

## Tarefas de Modelagem Matemática em um curso *online* e síncrono no Virtual Math Teams com GeoGebra (VMTcG)

### Rhômulo Menezes

Secretaria de Estado de Educação do Pará  
Capanema — PA, Brasil

✉ [rhominho.oliveira@hotmail.com](mailto:rhominho.oliveira@hotmail.com)

id [0000-0001-9042-8323](https://orcid.org/0000-0001-9042-8323)

### Roberta Modesto Braga

Universidade Federal do Pará  
Castanhal — PA, Brasil

✉ [robertabraga@ufpa.br](mailto:robertabraga@ufpa.br)

id [orcid.org/0000-0003-3747-5862](https://orcid.org/0000-0003-3747-5862)

### Adilson Oliveira do Espírito Santo

Universidade Federal do Pará  
Salinópolis — PA, Brasil

✉ [adilson@ufpa.br](mailto:adilson@ufpa.br)

id [0000-0002-2728-8169](https://orcid.org/0000-0002-2728-8169)



2238-0345 

10.37001/ripem.v12i4.3209 

Recebido • 02/09/2022

Aprovado • 23/09/2022

Publicado • 17/10/2022

Editor • Gilberto Januario 

### Marcelo Almeida Bairral

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro — RJ, Brasil

✉ [mabairral@hotmail.com](mailto:mabairral@hotmail.com)

id [0000-0002-5432-9261](https://orcid.org/0000-0002-5432-9261)

**Resumo:** O presente artigo tem como objetivo apresentar aspectos teóricos e práticos que influenciaram na composição de um curso e de suas tarefas para o seu desenvolvimento inteiramente síncrono e *online* em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Para alcançar esse objetivo, foi planejado, elaborado e efetivado o curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, no segundo semestre de 2018. Os encontros síncronos no ambiente *online* Virtual Math Teams com GeoGebra contou com a participação de graduandos do curso de Matemática da Universidade Federal do Pará e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Para este trabalho, foram selecionadas três tarefas: a Estação de Bombeamento, o Polígono ABCDE e Caminhando com Carol.

**Palavras-chave:** Tarefas de Modelagem Matemática. Encontros Síncronos. Virtual Math Teams com GeoGebra.

## Mathematical Modeling Tasks in a synchronous online course in Virtual Math Teams with GeoGebra (VMTcG)

**Abstract:** This article aims to present theoretical and practical aspects that influenced the composition of a course and its tasks for its fully synchronous and online development in a virtual learning environment. To search this objective the course “Interactions and Modeling Strategies in the VMTcG environment” was planned prepared and carried out in the second half of 2018. The synchronous meetings in the Virtual Math Teams online environment with GeoGebra were attended by undergraduate students of the Mathematics course at the Federal University of Pará and the Federal Rural University of Rio de Janeiro. For this work three tasks were selected: the pumping station, the ABCDE polygon and walking with Carol.

**Keywords:** Mathematical Modeling Tasks. Synchronous Encounters. Virtual Math Teams with GeoGebra.

## Tareas de Modelado Matemático en un curso en línea síncrono en Virtual Math Teams con GeoGebra (VMTcG)

**Resumen:** Este artículo tiene como objetivo presentar los aspectos teóricos y prácticos que contribuyeron para la creación de un taller y sus tareas. El taller se desarrolló totalmente en línea de forma sincrónica. Para lograr el objetivo, se planificó, preparó y ejecutó el taller “Interacciones y Estrategias para la Modelación matemática en el entorno VMTcG” durante el segundo semestre del año 2018. En los encuentros sincrónicos se utilizó el software GeoGebra y contó con la participación de profesores de matemática en formación de la Universidad Federal de Pará y la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro. Para este trabajo se seleccionaron tres tareas: la estación de bombeo, el polígono ABCDE y caminar con Carol.

**Palabras clave:** Tareas de Modelación Matemática. Encuentros Sincrónicos. Equipos Virtuales de Matemáticas con GeoGebra.

## 1 Introdução

Sobre atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma *online*, Menezes (2019) fez um mapeamento que compreendeu dissertações e teses de 2001 a 2018. Desse período, foram selecionados seis trabalhos: Malheiros (2008), Santana (2010), Costa (2010), Ferreira (2010), Pereira (2015) e Bustamante (2016).

Os resultados desse mapeamento mostraram que as atividades de Modelagem Matemática em três trabalhos — Costa (2010); Ferreira (2010) e Pereira (2015) — foram desenvolvidas na Plataforma Moodle. Saindo desse escopo, têm-se os trabalhos de Malheiros (2008), que usou o AVA Tecnologia da Informação no Desenvolvimento da Internet Avançada – Aprendizado Eletrônica (TIDIA-Ae); de Santana (2010), que usou um AVA de um curso de Matemática a distância; e de Bustamante (2016), que usou o *Facebook* como AVA.

Já em relação ao público-alvo dessas atividades, foram em sua maioria professores que ensinam Matemática em formação continuada, com encontros do tipo híbrido, síncronos e assíncronos, como informado em Malheiros (2008), Ferreira (2010), Pereira (2015) e Bustamante (2016), diferentemente dos trabalhos de Santana (2010) e Costa (2010), nos quais o público-alvo foram professores que ensinam Matemática em formação inicial e a comunicação estabelecida foi por meio de encontros assíncronos. Dos trabalhos mapeados por Menezes (2019), foi possível destacar características sobre:

- as perspectivas de Modelagem Matemática: no contexto *online* variaram de trabalho para trabalho. Em Malheiros (2008), as atividades foram desenvolvidas como Projetos de Modelagem. Em Santana (2010) e Pereira (2015), a Modelagem Matemática foi entendida, respectivamente, como um ambiente e alternativa pedagógica. O trabalho de Costa (2010) teve foco na aliança entre teoria e prática. Ferreira (2010) desenvolveu suas atividades segundo um conjunto de procedimentos, e Bustamante (2016) de acordo com a concepção de gerar ou propor problemas matemáticos;
- o público-alvo das atividades de Modelagem Matemática: a maioria era de professores em formação continuada, somente Santana (2010) tinha como público graduandos em formação inicial, e no trabalho de Costa (2010) os graduandos participavam em conjunto com outros pesquisadores e professores;
- o AVA: a maioria das atividades foram desenvolvidas em ambientes voltados para o ensino e aprendizagem, sendo diferente em Bustamante (2016), que optou por fazer uso de grupos fechados no *Facebook*;
- os tipos de encontros: a maioria dos trabalhos relata encontros híbridos, síncronos e assíncronos, destacando-se Santana (2010) e Costa (2010), que realizaram atividades apenas por encontros assíncronos.

Considerando os resultados obtidos nessa revisão de literatura, o primeiro autor, no desenvolvimento da sua pesquisa de campo de doutorado, planejou e efetivou um curso inteiramente online e síncrono para o ensino de Matemática a partir de tarefas de Modelagem Matemática<sup>1</sup>. Dessa forma, neste artigo, assumimos como objetivo apresentar aspectos teóricos e práticos que influenciaram na composição desse curso e de suas tarefas para o seu desenvolvimento inteiramente síncrono e online em um ambiente virtual de aprendizagem.

## 2 Modos de entender e fazer Modelagem Matemática para o ensino

Quando se pesquisa sobre Modelagem Matemática para o ensino de Matemática não é definida uma única concepção. É possível encontrar uma variedade de paradigmas determinados de acordo com o contexto de quem os aplicou e investigou. Assim, essas definições às vezes são remetidas a uma noção da Modelagem Matemática, outras ao seu processo, indo ao encontro do que observou Frejd e Bergsten (2018, p. 124) ao afirmarem que “não há uma distinção clara entre conceituar a Modelagem Matemática como um conceito/noção ou como um processo/atividade”.

Bassanezi (2012), um dos precursores do uso da Modelagem Matemática para o ensino, a entende como um processo no qual um indivíduo imerso em sua realidade age sobre ela, criando modelos que sintetizam estratégias carregadas de suas interpretações e subjetividades. Assim, para o autor, a Modelagem Matemática é uma estratégia usada para se obter explicações ou entendimentos acerca de determinadas situações reais.

