 https://doi.org/10.24844/EM3403.07

El conocimiento matemático que despliega y desarrolla un grupo de profesores en la resolución del problema del corral

The mathematical knowledge displayed and developed by a group of teachers when solving the corral problem

Jeannette Galleguillos,[1]
Miguel Ribeiro,[2]
Miguel Montes[3]

Resumen: En este trabajo se estudió el conocimiento matemático que despliega y desarrolla el profesor, en una situación de clase en la que se explora el problema del corral y sus variantes. La investigación se abordó cualitativamente observando un grupo de profesores de matemática en la resolución del problema. El análisis se realizó enfocándose en las especificidades del conocimiento del profesor de matemáticas y dichas especificidades son entendidas en el sentido del Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK). De los datos emergieron distintos niveles en profundidad del conocimiento matemático desplegado y desarrollado por los profesores en la resolución del problema, que fueron asociados a categorías del MTSK. Los resultados indican que, al resolver el problema por diferentes caminos y al observar diversas variantes, fue movilizado el conocimiento matemático del profesor: en relación al uso de diversas figuras geométricas para diseñar corrales no comunes; en la aplicación y relación de diversas nociones matemáticas en su resolución, y en el

Fecha de recepción: 24 de abril de2020. **Fecha de aceptación**: 13 de julio de 2022.

[1] Facultad de Ciencias, Universidad de Valparaíso, Chile, jeannette.galleguillos@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1089-0900.

[2] Faculdade de Educação, UNICAMP, Brasil, cmribas78@gmail.com, orcid.org/0000-0003-3505-4431.

[3] Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte, Centro de Investigación Coideso, Universidad de Huelva, España, miguel.montes@ddcc.uhu.es, orcid.org/0000-0003-3181-0797.

establecimiento de conjeturas y posibilidades de desarrollar nuevos conocimientos. Así, nuevos indicadores del conocimiento matemático especializado son discutidos.

Palabras clave: *Formación de profesores; Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; Conocimiento matemático del profesor; Resolución de problemas; Problemas abiertos.*

Abstract: This paper focuses on the mathematical knowledge displayed and developed by a group of teachers when discussing a problem of maximization and some of its possible variations. The research was approached qualitatively by observing a group of mathematics teachers' during the discussion involved in solving the problem. The analysis was carried out focusing on the teacher's mathematical knowledge specificities, perceived in the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) perspective. The data reveal different in-depth levels of mathematical knowledge deployed and developed by teachers in problem-solving, which were associated with MTSK categories. The results show that, by solving the problem in different ways and observing different variants, the teacher's mathematical knowledge was mobilized: in relation to the use of various geometric figures to design unusual pens; in the application and relationship of various mathematical notions in finding the resolution, and in the establishment of conjectures and possibilities of developing new knowledge. Thus, new indicators of teachers' mathematical specialized knowledge are discussed.

Keywords: *Teacher developing; Specialized knowledge of the mathematics teacher; Mathematical knowledge of the teacher; Problem-solving; Open problems.*

INTRODUCCIÓN

Los resultados de investigaciones sugieren que existen ciertos énfasis y formas de abordar la resolución de problemas, por parte del profesor, que contribuyen en el aprendizaje de los estudiantes sobre este tema. Entre ellos, Carpenter *et al.* (1988) observaron influencias entre el conocimiento de los profesores y la enseñanza que imparten a sus estudiantes sobre resolución de problemas. Sin embargo, Fernández-Gago *et al.* (2018) evidenciaron dificultades de los profesores para ayudar a los estudiantes a enfrentarse a problemas. Por un lado, los profesores manifiestan el deseo de trabajar con sus estudiantes en resolución de problemas pero, por otro lado, ellos tienden a guiar excesivamente a sus estudiantes en esa labor, no promoviendo la discusión y dando pocas oportunidades para que los estudiantes aprendan de sus errores. De esta forma, se evidencia una necesidad en los profesores de saber, de modo práctico, cómo ayudar a los estudiantes a resolver problemas. Silver (2016) enfrenta esta problemática en la formación continua de profesores, observando que los profesores tienen oportunidades de indagar y reflexionar sobre su práctica enfrentándose ellos mismos a tareas que involucran la resolución de problemas. De la misma forma, Masingila *et al.* (2018) estudiaron el conocimiento que utilizan y desarrollan profesores cuando resuelven problemas, trabajando en conjunto y reflexionando sobre su enseñanza en esta materia, ofreciendo así oportunidades para su desarrollo profesional.

Uno de los aspectos centrales en el currículo de diversos países es desarrollar la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes (e.g., NCTM, 2000; MINEDUC, 2015), lo que involucra la preparación del profesor para que pueda promover el desarrollo de esas capacidades en sus estudiantes (Felmer y Perdomo, 2016; Carrillo *et al.*, 2019; NCTM, 2020). La importancia de la resolución de problemas en el currículo escolar demanda que el profesor deba estar preparado para crear y gestionar situaciones abiertas, que se transformen continuamente y de las cuales no se pueda prever su resultado final. En esa perspectiva, creemos necesario que el profesor de matemáticas se enfrente a problemas abiertos y tenga la oportunidad de reflexionar minuciosamente sobre la práctica de resolver problemas y aprender de ella (Silver, 2016), desarrollando su conocimiento profesional que se encuentra asociado a ese tipo de prácticas, posibilitando que sus alumnos entiendan lo que hacen y por qué lo hacen a cada paso.

En general, asumimos que el profesor, y especialmente su conocimiento, es uno de los factores que más influencia los aprendizajes y resultados de los alumnos (e.g., Nye et al., 2004). El conocimiento del profesor de matemáticas puede ser considerado bajo múltiples perspectivas y conceptualizaciones. Una de esas conceptualizaciones se refiere al Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo *et al.*, 2018), adoptada en este estudio. En relación al conocimiento matemático que requiere un profesor para la resolución de problemas, Foster *et al.* (2014) observaron la necesidad de considerar los procesos matemáticos que los profesores requieren para abordar la resolución de problemas en sus aulas, proponiendo lo que llaman el conocimiento de los procesos matemáticos y el conocimiento de procesos pedagógicos, asimismo hacen notar la necesidad de establecer categorías que comprendan el conocimiento del profesor para guiar a sus estudiantes en ese proceso, lo que involucra también que los profesores sepan cómo enfrentarse a problemas.

