 https://doi.org/10.24844/EM3501.08

Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial

Actions and expressions of understanding the limit of a function at a point, by calculus students

Sergio Alexander Guarin Amorocho,[1]
Sandra Evely Parada Rico[2]

Resumen: Este artículo responde a la inquietud: ¿Qué comprensiones logran, sobre el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia? Se toma "comprensión" de la manera descrita por la teoría de Pirie y Kieren (1989), en términos de las complementariedades de la acción y expresión. Para responder a la pregunta, se diseñó una secuencia de actividades alrededor del concepto de límite de una función en un punto, usando las nociones de aproximación y tendencia por medio del software de matemática dinámica GeoGebra. Para el estudio se siguió a un estudiante como caso de estudio, quien desarrolló completa la secuencia de actividades diseñada. Ese estudiante exhibió evidencias de comprensión, desde la perspectiva teórica en la que se posiciona el estudio, realizando complementariedades de la acción y expresión asociadas al nivel que Pirie y Kieren (1989) llaman de "formalización", logrando identificar las propiedades comunes de las clases de imágenes que había construido a medida que iba desarrollando las actividades.

Fecha de recepción: 5 de noviembre de 2021. **Fecha de aceptación:** 22 de enero de 2023.
[1] Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña, Colombia, saguarina@ufpso.edu.co, orcid.org/0000-0002-8020-6740.
[2] Universidad Industrial de Santander, Colombia, sanevepa@uis.edu.co, orcid.org/0000-0001-5468-0943.

Palabras claves: *Comprensión, acción, expresión, límite, función.*

Abstract: This article responds to the concern: What understandings do students who participate in a differential calculus course in which the notions of approximation and trend are explored, about the concept of limit of a function at a point? "Understanding" is taken in light of the theory of Pirie and Kieren (1989) who describe it in terms of the complementarities of action and expression. To answer the question, a sequence of activities was designed around the concept of limit of a function at a point using the notions of approximation and trend through the GeoGebra dynamic mathematics software. For the study, a student was followed as a case study, who developed and completed the designed sequence of activities. This student exhibited evidence of understanding, from the theoretical perspective in which the study is positioned, performing complementarities of action and expression that are associated with the "Formalization" level of Pirie and Kieren (1989), managing to identify the common properties of the kinds of images that he had built as he developed the activities.

Keywords: *Understanding, action, expression, limit, function.*

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas de la educación superior han generado un campo fértil de investigación, en el que se ha evidenciado el interés por parte de algunos investigadores como Sierpinska (1987), Tall (1991), Dreyfus (1991), Artigue (1995) en profundizar en el estudio de fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral.

En particular, la enseñanza del cálculo diferencial y, en especial, el concepto de límite se ha constituido uno de los mayores desafíos de la educación matemática. Al respecto, Blázquez y Ortega (2000) afirman que "para los estudiantes éste es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p. 331).

Autores como Cornu (1991), Tall (1992), Hitt (2003), Vracken *et al.* (2006), entre otros, han reflexionado sobre el aprendizaje y enseñanza del cálculo y exponen que existen dificultades de aprendizaje en torno al concepto de límite que impiden de manera natural la comprensión del mismo. Entre estas dificultades, se pueden destacar: las generadas por el lenguaje y el uso de términos como "límite", "tender" o "aproximarse", los cuales tienen un significado ordinario que distorsiona el concepto matemático formal; el deseo de reducir el límite a una operación algebraica; la identificación de una cantidad que se hace cada vez más pequeña, un infinitésimo, y si es una cantidad que se hace arbitrariamente grande sugiere la idea del infinito; dificultades relacionadas con si el límite es un valor que se alcanza o no, y la confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Así mismo, Cornu (1991) menciona que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza,

> ... sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite resultarán muy difíciles de aprender a partir de su definición matemática, una de las múltiples facetas del concepto de límite es la idea de aproximación. Muchas veces la idea de aproximación es el primer encuentro que los estudiantes tienen del concepto de límite a través de la noción dinámica de límite. (p. 153)

Por su parte, Cornu (1991), Hitt (2003) y Kidron (2014) enfatizan que el aprendizaje del concepto de límite es fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo, a su vez que requiere de un conocimiento sobre los procesos infinitos. Además, Hitt (2003) menciona que si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Del mismo modo resalta el desarrollo de las habilidades que están ligadas a la visualización matemática ya que podrán impulsar a los alumnos a un nivel más profundo de los conceptos fundamentales del cálculo.

En ese sentido, para lograr la comprensión de conceptos matemáticos Blázquez (1999) plantea la necesidad de recurrir a los diferentes tipos de representación (en el sentido de Duval, 2006), porque según este autor todo concepto está asociado a ciertas imágenes visuales, ciertos vínculos con otros conceptos y con el lenguaje habitual, diferentes propiedades en diferentes contextos, que pueden parecer intrínsecas al propio concepto y se pueden expresar utilizando distintos sistemas de representación. Además, todo forma parte de una imagen conceptual, que no siempre es coherente con la definición del concepto. Es por lo que, para Tall y Vinner (1981), comprender un concepto no se centra en entender su definición, sino crear una imagen conceptual rica y coherente.

Las diferentes dificultades han generado que, desde la didáctica de la matemática, surjan investigaciones que busquen indagar sobre los problemas en el aprendizaje en torno al concepto de límite de una función. Entre las investigaciones, resaltan las que usan la noción de aproximación y tendencia para la coordinación de los procesos vinculados a la comprensión del límite de una función (Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez *et al*., 2006; Valls *et al*., 2011). Por su parte, Kidron (2010) y Fernández (2010) en sus investigaciones han utilizado los diferentes tipos de representación para analizar el desarrollo de la comprensión del límite de una función. También encontramos estudios que analizan cuáles son esas concepciones, intuiciones y definiciones utilizadas en el aula de clase (Przenioslo, 2004; Gücler, 2013; González *et al*., 2021). Y otras que muestran cómo el uso de herramientas tecnológicas potencializa la visualización matemática y da un panorama dinámico de lo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite de una función (Rangel *et al*., 2014; Betancur *et al*., 2015).

En particular, en esta investigación se aprovechan algunas de las ideas mencionadas, con el fin de diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades (organizada para su implementación en seis talleres) que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia. En este artículo se exhibe una síntesis de los resultados generales de la investigación, mediante un estudio de caso de un estudiante al que hemos llamado Kevin.

2. ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

El sustento teórico de la investigación se centra en tres aspectos fundamentales: en primera instancia, usamos la teoría de Pirie y Kieren (1989) porque nos permite ofrecer descriptores de la comprensión de un objeto matemático a partir de acciones y expresiones. Esta teoría ha sido usada por investigaciones en didáctica del cálculo como las reportadas por Villa-Ochoa (2011), Londoño (2011), entre otros. Por otra parte, nos acercamos a las concepciones de la enseñanza y del aprendizaje del límite desde autores como Blázquez y Ortega (2002), García, Serrano y Díaz (2002), Pons (2014) y Mira (2016), que nos mostraron orientaciones didácticas para la estructura de la secuencia de actividades. Y, por último, para diseñar los talleres nos acogimos a la propuesta metodológica de Fiallo y Parada (2018), pues engrana la interacción con los objetos matemáticos de estudio (mediante GeoGebra), la resolución de problemas y debate en el aula.

2.1 Teoría para la comprensión matemática

La teoría propuesta por Pirie y Kieren (1989) describe la evolución de la comprensión matemática como un todo dinámico, estratificado, recursivo, pero no lineal, que permite resignificar el conocimiento durante el proceso de aprendizaje. Esta teoría es una herramienta que actúa como un lente (traducción del autor), a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión matemática de un individuo o de un grupo de individuos en ocho niveles que conforman su aspecto descriptivo; a saber*: 1) Conocimiento primitivo; 2) Creación de la imagen; 3) Comprensión de la imagen; 4) Observación de la propiedad; 5) Formalización; 6) Observación; 7) Estructuración; 8) Invención*. Además, la teoría aporta tres características que permiten dar cuenta de la comprensión: i) Resignificar conocimientos (traducción propia del autor al término "*folding back*" que se menciona en la teoría), ii) Límites de alta de necesidad, y iii) Complementariedades de la acción y expresión.

