Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Níveis de pensamento geométrico: em busca de uma relação entre distintos modelos teóricos

André Pereira da Costa
Universidade Federal do Oeste da Bahia
Barreiras, BA — Brasil
andre.pcosta@outlook.com
0000-0003-0303-8656

2238-0345

10.37001/ripem.v12i4.3228

Recebido • 02/08/2022
Aprovado • 22/09/2022
Publicado • 07/10/2022

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Realizar a caracterização do pensamento geométrico não é uma tarefa simples, visto que não há um consenso na literatura acerca dos atributos que compõem essa forma de pensar. Isso pode ser constatado a partir da existência de modelos teóricos diversos. Tais modelos foram elaborados considerando toda a complexidade da realidade educacional na qual foram inseridos. Mesmo diante dessas condições, alguns desses modelos teóricos podem apresentar implicações, sobretudo no que diz respeito às suas bases epistemológicas. Para tanto, neste ensaio, compreendemos as relações estabelecidas entre distintos modelos de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse debate é necessário para que os professores e as professoras que ensinam Matemática tenham uma escolha mais tranquila e coerente do modelo que mais se aproxima da sua realidade escolar.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico. Modelos de Níveis. Relação. Bases Epistemológicas.

Levels of geometric thinking: in search of a relationship between different theoretical models

Abstract: Carrying out the characterization of geometric thinking is not a simple task, since there is no consensus in the literature about the attributes that make up this way of thinking. This can be seen from the existence of different theoretical models. Such models were elaborated considering all the complexity of the educational reality in which they were inserted. Even under these conditions, some of these theoretical models may have implications, especially with regard to their epistemological bases. Therefore, in this essay, we understand the relationships established between different models of development levels of geometric thinking. This debate is necessary for teachers who teach Mathematics to have a more peaceful and coherent choice of the model that is closest to their school reality.

Keywords*:* Geometric Thinking. Level Models. Relationship. Epistemological Bases.

Niveles de pensamiento geométrico: en busca de una relación entre diferentes modelos teóricos

Resumen: Llevar a cabo la caracterización del pensamiento geométrico no es una tarea sencilla, ya que no existe un consenso en la literatura acerca de los atributos que componen esta forma de pensar. Esto puede verse en la existencia de diferentes modelos teóricos. Tales modelos fueron elaborados considerando toda la complejidad de la realidad educativa en la que estaban insertos. Incluso en estas condiciones, algunos de estos modelos teóricos pueden tener implicaciones, especialmente en lo que respecta a sus bases epistemológicas. Por tanto, en este ensayo, comprendemos las relaciones que se establecen entre diferentes modelos de niveles de desarrollo del pensamiento geométrico. Este debate es necesario para que los docentes que

enseñan Matemáticas tengan una elección más pacífica y coherente del modelo más cercano a su realidad escolar.

Palabras clave: Pensamiento Geométrico. Modelos de Nivel. Relación. Bases Epistemológicas.

1 Iniciando a busca[1]

Parece existir um consenso entre as investigações em Educação Matemática no Brasil e no exterior de que o pensamento geométrico deve ser o foco do ensino e da aprendizagem em Geometria na Educação Básica. Isso pode ser verificado no crescimento das pesquisas realizadas sobre o tema (Campos, 2017; Santos & Oliveira, 2018; Ursulasari *et al*, 2019; Chicote & Deixa, 2020; Hendriyanto, Kusmayadi & Fitriana, 2021; entre outras), bem como na inclusão dessa temática em diversos documentos oficiais de orientação curricular (Brasil, 2018; Pernambuco, 2019; Bahia, 2020, entre outros). Com esse reconhecimento, faz-se necessário compreender como se caracteriza tal forma de pensamento matemático, para que, por exemplo, nos cursos de formação de professores e de professoras que ensinam Matemática, sejam realizadas reflexões sobre análise e produção de materiais e recursos didáticos, organização e execução de intervenções pedagógicas, uso de tecnologias digitais, etc., que considerem e promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Contudo, compreender essa caracterização tem sido uma tarefa cheia de contradições, visto que não há uma unanimidade entre os pesquisadores e as pesquisadoras acerca das características que compõem o pensamento geométrico dos estudantes e das estudantes da escola básica. Isso pode ser constatado se lançarmos nosso olhar para a literatura da área, por meio da qual é possível encontramos diversos modelos teóricos relativos ao pensamento geométrico (Van-Hiele, 1957; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Garrido, 2005; Parzysz, 2006; Marchand, 2009; Pereira da Costa, 2019) que buscam entender o funcionamento cognitivo em Geometria.

Estes modelos teóricos foram elaborados considerando toda a complexidade do contexto no qual foram inseridos, tais como a realidade curricular e educacional, os fatores políticos e sociais, o projeto de nação a ser proposto, entre outros. Essas são variáveis que podem influenciar nas características do pensamento geométrico a serem exploradas na escola básica de um país. Logo, optar por um deles para compreender uma situação diferente da qual foi concebida nem sempre tem sido uma escolha adequada e coerente.

Mesmo diante dessa divergência contextual, alguns desses modelos teóricos podem apresentar algumas implicações, sobretudo acerca das bases epistemológicas utilizadas para suas concepções. Para tanto, neste ensaio, pretende-se entender as relações estabelecidas entre distintos modelos de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa reflexão torna-se importante para que os professores e as professoras que ensinam Matemática tenham uma escolha mais tranquila e coerente do modelo que mais se aproxima da sua realidade escolar.

Assim sendo, apresentamos a seguir cada um dos modelos teóricos e, posteriormente, estabelecemos implicações (com aproximações e distanciamentos) entre eles, buscando alcançar o objetivo da pesquisa.

2 O modelo de Van-Hiele (1957)

Pierre Marie Van-Hiele (1957), em sua tese de doutoramento intitulada *De Problematiek*

[1] Este ensaio é um recorte da tese de doutorado do autor defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC) da Universidade Federal de Pernambuco. Contudo, ampliações foram realizadas e materializadas nesta versão e que não se encontram no texto original.

van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof[2], enfatiza que pensar geometricamente é um modo específico de refletir em Matemática. Para isso, ele exibe uma análise do *inzicht*[3] na área da Didática da Geometria.

Para o autor, um aluno tem *inzicht* em certa área da Geometria quando consegue inferir sobre um cenário desconhecido, por meio de informações e conexões geométricas disponibilizadas. Nessa direção, segundo Van-Hiele (1957), o *inzicht* é identificado na ocasião em que a criança realiza ações adequadas e propositais diante a um novo cenário.

Conforme Van-Hiele (1957), para que o *inzicht* ocorra na sala de aula é necessário que o docente elabore situações didáticas adequadas para esse fim. Como o *inzicht* decorre a partir das referências fornecidas pelo professor, produto da estruturação do saber em jogo, deve ser estabelecido um vínculo de confiança e de respeito mútuo entre docente e discente. Assim, com base nas produções dos estudantes, sujeitos autônomos por excelência, o professor é o orientador e mediador das suas aprendizagens. Ao destacar a importância de que a aprendizagem deve ser um processo autônomo, Van-Hiele (1957) considera que nesse processo o *inzicht* propaga-se a partir da ação de intenções racionais, que alteram o arranjo estrutural e material da ação, originando, assim, a aprendizagem.

Van-Hiele (1957) deixa explícito que para se alcançar um *inzicht* em situação de aprendizagem é necessário que o aluno desenvolva a compreensão de conceito matemático. Nessa direção, com relação à formação do *inzicht,* o autor indica a decorrência desse processo em quatro grandes momentos ou etapas. Em um primeiro momento, a criança atua de modo completamente desorientado na área perceptiva e, em seguida, passa a ilustrar espontaneamente a situação delimitada. Em uma segunda etapa, o aluno foca sua concentração na solução do problema. Na terceira fase, a partir das impressões do primeiro momento, uma nova estrutura da área perceptiva é formada e, nesse momento, o *inzicht* é concebido. No quarto momento, considerando o entendimento elaborado nos cenários produzidos com mudança das informações iniciais, a criança realiza a validação das estratégias criadas por meio de vários testes.