En este trabajo nos focalizamos en estudiar el conocimiento matemático especializado que despliega y desarrolla un grupo de profesores de matemáticas, en el seno de un curso de formación permanente en una universidad brasileña, para resolver el problema del corral. Para ello, se pide a un grupo de profesores que ejercen en diferentes niveles educativos, que consideren una malla de determinado tamaño y con ella diseñen un corral de modo que se aproveche de la mejor forma el espacio para los animales; luego, se realizan variantes del problema poniendo obstáculos en el terreno. Este problema, al ser abierto, brinda oportunidades de múltiples propuestas de corral, para lo cual queremos observar qué conocimientos despliegan y desarrollan profesores de matemática en la resolución de este problema. Así, la pregunta de investigación que buscamos responder es: ¿Qué conocimiento especializado movilizan los profesores de matemática al resolver un problema abierto que involucra la maximización del área?

REFERENTES TEÓRICOS

El primer eje en esta investigación está formado por los referentes del conocimiento del profesor. A partir de las ideas de la centralidad del conocimiento del profesor –conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido– como elementos fundamentales para la práctica profesional han emergido varias conceptualizaciones del conocimiento del profesor, entre ellas la que se refiere al Mathematics Teachers Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo *et al.*, 2018). El modelo MTSK (figura 1) considera dos grandes ejes del conocimiento de la materia (SMK), concretado en este caso en el Mathematics Knowledge (MK), y el Pedagogical Content Knowledge (PCK). Por el contexto y objetivo del presente trabajo discutimos solamente los subdominios al respecto del conocimiento matemático (MK), del cual se propusieron tres subdominios, que pretenden abarcar las diferentes naturalezas que este conocimiento puede adoptar en el razonamiento de un profesor: Knowledge of Topics (KoT); Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM); Knowledge of the Practice of Mathematics (KPM).

El Knowledge of Topics (KoT) describe qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce el tópico que enseña, lo que implica un conocimiento profundo del contenido matemático (por ejemplo, conceptos, procedimientos, hechos, reglas y teoremas) y de sus significados (Carrillo *et al.*, 2018). Es un subdominio que "reúne el conocimiento de procedimientos, definiciones y propiedades, representaciones y modelos, así como, contextos, problemas y significados, y en esta medida, reconoce la complejidad de los objetos matemáticos que pueden surgir en el aula" (p. 8). Por ejemplo, forma parte del KoT conocer el tópico de área de figuras planas, para lo cual debe conocer cómo calcular el área de diferentes figuras geométricas, simples o compuestas, y conocer su uso y aplicaciones en situaciones específicas.

El Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) se refiere al conocimiento del profesor respecto a las relaciones y conexiones entre los conceptos matemáticos que se consideran integrados en una red de relaciones y conexiones. En este subdominio tienen especial relevancia dos elementos, las conexiones (Gamboa y Figueiras, 2014), y los conceptos matemáticos transversales a la matemática escolar –que pueden ser entendidos como las grandes ideas– como el infinito, que condicionan la cognición de multitud de conceptos. En el contexto del problema que discutimos acá, forma parte de este subdominio conocer las relaciones y conexiones entre las áreas de diferentes figuras geométricas, lo que puede incluir la discusión de conceptos transversales, como el perímetro y la noción del número Pi.

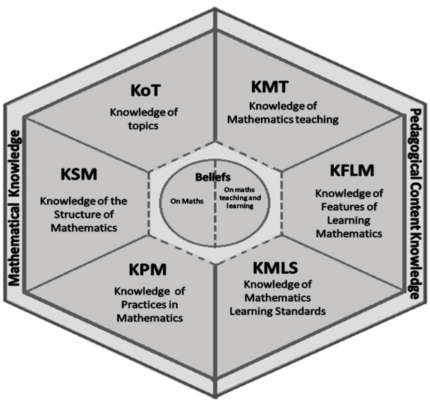


Figura 1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK (Carrillo *et al.*, 2018, p. 6)

El Knowledge of the Practice of Mathematics (KPM) incorpora el "saber hacer" en matemáticas, es decir, el conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas. Por ejemplo, las reglas de argumentación en matemáticas, distintas formas de demostrar, heurísticos en resolución de problemas, o las propiedades que ha de poseer una definición que se refieren a los elementos sintácticos del conocimiento matemático. El conocimiento del profesor de matemáticas sobre su práctica incluye conocer respecto de demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el rol de los contraejemplos (Carrillo *et al*., 2018). Con relación al foco que tenemos, se integra en este subdominio un conocimiento relativo a conocer diferentes estrategias para abordar un problema que involucra el tópico de áreas y saber argumentar el porqué de los pasos involucrados en su resolución, como también, establecer deducciones y conjeturas.

En el núcleo de la conceptualización de conocimiento profesional podemos encontrar las *creencias (beliefs)*, tanto acerca de las matemáticas, como de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El segundo eje en esta investigación es la resolución de problemas. Adoptamos la noción de problema de Carrillo (1997):

> ... el concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la conciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento (p. 101).

En nuestro estudio, utilizamos el problema del corral para cuya resolución se pueden tomar diversos caminos, ya que se requiere diseñar situaciones, resolverlas, y tomar una decisión para responderlo. La dificultad asociada a este tipo de problemas, se relaciona fundamentalmente con la habitual imposición de soluciones por parte de los profesores a sus alumnos (aquellas con que se sienten más cómodos, e.g., Borromeo-Ferri y Blum (2009)), ya que frecuentemente su propio conjunto de soluciones para ese problema tiene un solo elemento, lo que torna difícil interpretar distintas resoluciones que puedan surgir durante el proceso (e.g. Mellone *et al*., 2020). En ese sentido se torna esencial una discusión de múltiples soluciones y recorridos hechos a lo largo de un proceso (Kilpatrick, 2016), y no solo poner el foco en el resultado final, ya que el alentar la generación de múltiples soluciones, recorridos, estrategias, caminos o representaciones permite también, entre otros, atender las preferencias individuales de los estudiantes y discutir, comparando diferentes soluciones (e.g., Blum, 2012) o diferentes estrategias de resolución para un problema con una sola solución.