En nuestra investigación nos apegamos a la característica de las complementariedades de la acción y expresión, la cual Pirie y Kieren (1994) describen así:

> ... más allá del primer nivel "conocimiento primitivo", cada nivel se compone de una complementariedad de acción y expresión y que cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión es necesario, antes de moverse desde cualquier nivel. Además, el crecimiento ocurre actuando primero y luego expresando, pero con más frecuencia a través de y desde el movimiento entre estos aspectos complementarios. En cualquier nivel, la acción (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel. (p. 175)

Lo anterior, aclara que las acciones y las expresiones son registradas por los estudiantes cuando están comprendiendo conceptos matemáticos en situaciones de aprendizaje. Ellas, además, destacan la importancia de expresar con respuestas, procedimientos no esperados, una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas. Así, las acciones y expresiones permiten describir en cada uno de los niveles la comprensión del concepto de límite de una función en un punto. Además, Pirie y Kieren (1994) mencionan ciertos términos que sirven para etiquetar las complementariedades de la acción y la expresión para cada nivel, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Complementariedades de la acción y expresión del modelo de Pirie y Kieren (1994)

	COMPLEMENTARIEDADES	
NIVEL	**ACCIÓN**	**EXPRESIÓN**
Conocimiento primitivo		
Creación de la imagen	Realización de la imagen	Análisis de la imagen
Comprensión de la imagen	Visualización de la imagen	Expresión de la imagen
Observación de la propiedad	Predicción de la propiedad	Registro de la propiedad
Formalización	Aplicación del método	Justificación del método
Observación	Identificar la característica	Descripción de la característica
Estructuración	Conjeturar el Teorema	Demostración del Teorema
Invención		

2.2 Nociones que rodean el concepto de límite

El concepto de límite ha sido particularmente difícil de enseñar y aprender, pues como lo menciona Cornu (1991) es "propio del Pensamiento Matemático Avanzado con una posición central en el análisis matemático, fundamental en la teoría de aproximación, de continuidad y del cálculo diferencial e integral" (p. 153) (traducción del autor). En ese mismo sentido, investigaciones realizadas por Blázquez y Ortega (2002), García *et al.* (2002), Pons (2014) y Mira (2016) han reportado que para lograr su comprensión se deben tener en cuenta aspectos como: las nociones de aproximación y tendencia, la concepción dinámica del límite de una función en un punto, la concepción óptima del límite de una función en un punto y la concepción métrica del límite de una función en un punto; elementos que fueron utilizados durante el desarrollo de la investigación.

Por ejemplo, Blázquez y Ortega (2002) usan las nociones de aproximación y tendencia con el fin de plantear una definición del concepto de límite funcional, la cual los estudiantes recuerden fácilmente, esto de manera similar a como lo hizo D'Alembert, nociones que precisan así:

> Aproximación: Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores. Por ejemplo: Los valores $3{,}1209; 3{,}12009; 3{,}120009; \ldots$ se aproximan a 3 porque los errores son $0{,}1209; 0{,}12009; 0{,}120009; \ldots$ pero también se aproximan a $3{,}1$ (los errores son $0{,}0209; 0{,}02009; 0{,}020009; \ldots$), a $3{,}12$ ($0{,}0009; 0{,}00009; 0{,}000009; \ldots$), etcétera.
>
> Tendencia: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable. Por ejemplo: Los valores $3{,}1; 3{,}01; 3{,}001; 3{,}0001; \ldots$ son aproximaciones de 3, pero ademásla proximidad que se logra con este tipo de valores es mayor que con cualquier número distinto de 3, pues si tomamos, por ejemplo, $2{,}99999999$ como aproximación de 3 (el error es 0,000000001) y, por ejemplo, el valor $3{,}000000001$ mejora la aproximación (el error es 10 veces menor). (p. 80)

De igual forma, García *et al.* (2002) realizan un estudio relacionado con la aproximación como noción básica del cálculo, donde definen aproximación como:

> ... una expresión relacional, que establece una relación entre un valor exacto y el valor aproximado, la posibilidad de aceptar que una representación es la representación aproximada de un valor exacto exige usar la regla del error absoluto. (p. 17)

En ese sentido, la tendencia, tal como lo mencionan García *et al.* (2002) "exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo, lo que permite aceptar cierta regularidad en las aproximaciones obtenidas en el proceso para intuir un resultado final" (p. 17). Ellos, además, mencionan que la aceptación de estas regularidades implica considerar que los errores absolutos de la aproximación se hacen tan pequeños como se desee.

Por su parte, Blázquez y Ortega (2002) exponen que generalmente el primer acercamiento que tienen los estudiantes de bachillerato y de recién ingreso a la universidad al concepto de límite de una función es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada de la siguiente manera:

> Sea $"f"$ una función y $"a"$ un número real, el número $"L"$ es el límite de la función $"f"$ en el punto $"a"$, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando $"x"$ tiende al número $"a"$, siendo distinto de $"a"$, sus imágenes $"f(x)"$ tienden a $"L"$. (p. 80)

Esta concepción se usa durante la investigación con el fin que los estudiantes construyan sucesiones de ciertos valores en el dominio y en el rango de la función, para identificar si existe o no tendencia. La construcción de estas sucesiones permite reconocer la aproximación en el dominio y la tendencia en el rango de la función, al igual que el uso del teorema de los límites laterales para decidir sobre la existencia del límite.

Por tanto, las concepciones métrica y óptima planteadas por Cottrill *et al.* (1996, citado en Mira, 2016) deben entenderse como un paso anterior al de la definición formal de límite. Así, la concepción óptima del límite, definida como sigue, se usa con el fin que los estudiantes logren calcular distancias entre valores próximos a un punto (diferencias en valor absoluto) y además para que construyan sucesiones con estas diferencias en el dominio y a través de la función en el rango, concepción desarrollada en el Taller 4 de la investigación.

> El valor L es el límite de $f(x)$ en $"a"$ si, para todo valor de K muy próximo a L, existe otro valor h muy próximo a $"a"$, tal que los $"x"$ que mejoran ese valor h, es decir que están más próximos a $"a"$, hacen que sus imágenes $f(x)$ también mejoren el valor K cercano a L, y estén más cerca de L. (p. 47)

De igual forma, Cottrill *et al.* (1996) plantean la concepción métrica del límite (en la cita siguiente), la cual se usa con el propósito que los estudiantes logren realizar la coordinación de las distancias que tienden a cero, y a su vez se pretende que los estudiantes logren identificar de manera intuitiva las cotas de épsilon y delta sin emplear un lenguaje formal, como se desarrolló en el Taller 5 de la investigación.

> Sea $"f"$ una función y $"a"$ un número real, el número $"L"$ es el límite de la función $"f"$ en el punto $"a"$, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando $"x - a"$ en valor absoluto se aproxima a 0, $"f(x) - L"$ en valor absoluto se aproxima a 0. En símbolos $"0 < |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - L|"$. (p. 48)

Estos elementos conceptuales permitieron realizar el planteamiento de la secuencia de actividades, tal como se explicó, con el fin de favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

2.3 Estructura metodológica para el diseño de actividades

Para el diseño de los talleres, que hacen parte de la secuencia de actividades, se tuvieron en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean un curso de precálculo, en el cual se integran actividades organizadas secuencialmente, alrededor de uno o dos problemas, trabajo individual, trabajo en equipo y debate en el aula. Los autores proponen que la actividad de la clase se desarrolle en los siguientes momentos: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida (mediada por un software de matemática dinámica), explicación y por último una tarea retadora. Esos momentos fueron retomados en el planteamiento de los talleres que se diseñaron en la investigación, donde la secuencia de actividades articula el uso de GeoGebra y el trabajo a lápiz y papel. Además, se da gran importancia al proceso de comunicación en el que los estudiantes debaten permanentemente sus ideas con el profesor y sus pares académicos.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación que se realizó fue de corte fenomenológico, entendida en términos de Aguirre y Jaramillo (2012), quienes exponen que este tipo de estudios aportan significativamente al conocimiento de realidades escolares y que justamente estos privilegian las vivencias de quienes participan en el proceso educativo. El estudio se organizó en las siguientes ocho fases:

Fase I: Estudio preliminar. El punto de partida fue un diseño didáctico para el estudio del concepto de límite en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario realizado por Betancur *et al.* (2015). El planteamiento y el análisis de los resultados del diseño didáctico antes mencionado, nos permitió seguir explorando sobre dicho fenómeno a través de la siguiente pregunta de investigación ¿Qué comprensiones logran, sobre el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan en un curso de cálculo diferencial donde se exploran las nociones de aproximación y tendencia?