Reconhecendo a importância do *inzicht* para a aprendizagem, o autor destaca a necessidade de se analisar a sistematização do ensino da Matemática, isto é, esse processo deve ser elaborado de forma a propiciar o desenvolvimento do *inzicht* pelos estudantes nas diversas situações da sala de aula.

Para o autor, por meio de atividades que desequilibram no sentido piagetiano, os estudantes percebem que o seu mundo (das suas vivências) é a origem do mundo matemático, criando novas estruturas em seu pensamento e alcançando um patamar mais elaborado do pensar em Matemática. Assim, tendo por base a Epistemologia Genética de Piaget, sobretudo, os estágios do desenvolvimento da inteligência, Van-Hiele (1957) percebeu a existência de diferentes níveis de compreensão dos conceitos em Geometria introduzindo o conceito de "níveis de pensamento" na Educação Matemática.

De acordo com o autor, há duas questões a serem consideradas que tornam os níveis de pensamento um conceito de grande relevância para a prática docente, mais especificamente a elaboração dos cenários de aprendizagem. A primeira está relacionada à natureza do *inzicht,* que consiste em uma estrutura mental nova; e a segunda refere-se à organização mental, isto é, um estudante atuando no nível inicial de pensamento não compreende o ensino de determinado

[2] Um problema do *inzicht*: uma conexão com o *inzicht* dos estudantes na aprendizagem da Geometria.

[3] Para evitar incompreensões com a tradução para o português, decidimos por utilizar o termo original — inzicht —, escrito em holandês na tese de Van-Hiele.

conceito voltado para níveis mais avançados. A efetivação dos níveis é uma prova de que o ensino é adequado e a aprendizagem permanente. Isso não ocorre se o docente não compreender a complexidade enfrentada pelos alunos: por exemplo, evitando as falhas, desconsiderando os atos indispensáveis para o alcance de um nível mais elaborado.

Van-Hiele (1957) também destaca que um certo conceito geométrico é compreendido pelos estudantes, passando a ser utilizado para a solução de um problema quando estiverem convencidos do seu significado. Então, pensar geometricamente é também uma forma de elaborar significado à Geometria. O autor ainda ressalta a importância da linguagem na construção de conhecimento em Matemática, cujo papel não se reduz ao ato de comunicar, mas de possibilitar que os alunos desenvolvam o pensamento autônomo. Para o pesquisador, a linguagem favorece a criação de estruturas do pensamento.

Considerando a aprendizagem em Geometria como um processo dedutivo, Van-Hiele organizou a evolução do pensamento geométrico conforme cinco níveis hierárquicos. Desse modo, conforme o autor, ao mesmo tempo em que os alunos aprendem Geometria, eles progridem em seu pensamento geométrico por meio de uma sequência lógica de níveis de aprendizagem de conceitos geométricos, a partir da qual cada nível apresenta características próprias, definidas por uma relação entre a linguagem e os objetos matemáticos.

Conforme o autor, o primeiro nível é marcado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir do aspecto global; o segundo é caracterizado pela identificação desarticulada das propriedades dessas figuras; o terceiro é composto pela realização de inclusão de classe; o quarto compreende os processos dedutivos da Geometria Euclidiana com demonstrações e provas; por fim, no quinto ocorre a comparação entre várias axiomáticas, como, por exemplo, entre as Geometrias Não Euclidianas.

O progresso por meio dos níveis depende mais da instrução recebida anteriormente do que da idade ou maturidade biológica do aluno. Dessa forma, o professor desempenha uma função relevante nesse processo, ou seja, é o professor que organiza as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, as quais deverão promover o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno. Para tanto, em uma dada situação didática, torna-se necessário que o estudante, o docente e o conhecimento matemático (explorado, por exemplo, no livro didático) estejam no mesmo nível. Apesar de os estudantes avançarem nos níveis, segundo uma sequência hierárquica, há casos em que parte deles não alcança os mesmos níveis. Nesse sentido, podemos encontrar em nossas salas de aula, estudantes em diferentes níveis de pensamento geométrico.

Considerando as discussões de Van-Hiele (1957), podemos considerar que o pensamento geométrico é a capacidade de reconhecer uma figura geométrica por meio da aparência física, de analisar essa figura em termos de suas propriedades, ordenar logicamente as propriedades de figuras e perceber as relações entre essas propriedades e entre diferentes figuras, apreciar o papel da dedução e observar o funcionamento de teoremas dedutivamente, e estabelecer teoremas em diferentes sistemas axiomáticos.

Isso não significa que o aluno só desenvolve o pensamento geométrico quando chega ao último nível (marcado pela análise de diferentes geometrias), mas já no primeiro nível, pois ele já tem algum tipo de pensamento geométrico (caracterizado pela identificação das figuras geométricas a partir do aspecto global).

3 O modelo de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar uma maneira alternativa de analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico propostos por Van-Hiele, a partir da apreciação das respostas de estudantes e futuros professores dos anos iniciais, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) verificaram que os participantes do estudo atuaram em diferentes níveis ao mesmo tempo em alguns dos casos. Esse fenômeno ocorre porque, conforme os autores, os alunos aplicam procedimentos associados a mais de um nível de Van-Hiele. Logo, os alunos apresentam diferentes graus de aquisição dos níveis dessa forma de pensar em Geometria.

Além disso, os investigadores sinalizam que a habilidade matemática de argumentar em atividades relacionadas à geometria tridimensional favorece a passagem entre os níveis por esses estudantes. Com o modelo alternativo, o foco dos autores é a identificação de estudantes que estão em transição entre os níveis de Van-Hiele.

O estudo desses autores foi desenvolvido em Valência, Espanha, com 09 estudantes da oitava série da escola primária (que corresponde ao nono ano do ensino fundamental brasileiro) e de 41 futuros professores primários (que equivalem aos estudantes de Pedagogia no Brasil), os quais responderam cinco atividades sobre geometria tridimensional. Na proposta, os pesquisadores basearam-se em dois argumentos. No primeiro, consideraram que, para ter uma visão mais completa do pensamento geométrico atual dos alunos, faz-se necessário levar em conta a sua capacidade de usar cada um dos níveis de Van-Hiele, em vez de atribuir um único nível. No segundo argumento, os autores afirmaram que, na continuidade nos níveis de Van-Hiele, deve-se considerar que não é possível determinar um momento exato em que isso ocorre, mas que há um período de transição na passagem de um nível para o imediatamente superior.

Dessa forma, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) quantificaram a aquisição de um nível de pensamento geométrico por meio da representação de um segmento graduado de 0% a 100%. Todavia, os autores indicam que é possível identificar distintos modos de pensamento durante a aquisição de um nível. Consequentemente, para os investigadores, também é conveniente dividir esse processo contínuos em cinco períodos, caracterizados pelas formas qualitativamente diferentes, pelas quais os estudantes argumentam. Estes períodos representam diferenças fundamentais no grau de aquisição de um determinado nível. Segundo os pesquisadores, a divisão proposta de cada nível de Van-Hiele em períodos não implica que o progresso por meio dos níveis não seja contínuo. A atribuição de um valor numérico ao grau de aquisição de um nível pode ser útil para as pesquisas em Educação Matemática.

