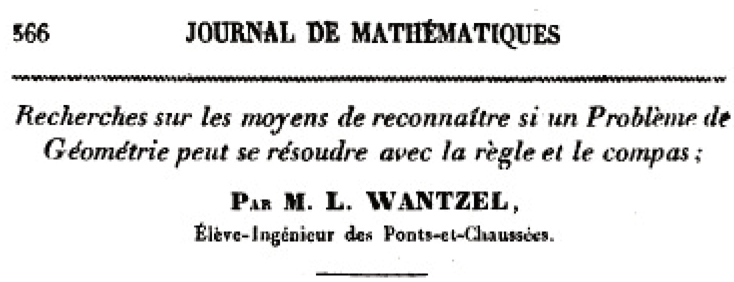
Una mirada al pasado #15

Tributo a tres trisecciones

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

La trisección de un ángulo cualquiera utilizando únicamente regla (sin marcar) y compás es uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega. Hasta 1837 no se demostró su imposibilidad. Lo hizo el ingeniero francés Pierre Laurent Wantzel en un trabajo publicado en el segundo volumen del *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* cuando apenas tenía 23 años.



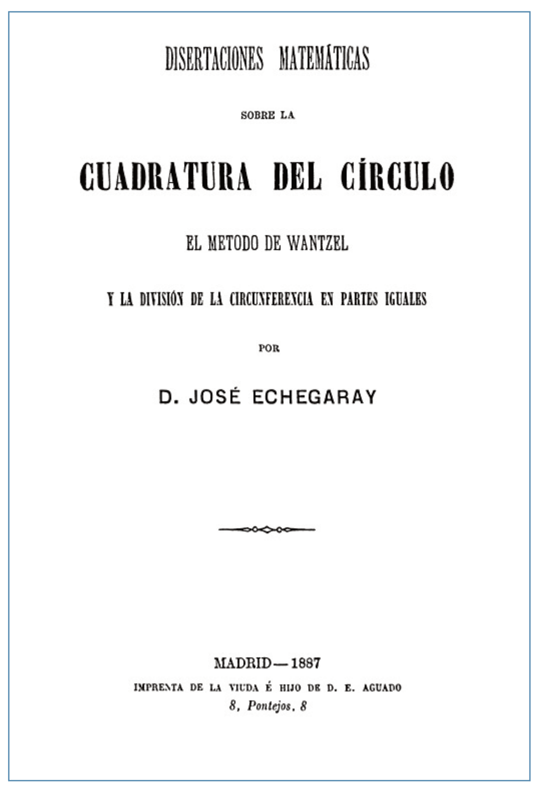
566 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas;

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Wantzel murió sin haber cumplido los 34 años, en 1848. Esto no resulta sorprendente teniendo en cuenta que en una nota necrológica publicada en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* leemos que: «no se acostaba hasta tarde; entonces leía y solo tomaba unas pocas horas de sueño atribulado, alternando entre el café y el opio, y comiendo a horas irregulares hasta que se casó. Confiaba ilimitadamente en su constitución, muy fuerte por naturaleza, de la que se burlaba a placer con todo tipo de abusos».

Su temprana muerte, el ser una figura relativamente oscura y otros factores relacionados con la propia naturaleza del resultado hicieron que, pese a la importancia que se atribuye actualmente a su trabajo, este pasara bastante desapercibido en su momento, incluso entre los matemáticos profesionales. Es interesante señalar que una de las primeras referencias explícitas que se conocen al trabajo de Wantzel es la del español José Echegaray, cuando ya habían pasado sin embargo 50 años desde la publicación del trabajo original.