Fase II: Breve revisión teórica y epistemológica del límite de una función en un punto. La revisión de varios libros de historia de las matemáticas, y algunas tesis de Maestría y Doctorado (Fernández, 2010; Pons, 2014; Mira, 2016), han permitido vislumbrar aspectos históricos que dan cuenta de la evolución del concepto de límite, y lo complejo que ha sido su conceptualización, al igual que los obstáculos epistemológicos que ha tenido el concepto a lo largo de la historia (Sierpinska, 1987; Cornu, 1991), y las dificultades que se presentan en la enseñanza del límite de una función (Tall, 1992; Hitt y Páez, 2003). Esta revisión, nos permitió considerar algunos aspectos que han contribuido en el desarrollo del concepto y a su vez tomarlos como referencia para el diseño de la secuencia de actividades; además, fue necesario revisar el texto guía *Cálculo: Transcendentes Tempranas* de Zill y Wright (2011), el cual se utiliza en el curso de cálculo diferencial de la UIS, con el fin de identificar: el orden de los contenidos, el planteamiento metodológico de las actividades y los problemas que se utilizan para el estudio del límite de una función en un punto.

Fase III: Diseño de la secuencia de actividades. En esta fase, se tuvieron en cuenta algunos acercamientos didácticos a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, planteados por Fernández (2010), Pons (2014) y Mira (2016). La estructura conceptual propuesta por estos autores coincide en varios aspectos, a pesar de que parten de diferentes marcos teóricos. En dichas estructuras se hace uso de las nociones de aproximación y tendencia, las concepciones dinámica, óptima y métrica del límite, así como el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica, algebraica), los cuales favorecen la comprensión del objeto matemático de estudio. Esos acercamientos nos permitieron hacer el planteamiento de los siguientes talleres para la secuencia de actividades: T1. Conocimientos previos; T2. Nociones de aproximación y tendencia; T3. Concepción dinámica del límite de una función en un punto; T4. Concepción óptima del límite de una función en un punto; T5. Concepción métrica del límite de una función en un punto; y T6. Conocimientos finales.

Fase IV: Pilotaje de la secuencia de actividades. Se realizó con un grupo de tres estudiantes que estaban cursando por primera vez la asignatura cálculo diferencial. La aplicación de la prueba piloto se llevó a cabo durante el primer semestre académico del año 2018, en un espacio extra-clase durante diez horas, con una duración de dos horas para cada uno de los talleres. Esta aplicación nos permitió reformular algunas preguntas de los talleres y los tiempos del uso de la tecnología para el desarrollo de la secuencia.

Fase V: Descriptores a priori de los niveles de comprensión. En esta fase se tuvo en cuenta el análisis a priori realizado a los talleres de la secuencia de actividades y la revisión teórica que se realiza del concepto de límite de una función. Esos elementos permitieron realizar la caracterización de los primeros cinco niveles de comprensión matemática en términos de las complementariedades de la acción y expresión. A continuación, se mencionan algunos de los descriptores asociados a cada nivel (tabla 2).

Tabla 2. Descriptores de los niveles de comprensión para del concepto de límite de una función en un punto (Guarin, 2018)

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5
Acción	Reconoce gráfica y analíticamente el dominio de la función $\boxed{f(x)}$. Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	Reconoce imágenes del concepto de límite de forma mental, verbal, escrita (gráfica, tabla de valores). Realiza aproximaciones numéricas por izquierda y derecha a un valor $\boxed{c}$ en el dominio de la función.	Explica que si el límite de una función $\boxed{f(x)}$ existe, entonces es único. Interpreta los comportamientos para tendencia finita e infinita de una función.	Interpreta el comportamiento de los límites laterales de una función $\boxed{f(x)}$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número $\boxed{L}$ al tomar $\boxed{x}$ suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual.	Reconoce “usando las diferentes representaciones” que el límite de una función $\boxed{f(x)}$ a un valor $\boxed{c}$, existe si cuando la variable $\boxed{x}$ se aproxima a $\boxed{c}$, entonces $\boxed{f(x)}$ tiende a $\boxed{L}$.
Expresión	Interpreta el dominio como el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. Establece relación entre una fracción y su representación decimal.	Determina la existencia del límite de manera gráfica o numérica. Interpreta la tendencia como una aproximación que “es posible mejorarla”.	Justifica que si una función $\boxed{f(x)}$ tiende a un valor $\boxed{L}$, cuando la variable independiente $\boxed{x}$ crece o decrece sin límite, entonces se dice que $\boxed{f(x)}$ posee un límite en el infinito. Justifica cuándo el límite de una función no existe de acuerdo a su representación gráfica.	Justifica que el límite de una función $\boxed{f(x)}$ no existe, cuando el límite por la izquierda o límite por derecha de $\boxed{c}$ no existen; también puede ser que existan pero sean diferentes.	Interpreta usando las diferentes representaciones la existencia de un límite de una función $\boxed{f(x)}$ cuando $\boxed{x}$ tiende a $\boxed{c}$ no depende de si $\boxed{f(x)}$ está definida en $\boxed{c}$, sino solo de si está definida para $\boxed{x}$ cerca del número $\boxed{c}$.

Fase VI: Trabajo de campo. La secuencia de actividades se implementó en el transcurso de un semestre académico regular, en las sesiones ordinarias de la clase durante siete sesiones de dos horas, distribuidas en tres semanas (tiempo estipulado para su estudio, según la programación dada por la institución para la asignatura de cálculo diferencial). Las sesiones de clase, en las que se desarrollaron los talleres fueron dirigidas por el primer autor de este artículo, que a su vez era el profesor titular del curso. Las interacciones entre el profesor y los estudiantes fueron guiadas por la metodología de Fiallo y Parada (2018), descrita en el apartado 2.2. Mediante los talleres planteados en la investigación se desarrolló el contenido relacionado con límites de una función y, a su vez, los datos se recogieron en un curso real con una programación y evaluación ya definida.

La recolección de datos se hizo a través de las hojas de trabajo de los estudiantes, las videograbaciones de clases con su respectiva transcripción y la narrativa de una entrevista semiestructurada, entre el investigador y los estudiantes (sujetos de estudio), en la que se cuestionó sobre algunas respuestas o procedimientos realizados en los talleres.

Fase VII: Selección del caso de estudio. Se recopilaron datos de 38 estudiantes que realizaron el curso de cálculo diferencial, 18 de ellos asistieron a todas las sesiones de trabajo y 10 de estos últimos desarrollaron todo el proceso. De los 10 estudiantes se seleccionó a Kevin, como caso de estudio, por ser el único que tenía completa la información y el único que logró transitar por los niveles de comprensión matemática previstos.

Fase VIII: Análisis de los datos y reporte de resultados. Los datos recolectados se analizaron desde la teoría de Pirie y Kieren (1989) con el análisis a priori de las actividades y la caracterización a priori para los cinco primeros niveles (Guarin, 2018), con el fin de describir la comprensión del límite de una función en un punto, en términos de las complementariedades de la acción y la expresión realizadas por el caso de estudio durante la implementación de la secuencia de actividades.