Dessa forma, “no processo de reflexão sobre a porção da realidade, selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (modelo matemático), que contemple as relações que envolvem tais argumentos” (Bassanezi, 2012, p. 11). Esse processo de reflexão que gera essa formalização artificial — o modelo matemático — é composto pelas etapas: escolha de temas; coleta de dados; análise de dados e formulação de modelos; e validação.

Biembengut (2016, p. 98) conceitua Modelagem (Matemática) como “um método para solucionar alguma situação-problema ou para compreender um fenômeno, utilizando-se de alguma teoria (matemática)”. Em outra passagem, quando direcionada para a educação, a modelagem é entendida como Modelação (Modelagem na Educação) e definida, segundo a autora, como “um método que se utiliza a essência do processo da Modelagem no ensino e aprendizagem da Educação formal” (Biembengut, 2016, p. 176).

No contexto da educação formal, é evidenciada por Biembengut (2016) a importância de se orientar a Modelação pelo ensino do conteúdo do programa curricular e não curricular da disciplina, a partir do tema ou assunto abordado. Para a autora, os procedimentos da modelagem são caracterizados em três fases: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão. Sendo essas fases apresentadas pela autora como etapas procedimentais da Modelação.

Ainda segundo Biembengut (2016), é necessário que os alunos aprendam conteúdos matemáticos pela Modelação, mas também existe uma preocupação em ensiná-los a fazer pesquisa. A autora, considerando suas concepções e como estruturou o processo de Modelação, mostrou uma preocupação com pontos pertinentes à Educação Básica, como tempo e currículo a ser ensinado ou aprendido. Preocupações essas que foram evidenciadas em passagens como

---

<sup>1</sup> Este artigo é recorte de uma tese de doutorado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, escrita pelo primeiro autor e orientada pelos demais autores.

“essa pesquisa pode ser feita em grupo de dois ou três estudantes, no máximo” (Biembengut, 2016, p. 180), justificando o trabalho em grupo dos alunos para a economia de tempo, já que tarefas da Modelação podem ser delegadas e feitas simultaneamente pelos discentes. Assim, oportunizando ao professor mais tempo para conhecer cada grupo e orientá-los.

Na concepção de Barbosa (2001, p. 31), “a Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”. Nesse ambiente, a indagação não é expressa somente por meio de um problema ou um conjunto de problemas, mas como uma atitude constante no processo, desde a identificação, passando pela formulação até a resolução do problema.

A forma como se organiza as atividades nessa concepção varia conforme as circunstâncias do contexto escolar, da experiência do professor, do interesse dos alunos e de outros fatores. Dessa maneira, cada configuração curricular é vista e classificada por Barbosa (2001) em termos de casos: Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

Os casos de Barbosa (2001) mostram uma gradativa passagem de responsabilidade em que o professor é mais atuante no processo da Modelagem no Caso 1 e, conforme seguem os casos 2 e 3, ele estimula que os alunos comecem a ser protagonistas. No entanto, a figura do docente e dos discentes não são anuladas uma pela outra: em todos os casos o professor é o mediador e os alunos podem indagar sobre o quê e como está sendo investigado. Outro ponto importante sobre os casos é que eles “não representam configurações estanques e definitivas, mas regiões de possibilidades” (Barbosa, 2001, p. 40), sendo assim, ajustáveis conforme demandas do contexto escolar dos professores e dos alunos.

Para Burak (2004), a Modelagem Matemática é entendida como alternativa metodológica para o ensino de Matemática, e o seu trabalho origina-se no: “interesse do grupo ou dos grupos” (Burak, 2004, p. 2). Esse princípio, base para o trabalho com a Modelagem Matemática, contrapõe-se à forma usual em que o processo de ensino é deflagrado pelo professor e passa a ser compartilhado com o grupo de alunos, sendo impulsionado diante do interesse pelo assunto. Partindo dessa premissa, Burak (2004) destaca os seguintes aspectos: maior interesse dos grupos; interação maior no processo de ensino e aprendizagem; demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação e, em consequência, a adoção de uma nova postura do professor.

Para o desenvolvimento da Modelagem Matemática em sala de aula, Burak (2004) destacou cinco etapas: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; e análise crítica da(s) solução(ões). O autor recomenda ainda que “o trabalho com a Modelagem Matemática parte de temas, propostos pelo grupo, ou por grupos constituídos por 3 ou 4 participantes” (Burak, 2004, p. 3).

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), uma atividade de Modelagem Matemática é constituída de uma situação inicial (problemática), uma situação final (uma solução), e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários utilizados para passar da situação inicial para a situação final. A situação inicial é entendida pelos autores como uma situação-problema e a situação final é uma solução matemática, o modelo matemático.

Entende-se por problema aquela situação em que o indivíduo não tem um esquema *a priori* para solucioná-lo, e por modelo matemático uma representação simplificada da realidade. O conjunto de procedimentos que caracteriza essa passagem da situação inicial para a situação final acontece segundo as seguintes fases: inteiração; matematização; resolução; interpretação de resultados e validação.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), a Modelagem Matemática é entendida a partir da concepção de educar matematicamente, na qual a Matemática é tomada segundo regras e convenções estabelecidas dentro de determinado contexto social, histórico e cultural, permeado por relações de poder. Nesse sentido, os autores entendem o processo segundo um esquema cíclico, que se inicia com um problema real, passa por hipóteses de simplificação, por um problema matemático, pela resolução (aproximada!) do problema matemático, seguindo pela validação matemática e social da solução. Podendo o processo ser finalizado nesse momento ou retomado para o início (processos decisórios).

Destaca-se também concepções constituídas no Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática (GEMM) e no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM), referências na região amazônica, constituídos na Universidade Federal do Pará. No GEMM, Chaves e Espírito Santo (2008) consideram a Modelagem Matemática como um

processo que consiste na tradução de situações/problemas, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou de relações matemáticas — Modelo Matemático — que procura representar ou organizar a situação/problema com vistas a compreendê-la ou solucioná-la (Chaves & Espírito Santo, 2008, p. 151).

Para o desenvolvimento desse processo em sala de aula, Chaves e Espírito Santo (2011), ao combinarem os casos de Barbosa (2001) com as etapas de Burak (2004) e de Chaves e Espírito Santo (2008), delimitaram três possibilidades com nuances para ações do professor e dos alunos no desenvolvimento da Modelagem na sala de aula, como exposto no Quadro 1.

**Quadro 1:** Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula

Etapas do processo	Possibilidades		
	1	2	3
Escolha do tema	Professor	Professor	Professor/aluno
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Simplificação dos dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Tradução/resolução do problema	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno
Análise crítica da solução/validação	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

**Fonte:** Chaves e Espírito Santo (2011, p. 15).

Nesse cenário, e de acordo com Chaves e Espírito Santo (2011), a escolha do tema, a elaboração da situação-problema e a coleta de dados constituem a interação. O levantamento de hipóteses, conjecturas e a seleção de variáveis correspondem ao momento de simplificação dos dados. A elaboração do modelo matemático ou a organização matemática da situação-problema correspondem à tradução/resolução do problema. E a verificação da adequabilidade do produto do processo de Modelagem Matemática corresponde à análise crítica da solução/validação.

Na Possibilidade 1, o professor assume, no processo de Modelagem Matemática, as

competências de escolher o tema, problematizar, coletar e simplificar os dados, sendo mediador nas etapas seguintes, nas quais contará com a participação conjunta dos alunos. Nesse sentido, o professor ajudará os estudantes a elaborarem suas próprias hipóteses, testar suas conjecturas e descobrir por si só seus erros e acertos. Na Possibilidade 2, o que acontece de diferente é o fato de o professor poder contar com a parceria dos alunos mais cedo, desde a coleta e simplificação dos dados, requerendo mais atenção do docente na mediação da pesquisa. Já na Possibilidade 3, professor e alunos firmam uma parceria desde o início do processo, pela escolha do tema.