DISERTACIONES MATEMÁTICAS

SOBRE LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO

EL METODO DE WANTZEL

Y LA DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES

POR

D. JOSÉ ECHEGARAY

MADRID—1887
IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO
8, Pontejos, 8

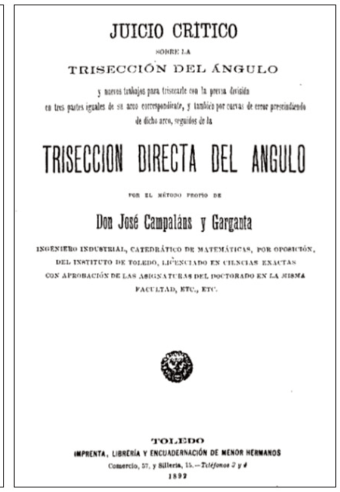
Si la demostración de Wantzel pasó relativamente desapercibida para los matemáticos profesionales, no es de extrañar que para los aficionados fuera completamente desconocida. En cualquier caso, resulta curioso observar que durante la segunda mitad del siglo XIX pareció darse en España un vivo interés por la cuestión de la trisección del ángulo. Algunas de las obras publicadas al respecto fueron:

— *Problema de la trisección del ángulo resuelto geométricamente* (Barcelona, 1861) de Leandro de San Germán y Malet.
— *Solución de la trisección gráfica del ángulo* (Madrid, 1870) de Isidoro Cabanyes.
— *Problemas geométricos relacionados con la trisección del ángulo su análisis y síntesis* (Barcelona, 1886) de Leandro de San Germán y Malet.

— T*risección del ángulo y de su arco correspondiente* (Madrid, 1891) de Francisco Pérez Fernández Ruiz.
— *Juicio crítico sobre la trisección del ángulo* (Toledo, 1892) de José Campaláns y Garganta.
— *Geometría elemental: Problema de la trisección del ángulo* (Barcelona, 1899) de Leandro de San Germán y Malet.

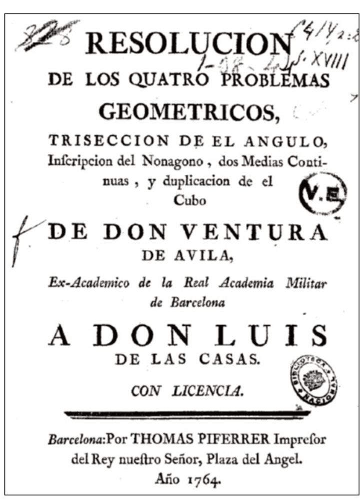

PROBLEMA
DE LA
TRISECCION DEL ÁNGULO,
RESUELTO GEOMÉTRICAMENTE
POR
D. LEANDRO DE SAN-GERMAN Y MALET,
BARCELONA.
LIBRERIA DE JOAQUIN VERDAGUER,
RAMBLA, FRENTE AL LICEO.
1861.
Derecho de traduccion reservado.

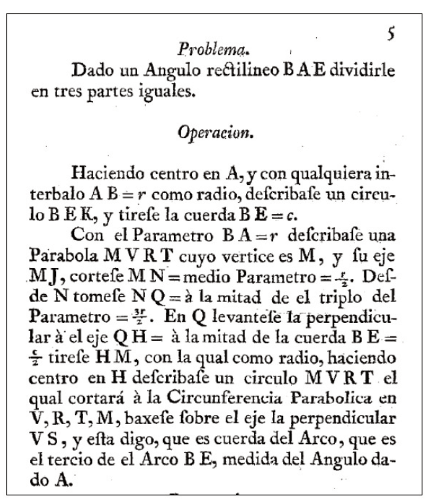

SOLUCION
DE LA
TRISECCION GRÁFICA
DEL ÁNGULO.
POR
DON ISIDORO CABANYES.
MADRID.
Imprenta de M. Tello, Isabel la Católica, 23.
1870.