4. ACCIONES Y EXPRESIONES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO EN UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

En este apartado se describen algunas de las acciones y expresiones realizadas por Kevin durante la implementación de la secuencia de actividades, las cuales permiten situarlo en el nivel de *formalización* para la comprensión del límite de una función en un punto. En las evidencias, algunas de las figuras se señalan con las siguientes convenciones: recuadros amarillos, para las complementariedades de la acción y recuadros rojos para las expresiones de Kevin capturadas de las hojas de trabajo. Además, se exhibirán transcripciones de episodios de la entrevista y de los videos de clase en los que se llevó a cabo la aplicación de la secuencia de actividades.

Al examinar las acciones y expresiones en el Taller 1: Conocimientos previos, se pretendía identificar la relación que el estudiante establece entre aproximación y tendencia en un contexto geométrico y un contexto funcional, al igual que el uso de los diferentes registros de representación. En este caso, la respuesta de Kevin al ítem a) del numeral 4 en el Taller 1 (figura 1), se observa que la primera acción realizada por Kevin fue evaluar los extremos del intervalo $\boxed{[-20,20]}$. En esta parte el estudiante no se detuvo a analizar los valores que toma la función de acuerdo con la variación de la variable independiente, de tal manera que lo lleva a expresar que la función toma valores entre $\boxed{[-0.05,0.05]}$. Esto nos permitió inferir que en este momento el estudiante no reconoció la variación de la función en el intervalo mencionado.

El siguiente episodio hace parte de la entrevista del investigador con Kevin al momento de indagar sobre sus respuestas a la actividad (en la trascripción se menciona a Kevin como K y al investigador como I):

I: ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?

K: Todos, excepto el cero, porque al colocar cero abajo me da una asíntota [con la mano hace un movimiento indicando que es vertical].

I: Bueno, ahora con los valores que ya calculó, puede decir cuáles serían los valores que toma la función en el intervalo de $\boxed{[-20,20]}$.

K: Esos valores están en el rango, pues siendo así es de $\boxed{-0{,}05}$ a $\boxed{0{,}05}$.

I: ¿Está seguro de eso?

K: Sí.

I: Qué sucede si elegimos a $\boxed{f(x) = 0{,}04}$ ¿Cuál sería el valor de $\boxed{x}$?

K: Es decir $\boxed{f(x) = 0{,}04}$ y ahora sería buscar a $\boxed{x}$ [utiliza la calculadora], el valor de $\boxed{x}$ es 25 pero ese valor se sale del intervalo.

I: Entonces es falso lo que está diciendo.

K: Sí, porque está por fuera del intervalo.

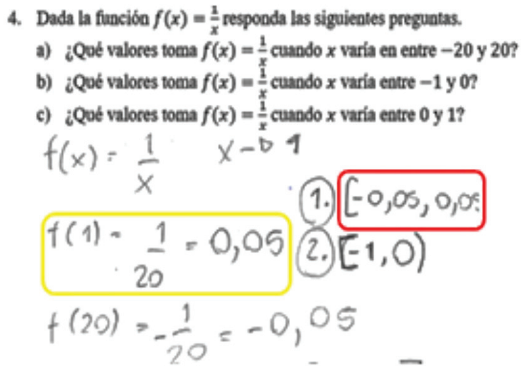


Figura 1. Respuesta de Kevin al ítem 4 del Taller 1.

De ese episodio, se pudo concluir que el estudiante no lograba determinar cuáles eran los valores que tomaba $\boxed{f(x)}$ en ese intervalo; por ello, se le solicitó realizar una exploración de la función numéricamente, para luego hacer una representación gráfica, de lo cual Kevin expresó lo siguiente:

K: Mmm, no recuerdo cómo es la gráfica, pero voy a hacer una tabla de valores. [Elabora la tabla que se muestra en la figura 2 y luego traza la gráfica (acciones del estudiante)].

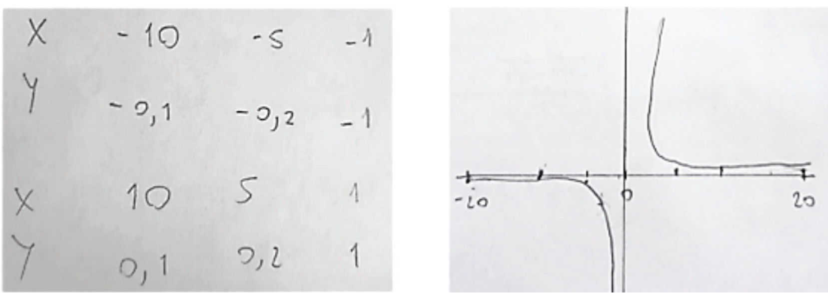


Figura 2. Tabla de valores y representación gráfica realizada por Kevin en el ítem 4 del Taller 1.

I: Bueno y ahora que ya tiene la gráfica ¿Qué sucede cuándo $\boxed{x}$ toma valores próximos a cero?

K: En $\boxed{x = 0}$ hay una asíntota. [Muestra en la hoja que la función se va a infinito y menos infinito].

I: Entonces, ¿cuáles son los valores que toma la función?

K: Mmm, ya, sería de menos infinito a $-0{,}05$ y de $0{,}05$ a infinito. [Expresa lo que se muestra en la figura 3].

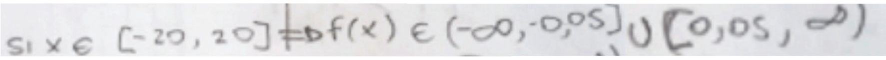
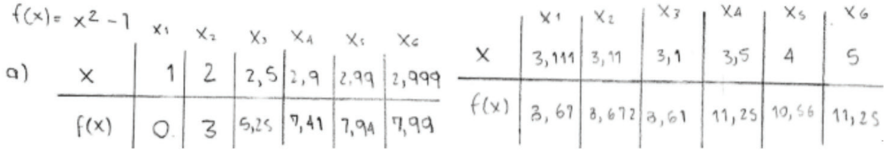


Figura 3. Expresión de los valores que toma la función del Ítem 4 del Taller 1 realizada por Kevin.

La exploración de la función de manera numérica y gráfica son acciones que le permitieron al estudiante analizar la variación y los valores que toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre -20 y 20, al igual cuando se toman valores próximos a $x = 0$, para así decidir y expresar cuáles son los valores que toma la función a medida que está variando la variable independiente.

Durante la exploración a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pudo observar que Kevin realiza una resignificación de conocimientos sobre el concepto de función, en la cual reexamina sus conocimientos acerca del dominio y rango de una función, al igual que su representación gráfica, esto con el fin de lograr analizar la variación de la función en ciertos intervalos. De acuerdo con Thom y Pirie (2006) "como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona. Sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones de la evidencia que se tenga a nuestra disposición a través de unas acciones físicas, verbales o escritas" (p. 189).

En los razonamientos expuestos por Kevin para la actividad 4 (Taller 2: Nociones de aproximación y tendencia), se le solicitó realizar una tabla de valores con el fin de establecer aproximaciones a un valor $"x"$, relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (acción que realiza en una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ que se muestra en la figura 4. Para lo anterior, Kevin fue refinando aproximaciones, acción que le permitió ir buscando la aproximación a 3 que indicara la existencia de tendencia a medida que las aproximaciones laterales coincidieran en un mismo punto.



$f(x) = x^2 - 1$

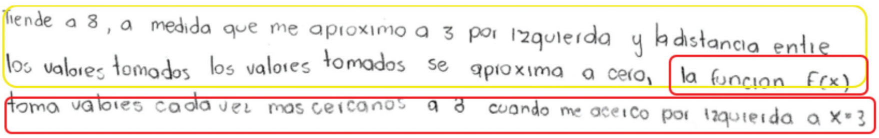
a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	1	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	0	3	5,25	7,41	7,94	7,99

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	3,111	3,11	3,1	3,5	4	5
f(x)	8,67	8,672	8,61	11,25	10,56	11,25

Figura 4. Respuesta de Kevin al ítem *a* de la actividad 4 del Taller 2.