La actividad de desarrollar un problema con estas características promueve un elevado nivel de interacción entre los participantes para su resolución, en el cual el profesor tiene el desafío de construir una red de posibilidades, de modo que el alumno pueda explorar, recorrer y experimentar (Silva, 2000). Sin embargo, el profesor también tiene la responsabilidad de poseer un conocimiento que le permita atribuir sentido y significado a las posibles respuestas de los alumnos, a pesar de que éstas estén fuera de su propio espacio de soluciones (Ribeiro *et al.*, 2016). Cuando el profesor adopta en sus clases problemas abiertos que involucran indagación y reflexión, puede sentir incomodidad, desasosiego e inseguridad (Charalampous y Rowland, 2013). Dicha incomodidad se encuentra asociada a que la resolución de un problema abierto puede dar paso a la aparición de diversos tópicos, de situaciones de improvisación y de momentos de contingencia (e.g., Ribeiro *et al.*, 2009). De la misma forma, el estudiante frente a problemas abiertos tiene la oportunidad de tomar un papel activo en el que debe desarrollar y movilizar nuevas capacidades, habilidades y conocimientos, una aproximación al desarrollo de conocimiento muy distinta de lo que ocurre en la denominada enseñanza tradicional transmisiva. Ambos, estudiante y profesor, se encuentran en un ambiente de múltiples posibilidades de resolución, de errores y respuestas alternativas, provocando momentos de contingencia. Por este motivo, es esencial que el profesor posea un conocimiento matemático especializado, en todos sus subdominios, de modo que esté en condiciones de poder interpretar y atribuir sentido a las resoluciones y comentarios de los alumnos, teniendo por base esa interpretación, desarrollar una práctica de enseñanza que contribuya al desarrollo sostenible del conocimiento matemático de los alumnos.

ANTECEDENTES

Investigaciones sobre el conocimiento del profesor y la resolución de problemas sugieren que existe una relación entre el conocimiento de los profesores y la manera de enseñar a los estudiantes a resolver problemas. Carpenter *et al.* (1998) estudiaron el conocimiento de profesores de matemática en relación a las soluciones de sus propios estudiantes sobre problemas de adición y sustracción. Este estudio concluye que el conocimiento del profesor permitiría llevar a cabo en el aula ciertos énfasis y estrategias de resolución de problemas que podrían influir en el aprendizaje de los estudiantes sobre esta materia. Sin embargo, como señala Silver (2016), aspectos como la indagación y reflexión en torno a la resolución de problemas deben ser cultivados desde la formación del profesor de matemáticas para que éstos puedan anticipar caminos de resolución y examinar y evaluar adecuadamente el desarrollo que realizan los estudiantes.

En la óptica del conocimiento especializado del profesor, el trabajo de Escudero-Ávila *et al.* (2015), por medio de la resolución del "problema de las cuerdas", estudió las potencialidades de la resolución de problemas en la movilización del conocimiento especializado en un grupo de profesores. Como resultado, el estudio sugiere que por medio de la resolución de ese problema se movilizan las dimensiones del KoT, del KSM, KPM y del KFLM. En el ámbito de la resolución de problemas y el conocimiento del profesor, Foster *et al.* (2014) proponen que el conocimiento del profesor en la resolución de problemas envuelve el conocimiento de procesos como: representar, analizar, interpretar y comunicar.

A partir de la importancia de ofrecer oportunidades de indagación y reflexión en la resolución de problemas, en este trabajo, estudiamos el conocimiento matemático especializado que despliega y desarrolla el profesor frente a un problema abierto en el ámbito de la maximización del área. De esta forma, se tiene el objetivo de identificar componentes del alcance del desarrollo de ese conocimiento. La importancia de estudiar esos componentes radica en las posibilidades de especificar focos de atención que deben ser abordados en la formación y el desarrollo del profesor de matemáticas.

CONTEXTO Y MÉTODO

La investigación se aborda con un enfoque cualitativo de carácter descriptivo e interpretativo. El estudio se llevó a cabo con profesores de matemáticas que participaron de un curso de posgrado enfocado en el desarrollo del conocimiento matemático especializado del profesor y del investigador, en una universidad brasileña. El curso se desarrolló durante 15 semanas de clases (60 hrs), con 4 horas semanales divididas en dos sesiones. En el curso se introdujo a los participantes en elementos teóricos y prácticos en torno a la caracterización del conocimiento especializado según el MTSK y en procesos de hacer investigación con foco en observar y desarrollar el conocimiento especializado del profesor. Al final de la asignatura los participantes debían planificar una tarea y ponerla en práctica en una clase de la asignatura, de modo que se discutiera el rol del conocimiento especializado en dicha práctica y las dimensiones de la investigación que se tendrían que considerar para desarrollar una investigación basada en dicha tarea y práctica.

Este estudio se centró en el análisis de una de esas tareas, preparada e implementada por la primera autora de este trabajo en dos sesiones, en las que se desarrolló el problema del corral y sus variantes para desarrollo grupal. En la primera sesión se presentó a la clase el problema cuyo enunciado no indujera directamente el procedimiento de resolución. El problema presentado fue el siguiente:

Considere que usted quiere hacer un corral para sus animales, y tiene una malla de alambre de 80 metros de largo. Si desea que sus animales tengan el mayor espacio posible para andar, ¿cuál es la forma que debe poseer el corral cercado con la malla y por qué? (Registren todos los pasos de razonamiento que efectuaren y justifiquen la respuesta que presentan).

En la segunda sesión se introdujeron variantes al problema de modo que los participantes diseñaran diversos casos que pudiesen responder a esta situación. Se dijo a los profesores participantes que pensaran en nuevos diseños de corral de área máxima, considerando que el terreno tenía “obstáculos”, por ejemplo, podía haber un cerco, una casa o muro en el terreno, que pudiese ser aprovechado para construir el corral. El propósito de introducir este tipo de problema y sus variantes fue el de hacer emerger el conocimiento especializado del profesor involucrado en la resolución de problemas no típicos teniendo como punto de partida algo que ellos ya conocían.

En el estudio participaron siete profesores que formaron dos grupos de trabajo conformados por afinidad propia. Todos los participantes eran profesores de matemáticas titulados, que se encontraban realizando estudios de posgrado o que eran candidatos a ingresar al posgrado y que tenían experiencia como profesores de matemáticas en diferentes niveles educativos. Un grupo estaba compuesto por quienes ejercían también en la universidad y el otro grupo por los que ejercían en enseñanza primaria y secundaria.[4] Hay que notar que no se busca comparar los grupos, pero sí comprender mejor sus semejanzas y diferencias.