JUICIO CRÍTICO
SOBRE LA
TRISECCIÓN DEL ÁNGULO
y nuevos trabajos para trisecarle con la previa división
en tres partes iguales de su arco correspondiente, y también por curvas de error prescindiendo
de dicho arco, seguidos de la
TRISECCION DIRECTA DEL ANGULO
POR EL MÉTODO PROPIO DE
Don José Campaláns y Garganta
INGENIERO INDUSTRIAL, CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS, POR OPOSICIÓN,
DEL INSTITUTO DE TOLEDO, LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS
CON APROBACIÓN DE LAS ASIGNATURAS DEL DOCTORADO EN LA MISMA
FACULTAD, ETC., ETC.
TOLEDO
IMPRENTA, LIBRERÍA Y ENCUADERNACIÓN DE MENOR HERMANOS
Comercio, 57, y Sillería, 15.—*Teléfonos 2 y 4*
1892

Este interés no era nuevo, por supuesto, pero sí que llama la atención la publicación de un número relativamente elevado de textos dedicados a un tema tan concreto a lo largo de un periodo de menos de 30 años. Como ya hemos dicho, la imposibilidad de resolver este problema no parecía ser un conocimiento extendido en la época. Por ejemplo, en el periódico *El Imparcial* de 21 de junio de 1891 se reseñaba la obra de Francisco Pérez Fernández Ruiz señalando que «cuantos conocen las ciencias exactas saben que este problema, así como el de la cuadratura del círculo, están pendientes de solución gráfica». Obviamente el autor de la reseña no había leído a Echegaray.

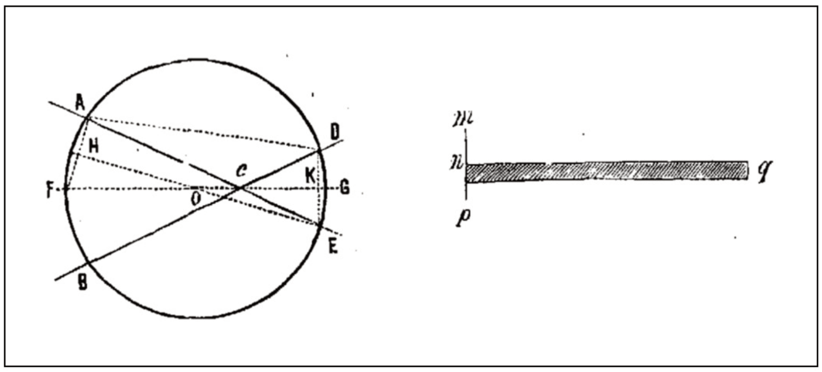
En realidad, aunque la imposibilidad de la trisección del ángulo se estableció con rigor en el siglo XIX, se trataba de una situación aceptada por la mayor parte de la comunidad matemática. Ya en la propia Grecia clásica parecían ser conscientes de ello y conocían soluciones al problema que hacían uso de curvas mecánicas o de instrumentos no permitidos como, por ejemplo, reglas marcadas. También, puesto que trisecar un ángulo cualquiera implica resolver una ecuación cúbica, el problema puede resolverse geométricamente intersecando secciones cúbicas, algo que el persa Omar Khayyam ya sistematizó en el siglo XI, o algebraicamente con los métodos desarrollados entre los siglos XV y XVI por del Ferro, Fontana o Cardano; y extendidos y popularizados por Viète o Descartes, entre otros. Estos métodos no eran desconocidos en España y los podemos encontrar en textos publicados en siglos anteriores, como por ejemplo en la *Resolución de los quatro problemas geométricos* (1764) de Ventura de Ávila. Como podemos observar, en esta obra el problema es resuelto geométricamente intersecando una parábola con una circunferencia.


RESOLUCION
DE LOS QUATRO PROBLEMAS
GEOMETRICOS,
TRISECCION DE EL ANGULO,
Inſcripcion del Nonagono, dos Medias Continuas, y duplicacion de el Cubo
DE DON VENTURA
DE AVILA,
Ex-Academico de la Real Academia Militar de Barcelona
A DON LUIS
DE LAS CASAS.
CON LICENCIA.
Barcelona: Por THOMAS PIFERRER Impreſor del Rey nueſtro Señor, Plaza del Angel.
Año 1764.