Durante esta actividad el estudiante realiza las siguientes complementariedades de la acción; la primera fue escoger dos sucesiones numéricas que se aproximen a 3, una por derecha y otra por izquierda (figura 4), y la segunda identificar que la distancia entre los valores tomados y 3 se aproximan a cero (recuadro amarillo de la figura 5). Y la complementariedad de la expresión se da cuando el estudiante logra expresar que "*la función* $f(x)$ *toma valores más cercanos a* 8 *cuando me acerco por izquierda a* $x = 3$" (figura 5). El mismo razonamiento es presentado cuando Kevin analiza los valores próximos a derecha de 3.



tiende a 8, a medida que me aproximo a 3 por izquierda y la distancia entre los valores tomados los valores tomados se aproxima a cero, la funcion f(x) toma valores cada vez mas cercanos a 8 cuando me acerco por izquierda a x=3

Figura 5. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la actividad 4 del Taller 2.

Esas aproximaciones realizadas por el estudiante le permitieron justificar que *"cuando x se aproxima a* 3, $f(x)$ *tiende a* 8 *por izquierda y por derecha"*, (utilizando el teorema de los límites laterales y dibujando dos flechas que indican tendencia, para señalar que estos son iguales, tal como se visualiza en la figura 6, elementos que indican otra complementariedad de la expresión), ese valor sería el límite de la función en ese punto.

Thom y Pirie (2006) mencionan que el primer momento en la comprensión de un concepto matemático surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En el caso de Kevin se evidencia que logró *crear una imagen* para el límite de una función en un punto, porque sus acciones estuvieron encaminadas en la *realización de la imagen* que hace a través del uso de la representación tabular. Además, logró identificar la relación entre aproximación y tendencia para analizar el límite de una función como lo que sucede cerca del punto.

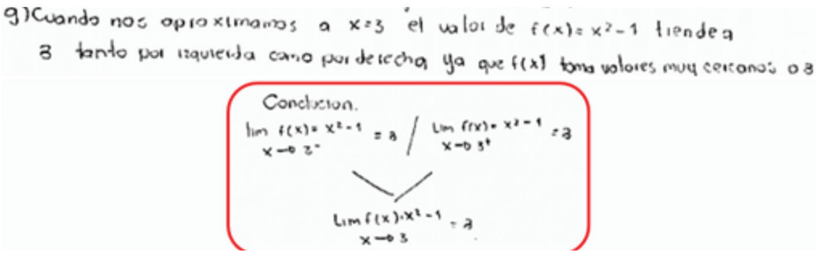


Figura 6. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{g}$ de la actividad 4 del Taller 2.

Por otro lado, Kevin mostró expresiones enfocadas en el *análisis de la imagen* al realizar la distinción entre las nociones de aproximación y tendencia. Esas expresiones se dieron en el momento que tuvo que generar las dos sucesiones numéricas y aproximarse a un valor $\boxed{c}$ en el dominio de la función (por la izquierda y la derecha de 3), con base en la disminución de la distancia (haciendo referencia a calcular el error absoluto); y también cuando identificó que las magnitudes cada vez se pueden mejorar, aproximándose más a un valor en el dominio de la función, a través del registro numérico para determinar la existencia o no del límite de la función en un punto.

En ese sentido, en el desarrollo del Taller 3: Concepción dinámica del límite de una función en un punto, la actividad 4 es una actividad retadora que se plantea con el fin de observar y analizar la forma en que el estudiante interpreta cada una de las condiciones dadas, además que las debe utilizar todas para trazar la gráfica de una función. En la solución del estudiante se observa que logró interpretar todas las condiciones dadas en el enunciado de la figura 7, puesto que le permitieron realizar una representación gráfica de la función que cumpliera con las condiciones.

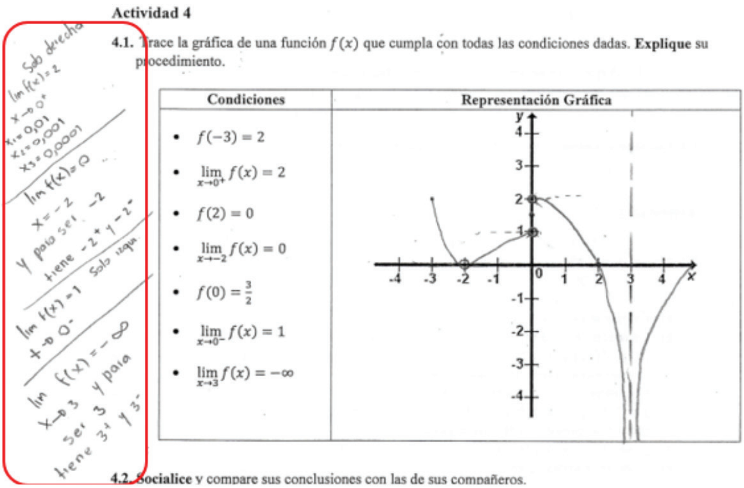


Figura 7. Respuesta de Kevin a la actividad 4 del Taller 3.

El estudiante en primera instancia identificó que la función a bosquejar pasaba por los puntos $(-3,2)$, $(2,0)$ y $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. También logró interpretar que el límite de la función cuando x tiende a 0 no existe, porque cuando x se aproxima a 0 *"solo por derecha"*, es decir toma valores como $0{,}01$, $0{,}001$, $0{,}0001$, $f(x)$ tiende a 2 y cuando x toma valores próximos a 0 *"solo por izquierda"*, los valores de $f(x)$ tienden a 1, de modo que el límite de la función en ese punto no existe porque los límites laterales no coinciden. Además, Kevin identificó que cuando x tiende a -2, el límite de la función existe y este es único, haciendo referencia a que cuando x se aproxima a -2^+ y -2^- la función debe tender al mismo valor, aunque en las condiciones no se menciona si $f(-2)$ está definido el estudiante decide representar un hueco en $x = -2$, pero sigue reconociendo la existencia del límite de la función en ese punto y que el valor es cero. Por último, analizó que cuando se hacen aproximaciones a $x = 3$, tanto por derecha como por izquierda los valores de $f(x)$ tienden a $-\infty$. El interpretar cada una de las condiciones le permitió a Kevin realizar una representación gráfica de la función (figura 7).

Como se logró evidenciar en las actividades descritas, el estudiante ha logrado adquirir una concepción dinámica del límite de una función en un punto, ya que establece coordinación entre las aproximaciones en el dominio, con las aproximaciones en el rango de la función, diferenciando cuándo las aproximaciones laterales coinciden o cuándo no coinciden (Valls *et al.*, 2011).

En este apartado se evidencia que Kevin ha transitado por los niveles de *comprensión de la imagen* y *observación de la propiedad*. El estudiante transitó en el nivel de *comprensión de la imagen*, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto, vislumbradas en la complementariedad de la acción a través de la visualización de la imagen; imágenes que para Villa-Ochoa (2011) están vinculadas "a una sola actividad y se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de esas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante con la necesidad de realizar acciones físicas particulares" (Villa-Ochoa, p. 204), que logran expresarse mediante la complementariedad de la *expresión de la imagen*, que se perciben en las actividades a través de la coincidencia entre las aproximaciones laterales, mediante el uso de las diferentes maneras de representar una función.

Por otra parte, en el nivel de *observación de la propiedad*, Kevin ha logrado construir varias imágenes del concepto de límite, desde la representación gráfica, numérica y algebraica; permitiéndole examinar, establecer conexiones y distinciones entre las diferentes imágenes que ha logrado construir para el concepto de límite de una función. Para Thom y Kieren (2006) este nivel es una forma de "caminar atrás y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento" (p. 190). De acuerdo con Pirie y Kieren (1989), la diferencia entre el nivel de *comprensión de la imagen* y el nivel de la *observación de la propiedad* es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

En la actividad retadora del Taller 4: Concepción óptima del límite de una función en un punto (figura 8), Kevin logra reconocer que al refinar las aproximaciones a un valor $\boxed{c}$ en el dominio de la función (señala la representación gráfica de la hoja de trabajo y menciona "me aproximo tanto por izquierda como por derecha del valor de $\boxed{c}$"), y si estas aproximaciones coinciden, le van a permitir decidir si el límite de $\boxed{f(x)}$ en ese punto existe o no.

