí surge la definición de circunferencia osculatriz, que según Palomares & Monsoriu (2016), es una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el plano que contiene a los vectores tangente y normal, llamado plano osculador, y tiene la misma curvatura que la curva dada en ese punto. Al centro y al radio de este círculo se les llama centro de curvatura y radio de curvatura respectivamente, y se llama evoluta al lugar geométrico de los centros de curvatura.

Es interesante mencionar que, según Salcedo, Angulo & Quiñones (2013), en un espacio curvo como la esfera se pueden generalizar conceptos geométricos como la curvatura de curvas planas, y, por tanto, todo lo referente a este concepto, como es el radio de curvatura, los centros de curvatura y las circunferencias osculatrices.

Como se observa en la formula (2), el concepto de curvatura está relacionado con la longitud de arco $L = s$, que según Rodríguez & Concepción (2011) se calcula con las siguientes formulas:

En forma explícita:

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

En forma paramétrica:

$$L(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Y la definen como:

"La longitud de arco es el extremo superior de los perímetros de todas las quebradas inscritas en él. Cuando este extremo es finito, el arco se llama rectificable, cuando el extremo es $+\infty$ , o sea cuando hay perímetros arbitrariamente grandes, se dice que el arco es no rectificable, o mejor que tiene longitud infinita. La operación de calcular la longitud de un arco se llama rectificación." (Rodríguez & Concepción, 2011, p.8)

El concepto de longitud de arco se puede generalizar a más dimensiones, por ejemplo, en el espacio de tres dimensiones, según Steward (2015) si una curva está dada por la ecuación vectorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ con $a \leq t \leq b$, o de la forma paramétrica $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$, donde sus primeras derivadas son continuas y la curva se recorre solo una vez en el intervalo, entonces la fórmula de la longitud de arco es:

$$L(t) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}dt = \int_a^b \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}dt$$

En este trabajo se busca construir una versión de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas, sin embargo, es importante mencionar que ya existen otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana de acuerdo con la forma de representar una curva, que según Rodríguez & Concepción (2011) son:

Si la función esta expresada de forma implícita $F(x, y) = 0$:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$$

Si la función está dada en coordenadas paramétricas $x = x(t), y = y(t)$:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Si la función está dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$:

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

## Diseño metodológico

**Definición del enfoque**: en el presente proyecto de investigación se utiliza el enfoque cuantitativo, que según Hernández (2014), permite ser objetivo en la descripción, explicación y comprobación de la formula buscada, de manera que se genere la teoría que pruebe la formula mediante el uso de la lógica deductiva en la teoría relacionada, fundamental para el planteamiento de la investigación y las demás etapas del proceso, utilizando procedimientos rigurosos, estructurados y objetivos que confirmen la validez de los resultados.

**Planteamiento del problema:** En este punto se formula el problema como una pregunta: ¿Cómo Construir una nueva fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas?

La formulación de esta pregunta implica la posibilidad de realizar una prueba empírica, es decir, que la funcionalidad de la formula desarrollada pueda ser comprobada mediante la resolución de algún ejemplo. Aquí también se desarrolla los objetivos y la justificación de la investigación.

**Técnica:** Documental, en la que se hace una revisión analítica de la literatura relacionada con la temática de la investigación, como la definición y antecedentes del concepto de curvatura de una curva, radio de curvatura, circunferencia osculatriz, construcción vectorial de la fórmula de la curvatura, la fórmula de la longitud de arco, las variaciones de la fórmula de curvatura de acuerdo al sistema de coordenadas utilizadas, los conceptos de la geometría analítica para construir la nueva fórmula como la función de la circunferencia, las coordenadas polares, la pendiente de rectas perpendiculares, la derivación en calculo y las funciones trigonométricas junto con sus inversas, desarrollando así el marco teórico.