Nesse sentido, esses pesquisadores espanhóis elaboraram um modelo alternativo para avaliar a aquisição de níveis de Van-Hiele, sendo que o grau de aquisição de cada nível pode ser considerado em cinco tipos. O primeiro é a “aquisição nula” (no qual, não se utiliza as características desse nível), o segundo é a “baixa aquisição” (começa a conscientização das características, métodos e exigências próprios do nível, mas o uso que é feito deles é muito pobre), o terceiro é a “aquisição intermediária” (o emprego dos métodos desse nível é mais frequente e preciso, no entanto, ainda não é dominante), o quarto é a “aquisição alta” (também se faz o uso inadequado dos procedimentos próprios desse nível de pensamento) e, por fim, o quinto é a “aquisição completa” (há o domínio total das ferramentas e dos métodos de trabalho deste nível de pensamento). Assim, segundo esses autores, torna-se possível relacionar mais de um nível a um estudante, atrelado com dados aprofundados do seu avanço em cada um desses níveis. Por exemplo, determinado estudante pode apresentar aquisição completa do primeiro nível, baixa aquisição do segundo nível e aquisição nula do terceiro nível. Todavia, para Van-Hiele (1957), esse mesmo aluno estaria apenas no primeiro nível.

Os autores indicam o pressuposto de que é mais importante observar o tipo de pensamento dos alunos do que a capacidade de resolver certos problemas corretamente em um determinado momento. Além disso, segundo eles, uma resposta parcialmente correta (ou mesmo totalmente incorreta) também pode fornecer importantes informações. Uma resposta incorreta pode, por si só, oferecer uma quantidade de informação insignificante, mas o caso é diferente quando uma resposta é considerada em conjunto com outras respostas.

Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) afirmam que, ao marcar cada resposta, devem ser levados em consideração os níveis de Van-Hiele e a precisão matemática refletidos pelas respostas. Contudo, não é dado o mesmo valor a uma resposta completamente incorreta quanto a uma parcialmente incorreta ou a uma correta. Nessa direção, os pesquisadores avaliaram cada resposta levando em consideração o(s) nível(is) de pensamento refletido(s), bem como a sua precisão e completude magistral. Nessa avaliação, Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) especificam que cada resposta é classificada de acordo com o nível de pensamento de Van-Hiele que reflete, seguindo os descritores dos níveis. As respostas que evidenciam dois níveis consecutivos são atribuídas ao nível superior, pois indicam um certo grau de aquisição desse nível.

Os autores sinalizam, ainda, que cada resposta é atribuída a um número de tipos de respostas, dependendo da sua precisão matemática e de como foi produzida a solução para a atividade. Segundo os investigadores, para determinar o tipo de uma resposta, torna-se importante considerá-la do ponto de vista do nível de Van-Hiele que reflete, uma vez que uma resposta pode ser adequada de acordo com os critérios de um determinado nível de pensamento, mas não válido de acordo com os critérios de um nível superior.

Além disso, os autores espanhóis reorganizaram os níveis de Van-Hiele, oferecendo, assim, uma adaptação desse modelo para o estudo de geometria tridimensional: no primeiro nível (nível 1 ou reconhecimento), os sólidos geométricos são julgados por sua aparência; no segundo nível (nível 2 ou análise), os estudantes identificam os componentes dos sólidos geométricos, logo, estes são analisados como portadores de propriedades; no terceiro nível (nível 3 ou dedução informal), os alunos são capazes de classificar famílias de sólidos geométricos; e no quarto nível, os alunos compreendem o papel dos diferentes elementos de um sistema axiomático. Como não foram identificados alunos atuando no último nível vanhieliano, ao resolverem atividades sobre sólidos geométricos, então, esse nível foi removido da reorganização proposta pelos autores.

Por fim, os autores concluem que a maneira de avaliar os níveis de pensamento geométrico permite a possibilidade de que o aluno possa desenvolver dois níveis consecutivos de pensamento ao mesmo tempo, embora o que geralmente acontece é que a aquisição do nível inferior se manifesta de maneira mais completa do que a aquisição do nível superior. Eles observaram ainda que os estudantes, em geral, mobilizaram um único nível de pensamento, mas alguns usaram vários níveis ao mesmo tempo, provavelmente dependendo da dificuldade do problema. Para os pesquisadores, isso não implica uma rejeição da estrutura hierárquica dos níveis, mas sugere que o modelo de Van-Hiele deve ser melhor adaptado à complexidade dos processos de pensamento humano, pois as pessoas não se comportam de forma simples e linear, e que a atribuição de um único nível pode não ocorrer imediatamente.

4 O modelo de Garrido (2005)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar um modelo didático para a aprendizagem de conceitos e procedimentos geométricos que favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico nos alunos do segundo ciclo da escola primária na Cidade de Havana (Cuba), Garrido (2005) verificou que o modelo de Van-Hiele não foi suficiente para explicar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes cubanos. Inicialmente a autora afirma que o pensamento matemático possui diferentes significados. Para aqueles que estudam a Matemática como ciência, isto é, os pesquisadores matemáticos, essa forma de pensar é considerada como um estudo que exige formas abstratas de pensamento. Enquanto que, conforme a investigadora, para aqueles que estudam por meio de processos educacionais, essa instância do pensamento é uma ferramenta para resolver problemas ou situações da vida.

No caso da Geometria, Garrido (2005) indica que, para atender as necessidades de Cuba, o pensamento geométrico deve constituir um centro de atenção na escola primária. Para a autora, o estudo de conteúdos geométricos ensina as crianças a pensar e a raciocinar sobre a realidade tridimensional, com a qual elas estão em contato desde uma idade precoce e que precisam conhecer e modificar.

Em conformidade com a pesquisadora, por meio desses conteúdos, são desenvolvidas habilidades e capacidades específicas bastante úteis para transformar o mundo social. Por exemplo, sem a capacidade de imaginação espacial e habilidades de construções geométricas, profissões como torneiro, carpinteiro, construtor, pintor, engenheiro, arquiteto etc., seriam impossíveis. A autora sinaliza que três capacidades bem definidas são desenvolvidas com o pensamento geométrico: visão espacial, representação espacial e imaginação espacial. Todas estão fortemente articuladas entre si. Todavia, a imaginação espacial ocupa o centro desse modo de pensar em Geometria, porque possibiliza realizar análise do plano e estabelecer relações no espaço. Dito de outra forma, para Garrido (2005), essa capacidade geométrica possibilita o estudo do plano e do espaço por meio de seus conceitos, leis e derivação de raciocínios. Logo, a imaginação espacial perpassa o campo geométrico para tornar-se como um pensamento dialético por excelência.

Contudo, a investigadora considera que o conhecimento geométrico não pressupõe apenas reconhecer visualmente certas formas geométricas e conhecer os seus nomes corretos. Por outro lado, implica explorar conscientemente o espaço, comparar os elementos observados, estabelecer relações entre eles e expressar verbalmente as ações realizadas e as propriedades observadas, a fim de interiorizar o conhecimento, bem como descobrir propriedades de figuras e transformações, construir modelos, tirar conclusões para chegar a formular leis gerais e resolver problemas.

Tendo por base esses pressupostos, Garrido (2005) indica que o processo de aprendizagem do conhecimento geométrico na escola primária em Cuba abrange um importante momento: um estágio senso perceptual, que ocorre desde o nascimento da criança até os diferentes estágios de reconhecimento do espaço físico tridimensional. Desse modo, a pesquisadora reflete que o pensamento geométrico é uma forma de pensar em situações que exigem conhecimentos, habilidades e capacidades geométricas e que essa complexidade promove o desenvolvimento do pensamento geral e único de cada estudante.

Então, Garrido (2005) propõe um modelo didático para estimular o pensamento geométrico em escolas primárias. O modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado pela autora é marcado por três níveis: Nível 1 (Materialização), no qual o aluno identifica informações contidas em uma figura ou sólido geométrico; Nível 2 (Reconhecimento), no qual o estudante reconhece propriedades de uma figura ou sólido geométrico; e Nível 3 (Elaboração), no qual o discente inter-relaciona propriedades comuns a diferentes tipos de figuras ou sólidos geométricos.