La recolección de datos incluyó grabaciones de audio de cada uno de los dos grupos y los registros de sus producciones, y grabaciones de audio y video de la clase en pleno (con foco en lo que se discutía en la pizarra), como también fotos del desarrollo colectivo producido en la pizarra en la última sesión.

Inicialmente los profesores discutieron y resolvieron el problema en el seno de los grupos. Posteriormente, en una actividad colectiva, expusieron sus

[4] Observamos que en Brasil, los profesores de matemáticas se instruyen para dar clases de 6to a 9no año de primaria y de 1ro a 3ro de enseñanza secundaria (alumnos de 11 a 17 años).

procedimientos, razonamientos y resultados en la clase en pleno, formulando sus conjeturas y fundamentando sus respuestas, siendo éste un espacio de discusión para complementar las diferentes construcciones de las respuestas. Así, con respecto al primer problema planteado, describimos los caminos de resolución de ambos grupos por separado. Ya en la segunda situación el foco fue en el trabajo colectivo, donde se generó una discusión más amplia sobre diferentes casos de terrenos con muros en los cuales se diseñó un corral.

Con relación al análisis efectuado, se hizo inicialmente un análisis por cada sesión (problema original y problema con variantes) y por cada grupo, ya que los grupos tenían elementos con especificidades distintas, profesores que ejercían en la universidad (Grupo 1) y profesores que impartían clases en primaria y secundaria (Grupo 2). Eso permitió obtener un conjunto de categorías asociadas a algunas especificidades de dichos grupos. De modo práctico, observamos niveles del conocimiento matemático que despliegan los profesores al enfrentarse al problema, intentando interpretarlos conforme al dominio del MK del MTSK.

Tabla 1: Categorías del dominio MK del MTSK (basado en Carrillo *et al.*, 2018).

Subdominio	Categoría
KoT	Procedimientos (¿Cómo hacer algo?; ¿Cuándo hacer algo?; ¿Por qué se hace algo de esta manera?; Características del resultado). Definiciones, propiedades y fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
KSM	Conexiones basadas en simplificación Conexiones basadas en complexidad incrementada Conexiones auxiliares Conexiones transversales

Para el análisis de datos, nos centramos en observar componentes del conocimiento matemático del profesor que fueron emergiendo desde los datos, tomando en cuenta las categorías del modelo MTSK indicadas en Carrillo *et al.* (2018) (tabla 1). Las categorías del subdominio KPM se encuentran actualmente en desarrollo y este trabajo busca contribuir para ese desarrollo.

En el análisis, similarmente al utilizado por Zakaryan y Ribeiro (2017), usaremos códigos que relacionen un conocimiento asociado a un determinado subdominio y categoría. Por ejemplo, KoT-P corresponde a un indicador de conocimientos del subdominio KoT y de la categoría Procedimientos y KSM-CA, corresponde a un indicador de conocimiento del subdominio KSM y de la categoría Conexiones Auxiliares. Hay que notar que esos indicadores van a estar numerados, pero esa numeración es solo indicativa del orden en que aparecen en el análisis, sirviendo para que sea posible su diferenciación y no indica una prioridad de un indicador sobre otro. En el caso de KPM, proponemos algunas categorías que surgieron desde los mismos datos.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Seguimos un orden cronológico en el análisis, empezando por un foco en el conocimiento de los profesores cuando se enfrentan al primer problema (problema original del corral) y, después, en el conocimiento que se ha movilizado en la discusión grupal de las distintas variantes del problema.

Resultados del problema original

En esta sección presentamos y discutimos las soluciones de los dos grupos de trabajo por separado y el camino que siguieron en la búsqueda de sus soluciones.

Producciones Grupo 1

El Grupo 1 fue constituido por tres profesores que ejercen mayoritariamente en la educación superior. El grupo comenzó considerando un modelo rectangular de corral (ver figura 2), del cual conocía su perímetro (80 metros) y calculó su área en función de los lados (KoT-P1: conocen cómo determinar el área de un cuadrado cuando se tiene su perímetro). Seguidamente, maximizó dicha área usando la noción de vértice de una función cuadrática (KoT-P2: conocen la forma de determinar el máximo de una función cuadrática). Posteriormente, los profesores resolvieron el problema usando herramientas matemáticas propias de la enseñanza superior. El grupo empleó la primera derivada de la función para encontrar los puntos críticos y el criterio de la segunda derivada para determinar su concavidad, como se muestra en la figura 3 y, de este modo maximizar el área (KoT-P3: conocen cómo maximizar el área de una función usando la derivada).

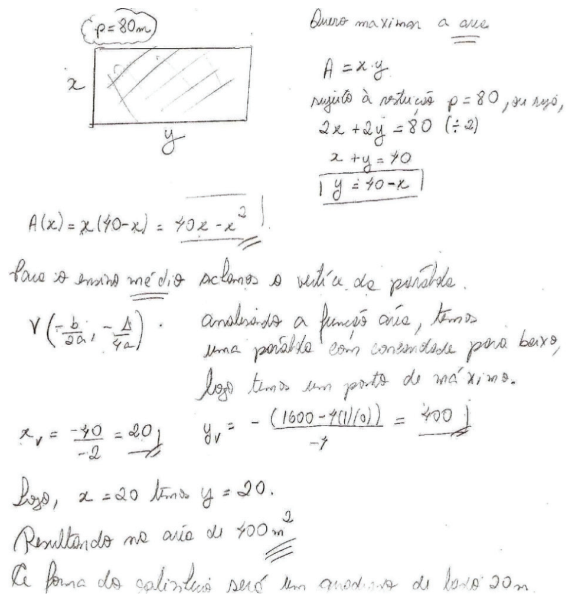
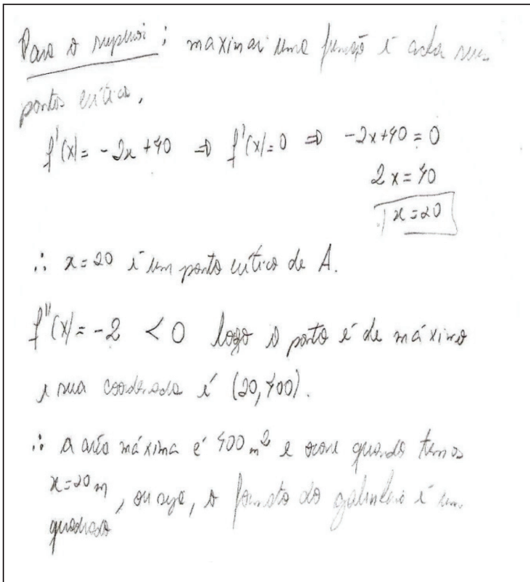
	Quiero maximizar el área $A = x \cdot y$ Con la restricción p=80, o sea, $2x + 2y = 80 \quad (\div 2)$ $x + y = 40$ $y = 40 - x$ $A(x) = x(40 - x) = 40x - x^2$ Para la enseñanza media encontramos el vértice de la parábola $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Analizando la función área, tenemos una parábola con concavidad hacia abajo, entonces tenemos un punto máximo. $x_V = \frac{-40}{-2} = 20$ $y_V = \frac{-(1600 - 4(1)(0))}{-4} = 400$ Luego, x=20 y tenemos que y=20. Resultando un área de 400m^2. La forma del corral será un cuadrado de lado 20m.