Actividad 4

4.1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

a) Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

b) Si $a \in \mathbb{R}$ ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a a? **Justifique** su respuesta.

c) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 2.9? **Justifique** su respuesta.

d) ¿Para qué valores de x en el dominio de la función existe el límite de $f(x)$? **Justifique** su respuesta.

Figura 8. Actividad 4 del Taller 4.

En esta actividad, el estudiante recurre a la representación gráfica, para establecer qué sucede con la función para valores próximos a $\frac{5}{3}$ y así decidir si existe o no el límite de $f(x)$, a lo que expresó:

I: ¿Cuál sería la representación gráfica de la función?

K: Pues sería algo así más o menos. [Muestra la hoja de trabajo de la figura 9].

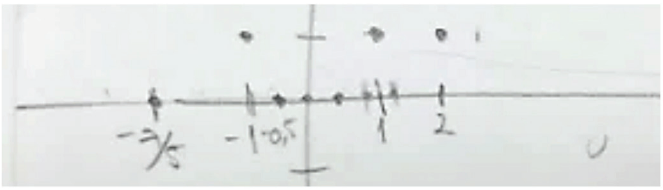


Figura 9. Gráfica de la función de la actividad 4 del Taller 4.

I: ¿Cuál sería el $\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x)$?

K: El límite sería cero.

I: ¿Por qué?

K: Mmm no, mentiras, el límite va a ser 1 ¿o va ser cero?, ¡ay, no!

I: ¿Dónde estaría ubicado $x = \frac{5}{3}$ ahí en su gráfica?

K: Mmm... ¡Ya! Cuando me aproximo tanto por izquierda como por derecha es cero.

I: Ahora, ¿cuál sería el $\lim_{x \to 1} f(x)$?

K: Tanto por izquierda como por derecha, tiende a 1.

I: ¿Seguro que es 1? ¿Por qué?

K: Pues ahí no sé, no estoy seguro.

I: ¿Qué sucede si elige un valor próximo a $\boxed{1}$ por derecha?

K: $\boxed{1{,}01}$ y va a tender a cero.

I: Y ahora, ¿qué sucede si elige un valor próximo a $\boxed{1}$ por izquierda?

K: También tiende a cero.

I: Entonces, ¿existe el límite?

K: Es cero, porque por derecha y por izquierda tiende a cero.

Durante el desarrollo de esta actividad, y en el episodio anterior, se pudo observar que Kevin, realiza una *resignificación de conocimientos* con el fin de reexaminar las imágenes que había construido en la comprensión del límite de una función. En ese sentido, Kevin logró reconocer que es posible analizar el límite de una función $\boxed{f(x)}$ en un punto $\boxed{c}$, haciendo un proceso de aproximación infinito.

En el nivel de *observación de la propiedad* se evidencia que Kevin posee las complementariedades de la *predicción de la propiedad* y el *registro de la propiedad.* Esto al interpretar de manera numérica y gráfica el comportamiento de los límites laterales de una función $\boxed{f(x)}$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número $\boxed{L}$ al tomar $\boxed{x}$ suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual. De igual manera, Meel (2003) menciona que "la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, mientras el registro de la propiedad se incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar" (p. 18).

Las acciones de Kevin en la primera actividad del Taller 5: Concepción métrica del límite de una función en un punto, están centradas en lograr identificar las variables de la situación, además de reconocer la relación de interdependencia entre el área y el radio del disco circular (figura 10); esto le permitió calcular el valor del radio $\boxed{"r"}$ que generaba el disco circular con un área de $\boxed{9\pi\, cm^2}$.

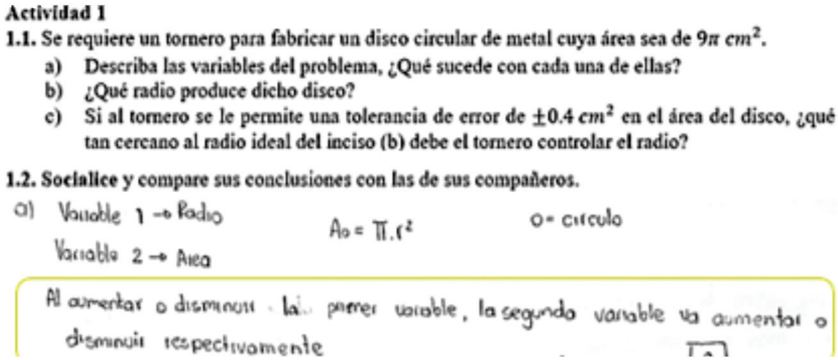


Figura 10. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{a}$ y $\boxed{b}$ de la actividad 1 del Taller 5.

En el ítem $\boxed{c}$ de la actividad 1, el estudiante utiliza la representación algebraica del área del disco y el error que puede cometer el tornero sobre el área del disco que se desea fabricar. En este episodio se puede observar que una de las expresiones de Kevin fue calcular el error mínimo y máximo en el radio del disco circular, en términos de la distancia del radio ideal y el aproximado, usando el valor absoluto (figura 11).

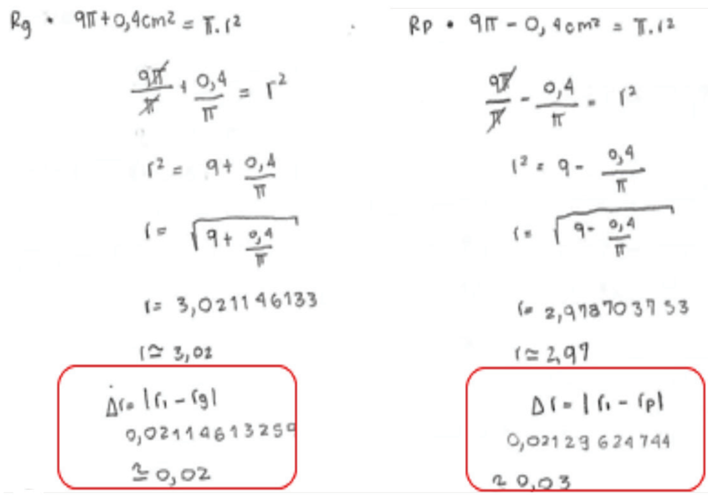


Figura 11. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{c}$ de la actividad 1 del Taller 5.

En ese mismo taller, en la exploración dirigida de la actividad 2, en el ítem b) se le solicita a Kevin realizar aproximaciones a un punto (radio ideal) y al límite del área del disco que se desea fabricar. Además, en el ítem c) se le pregunta: ¿Cómo son las distancias conforme se aproxima a $\boxed{3}$? con el fin de observar el comportamiento de disminución de las distancias de las aproximaciones en el dominio y en el rango de la función. Para ello debería usar un registro tabular y gráfico, con el fin de deducir el límite de la función por concepción métrica (figura 12).

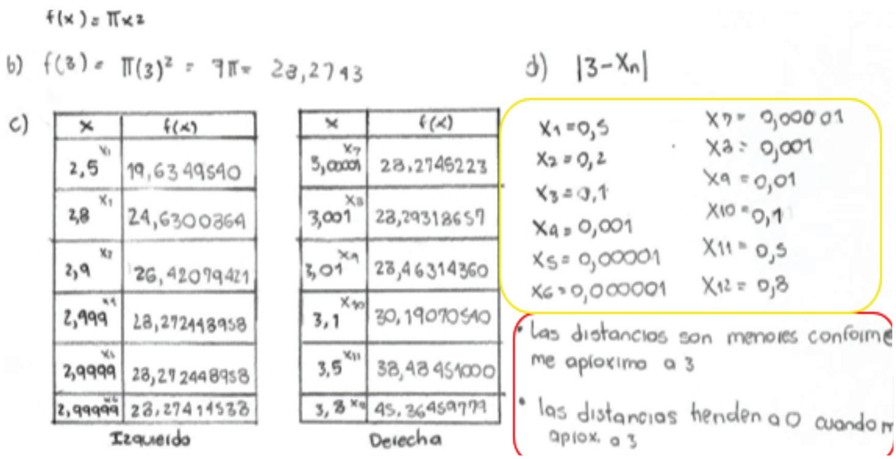


Figura 12. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{c}$ y $\boxed{d}$ de la actividad 2 del Taller 5.