5
Problema.
Dado un Angulo rectilineo B A E dividirle en tres partes iguales.
Operacion.
Haciendo centro en A, y con qualquiera interbalo A B $= r$ como radio, deſcribaſe un circulo B E K, y tireſe la cuerda B E $= c$.
Con el Parametro B A $= r$ deſcribaſe una Parabola M V R T cuyo vertice es M, y ſu eje M J, corteſe M N = medio Parametro $= \frac{r}{2}$. Deſde N tomeſe N Q = à la mitad de el triplo del Parametro $= \frac{3r}{2}$. En Q levanteſe la perpendicular à el eje Q H = à la mitad de la cuerda B E $= \frac{c}{2}$ tireſe H M, con la qual como radio, haciendo centro en H deſcribaſe un circulo M V R T el qual cortará à la Circunferencia Parabolica en V, R, T, M, baxeſe ſobre el eje la perpendicular V S, y eſta digo, que es cuerda del Arco, que es el tercio de el Arco B E, medida del Angulo dado A.

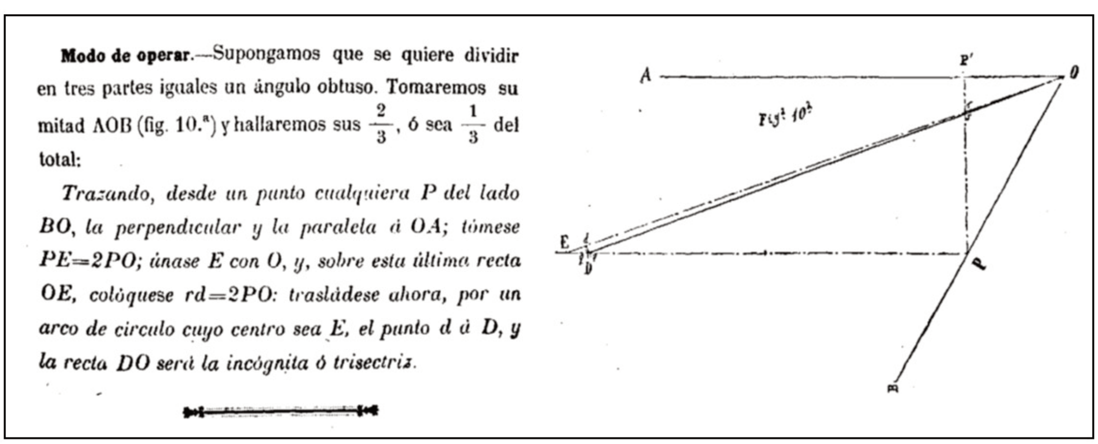
Vemos pues que la posibilidad de resolver el problema de la trisección por medios algebraicos y geométricos era bien conocida, pero no lo era tanto la imposibilidad de hacerlo únicamente con regla y compás. Este es el contexto en la segunda mitad del siglo XIX cuando aparecen las obras que hemos presentado anteriormente. Vamos a comentar tres de ellas, cuyas portadas hemos reproducido antes, y que tienen características muy diferentes en cuanto al origen y formación del autor, los objetivos perseguidos en la obra, etc.

En primer lugar, el texto de Cabanyes (un militar formado en la Academia de Artillería de Segovia) resuelve el problema de forma exacta y rigurosa, pero utilizando instrumentos no permitidos. Lo hace en dos fases:



— Se demuestra que si se quiere trisecar el ángulo *ACB* de la figura (parte izquierda), es necesario trazar una circunferencia cuyo centro esté en la bisectriz de dicho ángulo y de modo que el arco *AB* sea doble del arco *DE*. En tal caso el ángulo *DAE* es la tercera parte del dado. La demostración de esto es elemental y se basa únicamente en propiedades de ángulos inscritos e interiores en una circunferencia. De esta forma el problema se reduce a construir dicha circunferencia.
— Para poder construirla es necesario hallar su centro y su radio. Para conseguirlo el autor hace uso de la escuadra que vemos en la parte derecha de la figura. En ella *mp* es perpendicular a *nq* y, además, *mn* es igual a *np*. No vamos a entrar en detalles, pero en esencia el uso de este instrumento implica la construcción de un cierto lugar geométrico que termina por resolver el problema. La demostración rigurosa que da el autor es completamente algebraica.