**Alcance de la investigación**: En este proyecto de investigación se utiliza el estudio de alcance exploratorio, que según Hernández (2014) se emplea para estudiar un tema novedoso que no se ha abordado antes, ya que se indaga acerca de la fórmula de la curvatura de la curva plana desde una nueva perspectiva que permite utilizar en su definición funciones trigonométricas.

## Resultados de la investigación

### Construcción de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas

La construcción de la nueva fórmula de la curvatura con funciones trigonométricas inicia con la construcción de la fórmula del radio de curvatura de una función $f(x)$ continua doblemente diferenciable, con el razonamiento de que para hallar dicho radio, primero se hallan la primera y la segunda derivada de la función de la circunferencia osculatriz, ya que estas determinan la inclinación de la tangente a la curva y la razón de cambio de dicha tangente, y al igualarlo con la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ que define la curva, se halla dicho radio de curvatura. No se consideran derivadas de orden mayor a dos, ya que una curva dada por una función $f(x)$ diferente al círculo, no coincidiría con él en un punto dado en el valor de más de las dos primeras derivadas, ya que la naturaleza de su curvatura es diferente a la del circulo.

Recuérdese por Rondón (2011), que la fórmula de la circunferencia con centro en el origen es:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Para hallar su primera y segunda derivada, se utilizan las siguientes reglas de derivación explicadas por Steward (2015):

Regla de la potencia para $n$ entero: $Dx^n = nx^{n-1}$

Regla del cociente: $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Realizando los cálculos se llega a que la primera derivada de la función del circulo es:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Y la segunda derivada de la función del circulo es:

$$f''(x) = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

Ahora, si se transforma la abscisa en coordenadas polares, se tiene que:

$$x = rcos(\alpha)$$

Se reemplaza la abscisa en la formula (3) con esta última expresión en coordenadas polares:

$$f''(x) = -\frac{r^2}{\left(r^2 - \left(rcos(\alpha)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{r\left(1 - \left(cos(\alpha)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

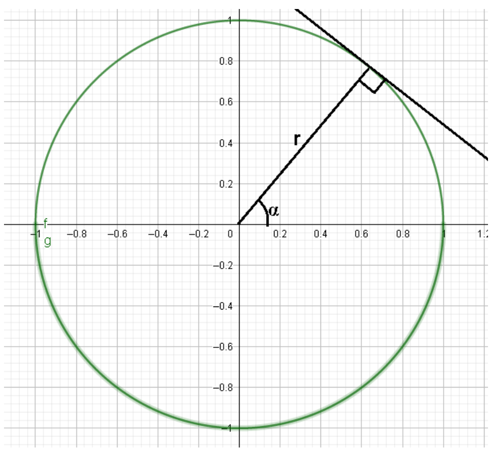
En esta última expresión se despeja el radio $r$:

$$r = -\frac{1}{f''(x)\left(1 - \left(cos(\alpha)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4)$$

Ahora falta averiguar el ángulo $\alpha$, para ello se debe considerar la siguiente figura:

**Figura 1**

*Radio, su ángulo de inclinación y la tangente de un círculo*



Como se puede observar en la figura 1, en un círculo, el radio es perpendicular a la tangente en cualquier punto, y como lo expone Rondón (2011), se sabe en geometría que las pendientes $m_1$y $m_2$ de dos rectas perpendiculares cumple la identidad:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

La pendiente del radio de un círculo está dada por la expresión $\tan(\alpha)$.

Así que la relación de la pendiente de la tangente en un punto del circulo y la pendiente de su radio es:

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Despejando $\alpha$ de la expresión anterior se obtiene:

$$\alpha = tan^{-1}\left(-\frac{1}{f'(x)}\right)$$

Esta expresión del ángulo se reemplaza en la formula (4):

$$r = -\frac{1}{f''(x)\left(1-\left(cos\left(tan^{-1}\left(-\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5)$$

Ahora de acuerdo con la definición de curvatura de una curva en la fórmula (2), y por ende también en el radio de curvatura, en la fórmula (5) se considera el valor absoluto del segundo miembro de la ecuación, así:

$$r(x) = \left| -\frac{1}{f''(x)\left(1-\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1-\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^{2}}\right)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