Segundo a pesquisadora, o modelo de pensamento geométrico de Van-Hiele (1957) está focado nas dificuldades apresentadas por estudantes em aulas de Geometria da escola secundária holandesa. Ao reconhecer a importância dos estudos de Van-Hiele, Garrido (2005) aponta que o modelo vanhieliano tenta explicar como os estudantes pensam por meio de cinco níveis de pensamento, além de fornecer orientações a serem consideradas na organização do ensino para promover o progresso dessa forma de pensar dos discentes, a partir de cinco fases de aprendizagem.

Mesmo com o reconhecimento da importância do modelo de Van-Hiele na constituição do ponto inicial de discussões geradas na sua pesquisa, Garrido (2005) reforça sobre a necessidade da construção de um modelo didático que responda as demandas psicopedagógicas, além da realidade da escola em Cuba. A autora considera que, como um princípio fundamental, o modelo didático deve propiciar o pensamento geométrico com base em uma aprendizagem desenvolvida de conceitos e procedimentos geométricos na escola primária, que englobe as cidades e a zona rural, salas de aula regulares e multisseriadas.

Para a pesquisadora, o modelo também deve ser um recurso para o professor com base em um diagnóstico real. Assim, esse profissional tem a possibilidade de determinar o potencial e as dificuldades de seus alunos para aprender novos conceitos e procedimentos geométricos. Logo, para esse diagnóstico, os níveis devem ser mensuráveis e visíveis por professores e alunos, além de responder aos objetivos do ensino de Matemática em relação aos conteúdos geométricos.

Diante dessas circunstâncias, Garrido (2005) elaborou um modelo didático para a aprendizagem de conceitos e procedimentos geométricos com abordagem sistêmica considerando o enfoque histórico-cultural vygotskyano e as tradições pedagógicas cubanas como base epistemológica. Na determinação desses níveis nos estudantes, a autora realizou uma análise sobre as habilidades específicas de cada ano escolar da escola primária que são referenciadas nos objetivos escolares e nas habilidades geométricas gerais que integram o pensamento geométrico.

Com base nessas habilidades geométricas, fica mais nítido a proximidade entre o modelo de Van-Hiele (1957) e o de Garrido (2005). Isto é, a pesquisadora fez um percurso semelhante ao que fizeram Guitierrez, Jaime e Fortuny (1991), ao proporem uma reorganização do modelo vanhieliano para o estudo de geometria tridimensional com alunos espanhóis.

Nessa direção, a autora cubana fez uma adaptação do modelo de Van-Hiele considerando a realidade dos estudantes da escola primária de Cuba, bem como a natureza dos conceitos de figuras geométricas, sólidos geométricos e movimento. Nesse modelo, não foram verificados alunos cubanos apresentando características do pensamento geométrico relacionadas aos dois últimos níveis vanhielianos. Como sinaliza a própria autora, esses atributos se manifestam em alunos que cursam o ensino médio e o ensino superior na Holanda. Não sendo possível verificá-las com estudos do primário em Cuba.

Os níveis propostos por Garrido (2005) são bem semelhantes aos de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991). A diferença basicamente é que o grupo espanhol focou nas características do pensamento geométrico mobilizadas em atividades que exploram os sólidos tridimensionais, identificando um total de quatro níveis. A autora cubana incorporou no modelo as figuras geométricas aos sólidos geométricos, verificando a existência de três níveis.

Assim, para a pesquisadora, três conceitos geométricos generalizadores são apresentados nos programas de Matemática na escola primária cubana: figuras geométricas, sólidos geométricos e movimentos ou transformação, em torno dos quais outros conceitos estão estruturados, o que implica processos de generalização associados a eles. Segundo a autora, ao determinar esses três conceitos generalizadores, organiza-se uma estruturação do conteúdo escolar, que pode ser definida ou não no currículo proposto, mas que constitui o centro da concepção curricular.

Garrido (2005) conclui afirmando que o modelo didático proposto, constituído por três níveis de pensamento geométrico (Manipulação, Reconhecimento e Elaboração) permite aos professores realizar o diagnóstico e o monitoramento das diferenças individuais entre estudantes e basear metodologicamente na concepção do ensino e da aprendizagem de conteúdos geométricos.

5 O modelo de Parzysz (2006)

A pesquisa de Parzysz (2006) teve por objetivo propor um modelo de níveis de pensamento geométrico a partir do conhecimento em Geometria mobilizado por futuros professores de Matemática em ambientes de papel e de computador, em Paris, na França. Para o autor, a Geometria ensinada, desde a educação básica até a universidade, é construída como uma modelagem do espaço físico, evoluindo de uma Geometria de observação para uma Geometria de demonstração. Essa evolução pode ser analisada a partir de distintos níveis de pensamento geométrico.

Segundo o pesquisador, um dos objetivos do ensino de Geometria proposto no currículo obrigatório francês é levar os estudantes à passagem entre essas duas Geometrias (da observação para a da demonstração). Nessa direção, a noção de figura é um elemento central e inevitável nas práticas desse processo. Parzysz (2006) sinaliza que a resolução de um problema geométrico elementar, que depende muito do elemento figura, consiste em uma sucessão de ida e volta, muitas vezes implícita, entre os dois tipos de Geometria. Logo, para o autor, há o risco de colocar os estudantes em uma posição desconfortável, ou mesmo levá-los a conflitos cognitivos, se essa passagem não for realizada de forma adequada. Conforme o investigador, a relação com a Geometria dos alunos do primeiro ano do IUFM[4], que se preparam para o ensino em escolas, nem sempre os tornam capazes de lidar com esse tipo de conflito com seus futuros alunos da escola básica francesa.

Parzysz (2006) indica que se alguém atua no nível do ensino obrigatório, a Geometria, apesar de ser considerada um discurso sobre entidades teóricas, deriva de considerações feitas em objetos materiais (modelos, figuras) e, às vezes, faz uso de tais objetos sob a forma de metáforas. Daí surge um grande problema, para o autor, que é a causa de muitos mal-entendidos: na Geometria, professores e alunos nem sempre jogam o mesmo jogo. Com relação à discussão sobre a Geometria de observação e a Geometria de demonstração, o pesquisador francês se baseia em autores como Van-Hiele, Catherine *Houdement*, Alain *Kuzniak* e Michel Henry.

Segundo Parzysz (2006), Van-Hiele distingue dois níveis de apreensão das formas geométricas. No nível elementar, as formas são reconhecidas pela visão global, enquanto que no nível avançado, ocorre a identificação de uma forma por meio de suas propriedades. Ao fazer referência ao trabalho de Houdement e Kuzniak, Parzysz (2006), foca nos três paradigmas geométricos propostos por esses autores: a) geometria natural – na qual, o campo geométrico se funde com a realidade; b) geometria axiomática natural – que consiste em um esquema do mundo real; c) geometria axiomática formalista – na qual, ocorre a ruptura com a realidade.

Já no que se refere à pesquisa de Henry, Parzysz (2006) destaca os três tipos de relação com o espaço nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria: a) a situação concreta; b) uma primeira modelagem, que consiste em observar uma situação real e descrevê-la nos termos atuais (essa descrição é uma forma de abstrair e simplificar a realidade analisada em sua complexidade); e c) uma matemática, construída por meio do modelo proposto no item b.

Tendo por base essas três perspectivas, Parzysz (2006) elaborou um quadro teórico formado por quatro níveis de pensamento geométrico, organizados a partir de dois grupos de Geometria: as não axiomáticas e as axiomáticas. Para o investigador cada modelo geométrico

4 Institut Universitaire de Formation des Maîtres: Instituto Universitário de Formação de Professores (tradução nossa).

corresponde a um nível de pensamento geométrico próprio. Conforme Parzysz (2006), os elementos em que se baseia esta classificação são, por um lado, a natureza dos objetos em jogo (natureza física versus natureza teórica) e, por outro, os modos de validação (perceptivo versus hipotético-dedutivo). Nesse modelo, as geometrias não axiomáticas envolvem dois níveis de pensamento geométrico, Concreto (G0) e Espaço-Gráfico (G1), enquanto que as geometrias axiomáticas abrangem os níveis Proto-Axiomático (G2) e o Axiomático (G3).

