 https://doi.org/10.24844/EM3503.02

Indicadores de niveles de razonamiento algebraico elemental en educación primaria en la resolución de tareas de proporcionalidad con tablas de valores

Indicators of elementary algebraic reasoning levels in middle education in the resolution of proportionality tasks using tables of values

Cecilia Gaita,[1] Miguel R. Wilhelmi,[2]
Francisco Ugarte,[3] Cintya Gonzales[4]

Resumen: En Educación Primaria, la proporcionalidad se modeliza algunas veces mediante tablas de valores. El uso de estas tablas queda condicionado por los objetos matemáticos involucrados. En este trabajo, se determinan indicadores sobre el uso operativo y discursivo de estos objetos según el nivel de algebrización. Estos indicadores sirven para valorar el nivel mostrado por estudiantes de 11-12 años, quienes resuelven tareas de proporcionalidad modelizadas mediante tablas. Las respuestas dadas se codifican mediante variables operatorias. Estas variables son analizadas de forma aislada mediante estadística descriptiva elemental y de forma relacional mediante análisis de similaridad y

Fecha de recpeción: 28 de octubre de 2022. **Fecha de aceptación:** 28 de enero de 2023.

[1] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, cgaita@pucp.edu.pe, http://orcid.org/0000-0002-7827-9262

[2] Universidad Pública de Navarra (España), miguelr.wilhelmi@unavarra.es, https://orcid.org/0000-0002-6714-7184

[3] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, fugarte@pucp.edu.pe, https://orcid.org/0000-0002-8658-9471

[4] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, cintya.gonzales@pucp.pe, https://orcid.org/0000-0003-2130-1710

análisis estadístico implicativo. A partir de los datos experimentales, se constata que para alcanzar el nivel de algebrización previsto en esa etapa escolar, es más eficaz una enseñanza con una componente constructivista esencial que una intervención más objetivista por parte del docente. Finalmente, el trabajo permite extraer orientaciones para posibles intervenciones didácticas basadas en los indicadores del nivel de algebrización identificados.

Palabras clave: *razonamiento algebraico elemental; proporcionalidad; tablas de valores; Educación Primaria; análisis estadístico implicativo.*

Abstract: In Middle Education, proportionality is often modeled using tables of values. The use of these tables is conditioned by the mathematical objects involved. In this research study, indicators on the operational and discursive use of these objects are determined according to the algebraization levels. These indicators are used to assess the level shown by students, 11-12 years old, who solve proportionality tasks modeled using tables. The responses given are coded through operating variables. These variables are analyzed in an isolated way using elementary descriptive statistics and in a relational way through similarity analysis as well as implicative statistical analysis. Based on the results of this research, we can conclude that in order to reach the level of algebraization expected at this grade level, it will be essential to implement a teaching method based on an essential constructivist approach rather than an objectivist approach. Furthermore, results also suggest possible didactic interventions based on the indicators of the level of algebraization previously identified.

Keywords: *elementary algebraic reasoning, proportionality, tables of values, Middle Education, statistical implicative analysis.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente existe un consenso respecto a que la enseñanza del álgebra se debe realizar según un continuo de nociones, procesos y significados aritméticos y algebraicos (Kieran *et al.*, 2016). Diversas investigaciones proponen la necesidad de establecer situaciones de proporcionalidad que articulen este continuo, pues se trata de una noción transversal al currículo de Educación Primaria y Secundaria: desde las primeras aproximaciones de relaciones de doble-mitad, con los primeros números, hasta la modelización mediante la función lineal (Wilhelmi, 2017).

El estudio de la proporcionalidad se considera dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Ya Vergnaud (1991) observó que el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones son "múltiplo y divisor, razón, fracción, número racional, la relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación y aplicación lineales, función lineal, etc." (p. 147). De hecho, las dificultades en la adquisición de la noción de función lineal en la Educación Primaria fueron identificadas en la década de los 80 (Ricco, 1982).

En Educación Primaria, las tablas numéricas se emplean como herramienta para promover el desarrollo de conceptos asociados al estudio de las razones, fracciones, proporcionalidad y funciones lineales (Brinker, 1998; Schliemann *et al.*, 2001; Dole, 2008). Así, es usual encontrar problemas que involucran la tarea de completar tablas de valores en la introducción sobre proporcionalidad (Middleton y Heuvel-Panhuizen, 1995). Esta modelización tabular tiene continuidad en la determinación de parejas de valores que permiten establecer una relación funcional entre dos magnitudes. Se distingue entonces entre razones enteras y no enteras o unitarias y no unitarias. Las situaciones donde la razón no es entera suelen asociarse con el uso erróneo de estrategias aditivas, esto debido al conocimiento de la estrategia doble-mitad y su generalización con múltiplos-divisores, estable en $\mathbf{N}$, la cual debe ser nuevamente generalizada a otras razones (Block, 2006, Ramírez y Block, 2009, Block, 2021).

