

Lo que dice la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento* de problemas¹

What research says about teaching mathematics through problem posing

Jinfa Cai²

Resumen: Ha habido un mayor énfasis en la integración del planteamiento de problemas en el currículo y la instrucción, con la promesa de proporcionar potencialmente más oportunidades y de mayor calidad para que los estudiantes aprendan matemáticas a medida que participan en actividades en las que plantean problemas. Este artículo tiene como objetivo proporcionar una síntesis de lo que dice la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas. En particular, aborda las siguientes preguntas: (1) ¿Cómo es la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas? (2) ¿Qué es el planteamiento de problemas? (3) ¿Qué es una tarea sobre planteamiento de problemas? (4) ¿Cómo deben los maestros manejar los problemas planteados por los estudiantes en la instrucción en el aula? (5) ¿Cómo se puede apoyar a los maestros para que aprendan a enseñar a través del planteamiento de problemas? (6) ¿Cuál es el efecto de la instrucción del Aprendizaje Basado en el Planteamiento de Problemas (ABPP) en maestros y estudiantes? A lo largo de las secciones, se plantean varias preguntas relacionadas sin respuesta y, el documento termina con un modelo de instrucción

* Traducimos 'posing' como 'planteamiento' y en algunas ocasiones como 'formulación'.

¹ Este artículo ha sido publicado en inglés en: Cai J. (2022), What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing, *Éducation et didactique* 16(3), 31-50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>

² University of Delaware, Newark, DE, USA, jcai@udel.edu, orcid.org/0000-0002-0501-3826

ABPP propuesto. Con el fin de que, las ideas presentadas en este documento puedan servir como un trampolín para alentar a más académicos a participar en la investigación de problemas, para que podamos brindar más oportunidades y que los estudiantes aprendan matemáticas a través de la formulación de problemas.

Palabras clave: *planteamiento de problemas, ABPP, caso de enseñanza, instrucción en el aula, aprendizaje profesional del profesor, efectividad de la enseñanza*

Abstract: There has been increased emphasis on integrating problem posing into curriculum and instruction with the promise of potentially providing more and higher quality opportunities for students to learn mathematics as they engage in problem-posing activities. This paper aims to provide a synthesis of what research says about teaching mathematics through problem posing. In particular, this paper addresses the following questions: (1) What does teaching mathematics through problem posing look like? (2) What is problem posing, anyway? (3) What is a problem-posing task? (4) How should teachers handle students' posed problems in classroom instruction? (5) How can teachers be supported to learn to teach through problem posing? (6) What is the effect of Problem-Posing-Based Learning (P-PBL) instruction on teachers and students? Throughout the sections, various related unanswered questions are raised, and the paper ends with a proposed ABPP instructional model. Hopefully, the ideas presented in this paper can serve as a springboard to encourage more scholars to engage in problem-posing research so that we can provide more opportunities for students to learn mathematics through problem posing.

Keywords: *problem posing, ABPP, teaching case, classroom instruction, teacher professional learning, teaching effectiveness*

INTRODUCCIÓN

En 2003, sintetice algunos hallazgos de investigación importantes relacionados con la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas (Cai, 2003). En ese documento, discutí cuatro temas y preocupaciones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, que están relacionados con cuatro preguntas frecuentes: (1) ¿Son los niños pequeños realmente capaces de explorar problemas por sí mismos y llegar a soluciones sensatas? (2) ¿Cómo pueden los maestros aprender a enseñar a través de la resolución de problemas? (3) ¿Cuáles son las creencias de los estudiantes sobre la enseñanza a través de la resolución de problemas? (4) ¿Los estudiantes sacrificarán habilidades básicas si se les enseñan matemáticas a través de la resolución de problemas? Revisé la evidencia de investigación disponible en torno a cada tema y luego señalé las vías de investigación que serían necesarias para abordar los problemas de manera más completa.

El artículo actual es un “artículo hermano” de Cai (2003) con un enfoque en la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas. Por lo tanto, mientras que el documento anterior consideró el aprendizaje basado en problemas (ABP), el documento actual examina el aprendizaje basado en el planteamiento de problemas (ABPP). En los últimos años, ha habido un mayor énfasis en la integración del planteamiento de problemas en el plan de estudios y la instrucción con la promesa de proporcionar potencialmente más oportunidades y de mayor calidad para que los estudiantes aprendan matemáticas a medida que participan en actividades que plantean problemas.

¿POR QUÉ PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS?

El planteamiento de problemas ha sido reconocido en parte, debido a su importancia en el proceso de descubrimiento científico. Como dijo el legendario Einstein, a veces plantear un problema es más importante que de hecho resolver el problema (Einstein e Infeld, 1938). A principios del siglo XX, David Hilbert planteó un conjunto de 23 problemas matemáticos influyentes que inspiraron una gran cantidad de progreso en la disciplina de las matemáticas (Hilbert, 1901-1902). En la historia de la ciencia, formular preguntas precisas y susceptibles de respuesta no solo ha adelantado nuevos descubrimientos, sino que también ha estimulado la emoción intelectual de los científicos (Mosteller, 1980). En

educación, la formulación de problemas ha sido reconocida durante mucho tiempo como una actividad intelectual de importancia crítica en la investigación sobre lectura (Rosenshine, Meister y Chapman, 1996), educación científica (Mestre, 2002) y educación matemática (Cai, *et al.*, 2015; Ellerton, 1986; Kilpatrick, 1987; Plata, 1994; Singer *et al.*, 2013, 2015). Para este artículo, el enfoque estará en la educación matemática.

Teóricamente, ABPP está basado en perspectivas constructivistas y socioculturales sobre el aprendizaje, y puede aumentar el acceso de los estudiantes a la elaboración de sentido matemático y el aprendizaje. Cuando los estudiantes tienen la oportunidad de plantear sus propios problemas matemáticos basados en una situación, deben dar sentido a las restricciones y condiciones de la información dada para construir conexiones entre su comprensión existente y una nueva comprensión de ideas matemáticas relacionadas. Aunque las actividades que plantean problemas son tareas cognitivamente exigentes, son adaptables a las habilidades de los estudiantes y, por lo tanto, pueden aumentar el acceso de los estudiantes, de modo que con diferentes niveles de comprensión aún pueden participar y plantear problemas potencialmente productivos basados en su propia elaboración de sentido. Por lo tanto, las oportunidades de aprendizaje proporcionadas por el planteamiento de problemas tienen un piso bajo y un techo alto (Cai y Hwang, 2021).

De hecho, aunque los estudiantes tradicionalmente se encuentran posicionados como simples receptores de instrucción, cuando formulan sus propios problemas matemáticos para investigar, pueden construir identidades positivas y poderosas como creadores y buscadores matemáticos (Silver, 1997; Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM], 1991, 2020). El planteamiento de problemas comparte la autoridad matemática en el aula, dando a los estudiantes el poder de crear sus propios problemas matemáticos para que sean considerados por la clase. Además, debido a que el planteamiento de problemas es una actividad con piso bajo y techo alto (Cai y Hwang, 2021; Singer *et al.*, 2015), ofrece acceso a todos los estudiantes a oportunidades para la creación de sentido matemático.

Los investigadores han comenzado a discutir la naturaleza compleja de la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas. Existe la necesidad de un análisis cuidadoso de la práctica con respecto a la comprensión de cómo la formulación de problemas puede ser promulgada productivamente en las aulas. Este tipo de análisis podría resaltar la naturaleza de las tareas que plantean problemas y proporcionar orientación a los maestros sobre aspectos

críticos de la enseñanza a través de la formulación de problemas (por ejemplo, tareas que plantean problemas y patrones de discurso para manejar los problemas planteados por los estudiantes). Por ejemplo, Ellerton (2013) propuso un Marco de Aprendizaje Activo que sitúa los procesos del planteamiento de problemas en los procesos más amplios de las aulas de matemáticas. Singer y Moscovici (2008) describieron un ciclo de aprendizaje en la instrucción constructivista que incluye la formulación de problemas como una extensión y aplicación de la resolución de problemas. Mientras tanto, Kontorovich *et al.* (2012) propuso un marco teórico para ayudar a los investigadores a manejar la complejidad del problema matemático de los estudiantes que plantean en grupos pequeños. Este marco integra cinco facetas: organización de tareas, base de conocimientos de los estudiantes, heurística y esquemas del planteamiento de problemas, dinámicas e interacciones grupales y consideraciones individuales de aptitud. Además, Matsko y Thomas (2015) hicieron que los estudiantes crearan y resolvieran sus propios problemas como tareas en las clases de matemáticas, para darles experiencia en la interacción con problemas matemáticos más allá de la rutina y la mecánica. Finalmente, Zhang y Cai (2021) analizaron casos específicos de enseñanza que plantean problemas, tratando de comprender la naturaleza de las tareas que plantean problemas que los maestros usaron y las formas en que los maestros manejaron los problemas planteados por los estudiantes.

Estos estudios previos nos han servido de base para entender aspectos de lo que conlleva la enseñanza a través de la problemática y sus características particulares. Debido a que la instrucción en el aula es generalmente compleja, con muchas características sobresalientes que pueden investigarse, los investigadores deben identificar aquellas características que son más relevantes para plantear problemas y que pueden estar más influenciadas por la introducción de actividades de planteamiento de problemas (Cai *et al.*, 2015). El propósito de este artículo es proporcionar una síntesis de lo que dice la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas. Esta revisión no pretende ser exhaustiva con una búsqueda sistemática en la literatura; en cambio, su propósito es rastrear a través del trabajo con el que me he comprometido para pintar una imagen de la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas junto con sus promesas y desafíos. En particular, se abordan las siguientes preguntas: (1) ¿Cómo es la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas? (2) De cualquier manera ¿Qué es el problema planteado? (3) ¿Qué es una tarea sobre el planteamiento de problemas? (4) ¿Cómo deben los maestros manejar los problemas planteados

por los estudiantes en la instrucción en el aula? (5) ¿Cómo se puede apoyar a los maestros para que aprendan a enseñar a través del planteamiento de problemas? (6) ¿Cuál es el efecto de la instrucción ABPP en maestros y estudiantes? Las dos primeras preguntas proporcionarán información de antecedentes y la explicación necesaria de las terminologías utilizadas para abordar las últimas cuatro preguntas. A lo largo de las secciones, se plantean varias preguntas relacionadas que el campo aún necesita responder.

¿CÓMO ES LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS?

Para ilustrar la práctica de usar el planteamiento de problemas para enseñar matemáticas, primero se describe una lección específica de Grado 1 de una maestra china de matemáticas elementales, la profesora. Yang (Yang y Cai, 2016). Esta lección tiene como objetivo desarrollar la comprensión matemática de los estudiantes relacionada con el tema de la suma y resta de números enteros de dos dígitos a través del planteamiento de problemas. La lección consta de cuatro episodios principales, cada uno correspondiente a una tarea de instrucción, seguido de un resumen.