Como lo explica Rondón (2011) respecto a las identidades trigonométricas, $tan^{-1}(-u) = -tan^{-1}(u)$, y $\cos(-u) = \cos(u)$, de manera que la expresión anterior se puede escribir así:

$$r(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^{2}}\right)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

Con la fórmula anterior del radio de curvatura, se tiene también la fórmula de la curvatura como su inversa, utilizando funciones trigonométricas:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(\frac{1}{1-\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^{2}}\right)^{3/2}} \qquad (6)$$

**Ejemplo 1**

Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, de manera que su primer y segunda derivada son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

Ahora se debe calcular la curvatura de la función para $x = 1$, de manera que los valores de sus dos primeras derivadas en este punto son:

$$f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) = 5$$

$$f''(1) = 6(1) + 2 = 8$$

Utilizando la fórmula (1) se tiene:

$$K(1) = \frac{|f''(1)|}{(1 + (f'(1))^2)^{3/2}} = \frac{8}{(1 + (5)^2)^{3/2}} = 0{,}060343426$$

Y utilizando la fórmula (6) se tiene:

$$K(1) = \frac{|f''(1)|}{\left(\frac{1}{1 - \left(cos\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{f'(1)}\right)\right)\right)^2}\right)^{3/2}} = \frac{8}{\left(\frac{1}{1 - \left(cos\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\right)^2}\right)^{3/2}}$$

$$= 0{,}060343426$$

Ahora recuérdese por Guichard (2021), que la fórmula de la longitud de arco en un plano es:

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Esta función es importante en el cálculo para la construcción de la formula (1).

Ahora utilizando la identidad (6) se tiene:

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^2}}dx$$

Así se obtiene una expresión alternativa para calcular la longitud de arco en un plano utilizando funciones trigonométricas, aunque al ser más complicada, podría ser una integral no elemental o muy difícil de resolver, aunque sobre este asunto no se profundiza en este trabajo.

**Dominio de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas**

Igualando la formula (6) con la formula (1) se tiene la identidad:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{|f''(x)|}{\left(\frac{1}{1 - \left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\right)\right)^2}\right)^{3/2}}$$

Esto quiere decir que:

$$1 + (u)^2 = \frac{1}{1 - \left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right)^2} \qquad (7)$$

Donde $u$ puede ser una constante real o una función con rango real diferente a cero.

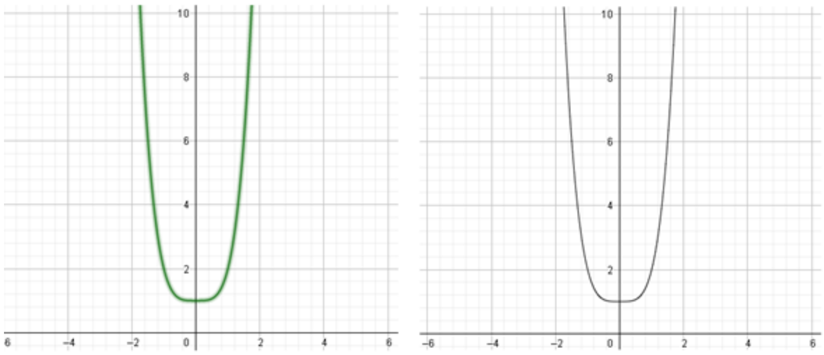
**Ejemplo 2**

si $u = x^2$, las gráficas respectivas del primer y segundo miembro de la identidad (7) son:

**Figura 2**

*Graficas de los dos miembros de la identidad (7) cuando* $u = x^2$

Gráfica de $1 + (x^2)^2$ Gráfica de $\frac{1}{1-\left(cos\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)^2}$



A continuación, se probará que el segundo miembro de la identidad (7) siempre está definido mientras $u \neq 0$.