No LEMM, Braga (2015), ao desenvolver sua pesquisa de doutorado, na qual analisou atividades de Modelagem Matemática na perspectiva dos princípios da Teoria da Atividade de Engeström, assumiu como concepção “a Modelagem Matemática configurada como um sistema de atividade que contempla um ambiente de experimentação favorável à aprendizagem de sujeitos por meio de interações com o objeto, os artefatos, as regras, a divisão do trabalho e a comunidade do sistema” (Braga, 2015, p. 42).

A autora, em suas pesquisas e práticas de Modelagem Matemática, conseguiu e consegue elaborar e desenvolver investigações com graduandos do curso de Matemática pesquisando temáticas características da região amazônica. Ao aproximarmos o trabalho desenvolvido por Braga (2015) com as possibilidades de Chaves e Espírito Santo (2011), a primeira construiu momentos que perpassaram as três possibilidades dos segundos. Ela elaborou atividades nas quais tinha maior controle ao trazer o tema, dados, variáveis, e a partir daí, incluindo os graduandos como parceiros na investigação, configurando a Possibilidade 1. Também organizou atividades que eram disponibilizados temas, e os graduandos escolhiam conforme aproximação ou interesse, configurando a Possibilidade 2. Até atividades que os discentes começavam a participar desde a ideia de que tema seria investigado por eles, configurando a Possibilidade 3.

As concepções analisadas são distintas no que tange ao local e nível que são aplicadas, superior ou básico, e alteram-se conforme o contexto cultural, social e histórico dos pesquisadores/professores e dos alunos. No entanto, mesmo os autores imbuídos de diferentes modos de perceber, conceber e fazer Modelagem Matemática, foi possível identificar características comuns, que atravessam essas concepções e influenciam nosso modo de perceber a Modelagem Matemática, ensejando adotá-las no ensino de Matemática em encontros síncronos em um AVA, sendo elas: o início do processo com situações-problema, referenciadas na Matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

### **3 Educação *Online* e interações em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA)**

Segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2012, p. 312), “o termo Educação a Distância representa uma variedade de modelos educacionais que possuem uma característica em comum: estudantes e professores separados fisicamente e interligados por meio de algum canal de comunicação.” Assim, temos uma modalidade de educação com complexidades próprias e especificidades. Além da separação física, professores e alunos também podem estar separados temporalmente, caracterizando modalidades de Educação a Distância (EAD) síncronas e assíncronas (Giraldo, Caetano & Mattos, 2012).

Como no ensino presencial, o ensino na EAD é organizado segundo componentes fundamentais, como conteúdos curriculares, interação com professores, colegas e

equipamentos, aplicações práticas e avaliação. Dessa forma, essa modalidade de ensino consiste em um processo educacional planejado, no qual o processo de ensino e aprendizagem acontece em lugares e horários distintos, para a interação de professores e alunos, requerendo estratégias didáticas e de interação específica.

Nesse contexto, temos a EAD como algo maior, enquanto ensino remoto, Educação *Online* (EO), ensino virtual, educação virtual, educação remota são modelos pedagógicos imersos na modalidade de ensino EAD, não sendo sinônimos e carregando especificidades que os diferem a depender da estratégia e do tipo de interação requisitada. Bairral (2020), ao definir EO, pontua o seguinte:

EAD não é sinônimo de educação online (EO). (...). Esta transita no imbricamento entre o real e virtual, comunicação síncrona e assíncrona, distante e perto, individual e coletivo, espaço formal e não formal de aprendizagem, todos mediados por tecnologias digitais em rede e que rompem com a comunicação de um para todos. Na EO os discursos são hipertextuais, a aprendizagem não é vista como transmissão, mas como práticas situadas e compartilhadas em ambientes pedagogicamente planejados para fins educacionais diversos, todos com mediação do professor ou de uma equipe que efetivamente construiu o seu design (Bairral, 2020, p. 198).

Ao definir EO, Bairral (2020) também pontua características de outro modelo de EAD, difundido nos últimos anos por cursos pensados e desenvolvidos em uma perspectiva de transmissão de conhecimentos, corroborando a afirmativa de Menezes (2020), que considera esse modelo de formação com foco em aulas gravadas, materiais e orientações disponibilizadas em um AVA não sendo muito diferente do ensino tradicional, amplamente utilizado na modalidade presencial.

Nessa configuração de EAD, Giraldo, Caetano e Mattos (2012) consideram que um bom AVA, além de favorecer a comunicação entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem virtual, possibilita o armazenamento de conteúdos e atividades didáticas. Bem como permite a realização de fóruns de discussão, entrega de trabalhos, avaliação desses registros, divulgação de notas e publicação de mensagens e notícias.

Em se tratando de práticas de EO, Mercado (2009) pontua algumas vantagens, como a flexibilidade do ambiente de estudo, pois a atividade independe da geografia espacial e temporal em que se encontram alunos e professor. Nesse contexto, destaca-se também as diferentes modalidades interativas, nas quais se enquadram a interação dos alunos com os materiais didáticos oferecidos, a interação com o tutor, com os outros colegas e com o ambiente virtual. Sobre este último, Menezes e Bairral (2020) afirmam que essas interações podem acontecer em redes sociais (*chats* do *Facebook*, *WhatsApp*, etc.) ou em AVA (Plataforma Moodle, Virtual Math Teams com GeoGebra — VMTcG, entre outros).

Entendemos interação, neste artigo, como “uma forma de comunicação (escrita, oral, gestual, pictórica, icônica, etc.) estabelecida entre sujeito(s)-sujeito(s) ou entre indivíduo(s) e tecnologia(s)” (Bairral, 2015). E também como um constructo, capaz de ajudar a compreender o aprendizado e o desenvolvimento profissional de sujeitos em determinados cenários, incluindo o virtual.

Partindo de interações em um AVA, destacamos cinco características organizadas por Souza e Bairral (2016) que auxiliam o docente na arquitetura do *design* de suas práticas em EO:

1. Favorecer a hipertextualidade e a multimodalidade discursiva, com a integração de linguagens diversas (sons, textos, imagens dinâmicas e estáticas, gráficos, mapas etc.).

2. Potencializar constantemente a comunicação interativa (síncrona e assíncrona). 3. Propor atividades formativas, que estimulem a construção do conhecimento a partir de situações-problema, nas quais o sujeito possa contextualizar e problematizar questões locais e globais do seu universo cultural. 4. Criar ambiências para a avaliação formativa, nas quais os saberes sejam construídos em um processo constante de negociações e de tomada de decisões. 5. Favorecer conexões lúdicas e artísticas e incentivar navegações críticas, criativas e autorais (Souza & Bairral, 2016, p. 41).

Na EO, não necessariamente é preciso ter um AVA, outros ambientes podem ser usados, a depender do *design* elaborado pelo professor para o ensino *online*. Por exemplo, Bustamante (2016), para desenvolver atividades de Modelagem Matemática, usou grupos fechados no *Facebook*.

Já Schroetter, Stahl, Chrysostomo e Duncan (2016), desenvolveram suas atividades de Modelagem Matemática via *e-mail*. Tanto o *Facebook* quanto o *e-mail* não são ambientes com finalidades educacionais, no entanto, serviram para esse propósito, conforme planejamento das pesquisadoras.

Sobre essa especificidade de práticas de EO, Bairral (2020) pontua que:

Práticas em EO ocorrem em cenários diversos, alguns são denominados AVA. Um AVA não é um mero repositório. Disponibilizar aulas, textos, vídeos para que os sujeitos possam acessar, baixar e comentar pode ser uma estratégia pedagógica importante, mas ela não é suficiente se as atividades e o acompanhamento dos formadores não forem sistemáticos e interligados hipertextualmente a esses materiais (Bairral, 2020, p. 199).

A escolha do ambiente, a tarefa, as tecnologias, as estratégias em EO são elaboradas e acompanhadas pelo professor ou pela equipe que efetivará as práticas. É importante ressaltar que não basta ter a tarefa perfeita sem um ambiente que ofereça condições para o seu desenvolvimento. Nesse sentido, vamos ao encontro do que defende Bairral (2020), ao definir *design* não o resumindo apenas a uma tarefa, mas como

um sistema amplo, vivo e articulado, um ecossistema de ensino e de aprendizagem. Por mais que uma tarefa esteja bem planejada, se não houver um ambiente interativo de seu aceite, de pertencimento autêntico e de sua transformação, os silêncios, os distanciamentos e as aversões para aprender online continuarão (Bairral, 2020, p. 198).