EPISODIO 1: MÚLTIPLES REPRESENTACIONES DE UN NÚMERO

T (maestro): Por favor, escriba un número favorito de dos dígitos y no se lo diga a los demás.

[Después de unos minutos, el maestro pidió a los estudiantes que describieran los números que habían escrito, y luego pidió a la clase que los adivinara.]

S1 (estudiante): El número que tengo es 1 menos de 40. ¿Sabes qué número me gusta?

S2: El número que tienes es 39.

S1: Felicidades. Derecha. Dime el número que tienes.

(El maestro escribió 39 en la pizarra)

S2: El número que me gusta es el que está entre 26 y 28.

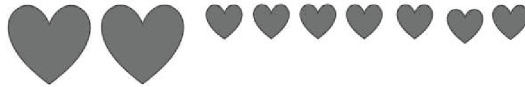
S3: El número que te gusta es 27.

S2: Felicidades. Tienes razón.

(El maestro escribió 27 en la pizarra)

T: ¿Puedes describir este número 27 de otras maneras?

- S4: El número que es 3 menos que 30 es 27.
S5: El número que es 2 más que 25 es 27.
S6: El número que es 7 más que 20 es 27.
S7: El número que es 100 menos 73 es 27.
S8: El número compuesto por dos 10s y siete 1s es 27.
S9: El número compuesto por siete 1s y dos 10s es 27.
S10: Dos racimos de palos pequeños de diez palos más siete palos individuales pequeños significan 27.
C11: En un ábaco simplificado, si tenemos 2 cuentas en unos, y tenemos 7 cuentas en decenas, significa 27.
C12: Eso está mal. Deberíamos tener 2 cuentas en decenas, y tener 7 cuentas en una. Entonces, puede ser 27.
C11: Lo siento, cometí un error. Gracias por su corrección.
C12: Podemos hacer un dibujo que signifique 27. (ver más abajo)



- T: ¿Quién entiende su significado?
S13: Un corazón grande significa 1 diez, y 2 corazones grandes significa 20; Un corazón pequeño significa 1 unidad, 7 pequeños significan 7 unidades. Así que juntos son 27.

En este episodio, el profesor dio a los estudiantes la oportunidad de revisar el contenido relacionado con la composición de los números a través de una actividad similar a un juego. Los estudiantes describieron números y justificaron sus descripciones. Esta actividad involucró la comunicación estudiante-estudiante, quienes desarrollaron su comprensión del valor posicional mediante el uso de múltiples formas de representar un número.

EPISODIO 2: DISCUTE LA RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS

T: Cuando ves los números 39 y 27, ¿qué números puedes pensar que están relacionados con el 39 y el 27?

S1: Asocio dos números, 72 y 93.

T: Bien. ¿Puedes preguntar a tus compañeros de clase si saben cómo asocias 39 y 27 con los números 72 y 93?

S1: Queridos compañeros de clase, ¿saben cómo asocio los dos números?

S2: Creo que intercambiaste el dígito en decenas con el uno en unidades de los números 27 y 39.

S1: Muy inteligente. Eso es justo lo que estaba pensando.

T: ¿Los nuevos números que obtenemos intercambiando el dígito en decenas con unidades tienen el mismo significado que los originales?

S3: No. En 27, el número 2 está en el lugar de las decenas, lo que significa 2 decenas; El número 2 en 72 está en el lugar de la unidad, lo que significa 2 unidades.

S4: 72 es más grande que 27, 27 es más pequeño que 72.

T: ¿Algún otro número que se le ocurra que esté asociado con 39 y 27?

S5: Estoy pensando que los números más grandes que 27 y menores que 39 son 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

S6: Estoy pensando que los números pares más grandes que 27 y más pequeños que 39 son 28, 30, 32, 34, 36, 38.

S7: Estoy pensando que los números impares mayores que 27 y menores que 39 son 29, 31, 33, 35, 37.

S8: Estoy pensando que los números antes del 27 son 26, 25, 24.....

S9: Estoy pensando en el número 40 que está después de (más grande que) 27.

C10: Estoy pensando en el número 66. ¿Sabes cómo lo asocio?

S11: Añadiste el 27 al 39.

T: ¡Qué bien! S10 piensa en la suma de los dos números.

(El maestro escribió "suma" y $27 + 39 = 66$ en la pizarra)

S12: Según la idea de S11, creo que su diferencia es 12.

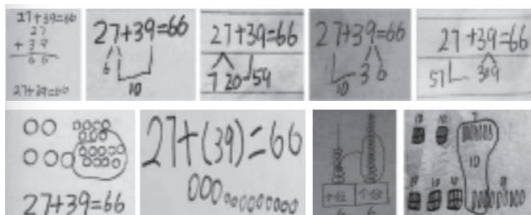
(El maestro escribió "resta" y $39 - 27 = 12$ en la pizarra)

T (preguntando continuamente): ¿Son todos correctos? ¿Puedes encontrar una manera de verificar sus respuestas?

(El profesor alentó a los estudiantes a usar sus propios métodos de examen)

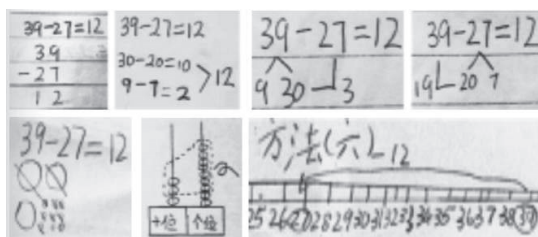
.....

El maestro proyectó varias soluciones en la pantalla para que toda la clase las viera y discutiera, como se muestra en las figuras 1 y 2 a continuación.



Las soluciones de los estudiantes abarcan múltiples estrategias, incluida la aplicación del algoritmo habitual, la agrupación por valor posicional, la adición de números convenientes (por ejemplo, $20 + 39$) y el dibujo de decenas y unos seguidos de agrupación.

Figura 1. Los diferentes métodos utilizados por los estudiantes para examinar $27 + 39 = 66$



Las soluciones de los estudiantes nuevamente abarcan múltiples estrategias, incluida la aplicación del algoritmo de resta habitual, la expansión por valor posicional, la restar números convenientes (por ejemplo, $30 - 27$), dibujar imágenes de decenas y unos y comparar y, usar una recta numérica.

Figura 2. Los diferentes métodos que los estudiantes usaron para examinar $39 - 27 = 12$

Basándonos en los episodios 1 y 2, podemos ver que los estudiantes pudieron observar y explicar los números desde diferentes perspectivas, construir relaciones y comprender la conexión entre dos números, y luego comprender los cálculos con números y valor posicional.

EPISODIO 3: PLANTEANDO PROBLEMAS DE ADICIÓN

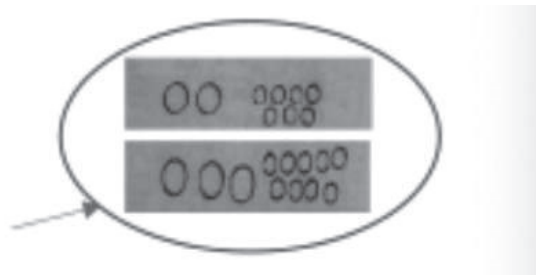
T: ¿Cuántos problemas de la vida real puedes plantear y resolver usando la ecuación de suma $27 + 39 = 66$?

En este episodio, el maestro guio a los estudiantes a volver al significado de la adición en la vida real. El proceso de plantear diferentes problemas de la vida real animó a los estudiantes a ver la estrecha relación entre las matemáticas y la vida, profundizando así su comprensión del significado de la adición. Cuando la maestra descubrió que la mayoría de los estudiantes habían planteado diferentes tipos de problemas de la vida real, les pidió que los presentaran y los escribió en la pizarra.

- Problema 1: Hay 27 flores rojas y 39 flores amarillas. ¿Cuántas flores hay en total?
- Problema 2: Sacamos 27 papas por la mañana y 39 papas por la tarde. ¿Cuántas papas sacamos hoy?
- Problema 3: Hay 39 pájaros en este árbol, y luego vienen otros 27 pájaros. ¿Cuántas aves hay en este árbol ahora?
- Problema 4: Xiao Ming rebotó la pelota 27 veces, y Xiao Ping la rebotó 39 veces más que Xiao Ming. ¿Cuántas veces la rebotó Xiao Ping? (Se hizo un dibujo con este problema.)
- Problema 5: Hay una caja de galletas. Comí 27, y todavía quedan 39 en la caja. ¿Cuántas galletas había en la caja antes?

Luego, el profesor analizó estos problemas planteados y los comparó en términos de la redacción utilizada.

- T: El problema 1 preguntaba “en total”. “En total” es fácil de entender, ya que significa combinar las partes de las flores rojas y las flores amarillas. Entiendo que podemos usar la suma para calcular este total combinado. Pero no hay “en total” en los problemas 2, 3, 4 y 5; ¿Por qué todos pueden usar ADDITION para resolverlos? [La maestra usó un gesto de juntar dos manos]
- T: ¿Quién puede ayudarme? ¿Cómo explicamos esto?
- S1: El problema 2 pregunta “¿cuántas papas sacamos hoy?” “Hoy” significa que debemos agregar las papas que sacamos por la mañana con las que sacamos por la tarde [el estudiante imita el gesto del maestro de “juntos”]. Por lo tanto, debemos usar la adición.
- S2: El problema 3 pregunta “¿cuántos pájaros hay en este árbol ahora?” “Ahora” significa combinar los pájaros originales con los que vinieron después [el estudiante usa el gesto de mantener dos brazos juntos], por lo que debemos usar la adición.
- S3: El problema 4 no usa las palabras “en total”, pero Xiao Ping rebota la pelota 39 veces más que Xiao Ming [el estudiante enfatiza la palabra “más”], por lo que agregando las 27 veces que Xiao Ming la rebotó con 39 veces, podemos obtener las veces que Xiao Ping la rebotó.
- T: ¿Puedes explicarlo con esta imagen?



- S3: Lo siento, aún no lo he descubierto.

- S4: Puedo ayudarlo. La parte superior son las veces que Xiao Ming rebotó la pelota, la inferior significa las veces que Xiao Ping la rebotó más que Xiao Ming. Combinando lo superior y lo inferior están las veces que Xiao Ping la rebotó.
- S5: El problema 5 pregunta “antes”, lo que significa el número de galletas antes de empezar a comer. Por lo tanto, debemos combinar el número de galletas consumidas con el número de galletas que aún quedan en la caja, utilizando la adición.

En el episodio 3, después de la comunicación maestro-alumno y estudiante-alumno, los estudiantes llegaron a un consenso: aunque las formas de hacer la pregunta son diferentes en estos problemas, el uso de la adición es el mismo. Todos ellos requieren combinar las dos partes y calcular el total, por lo que podemos usar la suma. Este proceso contrasta con la forma habitual de enseñar problemas de palabras de adición, al centrarse en palabras clave como “en total” o “en conjunto”. Se usaron diferentes palabras en los problemas de este episodio, incluyendo “hoy” y “ahora” y, estas palabras normalmente no implican explícitamente la adición. Sin embargo, los estudiantes aún pudieron determinar el uso de la adición en función del significado de la palabra problemas que plantearon.