La expresión del segundo miembro de la identidad (7) está definida si:

$$1 - \left(cos\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right)^2 \neq 0$$

Y esto se cumple si:

$$cos\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right) \neq \pm 1$$

Esto se cumple a su vez sí:

$$tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) \neq k\pi \text{ con } k \in Z$$

Esto se cumple si:

$$\frac{1}{u} \neq 0$$

Y esto es cierto, ya que una fracción con una constante en su numerador nunca es igual a cero. Y además $u \neq 0$, ya que, de no ser así, $\frac{1}{u}$ no estaría definida.

De manera que el dominio de la formula (6) es $\{x \in R | f'(x) \neq 0\}$ siendo $f(x)$ continua y doblemente diferenciable.

**Otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas**

Es posible construir otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana, utilizando las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas expuestas por Weisstein (s.f.), resumidas en la siguiente tabla:

**Tabla 1**

*Relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas*

| | | |
|---|---|---|
| $sen(arcos(u)) = \sqrt{1-u^2}$ | $Cos(arcsen(u)) = \sqrt{1-u^2}$ | $tan(arcsen(u)) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $sen(arctan(u)) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ | $cos(arctan(u)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ | $tan(arcos(u)) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$ |
| $sen(arcot(u)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ | $cos(arcot(u)) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ | $tan(arcot(u)) = \frac{1}{u}$ |
| $sen(arcsec(u)) = \frac{\sqrt{u^2-1}}{\lvert u \rvert}$ | $cos(arcsec(u)) = \frac{1}{u}$ | $tan(arcsec(u)) = sgn(u)\sqrt{u^2-1}$ |
| $sen(arcsc(u)) = \frac{1}{u}$ | $cos(arcsc(u)) = \frac{\sqrt{u^2-1}}{\lvert u \rvert}$ | $tan(arcsc(u)) = \frac{sgn(u)}{\sqrt{u^2-1}}$ |

Para lograr esto, se despeja la expresión $1 + (u)^2$ de alguna de las identidades de la tabla 1, y así se obtiene una nueva expresión para la identidad (7), y si esto no es posible, ya que no todas las identidades de la tabla 1 tienen la expresión $1 + (u)^2$, entonces se despeja $u$ de la identidad y esta se reemplaza en $1 + (u)^2$.

**Ejemplo 3**

De la tabla 1 se toma la identidad:

$$\cos(\arctan(u)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \qquad (8)$$

Ahora se despeja la expresión $1 + (u)^2$:

$$1 + (u)^2 = \frac{1}{(\cos(\arctan(u)))^2}$$

Y haciendo $u = f'(x)$, se tiene que la fórmula de la curvatura de la curva con esta identidad es:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{|f''(x)|}{\left(\frac{1}{(\cos(\arctan(f'(x))))^2}\right)^{3/2}} \qquad (9)$$

Esta fórmula tiene la ventaja respecto a la formula (6), de que su dominio es todo $x \in R$, siendo $f(x)$ continua y doblemente diferenciable.

**Ejemplo 4**

De la tabla 1 se toma la identidad:

$$sen(arcsc(u)) = \frac{1}{u}$$

Se despeja $u$ de la identidad y esta se reemplaza en $1 + (u)^2$:

$$1 + (u)^2 = 1 + \left(\frac{1}{sen(arcsc(u))}\right)^2$$

Y haciendo $u = f'(x)$, se tiene que la fórmula de la curvatura de la curva con esta identidad es:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + \left(\frac{1}{sen\left(arcsc(u)\right)}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Ahora la ecuación (8) sirve para construir la ecuación (6), constituyéndose como una demostración de dicha formula, bastando solo demostrar la identidad (7), y esto se logra con el siguiente razonamiento:

Considérese de nuevo la ecuación (8):

$$\cos(\arctan(u)) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Ahora reemplácese $u = \frac{1}{\mu}$:

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\mu})^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Ahora la identidad anterior se eleva al cuadrado:

$$(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)\right))^2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{1 + \mu^2 - 1}{1 + \mu^2} = 1 - \frac{1}{1 + \mu^2}$$

Así se tiene que:

$$\frac{1}{1 + \mu^2} = 1 - \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right)^2 \rightarrow 1 + \mu^2 = \frac{1}{1 - \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right)^2}$$

Y así se llega a la ecuación (7).