No planejamento desse *design*, o professor precisará antever possíveis caminhos de resolução que o aluno (ou o grupo de alunos) irá tomar, e também prováveis equívocos que podem emergir, tanto em relação à tarefa quanto ao ambiente escolhido para o desenvolvimento desta. Bairral (2020) nomeia esse exercício feito pelo professor de *antever possíveis desdobramentos do desenvolvimento da tarefa, no ambiente escolhido de antecipação pedagógica (AP)*, definindo-o como “uma ação docente, que busca evitar muitos atropelos que podem dificultar o aprendizado ou até mesmo causar o abandono do aprendiz. Problemas informáticos, didáticos, linguísticos, motivacionais, etc., são sempre objetos de atenção na AP” (Bairral, 2020, p. 199).

Compreender conceitos como EAD, EO, AVA, interação, *design* e AP influenciou nosso olhar em relação ao processo de ensino e aprendizagem *online*, possibilitando, assim, enxergar potencialidades em configurações de práticas de EO, por favorecer o trabalho em grupo de

professores e alunos, permitir diferentes caminhos na resolução de tarefas, requerer a organização de um ambiente *online* que favoreça a construção do conhecimento e a combinação de conhecimentos de todos os envolvidos. De certa forma, essas características percebidas em práticas de EO conversam com a dinâmica do processo de Modelagem Matemática discutidas na segunda seção. Assim, na próxima seção, descreve-se como concebemos tarefas de Modelagem Matemática possíveis de serem desenvolvidas nos moldes de práticas da EO.

#### 4 Tarefas de Modelagem Matemática elaboradas para práticas de Educação Online

Como mencionado na segunda seção, o *design* didático em um ambiente *online* não é composto apenas da tarefa. Ela é importante, no entanto, outros elementos — como as estratégias assumidas pelo professor na mediação — podem fazer com que os silêncios, distanciamentos, a sensação de pertencimento (ou não) sejam evitados ou potencializados. Esses elementos (tarefas, estratégias, interações) do *design* precisam ser pensados a depender do ambiente virtual ou AVA, da dinâmica *online* ou híbrida (presencial e *online*) e do perfil dos alunos que farão parte desse ecossistema.

Para Bairral (2018), a tarefa é uma peça que constitui a atividade formativa (tarefa+interação+colaboração), na qual se refere ao “exercício” a ser feito, enquanto a atividade relaciona-se ao aceite e efetivação dessa tarefa, ou seja, o caminhar. Por exemplo, o VMTcG é um AVA que dispõe de três espaços de interação *online* e síncrono, no qual cada espaço tem potencial de enriquecer uma investigação ao oferecer diferentes formas de comunicação, com diferentes linguagens: as construções no GeoGebra, as possibilidades de edição de textos e imagens no Quadro Branco, e os diálogos nos *chats*.

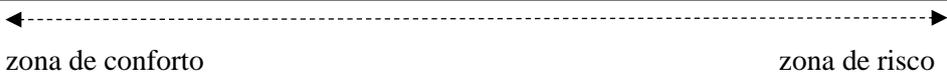
Porém, Bairral (2018) alerta que oferecer opções variadas de comunicação não é garantia de um processo interativo. Para o autor, “a tipologia das tarefas constitui elemento formativo importante no ambiente virtual, à medida que funciona como articuladora dos diferentes aspectos do conhecimento matemático” (Bairral, 2018, p. 43). Assim, cada contexto formativo exige tarefas variadas e, conseqüentemente, deflagram uma atividade formativa diferente. Nesse cenário, o autor, a partir de suas experiências com formação inicial de professores, reconhece que a elaboração de tarefas tem sido um desafio.

No contexto da Modelagem na Educação Matemática, a tarefa estimula “a colaboração e interação entre os alunos, professor e objetos investigados” (Braga, 2009). O termo “tarefa”, para Silva e Oliveira (2012), é entendido como similar ao termo “atividade”. Dessa forma, as autoras destacam que é necessário a organização de um ambiente que contenha uma situação-problema e um planejamento da aula e de estratégias para sua condução. Já para Prado, Silva e Santana (2013), “tarefa de Modelagem Matemática” é entendida como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a investigar matematicamente situações com referência na realidade, sendo essa definição um segmento da concepção de Modelagem Matemática de Barbosa (2001), discutida na segunda seção.

Tanto Silva e Oliveira (2012) quanto Prado, Silva e Santana (2013) pontuam em suas definições sobre tarefas de Modelagem Matemática a necessidade de uma situação-problema. Os últimos acrescentam ainda que essa situação tenha referência na realidade. Sobre referência, Alrø e Skovsmose (2010) abordam diferentes formas, que podem repercutir em diferentes tipos de ambiente de aprendizagem. Nesse contexto, os autores caracterizaram ambientes de investigação segundo três tipos de referências: a Matemática pura (atividades puramente matemáticas); a semirrealidade (realidade construída, situação artificial); o mundo real (realidade com elementos do contexto dos alunos). Prado, Silva e Santana (2013) elencaram três categorias de tarefas de Modelagem Matemática, que variam em fechada, semifechada e

aberta, explicitadas no Quadro 2.

**Quadro 2:** Categorias de tarefas de Modelagem Matemática

	<b>Fechada</b>	<b>Semifechada</b>		<b>Aberta</b>
Conteúdos matemáticos	São indicados os conteúdos a serem utilizados.	São indicados os conteúdos a serem utilizados.	Não são indicados os conteúdos a serem utilizados.	Não são indicados os conteúdos a serem utilizados.
Manipulação dos dados	É indicado como os alunos deverão manipular os dados.	Não é indicado como os alunos deverão manipular os dados.	É indicado como os alunos deverão manipular os dados.	Não é indicado como os alunos deverão manipular os dados.
Estratégias de resolução	Não há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Não há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.	Há possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução.
Solução	Há uma única solução.	Há possibilidade de soluções similares.	Há possibilidade de soluções similares.	Há possibilidade de diferentes soluções.
Enquadramento/limitações e possibilidade de comunicação	Enquadramento mais forte: apresenta um controle das interações comunicativas centradas no professor, bem como limita a comunicação dialógica entre professor e alunos.	Variações entre o enquadramento mais forte e mais fraco: apresenta variações no controle de interações comunicativas, ora por parte do professor, ora por parte dos alunos, bem como limita e possibilita a comunicação dialógica entre professor e alunos.		Enquadramento mais fraco: não apresenta um controle das interações comunicativas centradas no professor, bem como possibilita a comunicação dialógica entre professor e alunos.
				

**Fonte:** Prado, Silva e Santana (2013, p. 10)

A zona de conforto e a zona de risco assinaladas na base do Quadro 2 estão relacionadas com a atuação do professor no desenvolvimento das tarefas. Se ele tem mais controle, considerando situações conhecidas e previsíveis decorrentes da tarefa, o risco é menor. Assim, quanto menor o controle, maior a probabilidade de aparecer situações inesperadas, estando o professor preparado para enfrentá-las (Prado, Silva & Santana, 2013).

A partir do que foi exposto até aqui, consideramos para elaboração de tarefas de Modelagem Matemática a serem desenvolvidas nos moldes de práticas de EO, um *blend* do que foi destacado por Biarral (2018), juntamente com o que foi pontuado por Braga (2015), Silva e Oliveira (2012) e Prado, Silva e Santana (2013). Entendemos que o desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática figurará como uma atividade formativa, implementada de maneira

inteiramente *online* e síncrona no contexto desta pesquisa, na qual a tarefa é apresentada como proposta/convite de investigação de uma situação-problema, com potencial de deflagrar interações e trabalho colaborativo.

Dessa forma, as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática, de interação em um AVA, juntamente com as possibilidades dos espaços de interação de um AVA, permitiram organizar um *design* didático. Neste, as situações-problema (fechadas, semifechadas e abertas referenciadas na Matemática ou em semirrealidades) foram propostas por este autor, na condição de professor (mediador), para serem investigadas matematicamente por estudantes, em um ambiente *online* e síncrono.