Figura 2. Diseño de corral rectangular del Grupo 1 y su resolución para enseñanza secundaria

Observamos que los profesores de este grupo, movilizaron un conocimiento de varios tópicos matemáticos asociado a distintos procedimientos para encontrar la solución del problema, como las nociones de perímetro y área, un sistema de ecuaciones, la función cuadrática, la noción de vértice de la función cuadrática (que ellos erróneamente llamaron de parábola) y la derivada de la función cuadrática usando el criterio de la primera y segunda derivada, hasta obtener el área máxima de 400 metros cuadrados, como se muestra al final de la figura 3. Todos estos conocimientos se enmarcan en el subdominio KoT, pero en distintos tópicos, haciendo uso de un abanico de recursos matemáticos para fundamentar su respuesta, lo que torna evidente también la potencialidad del problema para discutir distintos focos matemáticos para su resolución, ya que cada una de ellas tiene asociada y, podrá implicar distintos abordajes pedagógicos. Al finalizar la resolución, se generó un ambiente de sospecha sobre el procedimiento empleado, y después de releer la pregunta, observaron que el problema tiene naturaleza abierta y no necesariamente se refería a un corral de diseño rectangular, como aquel típico problema de maximización de área de un curso de cálculo que ellos conocían. En este momento, los miembros del grupo pensaron en otras formas del corral y llegaron a considerar un diseño de corral circular.



Para la [enseñanza] superior: maximizar una función es encontrar sus puntos críticos.

$$f'(x) = -2x + 40 \Rightarrow \text{[hacemos]}\ f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$-2x + 40 = 0$$
$$2x = 40$$
$$x = 20$$

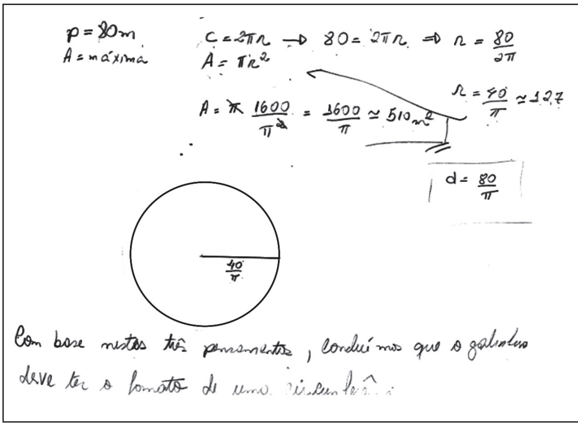
Luego, $x=20$ es un punto crítico de A.

$f''(x) = -2 < 0$ luego el punto es un máximo y su coordenada es (20, 400).

Luego, el área máxima es de 400 metros cuadrados, y ocurre cuando tenemos $x=20$ m, o sea, la forma del corral es un cuadrado.

Figura 3. Diseño de corral rectangular del Grupo 1 y su resolución para enseñanza superior

El grupo consideró entonces un modelo de corral circular, para lo cual aplicó la noción de perímetro y área de una circunferencia (KoT-P4: conocer cómo determinar el área de una circunferencia sabiendo su perímetro), lo que le permitió calcular el radio obteniendo un área de 510 metros cuadrados (ver figura 4). Luego, compararon ambos diseños, el cuadrado/rectangular y el circular, lo que les llevó a concluir que el diseño de corral en forma de círculo tiene un área mayor. Los resultados de este grupo se enmarcan dentro de las situaciones esperadas de resolución y su estilo de resolución está en concordancia con el hecho que ellos son profesores que ejercen mayoritariamente en la enseñanza superior. De ahí, el conocimiento que revelan se encuentra asociado directamente a su contexto de práctica de enseñanza, y se sitúa esencialmente al nivel del KoT que les permite resolver el problema, se puede decir el mismo conocimiento que se requiere a un alumno de enseñanza superior (en Brasil[5]) para resolver el problema.



Con base en estos tres razonamientos, concluimos que el corral para sus animales deberá tener el formato de una circunferencia

Figura 4. Diseño de corral circular del Grupo 1

Producciones del grupo 2

El segundo grupo, compuesto en su mayoría por profesores de educación básica (enseñanza primaria y secundaria en Brasil, alumnos del 6to. al 12vo. nivel de escolaridad), comenzó considerando un modelo de corral rectangular, analizando las áreas de un cuadrado comparativamente con las de un rectángulo (figura 5).

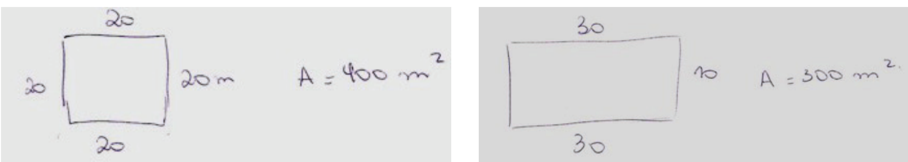


Figura 5. Comparación de áreas de un cuadrado y un rectángulo no cuadrado, Grupo 2.