Por su parte, el texto de Campaláns (que fue profesor de segunda enseñanza, entre otros lugares, en el Instituto Provincial de Teruel) proporciona una resolución que solo hace uso de regla y compás sin graduar. Por tanto necesariamente ha de ser aproximada. El autor es consciente de este hecho y al presentar un método propio, lo introduce con las palabras «el problema se resuelve breve y suficientemente aproximado empleando el siguiente modo de operar». En la figura vemos el procedimiento de Campaláns para trisecar un ángulo obtuso.



Modo de operar.—Supongamos que se quiere dividir en tres partes iguales un ángulo obtuso. Tomaremos su mitad AOB (fig. 10.ª) y hallaremos sus $\frac{2}{3}$, ó sea $\frac{1}{3}$ del total:

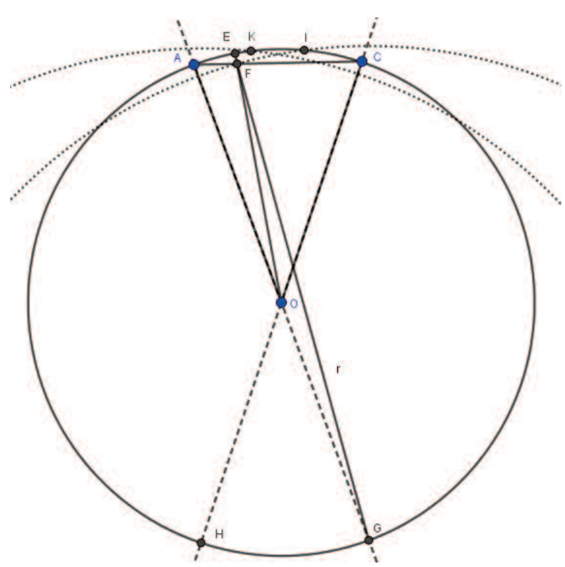
Trazando, desde un punto cualquiera P del lado BO, la perpendicular y la paralela á OA; tómese PE=2PO; únase E con O, y, sobre esta última recta OE, colóquese rd=2PO: trasládese ahora, por un arco de círculo cuyo centro sea E, el punto d á D, y la recta DO será la incógnita ó trisectriz.

Tras ello, el autor reflexiona sobre el concepto de exactitud en los siguientes términos: «En el constante debate entre la exactitud práctica y la matemática o científica, se presentan al Geómetra poderosos auxiliares en su favor que no debe despreciar, utilizándolos para mantener aquella exactitud en los justos límites de un buen resultado o desarrollo gráfico […] abrigamos el atrevido concepto de que no tendría importancia una resolución geométrica más exacta, puesto que la exactitud práctica objetivo único de nuestras investigaciones, se lleva con el trazado expuesto, hasta donde permitan los instrumentos de que, para el caso, hoy podemos servirnos. En cuanto al rigor científico, imposible de apreciar con la regla y el compás, nos lo proporciona ya la geometría analítica, resolviendo este problema con una ecuación de tercer grado».

Terminamos con la obra de San Germán (un aficionado prácticamente autodidacta). A diferencia de los anteriores, el autor afirma haber resuelto el problema de forma exacta: «Me puse a trabajar con ahínco, retiréme de la sociedad y de mis negocios, con grave detrimento en mi salud e intereses para estar exclusivamente ocupado en este empeño. Después de algunos años de penosos esfuerzos abrigo el convencimiento de haber logrado la resolución del célebre problema de la trisección del ángulo, con el único auxilio de la regla y el compás común, instrumentos que hasta hoy en día se tenían por insuficientes, y de terminar su expresión por fórmulas tan sencillas como exactas».