## 5 O curso “Interações e estratégias de modelagem no ambiente VMT com GeoGebra”

O contexto em que se deu o desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática foi o curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, apresentado como projeto de extensão, submetido à Pró-Reitoria de Extensão (PROEXT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Campus Seropédica/RJ. A equipe do curso foi composta pelo coordenador, professor da UFRRJ, que orientou a elaboração, proposição e execução do curso; pelo autor deste trabalho, que estava em período sanduíche na UFRRJ atuando na elaboração, organização e mediação das sessões do curso; também por um mestrando da UFRRJ, que cuidou da criação das salas virtuais e do cadastro dos estudantes no ambiente VMTcG; e por um graduando bolsista da iniciação científica da UFRRJ que também atuou como mediador nas sessões.

O curso teve carga horária de 20 horas e foi realizado com graduandos de Matemática no segundo semestre de 2018. Para o curso, foram elaboradas cinco tarefas desenvolvidas em seis sessões. Cada tarefa era matematicamente independente uma da outra, com foco em tópicos de Geometria Plana (Quadro 3) e no desenvolvimento de características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática como estratégia para abordar e resolver situações-problema (Quadro 4).

**Quadro 3:** Tópicos de Geometria Plana

Sessões	Tarefas	Conceitos matemáticos
1	Quadrado	Propriedades do quadrado
2	Estação de bombeamento	Mediatriz e Circuncentro
3	Polígono ABCDE	Perímetro, teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos; funções em intervalos determinados.
4	Caminhando com Carol	Ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre pontos e velocidade.
5	Propondo uma nova tarefa	Os estudantes apontam conteúdos matemáticos para serem trabalhados nas abas quadro branco e GeoGebra do VMTcG.
6		

**Fonte:** Projeto de extensão (2018).

**Quadro 4:** Características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática

Sessões	Tarefas	Abordagens
1	Quadrado	Propor formas de construir o quadrado; construir argumentos; justificar argumentos; validar argumentos.
2	Estação de Bombeamento	Entender o problema; discutir possibilidades de abordagens do problema; discutir possibilidades matemáticas para resolução do problema; encontrar resposta ou respostas para o problema; justificar a resposta ou as respostas encontradas para o problema; validar a resposta ou as respostas encontradas para o problema. Modificar a resposta ou as respostas encontradas para o problema.
3	Polígono ABCDE	
4	Caminhando com Carol	
5	Propondo uma nova tarefa	Traçar um roteiro que privilegie características do processo de Modelagem Matemática baseada nas vivências das tarefas anteriores.
6		

Fonte: Projeto de extensão (2018).

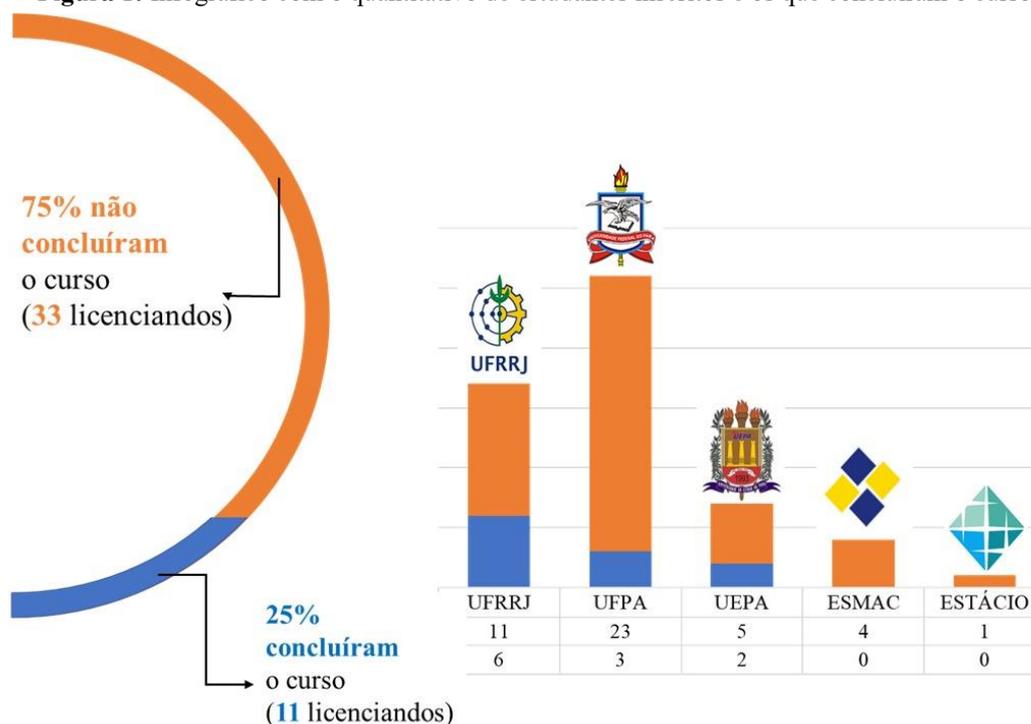
A divulgação do curso se deu por grupos do *WhatsApp* do GEMM e do GEPETICEM. Para inscrição, foi divulgado o *link* de um formulário *online*, disponível no Formulários *Google*, com perguntas pessoais e acadêmicas, como: nome, idade, *e-mail*, número de *WhatsApp*, curso e universidade. E perguntas referentes ao contexto do curso, como o nível de conhecimento com o GeoGebra e de onde os estudantes acessariam o ambiente VMTcG. O Formulário *Google* também foi usado como ferramenta avaliativa, por meio de formulários disponibilizados durante e ao final do curso.

Foram ofertadas trinta vagas e se inscreveram no curso quarenta e sete graduandos. Desses, foram indeferidas três inscrições, duas de professores já formados, que iam de encontro ao público-alvo definido para o curso, e uma de graduando que não possuía *WhatsApp* para comunicação e que não respondeu aos *e-mails* referentes a sua disponibilidade de horário para participar. Assim, o universo inicial e válido de inscritos no curso foi de quarenta e quatro estudantes (trinta e três do estado do Pará e onze do estado do Rio de Janeiro).

A partir da quantidade de inscritos, foram disponibilizadas treze opções de horários, distribuídos de segunda a sábado, nos turnos da manhã, tarde e noite, podendo escolher até duas opções. Com os horários escolhidos, foram formados onze grupos variando de três, quatro e cinco estudantes. Assim, o critério para a composição dos grupos se deu exclusivamente pela coincidência de horários determinados pelos participantes.

No decorrer do curso, a quantidade de estudantes foi diminuindo. As justificativas variaram entre dificuldade em conciliar o curso com atividades do dia a dia, dificuldade de acesso a computadores, à internet e à linguagem de programação JAVA, sem a qual não era possível conectar às salas do VMTcG. Outros alunos não informaram seus motivos, deixando apenas de responder às tentativas de contato por *WhatsApp* e *e-mail*. As desistências são evidenciadas no infográfico da Figura 1.

**Figura 1:** Infográfico com o quantitativo de estudantes inscritos e os que concluíram o curso



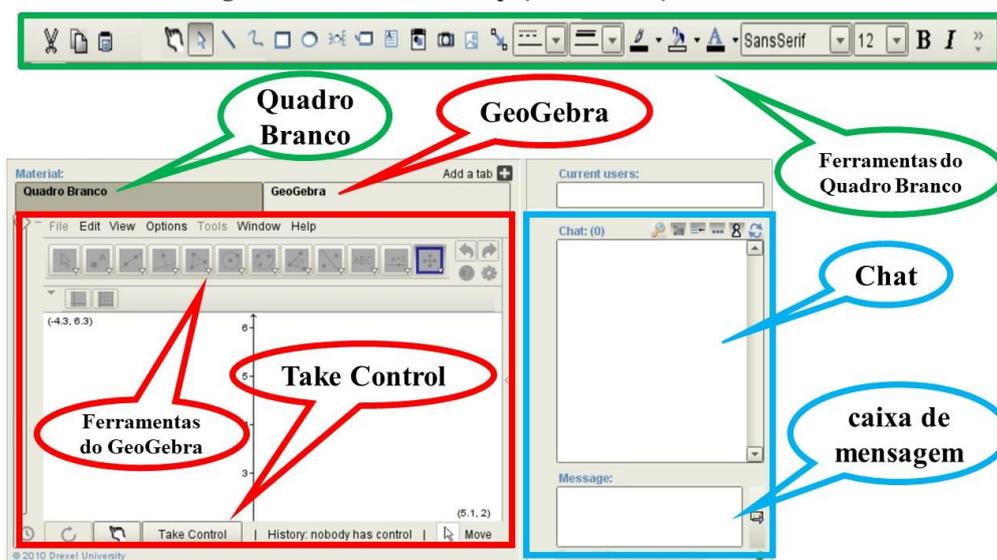
**Fonte:** Menezes (2021).