[5] En otros países este tipo de resolución se espera que sea hecha por alumnos de enseñanza media (en el último año antes de irse a la enseñanza superior).

La primera advertencia de los profesores es que el área de un cuadrado es mayor que la de un rectángulo no cuadrado (KoT-P5: conocer cómo determinar el área de un rectángulo sabiendo su perímetro), lo que les llevó a la observación de que la figura, para que tenga un área mayor, "tiene que ser regular" como se muestra en la segunda línea de la figura 6, siendo esta una conjetura que el grupo planteó (KPM-C1: conocer cómo elaborar conjeturas a partir de procedimientos previamente realizados: observar que el área de figuras regulares es mayor que de figuras no regulares).

Conjecture : É um círculo! Lema 1: A figura tem que ser regular	Conjetura: ¡Es un círculo! Lema 1: la figura tiene que ser regular

Figura 6. Conjetura modelo de corral circular, Grupo 2.

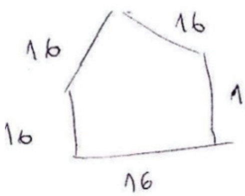


Imagen 1: Diseño de corral en forma de pentágono

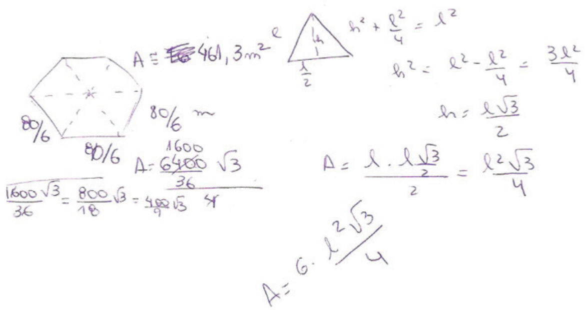


Imagen 1: Diseño de corral en forma de hexágono

$A = \pi r^2 \qquad 2\pi r = 80$

$r = \frac{80}{2\pi}$

$A = \pi \cdot \left(\frac{80}{2\pi}\right)^2 = \frac{\cancel{\pi} \cdot 6400}{4\pi^2} = \frac{6400}{4\pi} = 509{,}29\ m^2$

Imagen 2: Cálculo del área del modelo circular

Figura 7. Resoluciones del Grupo 2.

Después, el grupo analizó la secuencia de polígonos regulares, incrementando el número de lados, hasta llegar al círculo (KPM-C2: conocer la forma de inducir el área de la circunferencia por medio de polígonos regulares, aumentando el número de sus lados). Los profesores fueron observando el incremento del área de algunas de las figuras. La imagen 1 (figura 7) muestra el modelo de un pentágono con lados de longitud 16, que suman 80 metros; la imagen 2 (figura 7) muestra un modelo de corral hexagonal y el cálculo de su área con base en un triángulo equilátero, y la imagen 3 (figura 7) muestra el cálculo de un diseño de corral circular, en el que obtienen un área de 509,29 metros cuadrados. La respuesta final fue dada en la figura 6 (primera línea) en la que los profesores de este grupo indican que el corral con modelo de círculo tiene la mayor área, escribiendo la sencilla expresión “¡Es un círculo!” (primera línea de la figura 6).

Parece evidente que los profesores hallaron una relación entre las áreas de polígonos regulares, con una cantidad de lados cada vez mayor, y el aumento progresivo del área, y así, llegaron a hipotetizar como solución un corral en forma de un círculo de 80 metros de perímetro (longitud), comprobando la situación por medio de sus cálculos (KPM-V1: conocer el proceso de validación de una conjetura). Los profesores de este grupo ejercen principalmente en la enseñanza primaria y secundaria, lo que posiblemente explica el estilo de sus producciones y la matemática involucrada en la resolución ya que éstas forman parte del tipo de razonamiento que se considera que alumnos de esos niveles desarrollen.

Resultados de la variante del problema

La segunda sesión tuvo el objetivo de que los grupos pensaran en nuevos diseños de corral de área máxima considerando que el terreno tenía “obstáculos”, por ejemplo, podía haber un cerco, una casa o muro dentro del terreno que ellos podrían usar para diseñar el corral.

En este apartado mostramos los diferentes diseños de corral que emergieron en la secuencia, discutiendo el conocimiento matemático movilizado. La discusión se hace de forma grupal y tiene origen en las producciones del Grupo 2 (profesores de enseñanza primaria y secundaria), que en medio del desarrollo comparte sus resultados parciales en la pizarra, integrando a toda la clase en la discusión y en el desarrollo de más casos, en una construcción colectiva.

Caso 1. Modelo con un muro

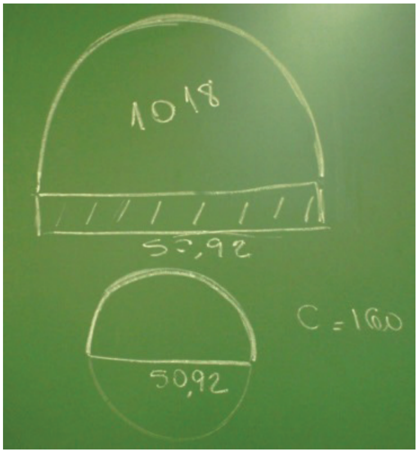


Figura 8. Modelo semicircular de corral con un muro

La idea de obstáculo en el enunciado del problema pasó a ser considerada de manera más general como un muro en el terreno, con lo que, en la puesta en común, todos los profesores consideraron la hipotética presencia de al menos un "muro" limitando el terreno. A partir de la premisa inicial (obtener el área máxima de un corral sin considerar ninguna condición), y basado en el conocimiento desarrollado en la discusión del problema original, el grupo construye un modelo semicircular en que la malla es una semicircunferencia de 80 metros y el muro corresponde al diámetro de ella (figura 8) obteniendo el área máxima (KoT-P6: conocer cómo determinar el área máxima de un semicírculo conociendo la medida de su semiperímetro). Posteriormente, el profesor extiende la pregunta para considerar otros posibles casos de modelos de corral (¿Cuál(es) podría(n) ser otro(s) caso(s)?). De ahí se levanta la idea de integrar otro muro al terreno, lo que lleva a distinguir otro caso.