EPISODIO 4: PLANTEAR PROBLEMAS DE RESTA

Después de discutir el significado de las ecuaciones de suma, el maestro preguntó: “¿Cuántos problemas de la vida real puedes plantear y resolver usando la resta $39 - 27 = 12$?” Los estudiantes plantearon los siguientes problemas:

- Problema 1: Hay 39 autos en el estacionamiento. 27 autos se van. ¿Cuántos autos quedan?
- Problema 2: Los maestros tienen 39 libros. Distribuyen 27 libros a los estudiantes. ¿Cuántos libros quedan?
- Problema 3: Hay 27 sillas. Vienen 39 personas. ¿Cuántas sillas necesitamos agregar?
- Problema 4: Pingping tiene 39 estrellas. Pongpong tiene 27 estrellas. ¿Cuántas estrellas más tiene Pingping que Pongpong?
- Problema 5: Shasha recoge 27 baterías de desecho. Tata recoge 39 baterías usadas. ¿Cuántas baterías de desecho menos tiene Shasha que Tata?
- Problema 6: Hay 39 manzanas, y el número de piñas es 27 menos que el número de manzanas. ¿Cuántas piñas tenemos?
- Problema 7: Hay 39 niñas en nuestra clase. El número de niños es 27 menos que el número de niñas. ¿Cuántos niños hay en nuestra clase?

- Problema 8: El conejo blanco recoge 39 zanahorias. El conejo marrón recoge 27 zanahorias. ¿Cuántas zanahorias más debe recoger el conejo marrón si quiere tener la misma cantidad de zanahorias que el conejo blanco?
- Problema 9: Hay 39 ladrillos en la caja grande y 27 ladrillos en la caja pequeña. ¿Cuántos ladrillos debemos quitar de la caja grande si queremos que el número de ladrillos en la caja grande sea igual al número en la caja pequeña?

En el episodio 4, podemos ver que los estudiantes plantearon varios tipos de problemas de la vida real que se pueden resolver mediante la resta. Al explicar la razón por la cual la resta se puede usar para resolver estos problemas, los estudiantes usaron su propio lenguaje, gestos o imágenes para explicar la relación cuantitativa, llegando finalmente al siguiente consenso: Aunque los contextos utilizados para estos problemas son diferentes, los procesos y el algoritmo de cálculo son los mismos: calcular la diferencia (o una parte en la relación de Todo – Parte = Parte). La solución se puede obtener mediante sustracción.

Dado que el objetivo de la educación es cultivar la capacidad de pensamiento de los estudiantes para prepararlos para la vida, esta lección demuestra los beneficios de usar el planteamiento de problemas para fomentar la comprensión de los estudiantes. Estos pudieron plantear y resolver problemas de la vida real que involucran sumas y restas sin preocuparse por las “palabras clave” que sugieren explícitamente suma y resta. Por lo tanto, el uso del planteamiento de problemas para ayudar a los estudiantes a comprender las relaciones benefició su comprensión de la resta y la suma. Una característica notable de este ejemplo es su diseño novedoso: la mayor parte de esta lección consistió en pedir a los estudiantes que plantearan diferentes tipos de problemas de suma y resta. En comparación con el método tradicional de usar “palabras clave” para ayudar a los estudiantes a juzgar si un problema es un problema de suma o un problema de resta, este método de plantear problemas no solo permite al maestro evaluar la comprensión de los estudiantes de la suma y la resta, sino que también les permite ver las razones por las que sumamos dos números o por qué restamos dos números. lo que crea mejores oportunidades de aprendizaje para ellos.

Como se indica en Cai *et al.* (2015), todavía no está del todo claro cómo los estudiantes llegaron a estos problemas. Sin embargo, está claro que, al plantear problemas, los estudiantes individuales se involucraron en diferentes formas de pensar creando situaciones modeladas por suma o resta. Colectivamente, los estudiantes discutieron los problemas planteados, lo que ayuda a otros estudiantes en la clase a desarrollar una mejor comprensión de la suma y la resta. Además, los beneficios de plantear problemas incluyen: (1) posicionar a los

estudiantes como la fuente de conocimiento matemático y perspicacia, promoviendo así la formación de identidad matemática positiva; (2) involucrar a la clase en una actividad comparativamente novedosa, promoviendo así el interés y el compromiso, y (3) alentar a los estudiantes a reflexionar sobre su propia comprensión existente de las situaciones de suma y resta, promoviendo así las normas sociales de comprensión.

¿QUÉ ES PLANTEAR PROBLEMAS, DE TODOS MODOS?

Ahora que hemos visto un atisbo de la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas en el ejemplo anterior, podemos describir brevemente lo que se entiende por plantear problemas e investigación de planteamiento de problemas. Como se indica en Cai y Hwang (2020),

*Por planteamiento de problemas en la educación matemática, nos referimos a varios tipos relacionados de actividad que implican o apoyan a los maestros y estudiantes a formular (o reformular) y expresar un problema o tarea basada en un contexto particular (al que nos referimos como el *contexto del problema* o *la situación del problema*). (p. 2)*

Los términos problema y tarea en este marco de definición incluyen ampliamente cualquier pregunta matemática que se pueda hacer y, cualquier tarea matemática que se pueda realizar en función de la situación del problema.

Los investigadores han utilizado tanto a estudiantes como a profesores como participantes en la investigación de problemas. Por lo tanto, Cai y Hwang (2020) diferenciaron entre cómo se ha utilizado la formulación de problemas con los estudiantes y cómo se ha utilizado con los maestros. Para los estudiantes, la formulación de problemas se ha definido como las siguientes actividades intelectuales específicas: (a) Los estudiantes plantean problemas matemáticos basados en situaciones problemáticas dadas que pueden incluir expresiones matemáticas o diagramas, y (b) los estudiantes plantean problemas cambiando (es decir, reformulando) problemas existentes. Para los maestros, la formulación de problemas se ha definido como las siguientes actividades intelectuales específicas: (i) los propios maestros plantean problemas matemáticos basados en situaciones problemáticas dadas que pueden incluir expresiones matemáticas o diagramas, (ii) los maestros predicen los tipos de problemas que los estudiantes pueden plantear en función de situaciones problemáticas dadas, (iii) los

maestros plantean problemas cambiando problemas existentes, (iv) los maestros generan situaciones matemáticas que plantean problemas, para que los estudiantes planteen problemas, y (v) los maestros plantean problemas matemáticos para que los estudiantes los resuelvan.

Las caracterizaciones de los problemas que se plantean cubren una amplia gama de actividades, porque los investigadores han abordado el planteamiento de problemas desde una variedad de perspectivas. Sin embargo, Ruthven (2020) y Baumanns y Rott (2021) han externado la preocupación de definir el problema planteado de manera demasiado amplia. Por ejemplo, Cai y Hwang (2020) encontraron que algunos investigadores han considerado que los maestros plantean problemas al cambiar los problemas existentes y los maestros plantean problemas matemáticos para que los estudiantes los resuelvan como parte de la investigación sobre el planteamiento de problemas que involucra a los maestros. Se podría argumentar que estos dos escenarios están relacionados con la resolución de problemas porque los estudiantes están involucrados en la resolución de problemas en lugar de plantear problemas en estos dos escenarios. Para los propósitos de este documento, la formulación de problemas se define como las siguientes actividades intelectuales específicas: (1) Los estudiantes plantean problemas matemáticos basados en situaciones problemáticas dadas que pueden incluir expresiones matemáticas o diagramas; (2) los estudiantes plantean problemas cambiando (es decir, reformulando) problemas existentes; (3) los profesores generan situaciones matemáticas que plantean problemas para que los estudiantes planteen problemas; y (4) los maestros predicen los tipos de problemas que los estudiantes pueden plantear en función de situaciones problemáticas dadas. Hay al menos tres ventajas al definir el problema planteado de esta manera. En primer lugar, esta definición destaca la singularidad del aspecto planteado de la formulación de problemas. La segunda ventaja es que muestra las principales actividades relacionadas con el pasado involucradas en la enseñanza a través de la formulación de problemas tanto para estudiantes como para profesores. Finalmente, identifica claramente los roles de los estudiantes y maestros en la enseñanza a través de la formulación de problemas.

Stanic y Kilpatrick (1989) propusieron tres puntos de vista en la investigación de resolución de problemas: como una actividad cognitiva; como un objetivo de aprendizaje en sí mismo y como un enfoque instruccional. Del mismo modo, los investigadores han adoptado comúnmente perspectivas de problemas que plantean que son paralelos a los tres puntos de vista de Stanic y Kilpatrick (1989) (Cai *et al.*,

en prensa). La primera perspectiva se ocupa del problema que se presenta como una actividad cognitiva. Los estudiantes se involucran en una situación o situaciones y luego descubren y plantean problemas basados en las situaciones. Esta visión cognitiva es similar al descubrimiento científico: los estudiantes encuentran algo que realmente quieren saber. La investigación que plantea problemas desde esta perspectiva se ha centrado en gran medida en examinar qué tipo de problemas pueden plantear las personas y los tipos de procesos que las personas usan para plantear problemas. También dentro de esta perspectiva está la investigación que utiliza el proceso de plantear problemas para evaluar el pensamiento y la creatividad de las personas (para lo cual también se ha utilizado la resolución de problemas). Es decir, los investigadores no solo han examinado la capacidad de estudiantes y profesores para plantear problemas matemáticos, sino también los procesos cognitivos y afectivos de plantear problemas (Cai y Leikin, 2020).

La segunda perspectiva de plantear problemas es considerarla como un objetivo instruccional. Es decir, a través de la instrucción y la participación en la formulación de problemas, los estudiantes podrán desarrollar sus habilidades para generar problemas y convertirse en mejores formuladores de problemas. En la investigación desde esta perspectiva, la formulación de problemas se ha utilizado para evaluar el pensamiento y la creatividad de las personas centrándose en los productos: los problemas planteados (Leikin y Elgrably, 2020; Plata, 1997). De hecho, los investigadores han utilizado durante mucho tiempo los problemas planteados como una medida de creatividad (Getzels, 1979; Guilford, 1950) y los han utilizado recientemente como una medida de los resultados del aprendizaje (por ejemplo, Cai *et al.*, 2013). Los investigadores también han investigado y confirmado que es posible capacitar a estudiantes y maestros para que se conviertan en mejores formuladores de problemas.