Na Figura 1, apresentamos um paralelo entre o quantitativo de estudantes inscritos e os que concluíram o curso. Ainda no planejamento e elaboração do curso, era esperada a desistência de alguns graduandos, por isso não optamos por uma seleção inicial dos inscritos, considerando experiências já vivenciadas e também com base no que já vinha sendo apontado por outros autores. Em Malheiros (2008), dos vinte e três professores de Matemática inscritos, somente quinze cursaram todo o cronograma do curso; em Pereira (2015), dos sete docentes de Matemática estudantes, um não concluiu; e em Bustamante (2016), dos vinte professores de Matemática inscritos, quinze finalizaram e foram aprovados no curso. No entanto, a quantidade elevada de desistentes do curso no VMTcG superou a margem esperada.

Números próximos a este, mesmo em um contexto totalmente diferente e considerando inscritos e escolhidos para o curso, só foram percebidos no trabalho de Ferreira (2010), que de cinquenta e seis professores interessados em participar do curso foram selecionados doze. Não se deve entender a retomada desses trabalhos como uma tentativa de comparar com as desistências ocorridas. Contudo, ao mesmo tempo, é curioso o elevado índice de evasão de um curso na modalidade a distância, síncrono, voltado para estudantes, quando comparado aos índices de evasão de cursos na modalidade a distância, assíncronos ou híbridos, voltados para formação continuada de professores. O alto índice de desistência não foi impeditivo para a realização do curso. Mantiveram-se onze estudantes distribuídos em três grupos que realizaram as sessões planejadas.

As sessões aconteceram no VMTcG e duravam, em média, duas horas, sendo uma sessão por semana. Nesse ambiente *online*, os estudantes interagiam nos espaços Quadro Branco, GeoGebra e *chat*, como apresentados na Figura 2.

Figura 2: Elementos dos espaços de interação do VMTcG



Fonte: VMTcG (2018).

As ferramentas da aba Quadro Branco eram semelhantes às de editores de textos conhecidos, como o *Word*. Nela, os estudantes interagiam simultaneamente escrevendo textos, construindo formas, escolhendo o tipo e tamanho da fonte, inserindo figuras, dentre outras interações. A versão do GeoGebra no VMT estava em língua inglesa e os estudantes não manipulavam suas ferramentas simultaneamente; o uso se restringia a um estudante por vez e, para utilizá-lo, era preciso que o participante clicasse na tecla “take control”. A coordenação de interações dos estudantes no Quadro Branco e GeoGebra se dava por meio de mensagens trocadas no *chat*.

Os estudantes só ficavam sabendo das tarefas nos dias dos encontros, no VMTcG. Como eles não tinham experiência anterior nesse tipo de curso e de cenário *online*, a tarefa do “Quadrado” foi pensada para ambientação (familiarização) com as ferramentas do VMTcG. As duas últimas sessões foram de culminância das atividades do curso, com a tarefa “Propondo uma nova tarefa”. Dessa forma, para este trabalho, ocupamo-nos das três tarefas de Modelagem Matemática que os licenciandos precisaram trabalhar em grupos para solucionar as situações-problema: “Estação de Bombeamento”, “Polígono ABCDE” e “Caminhando com Carol”.

## 6 A tarefa Estação de Bombeamento

Para o planejamento, consideramos características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática, como situações-problema com referência em semirrealidades ou na Matemática pura, parceria do mediador e dos licenciandos, generalização das informações da situação investigada e o modelo matemático. Consideramos também conceitos de EO, dentre eles, características de interação em um AVA de Souza e Bairral (2016).

A tarefa “Estação de Bombeamento” foi elaborada pelo primeiro autor deste artigo, juntamente com o coordenador do curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMT com GeoGebra”, a partir do problema do oleoduto: Os proprietários de um oleoduto dado abaixo planejam construir uma estação de bombeamento no oleoduto para levar óleo a dois grandes clientes. Para minimizar o custo de construção de linhas da estação de bombeamento para ambos os clientes, eles desejam localizar a estação de bombeamento ao longo do oleoduto de forma que a distância do segundo cliente à estação de bombeamento seja minimizada. Encontre a localização da estação de bombeamento. Justifique sua resposta.

O problema do oleoduto combinado com as ideias discutidas acerca do conceito de mediatriz aplicado à elaboração do diagrama de Voronoi permitiu-nos adaptar a situação-problema da tarefa apresentada no Quadro 5:

**Quadro 5:** Tarefa Estação de Bombeamento

**Tarefa:** Os proprietários de um oleoduto planejam construir uma estação de bombeamento para transportar óleo para três clientes em três cidades. Na tentativa de minimizar o custo de construção das linhas da estação de bombeamento até os clientes, eles desejam localizar a estação de bombeamento em uma determinada região em que as distâncias das cidades dos clientes até a estação sejam as mesmas. No mapa abaixo estão localizadas as cidades dos três clientes. Se vocês fossem responsáveis pelo projeto da construção dessa estação de bombeamento, como encontrariam a localização ideal dessa região para construí-la? Analisem e proponham uma possibilidade.



**Fonte:** Curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG” (2018).

A tarefa foi planejada para que os licenciandos trabalhassem os conceitos de mediatriz e circuncentro. O objetivo que imaginamos para os grupos era que localizassem onde poderia ser construída uma estação de bombeamento a partir de três cidades em uma determinada região. No entanto, em se tratando da imprevisibilidade do processo de Modelagem Matemática, esse objetivo poderia se cumprir, poderia ser modificado durante o andamento da sessão ou os estudantes poderiam assumir outro objetivo.

No desenvolvimento da tarefa “Estação de Bombeamento”, foi possível enxergar as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática destacadas na primeira seção: o início do processo com situações-problema, referenciadas na Matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

Inicialmente, os estudantes foram apresentados à tarefa “Estação de Bombeamento”, que mostrava uma situação-problema referenciada em uma semirrealidade, na qual os estudantes investigaram uma realidade construída, ou melhor, uma situação artificial que provocou discussões sobre a construção de uma estação de bombeamento considerando a localização de três cidades reais pertencentes a três estados brasileiros.

O trabalho em grupo é uma característica comum de práticas de Modelagem Matemática e de Educação *Online*, e na tarefa “Estação de Bombeamento” foi observado que os estudantes, juntamente com a mediação do professor, conseguiram, a partir de suas interações, propor, negociar, argumentar sobre os rumos da investigação.

A passagem do contexto da situação-problema investigada para o contexto matemático no GeoGebra configurou a generalização de informações resultando em uma primeira solução matemática que atendia à situação-problema proposta pela tarefa, pois foi encontrado o ponto notável circuncentro que era equidistante aos vértices do triângulo (cidades-clientes). No entanto, a discussão trazida pelo mediador requeria que os estudantes observassem aspectos para além do que estava proposto na situação-problema apresentada, já que mesmo encontrando um ponto equidistante, isso não garantiria economia para os clientes. Por outro lado, o encontro das medianas (baricentro) discutido no desenvolvimento da tarefa não era equidistante as três cidades, porém, apresentava menor custo se somadas as distâncias do baricentro às cidades consideradas, e desta forma, maior economia para os clientes. Além dessas questões, outras envolvendo aspectos geográficos dos estados e questões ambientais foram fomentadas.