Además, en las tablas de valores, según las características de la información dada, se originan diversas tareas. Por ejemplo, la actividad matemática cambia según la ubicación de las incógnitas, la cantidad mostrada de parejas de datos, el que los pares de valores sigan un criterio de "contigüidad" en $\mathbf{N}$ (es decir, siguiente, siguiente múltiplo, siguiente según una regla de formación discreta), la presencia o no del valor unitario, el conjunto numérico de referencia ($\mathbf{N}$ o $\mathbf{Q+}$), la representación elegida de los números en $\mathbf{Q}+$ (decimales o fracciones), así como los valores que toman las variables (números "pequeños" o números "grandes"). Así, se pueden observar tanto distintos niveles de fracaso y de éxito en el uso de tablas, según se modifiquen estas variables, así como errores diversos.

Por un lado, en aquellas respuestas en donde no se preserva la proporcionalidad, es usual que los estudiantes aporten reglas con correspondencias arbitrarias, que únicamente respetan el orden estrictamente creciente, sucesiones numéricas de diferencia +1 o reglas compuestas de carácter aditivo o multiplicativo. Por otro lado, en el caso de respuestas dadas por los estudiantes donde sí se respeta la proporcionalidad, estas se basan en diferentes formas de observar la relación proporcional. Por ejemplo, se identifica la noción de constante (operador aditivo y operador función), así como procedimientos y propiedades para determinar imágenes tales como multiplicar cada número *n* por una constante c $(p(n) = n \cdot c)$, el proceso de determinación de un valor en función del anterior $(p(n) = p\ (n - 1) + c)$, o propiedades de la función lineal "la imagen de una suma es igual a la suma de imágenes" $(p(x+y) = p(x) + p(y))$ y "la imagen del producto de un parámetro por la variable es el producto del parámetro por la imagen de la variable" $(p(a \cdot x) = a \cdot p(x))$.

Por todo ello, es necesario fundamentar teóricamente y aportar datos experimentales que permitan valorar diferentes tareas relativas al desarrollo del razonamiento algebraico elemental (RAE) y su resolución por estudiantes atendiendo a los distintos campos de problemas. En particular, este trabajo tiene por objetivo describir y valorar respuestas de estudiantes al final de la Educación Primaria (11-12 años) a tareas de proporcionalidad que incluyen tablas de valores. Para alcanzar este objetivo, en la sección siguiente se muestran algunos aspectos generales del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS), así como aspectos específicos del RAE y de las tablas de valores en el contexto escolar. Además, se indica como método de investigación la ingeniería didáctica. Así, el resto del trabajo queda estructurado de la siguiente forma:

- Diseño y análisis *a priori*
  - Sobre las tareas en contexto consideradas en el cuestionario
  - Cuestionario
  - Variables consideradas para el análisis de las respuestas
- Experimentación
- Análisis *a posteriori*: Resultados y su discusión

- Análisis puntual de la presencia y ausencia de las variables en los grupos.
- Análisis de similaridad.
- Análisis estadístico implicativo.

Finalmente, se señalan algunas implicaciones para la enseñanza y se proponen cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) describe un objeto matemático en función del sistema de prácticas operativas y discursivas que se realizan al resolver problemas donde este aparece. Basándose en las diversas funciones que las entidades matemáticas desempeñan en el trabajo matemático, se consideran como objetos primarios a: situaciones, acciones-procedimientos, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades y argumentaciones (Godino, 2002). El EOS considera que la actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas que involucran procesos de simbolización-representación y generalización-particularización y, por lo tanto, procesos en los que la dualidad “intensivo (general) –extensivo (particular)” es clave (Godino *et al.*, 2012).

Para analizar la actividad matemática vinculada a problemas con un componente algebraico, el EOS propone un modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). La definición de los niveles de algebrización tiene en cuenta los grados de generalidad (la generación de intensivos y su reconocimiento explícito como entidades unitarias), así como el uso de lenguajes (natural, numérico, simbólico-literal, etc.) y la transformación entre ellos en procesos de expresión y de comunicación (Godino *et al.*, 2014a).