## Discusión

El significado de la curvatura de una curva se refiere a la razón de cambio de la dirección del vector tangente, es decir, la curvatura mide cuan curva es una curva, y para poder realizar dicha medición, desde hace mucho tiempo se ha creado una formula que calcula dicha curvatura, utilizando conceptos desarrollados por el cálculo vectorial, como lo es el vector tangente, la tangente unitaria, la longitud de arco y la derivación con la regla de la cadena. Esta fórmula vectorial de la curvatura permite calcular la curvatura de una curva definida por una función vectorial en un plano tridimensional, y si se aplica al plano bidimensional del plano cartesiano, se obtiene la fórmula (1). Así mismo utilizando las mismas herramientas de calculo y las coordenadas polares se puede demostrar que el radio de curvatura es el reciproco de la curvatura, y aquí entra el concepto de circunferencia osculatriz, de manera que el radio de curvatura es el radio que tendría una circunferencia con la misma curvatura que tiene la curva en un cierto punto.

Entendiendo bien el significado de la curvatura de la curva, se procede a construir una fórmula alternativa para medir la curvatura de una curva plana, sin embargo, ahora los razonamientos no inician con la medición de la curvatura, sino del radio de curvatura, para esto, se utiliza la fórmula de la circunferencia y se realiza una doble diferenciación ya que estas determinan la inclinación de la tangente a la curva y la razón de cambio de dicha tangente, y al igualarlo con la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ que define la curva, se halla dicho radio de curvatura. Con esta idea y utilizando las coordenadas polares y las funciones trigonométricas coseno y la tangente inversa, se obtiene la fórmula (6), lográndose así construir una fórmula diferente que mide la curvatura de una curvatura plana con funciones trigonométricas, utilizando así mismo un razonamiento alterno al utilizado para la fórmula (1). Luego con la identidad (8) de la tabla 1, se obtiene la fórmula (9) como una versión mejorada de la fórmula (6) ya que completa su dominio de definición.

## Conclusiones

Para un correcto desarrollo de este proyecto de investigación, se definió, de acuerdo con el estudio de la literatura relacionada al tema, el concepto de curvatura como la razón de cambio de la recta tangente en un punto de la curva respecto al cambio de la longitud de arco, determinándose así la fórmula (1) y (2). También se definió el concepto de radio de curvatura como el reciproco de la curvatura, y se interpreta como el radio que tendría una circunferencia, llamada osculatriz, si tuviese la misma curvatura que tiene la curva definida por una cierta función continua y doblemente diferenciable en un punto determinado.

Conociendo la definición de los principales conceptos, se procede a utilizar un razonamiento diferente al utilizado para construir la fórmula de la curvatura, y consiste en calcular primero el radio de curvatura utilizando conceptos básicos de geometría analítica plana como la función de la circunferencia, las coordenadas polares y las pendientes de rectas perpendiculares, también del cálculo como la derivación y sus reglas de la potencia y el cociente, y la trigonometría con sus funciones coseno y tangente inversa. Para hallar dicho radio, primero se hallan la primera y la segunda derivada de la función de la circunferencia osculatriz, ya que estas determinan la inclinación de la tangente a la curva y la razón de cambio de dicha tangente, y al igualarlo con la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ que define la curva, se halla dicho radio de curvatura. Con la construcción de la fórmula (6) se da respuesta a la pregunta del planteamiento del problema de este proyecto de investigación.

Con el propósito de mostrar que la construcción de la fórmula (6) es correcta, se resuelven los ejemplos 1 y 2 como evidencia de la funcionalidad de la nueva fórmula.