Nesse contexto, entendemos os pontos notáveis circuncentro e baricentro como modelos matemáticos, pois permitiram aos estudantes responderem à situação-problema investigada por dois caminhos: o circuncentro atendendo à condição de estar a uma mesma distância das três cidades e isso não sendo indício de economia para os clientes, e o baricentro com distâncias diferentes, mas podendo atender à característica de economizar gastos. Ambos os pontos notáveis construídos refletem capturas dos estudantes das estruturas essenciais da situação-problema investigada.

## 7 A tarefa Polígono ABCDE

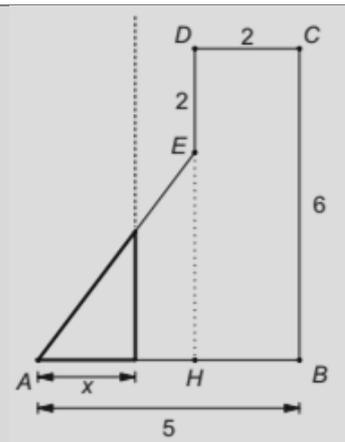
A tarefa “Polígono ABCDE” foi adaptada de uma questão do projeto nacional da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Na questão original, ações diretas como “calcule”, “escreva as expressões” e “esboce o gráfico” foram requeridas, o que respectivamente incidia em repostas para cada item pedido. O aspecto da questão original que nos fez escolhê-la para o curso foi a necessidade de movimentação de um segmento sobre um polígono. Contudo, para que isso acontecesse, o aluno precisaria imaginar ou esboçar dois ou mais desenhos, de acordo com a posição do segmento sobre o polígono.

Nesse contexto, entendendo que a questão original poderia ser trabalhada usando o GeoGebra, a tarefa “Polígono ABCDE” foi adaptada para que os licenciandos trabalhassem com os conceitos de perímetro, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, funções em intervalos determinados, usando a aba GeoGebra do VMT. O objetivo dos grupos era encontrar uma função  $f(x)$  que relacionasse os perímetros de dois polígonos formados pelo corte vertical de um segmento de reta, como exposto no Quadro 6.

Inicialmente, os estudantes foram apresentados à tarefa “Polígono ABCDE”, que mostra uma situação-problema referenciada na Matemática, na qual os estudantes averiguaram uma situação-problema puramente Matemática e investiga uma relação algébrica entre a medida do comprimento  $x$  com o perímetro do polígono de acordo com o intervalo considerado.

**Quadro 6:** Tarefa Polígono ABCDE

**Tarefa:** a figura mostra um polígono ABCDE, no qual todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura. Considerem, agora, uma reta vertical distante  $x$  do vértice A, com  $0 < x \leq 5$ . Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considerem a função  $f$  que associa a cada valor de  $x$  o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo,  $f(3)$  é o perímetro do triângulo AHE, enquanto  $f(5)$  é o perímetro do polígono ABCDE. Analisem possibilidades de  $f(x)$  para  $0 < x \leq 3$  e para  $3 < x \leq 5$ . Essas possibilidades poderiam ser representadas graficamente? Qual representação vocês propõem?



**Fonte:** Curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG” (2018).

O trabalho em grupo aconteceu, mas em muitos momentos houve silêncios na sessão, fazendo-nos inferir que os estudantes estavam individualmente tentando encontrar uma solução para a situação-problema. Os graduandos deram indícios de generalizações com suposições de funções que poderiam explicar a variação do comprimento  $x$  em relação ao perímetro do polígono. Nessa sessão, os estudantes não conseguiram encontrar um modelo matemático para a situação-problema investigada.

## 8 A tarefa Caminhando com Carol

A tarefa caminhando com com Carol foi adaptada de uma atividade encontrada no de trabalho de Brito, Oliveira e Milani (2015). Não foram feitas grandes modificações no comando da situação-problema, pois ela já tinha características de investigação que ensejavam nos estudantes discutir possibilidades de abordagem e de conteúdos matemáticos. As mudanças foram no contexto, nos nomes dos vilarejos (de Ardale e Brushwood para Jacaré e Conceição), no termo escrito em inglês (de *square clearing* para clareira), e no nome da personagem da situação-problema (de Kim para Carol), conforme apresentado no Quadro 7.

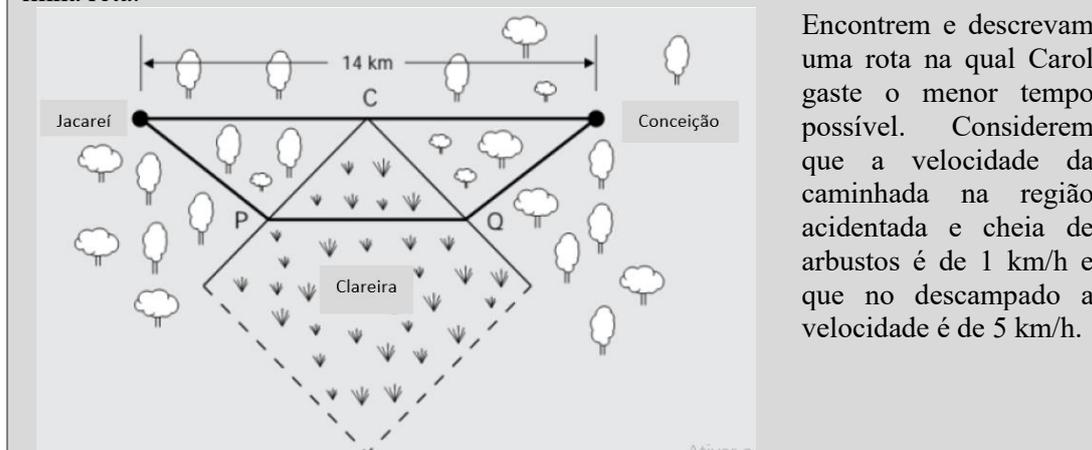
O desenvolvimento da tarefa “Caminhando com Carol” foi planejado para que os licenciandos trabalhassem com os conceitos de ponto médio, segmentos de retas paralelas, mediatriz, distância entre pontos e velocidade. O objetivo dos grupos era encontrar um caminho em que Carol fosse de Jacaré até Conceição no menor intervalo de tempo possível. No desenvolvimento desta tarefa, também foi possível enxergar as características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática destacadas na primeira seção.

Inicialmente, os estudantes foram apresentados à tarefa “Caminhando com Carol”, que figurava uma situação-problema referenciada em uma semirrealidade. Os graduandos também investigaram uma realidade construída, provocando discussões sobre possibilidades de caminhos a serem percorridos em menor tempo por Carol de Jacaré até Conceição considerando a passagem por um descampado quadrangular ou em linha reta alterando a velocidade a depender do caminho escolhido.

**Quadro 7:** Tarefa “Caminhando com Carol”

**Tarefa:** Carol está planejado fazer uma caminhada de Jacaré até Conceição. O itinerário em linha reta, cuja distância é de 14 km, a obrigará a atravessar uma região de relevo acidentado e cheia de arbustos. Entretanto, há um grande descampado quadrangular, cujo lado mede 7 km, localizado conforme ilustra a figura a seguir. O canto C desse descampado é o ponto médio do itinerário em linha reta de modo que a diagonal do descampado está

contida na mediatriz desse itinerário. Carol segue uma rota parecida com a que é mostrada da figura a seguir, atravessando o descampado de P até Q paralelamente ao itinerário em linha reta.



**Fonte:** Curso “Interações e estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG” (2018).

Mesmo sendo uma sessão afetada por problemas de conectividade, os estudantes que permaneciam trabalharam em grupo, opinando na forma de proceder do outro, argumentando em favor da ideia do colega e na negociação de abordagens com o mediador.

A passagem do contexto da situação-problema investigada para o contexto matemático no GeoGebra configurou a generalização das informações, pois os estudantes conseguiram construir uma figura geométrica dinâmica que permitia observar todos os caminhos possíveis a serem percorridos por Carol, de um vilarejo a outro em menor tempo.

Nesse contexto, entendemos essa construção como o modelo matemático encontrado pelos estudantes, pois, a partir da movimentação da figura, os participantes conseguiram comparar diferentes possibilidades de caminhos, encontrando o que consideravam mais eficiente para Carol percorrer em menor tempo. Assim, entendemos também essa construção como uma captura de características essenciais dos caminhos possíveis de serem percorridos na situação-problema investigada.