Como se puede ver en la expresión de Kevin tomada textualmente del recuadro rojo de la figura 12 (y en relación con las operaciones que se encierran en el recuadro amarillo), dice que "las distancias tienden a cero cuando se aproxima a $\boxed{3}$", esas acciones y expresiones al parecer le permitieron decidir sobre la existencia del límite de la función en ese punto. El investigador quiso seguir indagando al respecto, y encontró lo que se muestra a continuación:

I: ¿Qué sucede con las distancias cuanto más me aproximo a $\boxed{3}$?

K: Las distancias son menores conforme me aproximo a $\boxed{3}$ y a $\boxed{9\pi}$.

I: Y gráficamente, ¿qué está sucediendo? [muestra el archivo de GeoGebra de la figura 13].

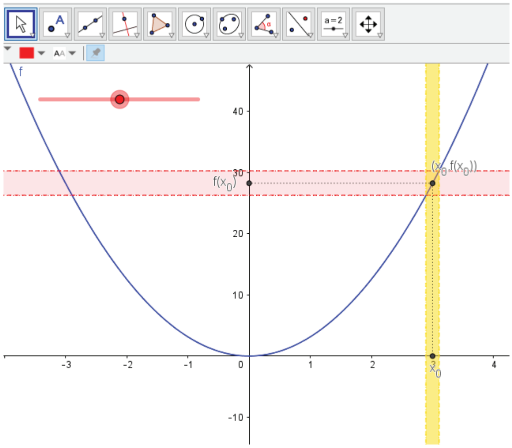


Figura 13. Archivo en GeoGebra para la actividad 2 del Taller 5.

K: La distancia tiende a ser cero en ambos lados (refiriéndose a los valores en el dominio y en el rango de la función) y así el límite de la función es $\boxed{28{,}27}$ cuando $\boxed{x}$ tiende a $\boxed{3}$.

I: ¿Qué relación existe entre la distancia y la existencia del límite?

K: Pues, a medida que los valores están próximos a $\boxed{3}$, la distancia tiende a cero y, además, los valores de $\boxed{f(x)}$ están próximos al límite de la función (figura 14).

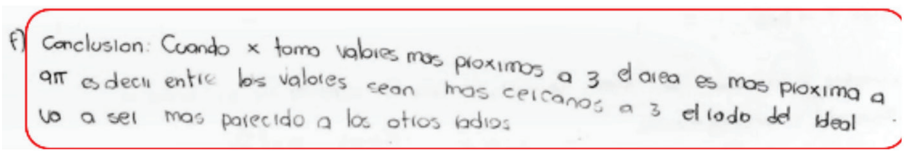


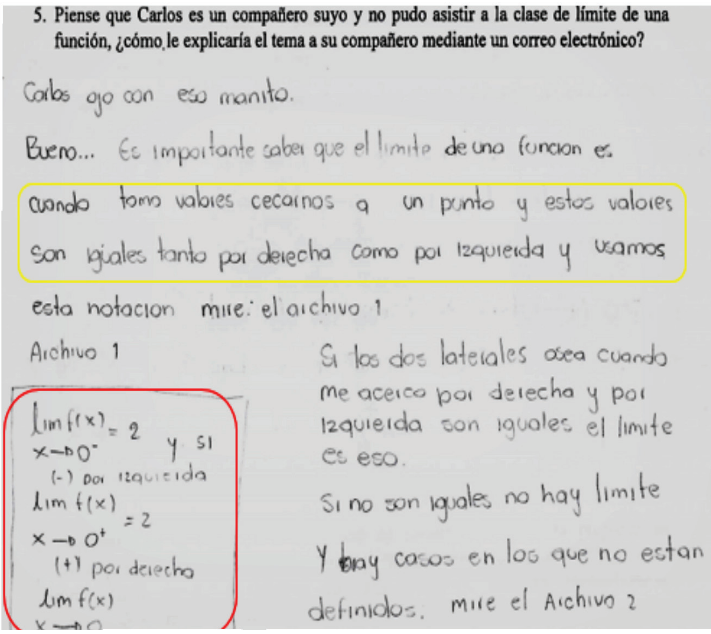
Figura 14. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{f}$ de la actividad 2 del Taller 5.

Para Mira (2016), este puede ser el paso previo a la conceptualización métrica de límite de una función en un punto, que el estudiante coordine la tendencia de las distancias al punto y de sus imágenes al límite, a fin de establecer que tienden a cero.

En estas actividades se logró identificar que Kevin está realizando complementariedades de la acción y expresión del nivel de *formalización*. Para Pirie y Kieren (1989) el estudiante en este nivel es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes del concepto de límite en los diferentes registros de representación. Aquí está reconociendo que es posible realizar aproximaciones desde el rango con aproximaciones en el dominio de la función, a partir de la disminución de las distancias. Además, cae en cuenta de que tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas con cualidades comunes, al coordinar las distancias en el rango con las distancias en el dominio de la función, al producir entornos más reducidos e intentar deducir el límite por la concepción métrica.

Por último, en el análisis a las respuestas de Kevin durante el desarrollo del Taller 6: Conocimientos finales, se plantea un enunciado con el propósito de identificar cómo el estudiante comprende e interpreta el límite de una función en un punto (figura 15).

En esa actividad, Kevin inicia describiendo que el *"límite de una función es cuando tomo valores cercanos a un punto"*; aquí es de resaltar que el estudiante está creando una imagen para este concepto. Inferimos lo anterior, porque a través de esa expresión se evidencia que esta imaginando dos sucesiones numéricas que se aproximan a un punto, y que, además, está coordinando las aproximaciones en el dominio y en el rango para ver si estas coinciden tanto por izquierda como por derecha (recuadro amarillo de la figura 15).


5. Piense que Carlos es un compañero suyo y no pudo asistir a la clase de límite de una función, ¿cómo le explicaría el tema a su compañero mediante un correo electrónico?

Carlos ojo con eso manito.

Bueno... Es importante saber que el limite de una funcion es cuando tomo valores cercanos a un punto y estos valores son iguales tanto por derecha como por izquierda y usamos esta notacion mire: el archivo 1

Archivo 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ y si

(-) por izquierda

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

(+) por derecha

$\lim_{x \to 0} f(x)$

Si los dos laterales osea cuando me acerco por derecha y por izquierda son iguales el limite es eso.

Si no son iguales no hay limite

Y hay casos en los que no estan definidos. mire el Archivo 2

Figura 15. Primera parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6.

En ese sentido, Kevin usa la notación con el fin de especificar que los límites laterales de la función en ese punto deben ser iguales, y si sucede eso, entonces el límite existe; además el estudiante plantea el caso en que los límites no sean iguales. Ante estas especificaciones dadas por Kevin podemos identificar que ha transitado a un nivel de *comprensión de la imagen*, porque está usando las imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

De acuerdo con esas imágenes que ha ido desarrollando Kevin, explica el caso en el cual límite de la función no está definido, a lo que recurre a un ejemplo particular que se ve en el recuadro amarillo de la figura 16. Allí, el estudiante hace referencia a que cuando $\boxed{x}$ toma valores próximos a cero por derecha $\boxed{f(x)}$ tiende a infinito, y cuando $\boxed{x}$ toma valores próximos a cero por izquierda $\boxed{f(x)}$ tiende a menos infinito. Así, de tal manera que los límites no coinciden; estas expresiones evidencian que el estudiante está en un nivel de *observación de la propiedad* porque logró examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen para determinar la existencia o no del límite.

Ahora Kevin decide expresar el caso en el que existe el límite de la función en un punto, pero este no es igual a la imagen de la función en ese punto (figura 16). El estudiante para ese caso decidió recurrir a la representación gráfica y además expresó literalmente "el límite existe porque no es cuando tomo el valor del punto si no valores cercanos".