Es evidente que los esfuerzos de San Germán, pese a sus palabras, debieron ser infructuosos. No obstante, reproducimos aquí el supuesto «método general para dividir un ángulo y su arco en tres partes iguales» que el autor resume en siete pasos. El autor no proporciona una figura ni denota los elementos de la construcción en modo alguno (la notación es nuestra). Por ello, adjuntamos una figura propia realizada con la ayuda de GeoGebra. Recomendamos al lector que efectúe la construcción personalmente, ya sea con GeoGebra o con regla y compás:

— Haciendo centro al vértice del ángulo dado (AOC), con una apertura de compás cualquiera (hemos tomado $OA = OC$), descríbase una circunferencia que corte a los lados de dicho ángulo, quedando convertidos en radios.
— Únanse los extremos de estos lados o radios por medio de una cuerda (AC).
— Prolónguense dichos lados o radios por la parte del vértice hasta encontrar la circunferencia convirtiéndose en diámetros (obtenemos los puntos H y G).
— Tírese un radio que vaya a parar a la primera cuarta parte del arco del ángulo en cuestión (OE).
— Desde el punto de intersección entre dicha cuerda y este radio (F), tírese una recta al extremo opuesto del lado prolongado de cuyo principio hemos tomado la cuarta parte del arco en el punto anterior (FG).
— Con una apertura de compás igual a esta línea (r es la longitud de FG), y desde los extremos de los lados prolongados (H y G), opuestos al vértice, por la parte del arco que mide el ángulo, háganse dos intersecciones (K e I), y quedará dividido este arco en tres partes iguales.
— Por dichas intersecciones tírense radios, y tendremos el ángulo dividido en tres ángulos iguales.



A simple vista la construcción parece proporcionar una aproximación bastante buena. Al realizar la construcción con GeoGebra podemos jugar con distintos valores del ángulo de partida para valorar la calidad de la aproximación y para comprobar que, como ya sabíamos, la construcción no es exacta. En la tabla siguiente damos algunos valores de las medidas de los ángulos implicados (redondeadas con dos cifras decimales, lo que explica las posibles inconsistencias en algunos de los casos):

Ángulo AOC	*Ángulo AOK = Ángulo IOC*	*Ángulo KOI*	*Ángulo AOC/3*
5,06º	1,71º	1,64º	1,69º
13,96º	4,72º	4,51º	4,65º
28,38º	9,59º	9,19º	9,46º
44,31º	14,94º	14,42º	14,77º
72,22º	24,20º	23,82º	24,07º
89,64º	29,88º	29,87º	29,88º
105,29º	34,92º	35,46º	35,10º
179,92º	59,97º	59,99º	59,97º

Como vemos la aproximación es, en efecto, buena. El error absoluto está por debajo de medio grado y la construcción parece funcionar de forma similar tanto para ángulos pequeños (próximos a cero), como grandes (cercanos a un llano). Por otro lado, los datos de la tabla parecen sugerir que la construcción pueda ser exacta para los casos en que el ángulo AOC es recto o llano. Dejamos en manos del lector la comprobación de si esto es cierto, o no.

Otra tarea interesante que puede abordar el lector consiste en realizar un estudio similar con la construcción de Campaláns que hemos visto antes y compararla con la que acabamos de describir, tanto en términos de exactitud como de sencillez. Respecto a esto hay que tener en cuenta, y es una reflexión interesante a realizar (recordando las palabras citadas de Campaláns), la diferencia entre usar una regla y compás imaginarios e ideales (GeoGebra) y unos reales, que conllevan inevitablemente un error en el trazado de las líneas.

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Septiembre de 2022
ISSN: 2386-8821e