Segundo o pesquisador, tendo por base a realidade, o nível G0 ainda não é vinculado ao campo geométrico porque seus objetos são realizações materiais, com todas as suas características (matéria, cor, etc.). Então, é considerado uma Geometria Não Axiomática, assim como o nível Espaço-Gráfico (G1), baseado em situações concretas. Parzysz (2006) afirma que o nível G2 é caracterizado por uma Geometria Axiomática que tem como referência o mundo real, sendo que no nível G3, a axiomatização pode ser explicada completamente.

Como sinalizado pelo pesquisador, contrariamente ao G3, a composição do G2 não pode ser definida com precisão porque, por um lado, apresenta um componente institucional (programas curriculares) que evolui ao longo do tempo e, por outro, também está sujeito às variações locais.

Para Parzysz (2006), didaticamente, a distinção entre esses níveis emerge nas rupturas de contrato didático que ocorrem na passagem de um e outro. Desse modo, a passagem de G0 a G1 é caracterizada pela materialidade dos objetos em jogo (madeira, papelão, folha, etc.); a passagem de G1 a G2 é marcada pela justificação de natureza perceptual; a passagem de G2 para G3 é verificada pelo uso dedutivo de propriedades consideradas óbvias/evidentes. O pesquisador ainda sinaliza que, no nível de ensino obrigatório, G1 e G2 é que desempenham um papel crucial para os estudantes na construção de sua relação com o conhecimento geométrico, dessa forma, esses dois níveis merecem uma maior atenção.

De acordo com o autor, resolver um problema em Geometria envolve uma sequência de idas e voltas entre os níveis G1 e G2, alternadamente, em momentos diferentes. Por exemplo, conforme indicado pelo pesquisador, na primeira ida de G1 para G2, ocorre a modelagem de um problema concreto; na primeira volta de G2 para G1, o estudante produz um desenho com propósito heurístico; na segunda ida de G1 para G2, desenvolve-se a demonstração de uma conjectura resultante da observação; por fim, na segunda volta de G2 para G1, ocorre a verificação de uma conclusão teórica sobre um desenho.

Parzysz (2006) destaca que nessa situação é introduzida a dialética sabido *versus* percebido, inicialmente desenvolvida para a representação do espaço em Geometria. Nessa relação dialética, o termo sabido corresponde à interpretação da representação gráfica do objeto em Geometria, a partir de suas propriedades. Ao passo que o termo percebido refere-se somente aos componentes e às suas conexões perceptíveis na representação gráfica relacionada ao que é observado (Silva, 2015).

Segundo Parzysz (2006), em geral, quando se trata de representar um objeto tridimensional e se deseja que ele seja facilmente identificado, desenha-se a partir de um ponto de vista usual, ou seja, na maioria das vezes o desenho é construído a partir de apenas um ângulo no plano (bidimensional). Mas, para o autor, isso não permite reter todas as propriedades espaciais do objeto, porque algumas partes estão escondidas e outras distorcidas por perspectiva. Por conseguinte, é necessário refletir (o que na maioria das vezes não ocorre) sobre a coexistência do visto (percebido) e do conhecido (sabido) a fim de chegar a uma representação sintética do objeto.

6 O modelo de Marchand (2009)

Em um artigo que teve por objetivo apresentar um modelo de níveis de conhecimento espacial para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino primário na cidade de Quebec (Canadá), Marchand (2009) percebeu que o modelo de Van-Hiele não foi suficiente para compreender como os estudantes canadenses constroem sentido espacial.

A princípio, a autora considera que o sentido espacial se desenvolve por meio de diversas experiências vivenciadas pelas crianças tanto na escola como em suas rotinas do dia a dia (esporte, jogos, viagens, música, etc.). Dessa forma, Marchand (2009) investigou o desenvolvimento desse sentido a partir dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, considerando que o campo geométrico é uma área visada no programa curricular da escola primária em Quebec.

A pesquisadora sinaliza que a Geometria sempre foi uma importante parte dos programas educacionais da Matemática no ensino primário. Todavia, esse componente matemático é abordado com dificuldade. Uma visão equivocada referente ao ensino e à aprendizagem da Geometria é considerar que para ensinar e para aprender conceitos geométricos só é necessário observar, compreender e conhecer. Porém, como indicado pela autora, tais processos são complexos.

Marchand (2009) considera que a Geometria é o domínio matemático cujo objetivo é estudar o espaço e as formas. Assim, o domínio geométrico coloca em ação dois tipos de espaços: o espaço físico (espaço circundante e formado por objetos concretos) e o espaço abstrato (espaço em pensamento e composto por objetos idealizados). Então, para a autora, o objetivo do ensino da Geometria em nível elementar é introduzir os alunos no espaço físico e, em seguida, levá-los para um espaço mais abstrato com base nas propriedades dos objetos. Esta passagem requer o tratamento de dois tipos de conhecimento: o conhecimento espacial e o conhecimento geométrico.

A autora ao apresentar essa compreensão deixa implícito que o conhecimento espacial é um tipo de conhecimento específico, diferente e divorciado do geométrico. Todavia, não concordamos com esse entendimento, pois o espacial é geométrico. Logo, não é um conhecimento particular, mas um tipo de conhecimento em Geometria.

A investigadora aponta que algumas das dificuldades relacionadas à aprendizagem da Geometria implicam o desenvolvimento do sentido espacial. Dessa forma, em seu artigo ela explica o desenvolvimento do sentido espacial no contexto geométrico e destaca os progressos do ensino que podem fortalecer a prática pedagógica dos professores. Para isso, Marchand (2009) discute sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico de forma global e explicita o significado do conceito “sentido espacial”, que nem sempre é usado da mesma maneira.

Com relação ao desenvolvimento do pensar em Geometria, a autora canadense se baseia no modelo de Van-Hiele (1959), pois este ilustra os principais passos que os alunos devem levar para progredir neste domínio matemático. Para a autora, tal fato se encaixa bem com os conteúdos previstos pelo programa atual de um nível de escolaridade para outro, que tem sido tema de pesquisas educacionais recentes no Canadá sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

Marchand (2009) assinala que o modelo vanhieliano foca cinco níveis de compreensão de conceitos em Geometria, especificamente aos processos mentais envolvidos em atividades geométricas. Conforme a autora, cada nível destaca objetos de pensamento específicos que se tornam produtos para esse nível e, posteriormente, tornam-se objetos de pensamento para o próximo nível. Assim, este modelo é construído hierarquicamente.

Conforme Marchand (2009), o modelo de Van-Hiele é hierárquico, logo, não admite que um estudante atue, por exemplo, no terceiro nível para os conceitos de figuras geométricas e de sólidos geométricos, simultaneamente. Desse modo, para a pesquisadora, um aluno pode realmente estar em um certo nível de compreensão para elementos familiares, mas pode atuar em outro nível para elementos menos familiares. Questionar o ensino é uma boa maneira de permitir que os alunos progridam de um nível de entendimento para outro.

Retomando a discussão sobre sentido espacial, a autora menciona que esse sentido não se limita ao contexto geométrico ou mesmo ao contexto escolar. Para ela, o sentido espacial abrange tudo o que está relacionado à estruturação de um espaço e é traduzido pelo conhecimento espacial em Geometria. Nessa direção, Marchand (2009) assinala que o conhecimento espacial é o conhecimento que possibilita que uma pessoa controle adequadamente suas relações com o espaço sensível.