La tercera perspectiva de plantear problemas es usarla para enseñar matemáticas. Es decir, los estudiantes entenderán y aprenderán matemáticas a través de su participación en la formulación de problemas. Aunque el desarrollo de habilidades para plantear problemas puede ser un objetivo de este tipo de instrucción, esta perspectiva enfatiza la participación de los estudiantes en tareas y actividades que plantean problemas para ayudarlos a alcanzar objetivos de aprendizaje cognitivos y no cognitivos, más allá del desarrollo de sus habilidades para plantear problemas. Por ejemplo, en la lección descrita, se introdujo una revisión de la suma y la resta al plantear problemas matemáticos de la vida real basados en la suma y la resta. Además, la formulación de problemas podría incorporarse en la instrucción como una forma de ayudar a los estudiantes a

desarrollar sus identidades como exploradores de las matemáticas y fomentar disposiciones positivas hacia las matemáticas. A continuación, propongo dos preguntas de investigación relacionadas, pero sin respuesta.

PREGUNTA SIN RESPUESTA 1

Es alentador que los investigadores hayan encontrado que tanto los profesores como los estudiantes son capaces de plantear problemas matemáticos. También, es alentador que los maestros y los estudiantes puedan ser capacitados para convertirse en mejores formuladores de problemas. Sin embargo, los investigadores han encontrado que algunos estudiantes y maestros plantean problemas no matemáticos, irresolubles e irrelevantes. Por ejemplo, Silver y Cai (1996) encontraron que casi 30% de los problemas planteados por los estudiantes de secundaria eran problemas no matemáticos o simplemente declaraciones sin problemas (a pesar de que las instrucciones claramente pedían problemas). Cai *et al.* (2015) preguntó: “¿Por qué los estudiantes plantean problemas o declaraciones no matemáticas, triviales o subóptimas?” Esta pregunta no se ha explorado desde 2015. Tal vez una dirección para futuras investigaciones es realizar un “análisis de errores” para estas respuestas indeseables, para tratar de comprender qué lleva a los estudiantes a proporcionarlas.

PREGUNTA SIN RESPUESTA 2

En relación con los procesos de planteamiento de problemas, ha habido algunos avances recientes en la investigación sobre los procesos cognitivos de plantear problemas (ver Cai *et al.*, 2022, para una breve revisión). Aunque la investigación ha demostrado que los estudiantes y los profesores son capaces de plantear problemas, todavía sabemos mucho menos sobre sus procesos para plantear problemas matemáticos y, todavía no existe un marco definitivo de planteamiento de problemas análogo a los marcos de resolución de problemas bien establecidos. Aunque plantear y resolver son similares, existen suficientes diferencias para justificar un marco de planteamiento de problemas que sea único de los de resolución de problemas (Rott *et al.*, 2021). Baumanns y Rott (2022) discutieron modelos del proceso de planteamiento de problemas y señalaron que diferentes modelos servían a diferentes objetivos. Los modelos discutidos incluyeron el modelo de Cruz (2006), que pretendía guiar a los maestros a través de las metas, formulación y resolución del proceso de planteamiento de problemas; la de Pelczer y Gamboa

(2009), que incluyó las cinco fases de *configuración, transformación, formulación, evaluación y evaluación final*; la de Koichu y Kontorovich (2013), que incluyó las cuatro fases de calentamiento, búsqueda de un fenómeno matemático interesante, ocultando el proceso de planteamiento del problema en la formulación del problema y revisión con pares; y la de Baumanns y Rott (2022), que comenzó con un análisis inicial de la situación seguido de procesos de variación y generación que pueden retroalimentarse entre sí para generar nuevos problemas planteados. Además de estos modelos, Zhang *et al.* (2022) propusieron un modelo de tres pasos que implica comprender la tarea, construir el problema y expresar el problema. Se necesitan esfuerzos continuos de investigación no solo para proponer un modelo general del proceso de planteamiento de problemas, sino también para incluir componentes afectivos (Cai y Leikin, 2020).

¿QUÉ ES UNA TAREA DE PLANTEAR PROBLEMAS?

El objetivo final de la instrucción es mejorar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes. Los maestros (y también los estudiantes) establecen e implementan tareas de instrucción para involucrar a los estudiantes en desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Las tareas de instrucción se pueden definir ampliamente como proyectos, preguntas, problemas, construcciones, aplicaciones y ejercicios en los que los estudiantes participan. Doyle (1988) argumentó que las tareas con diferentes demandas cognitivas probablemente induzcan diferentes tipos de aprendizaje. Las tareas gobiernan no solo la atención de los estudiantes a aspectos particulares del contenido, sino también sus formas de procesar la información, y tienen el potencial de proporcionar los contextos intelectuales para el desarrollo matemático de los estudiantes. Tales tareas pueden promover la comprensión conceptual de los estudiantes, fomentar su capacidad de razonar y comunicarse matemáticamente, y capturar sus intereses y curiosidad (NCTM, 1991). La National Council of Teachers of Mathematics ha recomendado que los estudiantes estén expuestos a tareas verdaderamente basadas en problemas, para que se practique la creación de sentido matemático (NCTM, 1991, 2000). Varios estudios han proporcionado evidencia clara que respalda la conexión entre la naturaleza de las tareas y el aprendizaje de los estudiantes (Cai, 2014; Hiebert y Wearne, 1993; Jacobs y Spangler, 2017; Stein y Lane, 1996). Los estudiantes con las mayores ganancias son los de las aulas que utilizan tareas cognitivamente exigentes.

Las tareas de plantear problemas, entonces, son aquellas tareas de instrucción que posicionan a los estudiantes como generadores o moldeadores de nuevos problemas basados en situaciones de la vida real y de las matemáticas (Cai y Hwang, 2020; Plata, 1994). Tales tareas crean oportunidades para que los estudiantes se conecten con sus experiencias y antecedentes y plantean problemas muy diferentes, los cuales estén relacionados con ideas matemáticas (Cai y Leikin, 2020). Las tareas de plantear problemas suelen ser cognitivamente exigentes, pero son mucho más accesibles que las tareas de resolución de problemas (Cai y Hwang, 2021; Silber y Cai, 2021).

Aunque existen diferentes tipos de tareas de planteamiento de problemas (véase, por ejemplo, Baumanns y Rott, 2021; Cai y Hwang, en prensa), una tarea de plantear problemas generalmente incluye dos partes: una situación y un aviso (Cai y Hwang, en prensa; Cai *et al.*, 2022). La situación problemática es lo que proporciona el contexto y los datos que los estudiantes pueden extraer (además de sus propias experiencias de vida y conocimientos) para elaborar problemas. El mensaje permite a los formuladores saber lo que se espera que hagan. Dependiendo del objetivo de la tarea, puede haber muchos tipos de indicaciones para la misma situación de planteamiento de problemas. Tomemos lo siguiente como ejemplo:

Jerome, Elliott y Arturo se turnaron para conducir a casa después de un viaje. Arturo condujo 80 millas más que Elliott. Elliott condujo el doble de millas que Jerome. Jerome condujo 50 millas. Plantear tres problemas matemáticos diferentes que se pueden resolver en base a esta información.

En este ejemplo, “Jerome, Elliott y Arturo se turnaron para conducir a casa después de un viaje. Arturo condujo 80 millas más que Elliott. Elliott condujo el doble de millas que Jerome. Jerome condujo 50 millas” es la situación; “Plantea tres problemas matemáticos diferentes que se pueden resolver en base a esta información” es el mensaje. Para la misma situación, se podría usar un mensaje diferente, como “Plantear un problema fácil, un problema moderadamente difícil y un problema difícil que se pueda resolver en función de esta información”.

Cai *et al.* (2022) discutió específicamente el impacto de diferentes situaciones e indicaciones en el problema para plantear a los estudiantes (tanto los productos como los procesos) a nivel individual, grupal y de aula. La elección de situaciones e indicaciones puede influir tanto en el enfoque matemático de los estudiantes como

en el nivel de desafío o compromiso afectivo que presenta la tarea de plantear problemas. Ver Cai *et al.* (2022) para una discusión más detallada.

PREGUNTA SIN RESPUESTA 3

En la resolución matemática de problemas, los investigadores han explorado los efectos de varias variables de tarea en la resolución de problemas de los estudiantes (Goldin y McClintock, 1984), incluidas variables de sintaxis, de contenido y contexto, de estructura y variables de comportamiento heurístico. Aunque algunas de estas variables han sido adoptadas en la investigación de planteamiento de problemas (Cai *et al.*, 2022), la pregunta sigue siendo: ¿Se pueden adaptar todas estas variables al planteamiento de problemas? Se necesitan estudios para comprender las formas más deseables de desarrollar tareas de plantear problemas para el uso en el aula, con un enfoque particular en situaciones e indicaciones para plantear problemas.

Por ejemplo, volviendo al 30% de las respuestas consideradas indeseables en Silver y Cai (1996), el mensaje utilizado fue el siguiente: “Escribe tres preguntas diferentes que puedan ser respondidas...” Este mensaje no requería específicamente “preguntas matemáticas”. ¿Seguirían los estudiantes produciendo un porcentaje tan grande de respuestas indeseables si se usaran diferentes indicaciones?, tales como:

- Escriba tres preguntas matemáticas diferentes que puedan responderse en función de esta información;
- Escriba un problema matemático fácil, uno moderadamente difícil y uno difícil que pueda responderse con base en esta información;
- Escriba tres problemas matemáticos diferentes que puedas desafiar a tus compañeros de clase a resolver con base en esta información;
- Escriba tres problemas matemáticos diferentes que puedas desafiar a tu maestro a resolver con base en esta información.

¿CÓMO DEBEN LOS MAESTROS MANEJAR LOS PROBLEMAS PLANTEADOS POR LOS ESTUDIANTES EN LA INSTRUCCIÓN EN EL AULA?

Además de diseñar tareas de planteamiento de problemas para la instrucción en el aula, otro aspecto importante de la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas es el manejo de los maestros de los problemas planteados por los estudiantes. Una consecuencia ideal de usar el planteamiento de problemas para enseñar matemáticas es que los estudiantes plantearán sus propios problemas durante la instrucción, problemas de los que pueden apropiarse. Por lo tanto, la forma en que los maestros manejen los problemas planteados por los estudiantes se convierte en un aspecto crítico de la enseñanza a través de la formulación de problemas que pueden dar forma al efecto del planteamiento de problemas en la clase. Comprender las formas en que los maestros manejan los problemas planteados por los estudiantes puede ayudarnos a comprender mejor este aspecto de la instrucción en el aula en el que se utilizan tareas de plantear problemas.

Hay al menos tres desafíos para el manejo de los maestros respecto a los problemas planteados por los estudiantes. El primero es que algunos de estos problemas pueden no ser matemáticos. De hecho, la investigación ha demostrado que los estudiantes pueden plantear varios tipos de problemas, desde problemas no matemáticos hasta problemas matemáticos complejos (por ejemplo, Cai y Hwang, 2002; Silver y Cai, 1996). Es imposible (y no beneficioso) discutir en clase todos los problemas planteados por los estudiantes. Pero ¿se desalentará a los estudiantes cuyos problemas planteados no se discuten?