Caso 2. Modelo con dos muros: el cono de helado

El segundo corral diseñado por el mismo grupo, fue el de dos muros que se juntan en una esquina (se asumió que los muros forman un ángulo de 90 grados). El grupo consideró utilizar una malla de forma semicircular alcanzando los muros, como se muestra en la figura 9, denominando este modelo como el modelo de "helado", por su forma similar a un cono de helado. Con base en conocer la hipotenusa (de 50,92 m), ellos calcularon que los muros debían tener 36 metros cada uno (KoT-P7: conocer cómo determinar los catetos de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo su hipotenusa). Este modelo surgió a partir del modelo construido previamente en el Caso 1, observándose el uso de un diseño en otro más complejo (KPM-D1: deducir soluciones más complejas a partir de soluciones más simples) y haciendo uso de conexiones entre distintos tópicos en una figura compuesta (KSM-AC1: conocer conexiones basadas en complejidad incrementada: conexiones entre nociones del tipo de triángulo y la maximización

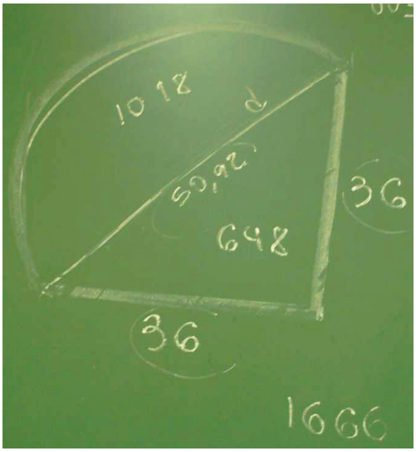


Figura 9. Modelo semicircular con dos muros

de su área, y entre el área máxima del semicírculo conociendo su semiperímetro). Los profesores sumaron las áreas de las figuras compuestas obteniendo un corral de 1.666 metros cuadrados.

Luego, la discusión de la clase toda se enfocó en la existencia (o no) de otros modelos con un área mayor para el caso de un terreno con dos muros. Esa discusión se basó en las preguntas provocativas hechas por el profesor (segundo autor): ¿Qué ocurre si los muros miden más de 36 metros?; ¿Por qué estos tienen que medir 36 metros? Después de algunas consideraciones los resolutores encontraron que aun considerando que los muros fueran más largos (conservando el triángulo rectángulo isósceles), el modelo semicircular de corral seguiría manteniendo esa área, pues el largo de 80 metros de malla define una condición para el área máxima del corral (KPM-D2: conocer cómo deducir que la hipotenusa del triángulo rectángulo define los catetos y su área máxima).

Caso 3. Modelo con dos muros: triangular y cuadrado

Figura 10. Modelo triangular con dos muros

Por otro lado, al considerar muros mayores de 36 metros, se presentó la idea de un modelo triangular con una hipotenusa de 80 metros de malla. En conjunto, los profesores calcularon los catetos, que resultaron ser de 57,15 metros (KoT-P8: conocer cómo determinar el área de un triángulo rectángulo conociendo la medida de su hipotenusa), figura 10, considerando solamente el caso en que los catetos serían iguales sin discutir otras posibilidades de medidas. Luego, calcularon el área de ese triángulo usando el teorema de Pitágoras, lo que les dio 1.600 metros cuadrados. Uno de participantes intervino dibujando sobre el modelo triangular, un diseño de corral cuadrado de 40 metros de lado (los otros dos lados del cuadrado son los muros) para efectuar comparaciones, lo que también les dio un área de 1.600 metros cuadrados. Ante eso, un profesor del Grupo 1 observó que, con estas condiciones de tener dos muros perpendiculares, ambos diseños, el triangular y el cuadrado, tienen la misma área, y concluyó con sorpresa, que estos modelos no superan el área del modelo del “helado” (1.666 metros cuadrados), el cual tiene el área mayor (KPM-C3: saber elaborar conclusiones del problema comparando resultados de áreas máximas de diseños de corral previos).

El MK desplegado y desarrollado por los profesores para resolver el problema en el ámbito de la medida y sus variantes, se encuentra resumido en la tabla 2.

Tabla 2: Conocimiento del profesor para resolver el problema

Subdominio de MK	Categorías	Conocimiento revelado en el desarrollo del problema
KoT	Procedimientos	KoT-P1: conocer cómo determinar el área de un cuadrado cuando se tiene su perímetro
		KoT-P2: conocer la forma de determinar el máximo de una función cuadrática
		KoT-P3: conocer cómo maximizar el área de una función usando su derivada
		KoT-P4: conocer cómo determinar el área de una circunferencia sabiendo su perímetro
		KoT-P5: conocer cómo determinar el área de un rectángulo sabiendo su perímetro
		KoT-P6: conocer cómo determinar el área máxima de un semicírculo conociendo la medida de su semiperímetro
		KoT-P7: conocer cómo determinar los catetos de un triángulo rectángulo isósceles conociendo su hipotenusa
		KoT-P8: conocer cómo determinar el área de un triángulo rectángulo conociendo la medida de su hipotenusa
KSM	Conexiones basadas en complexidad incrementada	KSM-AC1: conocer conexiones basadas en complejidad incrementada: conexiones entre nociones del tipo de triángulo y la maximización de su área, y entre el área máxima del semicírculo conociendo su semiperímetro

KPM	Deducciones	KPM-D1: conocer cómo deducir soluciones más complejas a partir de soluciones más simples
		KPM-D2: saber deducir que la hipotenusa del triángulo rectángulo define los catetos y su área máxima
	Conjeturas	KPM-C1: conocer formas de elaborar conjeturas a partir de procedimientos previamente realizados: observar que el área de figuras regulares es mayor que de figuras no regulares
		KPM-C2: conocer la forma de inducir el área de la circunferencia por medio de polígonos regulares, aumentando el número de lados.
		KPM-C3: conocer cómo elaborar conclusiones del problema (corral de área máxima) comparando los resultados de áreas máximas de diseños de corral previos.
	Validación	KPM-V1: conocer el proceso de validación de una conjetura.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo nos enfocamos en investigar el conocimiento matemático (MK) que desarrolla y despliega un grupo de profesores al enfrentarse al problema del corral y sus variantes. El desarrollo de dicho problema posibilitó a los profesores movilizar conocimientos para efectuar diferentes diseños de corral en base a figuras geométricas simples y compuestas, aplicar diversas nociones matemáticas para calcular las áreas de esas figuras, tocando diversos conceptos matemáticos, caminos de resolución y estableciendo conjeturas, entre esas, la toma de decisión de qué diseño de corral tiene mayor área. Los diversos modelos de corral, no comunes, permitieron el cálculo del área de dsitintas figuras, pasando por diversas nociones matemáticas no secuenciales, tocando diversos niveles del currículo escolar, incluso de las matemáticas de primer año de universidad, propiciando un diálogo entre profesores de diversos niveles educativos de enseñanza.