Conforme a investigadora, isso ocorre no reconhecimento, na escrita, na produção ou na transformação de objetos; no movimento, no encontro, na comunicação da posição dos objetos; e no reconhecimento, na descrição, na construção ou na transformação de um espaço de vivência ou de deslocamento. Para a autora, o conhecimento geométrico refere-se mais ao conteúdo escolar que se torna axiomatizado ou teorizado para criar um sistema coerente. Marchand (2009) argumenta que, apesar das diferenças entre esses dois tipos de conhecimento, eles são inseparáveis em Geometria, uma vez que a maioria das atividades que são propostas em sala de aula aos alunos, as colocam em jogo simultaneamente. Para a autora, essa dualidade constante agrega complexidade ao ensino e à aprendizagem desse saber matemático. Então, o professor deve sempre estar atento a esse “bloqueio” e fazer as escolhas necessárias para tratar cada um dos conhecimentos no ambiente escolar.

Por exemplo, de acordo com a pesquisadora, quando o estudo de sólidos geométricos é feito com os alunos, especificamente, nas situações de identificação, eles mobilizam ambos os tipos de conhecimento. Ela sinaliza que, para reconstruir o sólido a partir do desenvolvimento (fisicamente ou mentalmente), os estudantes devem alcançar uma mudança de espaço (de duas para três dimensões), a qual requer conhecimento espacial e, para identificá-lo, eles devem fazer uso de definições e, portanto, de conhecimento geométrico (por exemplo, o que é um prisma triangular). Marchand (2009) indica que, se alguns discentes não chegam à identificação correta, o professor deve verificar a produção de cada conhecimento e não fingir automaticamente que eles não conhecem suas definições.

Com relação ao modelo de Van-Hiele, a investigadora aponta que esse modelo enfatiza a sequência da aquisição de propriedades e classes de figuras ou sólidos e, portanto, é mais orientada para os conhecimentos geométricos que espaciais. Dessa forma, a pesquisadora canadense criou um modelo inspirado no conhecimento espacial, que também é fundamental ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Para a autora, o desenvolvimento do conhecimento espacial ocorre pelo processo de internalização das ações da pessoa, ou seja, pela capacidade de pensar ações sem realizá-las. Além disso, na sua pesquisa Marchand (2009) destacou duas fases críticas na criação e realização de atividades de conhecimento espacial: provocar, no momento da atividade, momentos em que a visão não é mais suficiente, como meio de resolução, para obrigar a integração das ações dos alunos; questioná-los nesta fase de sua resolução.

Então, a investigadora elaborou um modelo sobre níveis de conhecimento espacial, inspirado no modelo de Van-Hiele, propondo, assim, três níveis hierárquicos de compreensão para a escola primária do Canadá.

O modelo de níveis de conhecimento espacial proposto por Marchand (2009) é composto por três níveis: Nível 0, no qual o aluno manipula concretamente figuras e/ou sólidos geométricos; Nível 1, no qual o estudante internaliza várias figuras, sólidos ou ações; e Nível 2, no qual o discente manipula mentalmente essas figuras, sólidos e ações.

Tal como fizeram Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) e Garrido (2005) em seus estudos, a pesquisadora canadense fez uma adaptação do modelo de Van-Hiele (1957). Assim, ela considerou as características curriculares da escola primária do Canadá, o contexto social dos alunos e o conhecimento geométrico do tipo espacial. Em seu modelo, Marchand (2009) não percebeu estudantes mobilizando características do pensamento geométrico referentes aos dois últimos níveis do modelo vanhieliano, do mesmo como foi verificado em Garrido (2005).

7 O modelo de Pereira da Costa (2019)

Em uma investigação em nível de doutorado que teve por objetivo propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico sinalizado por estudantes da Educação Básica em Recife (Brasil), Pereira da Costa (2019) evidenciou que o modelo de Van-Hiele não foi suficiente para compreender o funcionamento cognitivo de estudantes pernambucanos ao resolverem problemas sobre quadriláteros notáveis. Para isso, o pesquisador se sustentou em autores como Efraim Fischbein, Raymond Duval, Luiz Carlos Pais, Maria Alice Gravina e José Carlos Pinto Leivas e apresentou um modelo a partir de uma perspectiva duvalina, isto é, por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica idealizada por Duval.

Segundo Pereira da Costa (2019), a teoria duvalina fornece uma relevante análise do pensamento geométrico ao apresentar a noção de registros de representação semiótica, que são característicos da Matemática. Nessa direção, centrando o olhar para a Geometria, o aspecto decisivo à compreensão geométrica é a distinção entre o objeto geométrico e sua representação. Logo, os objetos geométricos são construções mentais, idealizações, ao passo que as figuras geométricas são representações desses objetos. Porém, são essas representações que promovem o acesso aos objetos da Geometria.

Na maioria das vezes, nas aulas de Matemática o estudante entende que a representação do objeto matemático é o próprio objeto em si mesmo. Como resultado disso, ele não produz um entendimento com sentido do conceito em jogo. Realizar essa distinção em sala de aula é fundamental para a promoção do pensamento geométrico. Acerca dessa forma de pensar em Geometria, o pesquisador brasileiro sinaliza que

> o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a importância da Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico. (Pereira da Costa, 2019, p. 118)

Pereira da Costa (2019) entende que todo o processo cognitivo relativo do pensamento geométrico depende da capacidade dos estudantes em abstraírem geometricamente. Assim, as abstrações geométricas possibilitam um aluno da Educação Básica desenvolver o seu pensamento geométrico, iniciando com a abstração geométrica espacial e concluindo com a hipotética ou teórica.

Segundo Pereira da Costa (2019), a abstração geométrica espacial é marcada pelo entendimento dos conceitos de orientação espacial, que incluem localização, orientação, descolamento etc. A abstração geométrica perceptiva é caracterizada por sensações perceptivas e visuais. A abstração geométrica analítica é definida pela compreensão das figuras geométricas tendo por base seus elementos constituintes e suas propriedades. A abstração geométrica descritiva compreende o estabelecimento de relações de implicação entre propriedades dos objetos geométricos. A abstração geométrica dedutiva é determinada pela realização de provas, demonstrações, argumentações e conjecturas de caráter tanto intuitivo como dedutivo. Por fim, a abstração geométrica hipotética (ou teórica) é apontada pelo estudo das diferentes geometrias, sobretudo, as chamadas geometrias não euclidianas.

Tendo por base as abstrações em Geometria, Pereira da Costa (2019) elaborou um modelo que permite identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes da Educação Básica quando estiverem resolvendo problemas sobre quadriláteros notáveis. Além disso, na proposta do modelo o pesquisador centrou o estudo nas mudanças dos registros de representação semiótica realizadas pelos estudantes ao resolverem tais problemas geométricos. Entre essas operações cognitivas distinguem-se: o *tratamento*, que consiste nas transformações que ocorrem em um mesmo registro, isto é, a representação semiótica do objeto geométrico é mantida; e a *conversão*, entendida pela transformação da representação do objeto em Geometria para outro tipo de representação, então, muda-se o registro.

O modelo proposto por Pereira da Costa (2019) é composto por três níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Ainda, para cada nível, o pesquisador percebeu a existência de dois subníveis, como descrito a seguir. O primeiro nível é o n, sendo formado pelos alunos que usam a estratégia considerar o quadrilátero notável por meio do aspecto global. Esse nível apresenta dois subníveis: $(n)_a$ — caracterizado pelos estudantes que percebem os quadriláteros somente a partir de um subconjunto das características visuais, pois ainda não conseguem formar imagens visuais; $(n)_b$ — marcado pelos discentes que identificam um quadrilátero como um todo, excluindo seus elementos e suas propriedades.