El segundo desafío es que algunos de los problemas planteados por los estudiantes pueden no estar relacionados con los objetivos de aprendizaje de la lección a pesar de que sean problemas matemáticos bastante deseables. Además, algunos de estos podrían ser problemas matemáticos bastante desafiantes. Uno de los aspectos más importantes del manejo de los problemas planteados por los estudiantes es que los maestros hagan juicios sobre cómo los problemas están alineados con los objetivos de aprendizaje de la lección. En su análisis de 22 casos de enseñanza que plantean problemas, Zhang y Cai (2021) encontraron que algunos de los problemas planteados por los estudiantes no estaban relacionados con los objetivos de aprendizaje. En los 22 casos de enseñanza, los maestros omitieron los problemas planteados que eran irrelevantes para el objetivo de instrucción de la lección, generalmente diciendo que no los resolverían porque no estaban relacionados con la lección del día. Para los problemas planteados relevantes

para los objetivos de aprendizaje, los maestros los clasificaron mentalmente en diferentes niveles de dificultad. Para problemas fáciles planteados, los maestros guiarían rápidamente a los estudiantes para resolverlos, a través de la discusión de toda la clase pidiéndoles que resuelvan las respuestas. Para problemas muy desafiantes, los maestros a menudo los asignaban como tarea o como tareas de instrucción para ser discutidas en la próxima clase. Los maestros tendían a enfocar la discusión durante la lección en los problemas moderadamente desafiantes.

Finalmente, el tercer desafío es la naturaleza generativa de los problemas planteados. Es decir, las tareas que plantean problemas son bastante abiertas en el sentido de que los estudiantes pueden plantear una variedad de problemas basados en su propia experiencia, y esta variedad complica la toma de decisiones instantánea de los maestros sobre cómo manejar estos problemas planteados. Algunos estudios han sondeado las predicciones de los maestros sobre los problemas que podrían plantear sus estudiantes (por ejemplo, Cai *et al.*, 2020; Xu *et al.*, 2020). La coincidencia general entre las predicciones de los maestros y los problemas planteados por los estudiantes no fue tan consistente o precisa como uno podría esperar. Por ejemplo, Xu *et al.* (2020) encontró que, en términos generales, las predicciones de los maestros en su estudio no coincidían bien con la actividad real de sus estudiantes para plantear problemas. En general, los maestros predijeron problemas más complejos que requerían especificar relaciones funcionales de lo que se confirmó en las respuestas de los estudiantes, incluso las de los estudiantes en niveles de grado más altos. Además, para superar este desafío, los maestros deben estar capacitados para predecir con mayor precisión los problemas planteados por sus estudiantes. En particular, en la etapa de planificación, los maestros deben estar equipados para considerar la variedad de posibles problemas que los estudiantes podrían plantear. Anticipar el pensamiento de sus estudiantes con respecto al planteamiento de problemas matemáticos podría ser un paso clave en el uso del planteamiento de problemas para evaluar la comprensión matemática de los estudiantes en el aula. Por lo tanto, anticipar posibles problemas que los estudiantes podrían plantear debe ser un aspecto importante en la planificación de lecciones que plantean problemas (Cai *et al.*, 2020; Koichu, 2020).

Aunque limitado en su alcance, algunas investigaciones han explorado formas de superar los desafíos mencionados en el manejo de los problemas planteados. El ejemplo de enseñanza presentado, al principio de este documento, ilustró una forma de manejar los problemas planteados por los estudiantes, a saber, analizar y clasificar los problemas y luego discutir las soluciones basadas

en la suma y la resta. En ese ejemplo de enseñanza, la atención se centró en el análisis de los problemas según sus estructuras, con o sin “palabras clave”. En términos más generales, existe la necesidad de desarrollar una rutina para manejar los problemas planteados por los estudiantes. Al final de este artículo, propongo un modelo de instrucción ABPP. Cabe señalar que el desarrollo y la elaboración ulteriores del modelo requieren la creación de casos de enseñanza ABPP más específicos que exhiban las características del modelo.

De hecho, los casos de enseñanza para plantear problemas proporcionan un terreno fértil para explorar y abordar preguntas clave de investigación educativa, por ejemplo, cómo los maestros deben manejar los problemas planteados por los estudiantes, y cómo el intercambio de tales casos de enseñanza podría estimular una mayor discusión y exploración por parte de maestros e investigadores en este tipo de preguntas. Un caso de enseñanza que plantea problemas incluye elementos principales de una lección y análisis relacionados, capturando así la acción instructiva de la lección, pero no es simplemente una transcripción de lo que sucede durante la lección. Por supuesto, para cumplir su función tanto para la formación docente como para los investigadores, los casos de enseñanza incluyen narrativas que describen las tareas de instrucción utilizadas en la lección y los movimientos de instrucción relacionados para esas tareas (Zhang y Cai, 2021). Sin embargo, los casos de enseñanza también incluyen información adicional sobre el pensamiento subyacente detrás de las principales decisiones de instrucción, así como reflexiones y discusiones sobre esas decisiones. El desarrollo de casos didácticos se basa en lecciones reales, implementadas y los eventos instructivos típicos que surgen durante las lecciones. Además, al igual que un maestro normalmente haría al planificar una lección, generar un caso de enseñanza incluye ofrecer explicaciones sobre los problemas anticipados que los estudiantes podrían plantear. Sin embargo, al implementar sus lecciones, los maestros deben lidiar no solo con los problemas que anticipan que los estudiantes podrían plantear, sino también con los problemas imprevistos que se plantean. Estos problemas imprevistos también se convierten en material potencial para el caso de enseñanza.

Los casos de enseñanza de ABPP pueden servir como entidades tangibles para almacenar y mejorar el conocimiento profesional de la enseñanza a través de la formulación de problemas (Cai *et al.*, en prensa). La investigación futura debe centrarse en analizar las lecciones de planteamiento de problemas grabadas en video, para comprender los procesos involucrados en el manejo de los problemas planteados por parte de los maestros y cómo determinan los

problemas planteados relevantes e irrelevantes, así como los niveles de dificultad de los problemas relevantes. En particular, necesitamos investigar cómo los maestros planifican sus lecciones para facilitar su manejo de los problemas planteados.

PREGUNTA SIN RESPUESTA 4

Los maestros no solo necesitan manejar los problemas planteados por los estudiantes, sino también usar los problemas planteados por ellos para comprender el pensamiento de los estudiantes y ajustar su enseñanza en consecuencia. Uno de los beneficios potenciales de incluir la presentación de problemas en las aulas de matemáticas es la capacidad de las tareas de planteamiento de problemas para revelar ideas útiles sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Cuanta más información obtengan los maestros sobre lo que los estudiantes saben y piensan, más datos tendrán para fomentar sus esfuerzos para crear oportunidades de aprendizaje efectivas para todos sus estudiantes. Por lo tanto, el conocimiento de los maestros sobre el pensamiento de los estudiantes tiene un impacto sustancial en su instrucción en el aula y, por lo tanto, en el aprendizaje de los estudiantes. Dado que los investigadores han utilizado tareas de planteamiento de problemas para obtener información sobre la comprensión matemática de estudiantes y profesores (por ejemplo, Cai y Hwang, 2002; Yao *et al.*, 2021), parece razonable postular que los maestros también podrían usar el planteamiento de problemas para comprender mejor el pensamiento matemático de sus estudiantes. Esto lleva a la pregunta de cómo los maestros pueden usar el planteamiento de problemas para comprender mejor el pensamiento de los estudiantes, especialmente en el proceso de manejar los problemas planteados por los estudiantes en el aula.

¿CÓMO SE PUEDE APOYAR A LOS MAESTROS PARA QUE APRENDAN A ENSEÑAR MEDIANTE EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS?

La investigación sobre el planteamiento de problemas ha explorado los tipos de problemas que los maestros pueden plantear y, en general, ha apoyado la afirmación de que tanto los maestros en formación como los que están en servicio son capaces de plantear problemas matemáticos interesantes e importantes (ver Cai *et al.*, 2015, para una revisión). La investigación también ha demostrado que

los maestros no solo pueden mejorar su rendimiento en el planteamiento de problemas y cambiar sus puntos de vista sobre la formulación de problemas mediante la capacitación, sino que también aprenden a diseñar lecciones para desarrollar su enseñanza (Cai *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2020). Estos hallazgos sugieren que existe una base sólida para que los maestros aprendan a enseñar a través de la formulación de problemas, lo cual es bastante alentador.

Sin embargo, también hay desafíos que deben abordarse para que los maestros aprendan a enseñar a través del planteamiento de problemas. El primer desafío es la falta de tareas que planteen problemas en los materiales curriculares regulares. Kilpatrick (1987) observó que, en la vida real, los problemas a menudo deben ser creados o descubiertos por el solucionador. Esto sugiere que, si un objetivo de la educación es preparar a los estudiantes para los tipos de pensamiento que necesitarán en la vida, el problema debe abordarse directamente. Los materiales curriculares, y los libros de texto de matemáticas en particular, pueden ser recursos importantes para los maestros que enseñan a través de la formulación de problemas (Cai y Howson, 2013). Como lo indicaron Cai y Jiang (2017), a pesar del fuerte énfasis en los problemas que plantean los estándares curriculares de matemáticas tanto de China como de los Estados Unidos, los materiales curriculares de las escuelas primarias chinas y estadounidenses solo incluyen una proporción muy pequeña (menos del 3%) de tareas de planteamiento de problemas. Otro desafío es la aceptación de los maestros para enseñar a través del planteamiento de problemas y la dificultad de implementar el planteamiento de problemas en las aulas, incluso cuando los maestros han aceptado el enfoque. La aceptación de los maestros y el sentido de propiedad con respecto al enfoque ABPP es importante, al igual que lo es para otros esfuerzos de mejora escolar (Kramer *et al.*, 2015; Redding y Viano, 2018). Pero, simplemente aceptar una idea instructiva no garantiza su implementación adecuada (Cai y Hwang, 2021).

La investigación actual sobre cómo apoyar a los maestros para que aprendan a enseñar a través de la formulación de problemas, es escasa, por lo que se propone un proyecto de planteamiento de problemas que involucra a maestros de matemáticas de primaria como ejemplo para discutir el aprendizaje de los maestros para enseñar a través del planteamiento de problemas. El proyecto ha sido diseñado para superar los retos mencionados (Cai y Hwang, 2021; Cai *et al.*, 2020) y se basa en las características del aprendizaje profesional docente efectivo (Guskey y Yoon, 2009; Yoon *et al.*, 2007). En el proyecto se han elaborado tres estrategias para integrar mejor el planteamiento de problemas en el plan

de estudios de matemáticas escolar: a) capacitar a los maestros para que reinterpreten los materiales curriculares existentes y los remodelen de manera sencilla para crear tareas matemáticas sobre planteamiento de problemas con mayores oportunidades de aprendizaje; b) mejorar los planes de estudio existentes con tareas adicionales sobre planteamiento de problemas que incluyan apoyo en forma de ejemplos de problemas planteados; y (c) alentar a los estudiantes a plantear problemas de variación, es decir, plantear nuevos problemas que se basen en un problema existente pero que varíen parámetros o aspectos contextuales del problema original. Estas estrategias se identificaron con base en una búsqueda sistemática de literatura sobre el planteamiento de problemas y están dirigidas a abordar los desafíos de la escasez de tareas de planteamiento de problemas en los materiales curriculares actuales.