Los resultados indican que fue desplegado y desarrollado el conocimiento especializado del profesor en el uso de nociones geométricas, aplicando y relacionando de modo activo diversos procedimientos (KoT), efectuando conexiones conceptuales que, al aparecer en conjunto, aumentaron la complejidad de la situación (KSM) y efectuando deducciones y elaborando y validando conjeturas

(KPM), lo que se estima ineludible cuando se tienen diversas posibilidades de solución y se debe establecer una conclusión que responda el problema.

La importancia de estos resultados radica en que cuando un profesor se enfrenta a un problema abierto tiene la oportunidad de reflexionar sobre la práctica de resolver problemas y aprender de ella (Silver, 2016), pues en esa práctica aprende sobre los procedimientos matemáticos requeridos para enfrentarse a problemas y puede movilizar y profundizar diversos subdominios del conocimiento matemático del profesor (Escudero-Ávila *et al*., 2015). Junto con ello, podemos intuir, que esa reflexión y aprendizaje del profesor puede enriquecer la forma de guiar a sus estudiantes en la resolución de problemas (Carpenter *et al*., 1988), particularmente de un problema abierto. Pues en esa actividad, se puede incrementar el conjunto de soluciones que el profesor conoce para dicho problema (Ribeiro *et al*., 2016) y, así, posibilitar la discusión de múltiples caminos de resolución (Kilpatrick, 2016) y la comparación de diversas soluciones (e.g., Blum, 2012), como las que han emergido en el desarrollo de este problema.

En este trabajo aparecieron, también características transversales, que no forman parte de la caracterización del MTSK, que pueden ser movilizadas por medio de un problema abierto, como por ejemplo la creatividad, ya que los profesores tuvieron que crear diversos modelos de corral, no impuestos en el enunciado. La creatividad no fue el foco de nuestro estudio, pero se asoma como una arista a movilizar en el trabajo con problemas abiertos.

A partir de los resultados, y para poder contribuir a una mejora de la práctica del profesor, se hace necesario que la formación de profesores incorpore situaciones abiertas, que permitan resoluciones por diversos caminos, tanto en la formación inicial como continua, asegurando así una formación rica y dando oportunidades de diálogo y discusión que movilicen conocimientos matemáticos en profundidad. Es decir, que se promuevan desarrollos en relación al uso directo del conocimiento, a la aplicación de diversas nociones, a relaciones múltiples entre los conceptos, y que se motive la realización de deducciones y conjeturas, para así promover el desarrollo y discusión de nuevas nociones matemáticas a partir del problema.

La identificación de los indicadores de conocimiento movilizado en la resolución de este problema abierto, nos permite pensar en un conjunto de preguntas que hemos de tener en cuenta en una formación de profesores que busca desarrollar ese conocimiento especializado del profesor. El hecho de considerar la formación, la investigación y la práctica matemática del profesor como algo efectivamente indisociable, siempre y cuando deseemos contribuir a la mejora de las aprendizajes de los alumnos para la mejora de la calidad de la práctica matemática del profesor, algunas preguntas en términos de la investigación se quedan en abierto, como, por ejemplo: (1) ¿Cuál es el rol del KPM en la práctica del profesor al interpretar producciones alternativas o con errores y al proveer un *feedback* constructivo que tenga como punto de partida el razonamiento de esos alumnos? y (2) ¿Cuáles son los elementos críticos en las tareas para la formación de profesores que promueven discusiones fructíferas para el desarrollo del MTSK del profesor?

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389−407.

Blum, W. (2012). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73−98). Springer.

Borromeo Ferri, R. y Blum, W. (2009). Insight into Teachers' Unconscious Behaviour in Modeling Contexts. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 423-432). Springer.

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P. y Carey, D. (1988). Teachers' Pedagogical content knowlodge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401.

Carrillo, J. (1997). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Universidad de Huelva, Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. Á. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20(3)*, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalampous, E. y Rowland, T. (2013). Mathematics security and the individual. En C. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (8.a ed., pp. 1299-1308). ERME.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-77. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Felmer, P., y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean Secondary Mathematics Teachers as Problem Solvers. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 287-308). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_17

Foster, C., Wake, G., y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. *Proceeding of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, 3*.

Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: Propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344).

Jakobsen, A., Ribeiro, M. y Mellone, M., (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordisk Studies in Mathematics Education*, *19*, 135-150.

Kilpatrick, J. (2016). Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry. En P. Felmer, E. Pehkonen, J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems*, 69-81.

Masingila, J. O., Olanoff, D. y Kimani, P. M. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: Knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 429-450. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9389-8

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares: 7mo básico a 2do medio*. Ministerio de Educación, Chile. https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, *22*(2), 154-167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics–National Council of Teacher of Mathematics*.

NCTM (2020). Standards for the Preparation of Secondary Mathematics Teachers. Recuperado de https://www.nctm.org

Nye, B., Konstantopoulos, S. y Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, pp. 237–257. https://doi.org/10.3102/01623737026003237

Ribeiro, M., Carrillo., J. y Monteiro, R. (2009). Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. y Arzarello, F. (Eds), Proceedings of *CERME6*, 2009. p. 2030–2039.

Ribeiro, M., Mellone, M. y Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. *For the Learning of Mathematics*, *36*(2), 8–13.

Silva, M. (2000). *Sala de aula interativa*. Quartet.

Silver, E. A. (2016). Mathematical Problem Solving and Teacher Professional Learning: The Case of a Modified PISA Mathematics Task. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 345-360). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_20

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: Una ejemplificación de relaciones. *Zetetike*, *24*(3), 301-321. https://doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Autor de correspondencia

Jeannette Galleguillos

Dirección: Facultad de Ciencias, Universidad de Valparaíso,
Gran Bretaña 1091, Valparaíso, Chile.
jeannette.galleguillos@gmail.com