## 9 Conclusão

Partindo do objetivo de apresentar aspectos teóricos e práticos que influenciaram na composição desse curso e de suas tarefas para o seu desenvolvimento inteiramente síncrono e *online* em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), pontuamos algumas considerações.

Para explanar sobre esse objetivo, retomamos características da dinâmica do processo de Modelagem Matemática consideradas para a elaboração e desenvolvimento das tarefas, de forma síncrona, no ambiente *online* VMTcG: o início do processo com situações-problema, referenciadas na Matemática ou na realidade dos alunos; trabalho em grupo, alunos e professores sendo parceiros no processo de ensino e aprendizagem; a generalização de informações da situação-problema investigada; e o modelo matemático como síntese das escolhas e estratégias traçadas para alcançá-lo.

A tarefa “Estação de Bombeamento” apresentou uma situação-problema aberta, no sentido de admitir mais de uma solução, referenciada na realidade dos estudantes, não indicando conteúdos matemáticos e nem formas de abordagens, estratégias, resoluções, soluções. O Quadro Branco serviu como apoio para postagem da tarefa, o *chat* colaborou para as discussões, reflexões, negociações, juntamente com o GeoGebra, no qual as construções em seu espaço permitiram que os graduandos embasassem suas conjecturas.

A condução do mediador permitiu autonomia dos alunos na tomada de decisões e nos direcionamentos para a construção dos modelos matemáticos e das respostas derivadas deles. Configurando, dessa maneira, uma condução mais fraca do mediador, não centrando a comunicação dialógica nele e sim nos alunos, favorecendo o trabalho colaborativo. Nesse cenário, observamos que os estudantes aceitaram o convite de investigação da situação-problema, deflagrando poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos.

A tarefa/atividade “Polígono ABCDE” apresentou uma situação-problema fechada, admitindo uma única solução, com referência na própria Matemática, indicando conteúdos matemáticos, o que influenciou as intervenções do mediador, que encaminhou os estudantes para a resolução que ele conhecia. Os graduandos ficaram bastante tempo discutindo estratégias e dúvidas no *chat*, observando a figura no GeoGebra, ficando desgastados quando o mediador começou a direcioná-los na forma de resolver a questão, a partir da construção do GeoGebra. Configurando, assim, uma condução forte do mediador, não permitindo uma comunicação dialógica entre os estudantes, que passaram a usar espaços para testar suas conjecturas fora do VMTcG, de forma individual, minando o trabalho colaborativo e a conclusão da tarefa.

A tarefa “Caminhando com Carol” apresentou uma situação-problema semifechada. Admitia uma única solução, referenciada na realidade dos estudantes, não indicando conteúdos matemáticos a serem utilizados. Inicialmente, os dois percursos apresentados permitiam descobrir qual poderia ser percorrido em menor tempo, no entanto, isso mudou a construção dinâmica realizada no GeoGebra, o que modificou o tom da investigação e das intervenções do mediador, configurando uma condução, variando entre momentos mais fortes e mais fracos. Desse modo, possibilitando uma comunicação dialógica entre os estudantes nas reflexões, conjecturas, negociações, validações e no trabalho colaborativo.

Vale ressaltar que a pesquisa que embasou este artigo foi desenvolvida durante o ano de 2018, antes do período pandêmico que estamos vivenciando desde 2020. Este trabalho apresenta contribuições no sentido de possibilitar discutir uma proposta de Modelagem Matemática articulada em uma prática de Educação *Online* que potencializou processos de ensino e de aprendizagem colaborativo e crítico, mostrando-se como mais uma opção a ser considerada quando professores de Matemática e alunos são privados de interagir presencialmente.

## Referências

- Almeida, L. M. W.; Silva, K. P. & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo, SP: Contexto.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2010). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. (2a. ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Bairral, M. A. (2020). Algumas postagens para sair provisoriamente do ambiente, mas para potencializar a educação online. In: M. A. Bairral (Org.). *Ambiências e redes online: interações para ensino, pesquisa e formação docente*. (1a. ed., pp. 197-207). São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.
- Bairral, M. A. (2018). *Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distância*. (2a. ed.). Seropédica, RJ: Edur.
- Bairral, M. A. (2015). Pesquisas em educação matemática com tecnologias digitais: algumas faces da interação. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 485-505.
- Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros*

- professores*. 2001. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.
- Bassanezi, R. C. (2012). *Temas e modelos*. Campinas, SP: UFABC.
- Biembengut, M. S. (2016). *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo, SP: Livraria da Física.
- Braga, R. M. (2015). *Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engeström*. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.
- Braga, R. M. (2009). *Modelagem Matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.
- Burak, D. (2004). Modelagem Matemática e a sala de aula. In: *Anais do Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*. Londrina, PR.
- Bustamante, J. E. G. (2016). *Modelagem Matemática na modalidade online: análise segundo a teoria da atividade*. 2016. 213f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.
- Chaves, M. I. A. & Espírito Santo, A. O. (2011). Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: L. M. W. Almeida; J. Araújo & E. Bisognin (Org.). *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática* (pp. 161-179). Londrina, PR.
- Chaves, M. I. A. & Espírito Santo, A. O. (2008). Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 21(30), 149-161.
- Costa, P. O. (2010). *Educação on-line na Universidade: o processo de ensinar e aprender cálculo na era das tecnologias digitais*. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas). Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, MG.
- Ferreira, C. R. (2010). *Modelagem Matemática na Educação Matemática: contribuições e desafios à formação continuada de professores na modalidade Educação a Distância Online*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, PR.
- Frejd, P., & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: Ideas for education. *ZDM*, 50(1), 117-127.
- Giraldo, V.; Caetano, P. & Mattos, F. (2012). *Recursos computacionais no ensino de Matemática*. Rio de Janeiro, RJ.
- Malheiros, A. P. S. (2008). *Educação Matemática online: a elaboração de projetos de modelagem*. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.
- Menezes, R. O. (2019). Mapeamento em Dissertações e Teses de Atividades de Modelagem Matemática Desenvolvidas na Modalidade a Distância. In: *Anais da 39ª Reunião Nacional ANPEd*. Niterói, RJ.
- Menezes, R. O. (2020). Formação inicial do professor que ensina Matemática: proposta de um modelo de ensino online e síncrono no ambiente VMTcG. In: M. A. Bairral (Org.). *Ambiências e redes online: interações para ensino, pesquisa e formação docente*. (1a. ed., pp. 137-152). São Paulo, SP: Livraria da Física.

- Menezes, R. O. (2021). *Modelagem Matemática Online: temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas*. 2021. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.
- Menezes, R. O. & Bairral, M. A. (2020). Interações em um ambiente de aprendizagem online e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra?. *Revista Paradigma*, 41(Extra 2), 277-304.
- Mercado, L. P. L. (2009). Integração de mídias nos espaços de aprendizagem. *Em Aberto*, 21(79).
- Meyer, J. F. C. A.; Caldeira, A. D. & Malheiros, A. P. S. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Pereira, R. S. G. (2015). *A educação a distância e a formação continuada de professores de matemática: contribuições de um contexto formativo para a base de conhecimento docente*. 2015. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, SP.
- Prado, A. S.; Silva, L. A. & Santana, T. S. (2013). Uma Análise Bernsteiniana de Tarefas de Modelagem Matemática no Caso 1. In: *Anais da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*. Santa Maria, RS.
- Santana, T. (2010). *Avaliação discente de um curso de modelagem matemática a distância*. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências), Universidade Federal da Bahia. Salvador, BA.
- Schroetter, S. M., Stahl, N. S., Chrysostomo, C. S., & Duncan, C. R. (2016). A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9º ano. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 18(1), 373-396.
- Silva, L. A. D., & Oliveira, A. M. P. D. (2012). As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, 1071-1101.
- Souza, R. M., & Bairral, M. A. (2016). Acessar ou interagir? Uma análise em Disciplinas da Licenciatura em Matemática no CEDERJ. *EAD em Foco*, 6(3), 39-49.