Cabe señalar que, aunque los materiales curriculares pueden ser remodelados a través del proceso interactivo e interpretativo en el que los maestros se comprometen para adaptar lo que está en sus libros de texto a las necesidades de sus estudiantes, existen limitaciones en este proceso. Los maestros enfrentan múltiples demandas de tiempo y atención; no son libres de dedicar las cantidades extendidas de tiempo requeridas para reinterpretar grandes franjas del plan de estudios y luego incorporar cambios significativos a sus próximas lecciones simplemente para aumentar el nivel de actividad sobre planteamiento de problemas en el aula. Las tres estrategias identificadas anteriormente también se diseñaron teniendo en cuenta esta preocupación, y han demostrado su viabilidad para ayudar a los maestros a recoger el fruto fácil de desarrollar tareas de plantear problemas basadas en el plan de estudios existente. El Apéndice A muestra un ejemplo de la aplicación de estas estrategias para desarrollar tareas de planteamiento de problemas.

Para superar los desafíos relacionados con su aceptación de los docentes, su aprendizaje debe abordar la cuestión de las creencias de los docentes. Comprender, estudiar y trabajar para moldear las creencias de los maestros es importante porque sus creencias influyen en cómo enseñan matemáticas, lo que a su vez influye en las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas. Se deben crear oportunidades para el aprendizaje docente con el objetivo de aumentar el conocimiento de los maestros y transformar sus creencias con respecto a la enseñanza a través de la formulación de problemas (que se muestra en la figura 3). A través del aprendizaje de los maestros aumentan su conocimiento y cambian sus creencias, después de lo cual cambian su instrucción en el aula con el objetivo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes. A

medida que los maestros aprenden más sobre la formulación de problemas y sobre cómo diseñar lecciones sobre el planteamiento de problemas, comienzan a hacer cambios en su instrucción para que experimenten la aceptación de las ideas del planteamiento de problemas.

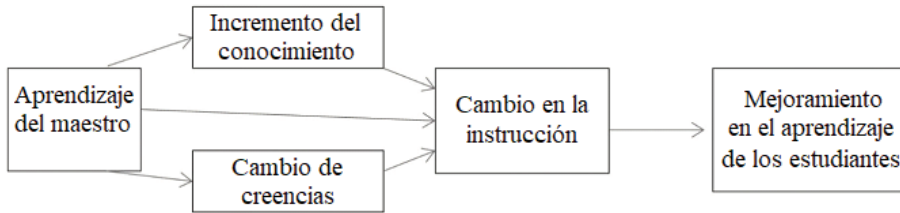


Figura 3. Un modelo de aprendizaje profesional docente.

Para abordar el desafío de la implementación de lecciones sobre planteamiento de problemas, el aprendizaje de los maestros debe alinearse estrechamente con la práctica. Una característica importante del aprendizaje docente efectivo es su estrecha relación con la práctica de los docentes (Guskey y Yoon, 2009; Yoon *et al.*, 2007). La investigación ha encontrado que el aprendizaje docente con aplicaciones directas del conocimiento a la planificación e instrucción de los maestros tiene una influencia positiva en las prácticas docentes, lo que a su vez conduce a ganancias en el aprendizaje de los estudiantes. El aprendizaje docente es más efectivo cuando se centra en la implementación de prácticas de instrucción basadas en la investigación y brinda a los maestros oportunidades para adaptar las prácticas a sus situaciones únicas en el aula (Guskey y Yoon, 2009). Los maestros deben tener oportunidades no solo para discutir lecciones reales en las que se utilizó la formulación de problemas, sino también para diseñar, desarrollar y revisar planes de lecciones para usar la formulación de problemas para enseñar temas específicos. Con tales actividades, los maestros tienen la oportunidad de aprender a diseñar tareas de plantear problemas y organizar el discurso en el aula en torno al planteamiento de problemas.

Además, los maestros no solo necesitan ideas específicas sobre cómo pueden aprender a desempeñar sus roles, sino que también necesitan ejemplos concretos para guiar su práctica. Los profesores pueden participar en la investigación basada en el diseño sobre la enseñanza de las matemáticas a través de la

formulación de problemas, después de lo cual pueden desarrollar sus propios casos de enseñanza basados en sus experiencias diseñando y probando las nuevas lecciones. En esos casos de enseñanza, pueden resaltar los cambios que hicieron para producir el diseño final y explicar el razonamiento detrás de esos cambios. Al desarrollar tales casos de enseñanza de ABPP, los maestros están aprendiendo e investigando simultáneamente sobre la enseñanza a través de la formulación de problemas (Cai y Hwang, 2021; Zhang y Cai, 2021). Además, los casos de enseñanza ABPP resultantes, son ejemplos concretos de enseñanza a través de la formulación de problemas, sirven para ayudar a otros maestros a aprender lo que implica la enseñanza a través de la formulación de problemas y muestran el tipo de pensamiento y toma de decisiones instructivas que están involucrados y, también proporcionan lecciones probadas sobre planteamiento de problemas que pueden abordar el mismo contenido y objetivos pedagógicos que ellos mismos tienen.

PREGUNTA SIN RESPUESTA 5

Es bastante alentador que los maestros puedan aprender a enseñar a través de la formulación de problemas (Cai *et al.*, 2020; Cai y Hwang, 2021; Li *et al.*, 2020). Sin embargo, aunque hay una gran cantidad de literatura que podemos extraer sobre el aprendizaje profesional docente, sabemos poco sobre las siguientes preguntas: ¿Cómo aprenden los maestros a enseñar a través de la formulación de problemas, y cuál es el impacto del aprendizaje profesional docente para enseñar a través de la formulación de problemas en la instrucción en el aula y el aprendizaje de los estudiantes? (ver figura 3). Cai *et al.* (2021) actualmente están llevando a cabo un estudio longitudinal no solo para apoyar a los maestros para enseñar matemáticas mediante la participación de sus estudiantes en la formulación de problemas matemáticos, sino también para investigar longitudinalmente la promesa de apoyar a los maestros para que enseñen con ABPP para mejorar la práctica de instrucción de los maestros y el aprendizaje de los estudiantes. En particular, Cai *et al.* (2021) están aprovechando el desarrollo de casos de enseñanza de ABPP como un componente clave de su proyecto. Es bastante común utilizar el enfoque basado en casos para el aprendizaje profesional docente en diversas disciplinas (Hillen y Hughes, 2008; Markovits y Smith, 2008; Merseth, 2003, 2016; Smith *et al.*, 2014; Stein *et al.*, 2009; Williams, 1992). Como se señaló anteriormente, los casos extraídos de la enseñanza real pueden proporcionar ejemplos concretos que están directamente relacionados con el

contenido y los objetivos pedagógicos de los que los maestros son responsables. Además, para los maestros que están creando sus propios casos de enseñanza basados en sus experiencias de enseñanza a través de la formulación de problemas, el desarrollo continuo de casos de enseñanza de ABPP puede ser efectivo para el propio aprendizaje de los maestros. Dado lo efectivo que ha sido el uso de casos de enseñanza, se necesita más esfuerzo para acumular casos de enseñanza en la formulación de problemas.

Con casos de enseñanza implementados con más éxito utilizando el planteamiento de problemas como un recurso, los maestros pueden aprender de los casos a pesar de la escasez de tareas de planteamiento de problemas en los libros de texto actuales y otros materiales curriculares.

¿CUÁL ES EL EFECTO DE LA INSTRUCCIÓN ABPP EN MAESTROS Y ESTUDIANTES?

En 2015, Cai *et al.* escribieron: “Aunque los argumentos teóricos sugieren que involucrar a los estudiantes en actividades de plantear problemas en las aulas debería tener un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes y la formulación de problemas, hay relativamente pocos estudios empíricos que documenten sistemáticamente este efecto” (p. 26). La buena noticia es que, en los últimos años, algunos estudios han examinado el impacto de la instrucción sobre planteamiento de problemas en estudiantes y maestros (por ejemplo, Akben, 2020; Bevan y Capraro, 2021; Cai y Hwang, 2021; Cai *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2020; Klaassen y Doorman, 2015; Kopparla *et al.*, 2019; Suarsana *et al.*, 2019; Yang y Xin, 2021). Usando la formulación de problemas como una intervención de instrucción, los investigadores han encontrado efectos positivos del planteamiento de problemas no solo en el desempeño de los maestros, las creencias y el diseño y la enseñanza de lecciones de planteamiento de problemas (por ejemplo, Cai *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2020), pero también sobre el aprendizaje de los estudiantes a lo largo de medidas cognitivas y no cognitivas (por ejemplo, Akben, 2020; Bevan y Capraro, 2021; Cai y Hwang, 2021; Yang y Xin, 2021).

A través del estudio de un conjunto de talleres de desarrollo profesional que incluyeron el planteamiento de problemas, por ejemplo, Cai y sus asociados (Cai *et al.*, 2020; Cai y Hwang, 2021; Li *et al.*, 2020) han descubierto que los maestros sin experiencia previa en la propuesta del planteamiento de problemas pueden, después de asistir a los talleres, desarrollar con éxito sus concepciones, creencias

y desempeño sobre el planteamiento de problemas. Li *et al.* (2020) encontró que, después de participar en tres talleres, algunos maestros exhibieron progreso en su desempeño al plantear problemas y en el alcance de sus creencias sobre la enseñanza utilizando el planteamiento de problemas. Del mismo modo, Cai *et al.* (2020) encontraron que después de participar en un taller, los maestros pudieron plantear una variedad de problemas y mostraron una mayor confianza en la formulación de problemas, así como en la incorporación de la formulación de problemas en sus lecciones. Finalmente, Cai y Hwang (2021) informaron que los maestros que participaron en los talleres de desarrollo profesional exhibieron cambios positivos en sus creencias sobre el planteamiento de problemas, así como su capacidad para plantear problemas y rediseñar las lecciones existentes para incorporar componentes sobre el planteamiento de problemas.

Kopparla *et al.* (2019) realizaron un estudio cuasi-experimental en el que maestros e investigadores asignaron a los estudiantes de primaria en grupos de resolución de problemas o de planteamiento de problemas. Al grupo de estudiantes que planteaban problemas se le pidió que planteara problemas basados en la información dada, mientras que al grupo de estudiantes que resolvían problemas se le pidió que resolviera problemas basados en la información dada. Los resultados mostraron que los estudiantes de ambos grupos mostraron mejoras tanto en la formulación de problemas, como en la resolución de problemas después de las intervenciones. Curiosamente, la mejora en la formulación de problemas para el grupo de resolución de problemas fue más fuerte que para el grupo de planteamiento de problemas.