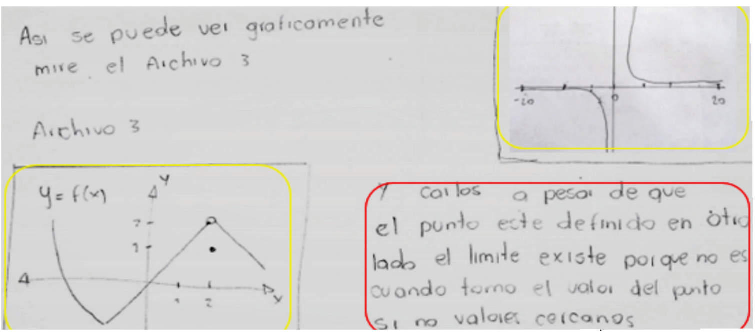


Figura 16. Segunda parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6.

El estudiante fue capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes que había desarrollado durante la secuencia de actividades. Todo lo anterior, nos permite situar a Kevin en un nivel de *formalización* para la comprensión del límite de una función en un punto, esto de acuerdo con las complementariedades de la acción y la expresión que se evidenciaron a lo largo de la secuencia de actividades. Aunque, el lenguaje usado por Kevin para describir el concepto no tiene un lenguaje matemático formal, la descripción suministrada en términos de aproximación, tendencia y contemplar la disminución de las distancias tanto en el dominio como en el rango de la función para decidir si existe o no límite de la función en ese punto es equivalente a la definición matemática apropiada.

5. REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

Frente al propósito de la investigación, de la que se extrae el caso de estudio aquí reportado, se obtienen las siguientes reflexiones:

- En cuanto a los conocimientos previos de Kevin en relación con las nociones de aproximación y tendencia, se pudo evidenciar que logró identificar la existencia de estas nociones. Sin embargo, en ese momento usaba otros términos para referirse a ellas y para realizar aproximaciones numéricas de acuerdo con el contexto del enunciado.
- La *creación de la imagen* del concepto de límite de una función en un punto se posibilitó a través del taller donde se trabajaron las nociones de aproximación y tendencia, dado que allí Kevin logró identificar y diferenciar ambas nociones; además, de establecer aproximaciones a un valor $\boxed{"x"}$, relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con los valores que toma $\boxed{f(x)}$ para esas aproximaciones.
- El estudiante transitó al nivel de *comprensión de la imagen*, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto. Para este nivel es necesario resaltar la importancia de la coordinación entre las aproximaciones realizadas en el dominio y en el rango de la función, porque le permitieron al estudiante identificar que cuando x tiende a $\boxed{a}$, el límite de la función $\boxed{f(x)}$ tiende a $\boxed{L}$, esto sucede cuando las aproximaciones realizadas coinciden o, en el otro caso, identificar cuando no existe el límite de la función en un punto. El estudiante en este nivel muestra que ha logrado alcanzar la comprensión de las imágenes que ha creado hasta el momento, debido a que logra usar las diferentes formas de representar una función para analizar el límite de una función en un punto.

- De acuerdo con el análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con la concepción dinámica y óptima del límite de una función en un punto, se identificó que: para el nivel de *observación de la propiedad*, el estudiante logró buscar en el rango de la función valores próximos al límite; esto fue posible al analizar y comparar las distancias entre las aproximaciones realizadas y el mismo límite. Además, consiguió analizar las distancias de los valores correspondientes en el dominio de la función, análisis que con el apoyo de GeoGebra y de los applets diseñados por los investigadores (utilizados en las actividades de exploración dirigida) nos permite identificar que se favorece una mejor visualización.
- En las actividades desarrollas en el taller de conocimientos finales, se logró identificar que Kevin realizó complementariedades de la acción y expresión asociadas al nivel de *formalización*, dado que logró identificar las propiedades para abstraer cualidades comunes de las clases de imágenes que había logrado construir para el límite de una función en un punto en el desarrollo de todas las actividades. Aunque, el lenguaje usado por Kevin no es formal, la descripción suministrada es equivalente a la definición matemática del concepto, al mantener el rigor y al realizar aproximaciones e identificar la disminución de las distancias tanto en el dominio como en el rango de la función para decidir si existe o no límite de la función en ese punto.

La investigación hace un aporte a la teoría de Pirie y Kieren, específicamente para el concepto de límite de una función en un punto, puesto que la caracterización de los niveles permite identificar y describir la comprensión que logran los estudiantes cuando participan de un curso de cálculo diferencial. Además, la secuencia de actividades es una contribución a la matemática educativa para que pueda ser usada por profesores de educación media o educación superior en sus aulas de clase para favorecer la comprensión de dicho concepto.

Es necesario resaltar que uno de los elementos particulares de la secuencia de actividades, es el uso de las nociones de aproximación y tendencia como un acercamiento a la comprensión del límite de una función en un punto, porque retoma el dinamismo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite de una función. Además, se da una articulación entre el uso de un software de matemática dinámica y el trabajo a lápiz y papel realizado durante la investigación. El estudio mostró la importancia del proceso de comunicación entre el profesor y los estudiantes, pues permite el debate y la resignificación de ideas a la luz de los apoyos didácticos que se ofrecen en el aula de clase.

AGRADECIMIENTO

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro". Código1115-852 70767, con el proyecto "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores". Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología". Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

REFERENCIAS

Aguirre, J., y Jaramillo, L. (2012). Aportes del método fenomenológico a la investigación educativa. *Revista latinoamericana de estudios educativos*, *8*(2), 51-74. https://www.redalyc.org/pdf/1341/134129257004.pdf

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. *IX Simposio Nororiental de matemáticas*. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/12522/1/Betancur2015La.pdf

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). Grupo Editorial Iberoamérica. https://docplayer.es/14774257-El-concepto-de-limite-en-la-educacion-secundaria.html

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(30), 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME 9*(2), 189-209. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a2.pdf

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Fernández, J. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~lrico/MasterSec_files/Fernandez%20Plaza%20TFM.pdf

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Universidad Industrial de Santander.

García, G., Serrano, C., y Díaz, H. (2002). *La aproximación: una noción básica en el cálculo: un estudio en la educación básica*. Universidad Pedagógica Nacional.

Gonzales, Y., Montoro, A., y Ruiz, J. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. Uniciencia, 35(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.18

Guarin, S. (2018). Aproximación y Tendencia: nociones para la comprensión del límite de una función en un punto [Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander]. https://www.dropbox.com/s/bnt1qzxjhcm6yc0/TesisSGuar%C3%ADn.pdf?dl=0

Gücler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 439-453. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9438-2

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*. Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia. México.

Hitt, F y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 32*, 97-108.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1261-1279. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9258-8

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 69-75). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_18

Londoño, R. (2011*). La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. [Tesis Doctoral, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/1/ReneLondo%c3%b1o_2011_teoriapiriekieren.pdf

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *6*(3), 221-278. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560303

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/53830#vpreview

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, *9*(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528.

Pirie, S., y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/45713#vpreview

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132. https://www.jstor.org/stable/4150304

Rangel, R., Betancourt, A., Árcega, M., y García, J. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. *37*, 91-110. http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/745/457

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related the limitis. *Educational Studies in Mathematics. 18*(4), 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. (pp. 3-24). Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. *In proceedings of working group.* ICME-7. Québec, Canada.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thom, J., y Pirie, S. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of mathematical Behavior*, *25(3)*, 185-195. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.004

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Muller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. http://funes.uniandes.edu.co/21952/1/Valls2011Coordinacion.pdf

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. [Tesis Doctoral, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/16849/1/VillaJhony_2011_ComprensionTasaVariacion.pdf

Zill, D., y Wright, W. (2011). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Mc Graw Hill.

Autor de correspondencia

Sandra Evely Parada Rico

Dirección: Ciudad Universitaria Cra. 27 con Calle 9, Oficina 146,
Edificio Camilo Torres, Bucaramanga, Santander
sanevepa@uis.edu.co