O segundo nível é o n + 1 sendo composto pelos estudantes que compreendem os quadriláteros notáveis a partir dos seus elementos constituintes e de suas propriedades. Tal nível também possui dois subníveis: $(n + 1)_a$ — que abrange os alunos que identificam um quadrilátero por meio de sua definição; $(n + 1)_b$ — no qual os discentes analisam os quadriláteros como detentores de propriedades, mas sem estabelecer relações entre elas.

No terceiro nível, n + 2, em que se enquadram os alunos que estabelecem relações de implicação entre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Do mesmo modo como nos anteriores, esse nível apresenta dois subníveis: $(n + 2)_a$ — marcado pelos estudantes que realizam inclusão de classe de modo parcial, ou seja, reconhecem um quadrado como um retângulo ou um quadrado como um losango, porém, ainda não identificam um quadrado como um tipo especial de retângulo e de losango, simultaneamente; $(n + 2)_b$ — sinalizado pelos discentes que percebem os quadriláteros a partir das relações estabelecidas entre suas propriedades. Nessa direção, um quadrado é considerado como todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Na elaboração desses três níveis, como componente básico, Pereira da Costa (2019) considerou os atributos do pensamento geométrico provocados na estratégia mobilizada pelos partícipes na resolução de atividades sobre produção e classificação de quadriláteros notáveis, em virtude de que, em nosso entendimento, a estratégia empregada pelo estudante permanece invariável à medida que a questão ou situação é modificada.

Além disso, ao contrário do que propõem Van-Hiele (1957) e outros autores (Gutierrez; Jaime & Fortuny, 1991; Garrido, 2005; Parzysz, 2006; Marchand, 2009), o modelo de Pereira da Costa (2019) é elaborado com base em um único conceito geométrico, quadriláteros notáveis, quando explorado em situações de produção e de classificação.

Nesse sentido, para o autor, ao considerarmos que um estudante atua no nível n, isso não quer dizer que ele não mobiliza nenhuma característica do pensamento geométrico, mas que revela o fato dele não conseguir formar imagens visuais sobre os quadriláteros notáveis, ou de que ele reconhece essa figura geométrica a partir do seu aspecto global, que são atributos da abstração geométrica perceptiva. Da mesma maneira, um aluno que se localiza no nível n + 2, não quer dizer que ele é capaz de atuar em todas as situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis, mobilizando a abstração geométrica hipotética. Nessa abstração, o estudante atuará em um nível mais avançado, pois será capaz de analisar os quadriláteros por meio das geometrias não euclidianas.

O pesquisador destaca ainda que não é o tipo de atividade proposta em sala de aula que determina o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante, assim como não são as situações que dão sentido aos quadriláteros notáveis. O que define o nível é a relação entre a estratégia adotada pelo aluno na resolução da atividade e o tipo de abstração geométrica mobilizada por ele. Então, a estratégia usada indica em qual abstração o discente está trabalhando, e a abstração aponta o nível correspondente.

8 Desenvolvendo a busca: uma relação entre os modelos teóricos

Os modelos teóricos analisados neste trabalho sinalizam a existência de diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Esses níveis são mobilizados pelos estudantes (da educação básica e da licenciatura em Matemática) ao estudarem Geometria, sobretudo na resolução de problemas geométricos. Além disso, todos os modelos foram elaborados conforme as realidades sociais, políticas e educacionais de seus países, sendo a Geometria Euclidiana o estudo de figuras geométricas planas e sólidos geométricos e considerada como campo fértil de pesquisa para a maioria desses modelos.

Parece haver entre os modelos uma divergência com relação à existência de hierarquia entre os níveis. Desse modo, para alguns autores (Van-Hiele, Garrido, Parzysz) não é possível que um mesmo aluno atue em diferentes níveis, enquanto para outros (Gutierrez; Jaime & Fortuny; Marchand; Pereira da Costa), sendo determinados pelo conceito geométrico que estiver em jogo. Dessa forma, caso o estudante tenha familiaridade com certo conceito, poderá atuar em um nível mais avançado. Ainda, poderá trabalhar em um nível mais elementar com um conceito que não seja familiar.

No quadro a seguir, apresentamos de forma sucinta atributos de cada um desses modelos. É importante destacar que toda analogia pode gerar descaracterização. A finalidade desse quadro foi de apresentar uma visão geral das características dos modelos analisados.

Quadro 1: Resumo das características principais dos modelos teóricos

	Base teórica e epistemológica	**Desenvolvimento do pensamento geométrico**	**Conceito-chave**	**Hierarquia entre os níveis**	**Conceito geométrico inicialmente considerado**	**Público-alvo**
Van-Hiele	Epistemologia Genética de Piaget (perspectiva cognitivista)	Situações didáticas (intervenção do professor)	*Inzicht*	Um estudante só atua em um único nível	Figuras geométricas planas	Estudantes da Educação Básica (Holanda)

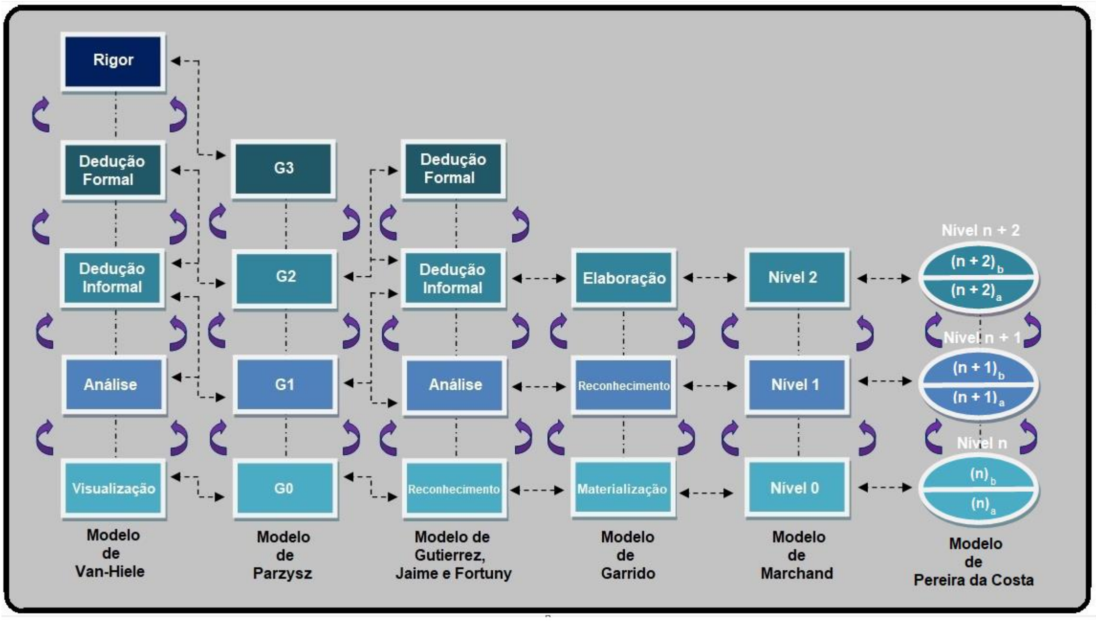
Gutierrez, Jaime e Fortuny	Modelo de Van-Hiele (perspectiva cognitivista)	Situações didáticas (intervenção do professor)	Argumentação	Um estudante pode atuar em diferentes níveis	Sólidos geométricos	Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e estudantes de Pedagogia (Espanha)
Garrido	Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky (perspectiva sociocultural)	Situações didáticas (intervenção do professor)	Visão espacial, representação espacial e imaginação espacial	Um estudante só atua em um único nível	figuras geométricas, sólidos geométricos e movimentos ou transformação	Estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (Cuba)
Parzysz	Os paradigmas geométricos de Houdement e Kuzniak, a relação com o espaço de Henry e modelo de Van-Hiele (perspectiva cognitivista)	Situações didáticas (intervenção do professor)	Figuras e modelos	Um estudante só atua em um único nível	Geometrias: as não axiomáticas e as axiomáticas	Estudantes de Licenciatura em Matemática (França)
Marchand	Modelo de Van-Hiele (perspectiva cognitivista)	Situações didáticas (intervenção do professor)	Sentido espacial	Um estudante pode atuar em diferentes níveis	Figuras geométricas e sólidos geométricos	Estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Canadá)
Pereira da Costa	Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (perspectiva semiótica)	Situações didáticas (intervenção do professor)	Representação semiótica	Um estudante pode atuar em diferentes níveis	Quadriláteros euclidianos	Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (Brasil)

Fonte: Elaboração Própria

Notamos que os modelos de Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991), Garrido (2005), Parzysz (2006), Marchard (2009) e Pereira da Costa (2019) apresentam uma intersecção com o modelo de Van-Hiele (1957) sendo, na maioria, readaptações desse último ao contexto socioeducacional de seus países de origem. Essa articulação entre os níveis de pensamento geométrico indicados nos modelos encontra-se ilustrada na figura que segue.