Ahora, para caracterizar adecuadamente la fórmula (6), se define el dominio de dicha fórmula de manera que está definida para $\{x \in R | f'(x) \neq 0\}$.

Para resolver el problema expuesto en el párrafo anterior de que la fórmula podría no estar definida para todo valor de $x$, dependiendo del tipo de función que defina la curva, se utiliza la identidad (8) de la tabla 1 para obtener una versión mejorada de la fórmula (6), obteniendo la fórmula (9) definida para todo $x \in R$.

Así mismo se pueden utilizar las demás identidades de la tabla 1 para construir otras versiones de la fórmula de la curvatura de una curva plana con funciones trigonométricas como se muestra en los ejemplos 3 y 4. Y utilizando la identidad (8) para obtener le identidad (7) mediante artificios algebraicos, se obtiene una demostración rigurosa de la fórmula (6).

Es interesante mencionar que para comprender la construcción de la fórmula (6) no es necesario tener conocimientos avanzados de calculo vectorial, basta solo con tener conocimientos básicos de geometría analítica, trigonometría plana y diferenciación.

Es probable que se puedan usar funciones trigonométricas para expresar la fórmula de la curvatura de una curva en el plano tridimensional, y una generalización de este tipo puede ser un tema muy interesante para un próximo proyecto de investigación.

Se concluyen estas ideas resaltando la enorme riqueza, flexibilidad y diversidad que presentan las matemáticas, ya que, como lo muestra este trabajo y muchos otros, existen varias maneras de abordar un tema, demostrar un teorema o construir una teoría.

## Referencias

Ariza, D. (2017). *Cálculo multivariado*. Fundación Universitaria del Área Andina

Claro, F. (2018). *Invención Y Descubrimiento en Ciencia Y Música*. Humanitas (07172168), 23(89), 76–91.

Ferreirós, G. & García, M. (2018). *¿«Natural» y «euclidiana»? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas*. Theoria, 33(2), 325–344. https://doi-org.bibliotecavirtual.unad.edu.co/10.1387/theoria.17839

Fonseca, J. (2016). *Elementos para el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela*. Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. 3(1). 51-58.

Guichard, D. (2021). *Single and Multivariable Calculus*. https://www.whitman.edu/mathematics/multivariable/multivariable.pdf

Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). México: McGraw-Hill education.

Logares, M. (2018). *Las geometrías y otras revoluciones*. CSIC.

Palomares, F. & Monsoriu, J. (2016). *Curvas en el espacio: un laboratorio virtual*. Modelling in Science Education and Learning, 9(1), 87-96.

Ramírez, J. (2014). *Analogía del concepto de curvatura en diferentes espacios geométricos* (tesis de maestría). Universidad tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Rodríguez, R., & Concepción, C. (2011*). Curvas maravillosas* (Doctoral dissertation). Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas.

Rondón, J. (2011). *Álgebra, trigonometría y geometría Analítica* (2ª ed.). Universidad nacional abierta y a distancia.

Salcedo, C., Angulo, E. & Quiñones, Y. (2013). *Centros de curvatura y circunferencia osculatriz de curvas en S^ 2*. Scientia et technica, 18(3), 569-574.

Steward, J. (2015). *Multivariable calculus (eight edition).* Cengage learning.

Steward, J. (2015*). Single Variable Calculus: Early Transcendentals* (8ª ed.). Cengage learning.

Weisstein, E. (s.f.). *Inverse Trigonometric Functions*. MathWorld.Wolfram. Recuperado el 18 de julio de 2021 de https://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html

Salazar, C., Botero, D., & Giraldo, L. (2020). *Enseñanza y aprendizaje del razonamiento deductivo e inductivo a través de las ciencias naturales*. Educación y Humanismo, 22(38). https://doi-org.bibliotecavirtual.unad.edu.co/10.17081/eduhum.22.38.3732

Zill, D., & Wright, W. (2014). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (4ª ed.). McGraw-Hill.