Yang y Xin (2021) desarrollaron una intervención de planteamiento de problemas apoyada en el programa existente de resolución de problemas basado en modelos conceptuales (COMPS). Diseñaron el estudio para que tres estudiantes con discapacidades de aprendizaje se involucraran con la formulación de problemas utilizando situaciones estructuradas para plantear problemas. La intervención fue efectiva para mejorar las habilidades de resolución y planteamiento de problemas de los estudiantes. A pesar de que los tres estudiantes tenían poca o ninguna experiencia planteando problemas e incluso tenían dificultades para interpretar el lenguaje matemático y comprender el razonamiento matemático, después de que comenzó la fase de intervención, los estudiantes inmediatamente comenzaron a identificar las relaciones matemáticas proporcionadas en las ecuaciones dadas. Yang y Xin (2021) afirmaron que “la intervención pareció ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión conceptual de las relaciones matemáticas en los problemas verbales” (p. 10).

Akben (2020) también utilizó un diseño cuasi-experimental para examinar las habilidades metacognitivas y de resolución de problemas de 61 estudiantes de química y 40 estudiantes de física después de participar en la formulación de problemas de ciencia. Descubrieron que involucrar a los estudiantes en actividades de planteamiento de problemas mejoró las habilidades de resolución de problemas y la conciencia metacognitiva de estos estudiantes. Cai y Hwang (2021) también encontraron efectos positivos en las medidas cognitivas y no cognitivas de los estudiantes cuando los maestros que habían participado en la capacitación para plantear problemas enseñaron lecciones utilizando la propuesta de planteamiento de problemas.

En resumen, la enseñanza a través del planteamiento de problemas matemáticos tiene un fuerte apoyo teórico y empírico para fomentar el aprendizaje de los estudiantes. Este es un desarrollo alentador para los avances en la investigación de problemas en general y la enseñanza de matemáticas a través de la formulación de problemas en particular. A continuación se describe el modelo de instrucción ABPP propuesto, que no solo resume los avances en la investigación que plantea problemas, sino que también resume las direcciones futuras de la investigación.

CONCLUSIÓN: UN MODELO INSTRUCCIONAL ABPP

El modelo de instrucción ABPP propuesto (ver figura 4) trata una sola tarea de instrucción en una lección como la unidad de interés. En ella, puede haber más de una tarea que plantea problemas o una combinación de tareas de resolución de problemas y tareas que plantean problemas. Sin embargo, este modelo describe los pasos para usar una tarea de planteamiento de problemas para enseñar matemáticas, es decir, implementar una tarea de plantear problemas para fomentar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes. El modelo incluye cuatro pasos: (a) el maestro presenta una situación de planteamiento de problemas, (b) el maestro proporciona un mensaje del planteamiento de problemas junto con la situación problemática, (c) los estudiantes plantean problemas individualmente o en grupo y, (d) los maestros manejan los problemas planteados en función de los objetivos de aprendizaje para que los estudiantes resuelvan los problemas seleccionados.

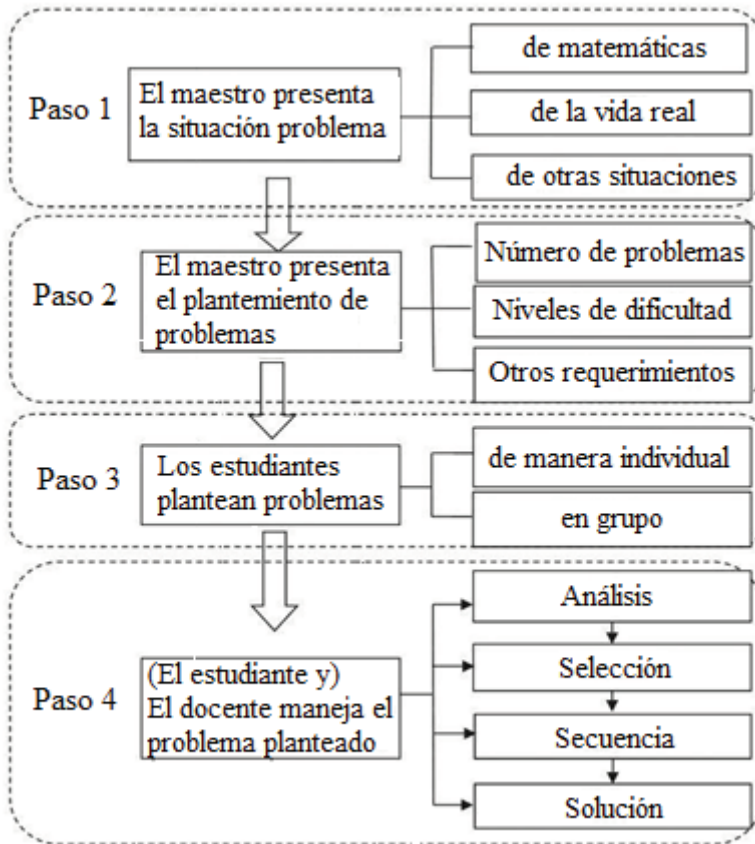


Figura 4. El modelo instruccional ABPP

El primer y segundo paso generalmente se presentan juntos. En este modelo, se separan a propósito para mostrar la importancia de considerar tanto las situaciones como las indicaciones al planificar la enseñanza a través de la formulación de problemas. Cai y Hwang (en prensa) han discutido varios ejemplos de situaciones sobre planteamiento de problemas. Estas situaciones pueden ser matemáticas o de la vida real. Las situaciones también podrían estar relacionadas con los intereses de los estudiantes fuera de la escuela en temas como deportes, videojuegos y redes sociales (Wilkinson y Bernacki, 2015). Para el segundo paso, se debe indicar que, además de especificar el número y los niveles de dificultad de los problemas que se plantearán, el profesor puede utilizar

indicaciones para motivar el planteamiento del problema de los estudiantes, como “plantear problemas matemáticos que desafiarían a sus compañeros de clase o profesores de matemáticas” o “plantear problemas matemáticos que involucran porcentajes”.

El paso 3 implica que los estudiantes planteen problemas reales. En este paso, los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar en la tarea de plantear problemas, ya sea individualmente o en grupo. Tomando en cuenta, sin embargo, que el campo de la educación matemática todavía está trabajando para comprender los procesos cognitivos y afectivos de la formulación de problemas, y aún no existe un proceso general sobre planteamiento de problemas análogo a los procesos bien establecidos para la resolución de problemas como los cuatro pasos de Polya (1957) (Cai *et al.*, 2015). Una cosa que está clara es que, los estudiantes necesitan entender la situación que plantea el problema y preguntar antes de que realmente puedan plantear problemas. También hay evidencia de que los estudiantes pueden pensar en posibles soluciones a los problemas mientras los plantean. Aunque varios investigadores han explorado los procesos de planteamiento de problemas (por ejemplo, Rott *et al.*, 2021; Baumanns y Rott, 2022), todavía necesitamos saber más sobre estos (Cai *et al.*, 2022; Cai y Leikin, 2020), así como de estrategias de planteamiento de problemas.

El paso 4 implica formas de manejar los problemas planteados durante la instrucción. La formulación es, en sí misma, una actividad prometedora para fomentar el aprendizaje de los estudiantes; sin embargo, se debe tomar una posición firme de que es necesario reforzar el aprendizaje a través de la resolución de algunos de los problemas planteados. Es decir, resolver algunos de los problemas planteados crea oportunidades de aprendizaje adicionales para los estudiantes. Por lo tanto, en este paso, se proponen cuatro posibles prácticas de instrucción (analizar, seleccionar, secuenciar y resolver). Teniendo en cuenta que mientras los estudiantes se toman el tiempo para trabajar en una tarea que plantea problemas en el paso 3, el maestro puede monitorear su progreso y los problemas planteados para facilitar sus prácticas posteriores de análisis, selección, secuenciación y resolución.

Durante la instrucción de *análisis*, el maestro guía a los estudiantes para analizar y clasificar los problemas planteados en diferentes categorías. Además de aquellos que no son matemáticos, algunos de los problemas planteados pueden no estar claros. El maestro podría pedir a los alumnos que aclaren los problemas planteados de diferentes maneras. Por ejemplo, el maestro podría pedir a los estudiantes que escriban sus problemas planteados en un póster y los compartan con otros estudiantes. Este proceso de escritura brinda a los

estudiantes oportunidades para reformular sus problemas planteados y aclarar sus ideas. A través del análisis de los problemas planteados, el maestro no solo puede corregir “errores”, sino también transmitir criterios para problemas deseables y “buenos”. También a través del análisis, el maestro puede guiar a los estudiantes para categorizar los problemas en diferentes categorías y determinar qué tan relevantes son los problemas planteados para el objetivo de la lección, así como qué tan difíciles son.

El análisis de los problemas planteados sienta las bases para que los maestros determinen qué problemas planteados seleccionar para ser resueltos en el aula, que forma la segunda práctica de instrucción. Con base en el pensamiento de los estudiantes y los objetivos de la lección, el maestro puede seleccionar los problemas planteados de acuerdo con el nivel de dificultad y relevancia para el objetivo de aprendizaje. Es deseable elegir una variedad de problemas planteados para que los estudiantes puedan estar expuestos a diferentes oportunidades de aprendizaje. Los maestros también pueden obtener la opinión de los estudiantes para seleccionar ciertos problemas a resolver. Debe indicarse que es necesario justificar por qué se seleccionan para ser resueltos en la clase.

Durante la práctica de instrucción *secuencial*, el maestro debe pensar cuidadosamente en el orden de resolución de los problemas seleccionados. Esta secuencia debe tener sentido pedagógico (Stein y Smith, 2008). Se recomienda que el profesor pida a los estudiantes o grupos que plantearon los problemas que presenten y discutan sus problemas planteados en un orden predeterminado que tenga el mayor sentido pedagógico.

Con respecto a la práctica de instrucción de *resolución*, los maestros pueden recurrir a recomendaciones y prácticas de la literatura sobre la enseñanza de matemáticas a través de la resolución de problemas (por ejemplo, Cai, 2003).

El modelo de instrucción ABPP puede proporcionar orientación para la enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas. Los casos de enseñanza existentes que plantean problemas se ajustan al modelo de instrucción ABPP. Por ejemplo, el caso de enseñanza presentado al comienzo de este documento exhibe la rutina ABPP. El análisis de Zhang y Cai (2021) de 22 casos de enseñanza que plantean problemas también respalda este modelo de instrucción. Aunque existe aún la necesidad de desarrollar más casos de enseñanza de ABPP y usarlos para revisar el modelo de instrucción de ABPP, mientras tanto, el modelo de instrucción de ABPP puede guiar el desarrollo de tales casos de enseñanza de ABPP.