Conforme ilustrado na Figura 1, evidenciamos que há correspondência entre os níveis: Visualização de Van-Hiele, G0 de Parzysz, Reconhecimento de Gutierrez, Jaime e Fortuny, Materialização de Garrido, Nível 0 de Marchand e o nível n de Pereira da Costa. Em todos esses níveis, a estratégia utilizada pelo aluno consiste em identificar figuras geométricas e/ou sólidos geométricos a partir do aspecto global (natureza geométrica não axiomática).

Figura 1: Articulação entre os níveis de pensamento geométrico sinalizados em diferentes modelos teóricos



Fonte: Adaptado de Pereira da Costa (2019)

Notamos que há correlação entre os níveis Análise de Van-Hiele, G1 de Parzysz, Análise de Gutierrez, Jaime e Fortuny, e Reconhecimento de Garrido, Nível 1 de Marchand e n + 1 de Pereira da Costa. Geralmente, nesses níveis, a estratégia aplicada pelo estudante é reconhecer figuras geométricas e/ou sólidos geométricos por meio dos atributos geométricos, de modo desarticulado. A geometria estudada é não axiomática.

Por fim, há articulação entre os níveis Dedução Informal de Van-Hiele, G2 de Parzysz, Dedução Informal de Gutierrez, Jaime e Fortuny, Elaboração de Garrido, Nível 2 de Marchand e n + 2 de Pereira da Costa. Na maioria das vezes, nesses níveis a estratégia utilizada pelo discente é identificar figuras geométricas e/ou sólidos geométricos por meio da ordenação de suas propriedades. Tais níveis se situam na fronteira entre as geometrias não axiomáticas e as geometrias axiomáticas.

A maioria dos modelos teóricos (Van-Hiele, 1957; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Parzysz, 2006 e Marchand, 2009) possuem a mesma base teórica epistemológica: o construtivismo piagetiano. Tal corrente considera o estudante como principal agente na construção de conhecimentos matemáticos, isto é, produzindo e transformando as suas representações sobre os objetos em Matemática. Já o modelo de Garrido (2005) tem por sustentação a Psicologia Sócio-Histórica, considerando, desse modo, a Teoria de Vygotsky. Segundo esse quadro teórico, o desenvolvimento humano ocorre a partir das relações sociais construídas pelo indivíduo ao longo de sua existência. O modelo de Pereira da Costa (2019) é sustentado pela semiótica duvalina, ou seja, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

É importante destacar que o modelo de Pereira da Costa (2019) apresenta subníveis entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Isso não foi verificado nos outros modelos supracitados. Por fim, verificamos que o processo de construção desses modelos baseia-se em alunos nativos do ensino básico de seus países de origem, que possuem diversos atributos sociais, culturais, psicológicos e afetivos. Esses aspectos devem ser considerados no uso desses modelos para a compreensão do funcionamento cognitivo de estudantes ao estudarem Geometria, seja na escola ou na universidade.

9 Concluindo a busca

Neste ensaio, assumimos que os modelos teóricos sobre níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico têm se mostrado importantes para a compreensão do funcionamento cognitivo de estudantes ao estudarem e aprenderem Geometria, seja na escola ou na universidade. Desse modo, compreender as relações estabelecidas entre esses diferentes modelos se torna uma atividade essencial tanto para professores, que optam por um desses modelos para analisar sua sala de aula e propor ações que promovam aprendizagem no campo geométrico, bem como para pesquisadores da área de Educação Matemática.

Com base na análise e na relação estabelecida entre os diferentes modelos teóricos, verificamos que o contexto social, o lugar da Geometria nos currículos e nos programas escolares podem influenciar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos discentes da escola básica. Tais elementos devem ser levados em consideração na escolha por um modelo que busque compreender a realidade escolar.

Outro consenso evidenciado nas investigações é que o pensamento geométrico é influenciado pelo tipo de Geometria vivenciado. Portanto, se o estudante tem contanto com diferentes geometrias, ele terá mais condições de avançar entre os níveis, alcançando uma forma de pensar geométrico mais avançado.

Por fim, entre os modelos analisados, destacamos o de Pereira da Costa (2019), pouco conhecido no Brasil, mas que foi elaborado para compreender o pensamento geométrico de estudantes brasileiros dos anos finais do Ensino Fundamental. Esse modelo parece ser adequado para o uso em outros níveis escolares, visto que foi construído tendo por base as demandas educacionais do currículo escolar brasileiro, o que não foi evidenciado nos outros modelos, cujos nascimentos ocorreram em outros países, em sua maioria, europeus, com realidades curriculares distantes da nossa. Mas para esse uso ser uma realidade (ou não), é necessário que seja investigado pelas pesquisas em Educação Matemática no país e, sobretudo, seja colocado em prova em diferentes realidades escolares.

Referências

Bahia. (2020). Secretaria da Educação do Estado da Bahia. *Documento Curricular Referencial da Bahia para educação infantil e ensino fundamental*. Rio de Janeiro: FGV Editora.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/SEB.

Campos, M. B. (2017). Aprendizagem em geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula. *Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco, 7*(12), 188-193.

Chicote, R. S. & Deixa, G. V. (2020). Geometric Thinking of Future Mathematics Teachers in Mozambique: a case study from Rovuma University. *Tangram, 3*(1), 62-73.

Garrido, Y. P. (2005). La estimulación del pensamiento en los escolares. *Educación Cubana, 1*(25), 1-32.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; & Fortuny, J. F. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Hendriyanto, A.; Kusmayadi, T. A.; & Fitriana, L. (2021). Geometric Thinking Ability for Prospective Mathematics Teachers in Solving Ethnomathematics Problem. *Journal of*

Physics, 18(8), 20-40.

Marchand, P. (2009). Le développement du sens spatial au primaire. *Bulletin Association Mathématique du Québec, 49*(3), 63-79.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *17*(1), p.128-151.

Pereira da Costa, A. (2019). *A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:* o caso dos quadriláteros notáveis. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.

Pernambuco. (2019). Secretaria de Educação e Esportes. *Currículo de Pernambuco:* Ensino Fundamental — área de Matemática. Recife, PE: SEE.

Santos, A. O. & Oliveira, G. S. (2018). A prática pedagógica em geometria nos primeiros anos do ensino fundamental: construindo significados. *Revista Valore*, Volta Redonda, v. 3, n.1, p. 388-407.

Silva, C. V. (2015). *A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos:* um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Ursulasari, Y.; Susanto; Sunardi & Nahrowi (2019). Correlation of Students' Reading Comprehension and Geometry Thinking Levels. International Journal of Scientific Research and Management, *7*(5), p. 992-998.

Van-Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.* Scriptie (Doctoraat in Wiskunde en Natuurwetenschapp). Universiteit Utrecht. Utrecht, Nederland.