Fundamentalmente, existe la necesidad no solo de verificar aún más el modelo, sino también de especificar los detalles de cada paso de una manera análoga al trabajo que se ha realizado para enseñar a través de la resolución de problemas (Stein y Smith, 2008). En particular, el paso 4 requiere elaboración, centrándose en cómo analizar los problemas planteados, cómo seleccionar los problemas planteados para la discusión en clase y cómo secuenciar los problemas planteados seleccionados. El objetivo es que las ideas presentadas en este documento puedan servir como un trampolín que motive a más académicos a participar en la investigación de problemas y que podamos brindar más oportunidades para que los estudiantes aprendan matemáticas a través del planteamiento de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Durante la preparación de este artículo, el autor fue apoyado por una beca de la National Science Foundation (DRL-2101552). Todas las opiniones expresadas en este documento son las del autor y no representan necesariamente los puntos de vista de la National Science Foundation.

Estoy muy agradecido por la asistencia editorial proporcionada por Stephen Hwang y Victoria Robison, que contribuyeron a la mejora del documento; sin embargo, soy el único responsable de cualquier error.

REFERENCIAS

- Akben, N. (2020). Effects of the problem-posing approach on students' problem-solving skills and metacognitive awareness in science education. *Research in Science Education*, 50, 1143–1165. <https://doi.org/10.1007/s11165-018-9726-7>.
- Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59-76.
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics* (online first). <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y>.
- Bevan, D., & Capraro, M. M. (2021). Posing creative problems: A study of elementary students' mathematics understanding. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0654. <https://doi.org/10.29333/iejme/11109>.
- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (p. 241-254). National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J. (2014). Searching for evidence of curricular effect on the teaching and learning of mathematics: Some insights from the LieCal project. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 811-831.
- Cai, J., & Howson, A. G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & K. S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research*. Springer.
- Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 401–421.
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420.
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (p. 3–34). Springer.
- Cai, J., & Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(8), 1521–1540.

- Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, *105*, 287–301.
- Cai, J., & Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: Conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>.
- Cai, J., & Hwang, S. (in press). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin, C. Christou, A. Karp, D. Pitta-Pantazi, & R. Zazkis, *Mathematical challenges for all*. Springer.
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 57–69.
- Cai, J., Muirhead, F., Cirillo, M., & Hwang, S. (2021). *Supporting teachers to teach mathematics through problem posing: An early-stage longitudinal study* [NSF Grant Proposal]. University of Delaware.
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes, and products. In C. Fernandez, S. Llinares, A. Gutierrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 119-145). PME.
- Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *79*–90.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologists*, *23*, 167-180.
- Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. Simon & Schuster.
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics* *17*, 261–271.
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 87–101.
- English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 156-163.
- Getzels, J. W. (1979). Problem finding: A theoretical note. *Cognitive Science*, *3*, 167–172.
- Goldin, G. A., & McClintock, C. E. (Eds.). (1984). *Task variables in mathematical problem solving*. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.
- Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, *5*(9), 444–454.
- Guskey, T. R., & Yoon, K. S. (2009). What works in professional development? *Phi Delta Kappan*, *90*(7), 495-500.

- Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425.
- Hilbert, D. (1901-1902). Mathematical Problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 8, 437-479.
- Hillen, A. F., & Hughes, E. K. (2008). Developing teachers' abilities to facilitate meaningful classroom discourse through cases: The case of accountable talk. In M. S. Smith & S. Friel (Eds.), *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching* (Fourth monograph of the Association of Mathematics Teacher Educators). AMTE.
- Jacobs, V. R., & Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K-12 mathematics teaching. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 766-792). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (p. 123-147). Erlbaum.
- Klaassen, K., & Doorman, M. (2015). Problem posing as providing students with content-specific motives. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (p. 215-240). Springer.
- Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, 101428.
- Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 71-86.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of students' mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161.
- Kopparla, M., Bicer, A., Vela, K., Lee, Y., Bevan, D., Kwon, H., Caldwell, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2019). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies*, 45(6), 708-725.
- Kramer, S., Cai, J., & Merlino, F. J. (2015). A lesson for the Common Core Standards era from the NCTM Standards era: The importance of considering school-level buy-in when implementing and evaluating Standards-based instructional materials. In *Large-scale studies in mathematics education* (p. 17-44). Springer.
- Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424.
- Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.

- Li, X., Song, N., Hwang, S., & Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 325–347.
- Markovits, Z., & Smith, M.R. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education.
- Matsko, V. J., & Thomas, J. (2015). Beyond routine: Fostering creativity in mathematics classrooms. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 125-139). Springer.
- Merseth, K. K. (2003). Windows on teaching math: Cases of middle and secondary classrooms. Teachers College Press.
- Merseth, K. K. (2016). The early history of case-based instruction: Insights for teacher education today. *Journal of Teacher Education, 42*(4), 243-249.
- Mestre, J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology, 23*(1), 9-50.
- Mosteller, F. (1980). The next 100 years of science. *Science, 209*(4452), 21-23. doi:10.1126/science.7280662
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2020). Catalyzing change in middle school mathematics: Initiating critical conversations. Author.
- Pelczar, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 353–360). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Redding, C., & Viano, S. L. (2018). Co-Creating School Innovations: Should Self-Determination be a Component of School Improvement? *Teachers College Record, 120*(11), 1–32. <https://doi.org/10.1177/016146811812001103>.
- Rosenshine, B., Meister, C., & Chapman S. (1996). Teaching students to generate questions: A review of the intervention studies. *Review of Educational Research, 66*(2), 181–221.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. A. (2021). descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM Mathematics Education, 53*, 737–752.
- Ruthven, K. (2020). Problematising learning to teach through mathematical problem posing. *International Journal of Educational Research, 102*, 101455, <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.07.004>.
- Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM Mathematics Education, 53*, 877–889.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 97(3), 75-80.
- Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1-7.
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (Eds.). (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Singer, F. M., & Moscovici, H. (2008). Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction. *Teaching and Teacher Education*, 24(6), 1613-1634.
- Smith, M. S., Boyle, J., Arbaugh, F., Steele, M. D., & Stylianides, G. (2014). Cases as a Vehicle for Developing Knowledge Needed for Teaching. In Y. Li, E. A. Silver & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*. Springer.
- Stanic, G., & J. Kilpatrick (1988). "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum." In *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, edited by R. Charles and E. Silver, 1-22. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., Henningsen, M. A., Smith, M. S., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2nd ed.). Teachers College Press.
- Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50-80.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Suarsana, I. M., Lestari, I., & Mertasari, N. M. (2019). The effect of online problem posing on students' problem-solving ability in mathematics. *International Journal of Instruction*, 12(1), 809-820.
- Walkington, C., & Bernacki, M. (2015). Students authoring personalized "algebra stories": Problem-posing in the context of out-of-school interests. *Journal of Mathematical Behavior*, 40(B), 171-191.
- Williams, S. M. (1992). Putting case-based instruction into context: Examples from legal and medical education. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(4), 367-427.
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101427.

- Yang, X., & Cai, J. (2016). Fostering mathematical understanding through problem posing: A case of reviewing addition and subtraction with two-digit numbers. *Elementary Teaching (Mathematics)*, 01, 11-14.
- Yang, X., & Xin, Y. P. (2021). Teaching problem posing to students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*. <https://doi.org/10.1177/0731948721993117>.
- Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM – Mathematics Education*, 53(4), 937-949.
- Yoon, K. S., Duncan T., Lee, S. W., Scarloss, B., & Shapley, K. L. (2007). *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement* (Issues and Answers Report REL 2007 – No. 033). Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Regional Educational Laboratory Southwest. <http://ies.ed.gov/ncee/edlabs>.
- Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 961-973.
- Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education*, 54, 497-512.

Correspondencia

JINFA CAI

Dirección: 437 Ewing Hall, Universidad de Delaware, Newark, DE, 19716.

Teléfono: (302) 831-1879,

Correo electrónico: jcai@udel.edu.

APÉNDICE

UN EJEMPLO DE DESARROLLO DE TAREAS DE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS BASADAS EN MATERIALES CURRICULARES EXISTENTES

- Tarea original: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. ¿Qué porcentaje de los platos que entregó fueron postres? (adaptado de Illustrative Mathematics, IM 6–8 Math™ V. III, illustrativemathematics.org).
- Estrategia 1: Capacitar a los maestros para reinterpretar los materiales curriculares existentes y remodelarlos de manera simple para crear tareas matemáticas que planteen problemas con mayores oportunidades de aprendizaje.
- Tarea 1: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. Plantear tres problemas matemáticos que podrían ser resueltos con base en esta situación.

Con la Estrategia 1, los maestros pueden simplemente eliminar el mensaje de resolución de problemas (“¿Qué porcentaje de los platos que entregó eran postres?”) y reemplazarlo con un mensaje de planteamiento de problemas (“Plantee tres problemas matemáticos que podrían responderse en función de esta situación”). La estrategia 1 permite cierta diversidad en el diseño de tareas. Por ejemplo, los maestros pueden usar diferentes tipos de mensajes de planteamiento de problemas para especificar el número de problemas y tipos de problemas que se plantearán, como en las tareas de planteamiento de problemas 2 y 3 a continuación:

- Tarea 2: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. Plantee un problema matemático fácil, un problema matemático moderadamente difícil y un problema matemático difícil que pueda resolverse en función de la información dada.
- Tarea 3: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. Plantea tres problemas matemáticos diferentes que puedes desafiar a tus compañeros de clase a resolver con base en esta información.
- Estrategia 2: Mejorar los currículos existentes con tareas adicionales que plantean problemas que incluyen apoyo en forma de ejemplos de problemas planteados.

- Tarea 4: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. Un problema que se puede preguntar usando esta información es: "¿Qué porcentaje de los platos que entregó fueron postres?" Plantear tres problemas matemáticos adicionales que pueden ser respondidos con base en esta situación.

Al proporcionar una muestra de problema planteado, la Estrategia 2 permite a los maestros dar forma potencialmente a los problemas planteados (aunque todavía hay libertad para que los estudiantes planteen lo que deseen), lo que también da forma a la discusión matemática que sigue a la formulación de problemas.

Estrategia 3: Alentar a los estudiantes a plantear problemas de variación.

- Tarea 5: El maestro Cai ha pedido a sus estudiantes de 6^º grado que resuelvan el siguiente problema: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. ¿Qué porcentaje de los platos que entregó fueron postres? Invente un problema similar para que el Sr. Cai pueda hacer que sus estudiantes lo resuelvan.

- Tarea 6: El maestro Cai ha pedido a sus estudiantes de 6^º grado que resuelvan el siguiente problema: Durante su turno un camarero entregó 13 aperitivos, 17 entradas y 10 postres. ¿Qué porcentaje de los platos que entregó fueron postres? Invente dos problemas que involucren porcentajes con diferentes contextos para que el Sr. Cai pueda hacer que sus estudiantes los resuelvan.