Burgos y Godino (2019a) proponen indicadores para determinar el nivel RAE en prácticas matemáticas asociadas con la proporcionalidad. Para ello, adaptan los niveles genéricos del RAE a dicho contenido, teniendo en cuenta sus diferentes significados. El Nivel 0 de algebrización se asocia al significado aritmético, caracterizado por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división) con valores particulares. El Nivel proto-algebraico 1 se centra en la noción de proporción, mediante el procedimiento de reducción a la unidad. El Nivel proto-algebraico 2 se relaciona con la solución de problemas de valor faltante, basado en el uso de las razones y proporciones, el uso de una incógnita, así como el planteamiento y resolución de ecuaciones de la forma $Ax = B$.

Para el RAE, las tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores, son pertinentes para el desarrollo intuitivo de la proporcionalidad (Burgos y Godino, 2019b). Estas tareas movilizan conocimientos asociados al uso del doble o mitad y, posteriormente, el procedimiento de reducción a la unidad en el campo de los números naturales ($\mathbf{N}$).

Cuando dichas tareas se modifican, ampliándolas al campo numérico de los racionales positivos ($\mathbf{Q}+$), tanto para la razón de proporcionalidad como para los valores de la tabla, estas demandan un mayor nivel de razonamiento algebraico. Es pertinente entonces elaborar una propuesta de indicadores de RAE específicos para describir la actividad matemática que se lleva a cabo al resolver tareas de proporcionalidad con tablas de valores cuando se modifica el campo numérico de los datos o las relaciones entre las variables.

Sobre las tablas y el RAE

Denominaremos tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores, a situaciones en las que los enunciados establecen una relación de proporcionalidad entre dos variables y vienen acompañados por una tabla, cuyos elementos se nombran en la figura 1.

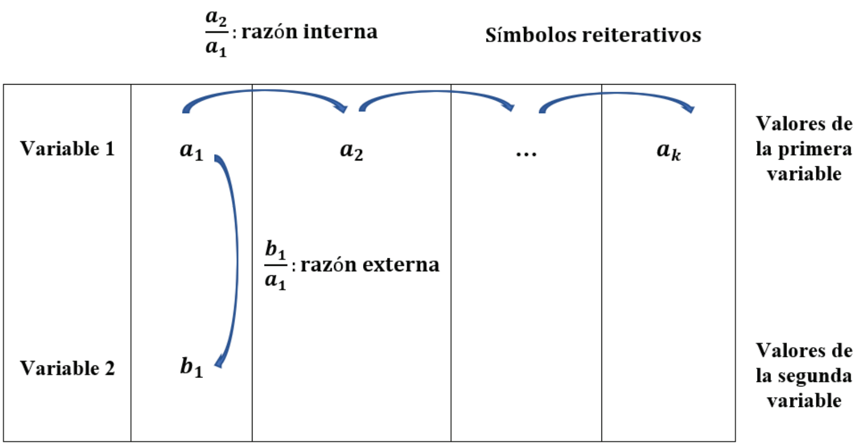


Figura 1. Elementos de las tablas de valores en tareas de proporcionalidad.
Fuente: elaboración propia

En estas tablas aparecen algunos valores de la Variable 1 $(a_1, a_2, ..., a_k, ...)$ y al menos un valor de la Variable 2 (b_1). Se denomina *agrupamiento mínimo* a la pareja de valores mínimos de números naturales en la tabla $(\min_{k\in\mathbf{N}}\{a_k\}, \min_{k\in\mathbf{N}}\{b_k\})$. A la razón constante entre valores de la misma columna (relación entre las variables), se le denomina *razón externa*, por ejemplo $\frac{b_1}{a_1}$ (figura 1) y, a la razón entre los valores de dos columnas consecutivas (valores de la misma variable), se le denomina *razón interna*, por ejemplo, $\frac{a_2}{a_1}$ (figura 1).

El progreso en el RAE a partir de la resolución tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores, permite una evolución en relación con los siguientes aspectos:

a) *Relación de multiplicidad*: de relaciones sencillas "doble-mitad", entre valores consecutivos de la misma variable, a su generalización en "múltiplos-divisores" (*razón interna*).
b) *Procedimientos de cálculo*: de valores "pequeños" donde el cálculo mental es sencillo a valores "grandes" donde la eficacia precisa de cálculos escritos.
c) *Exhaustividad y orden*: de tablas con todos los valores entre uno mínimo y uno máximo, dados de forma ordenada, según la regla de formación, a tablas con valores dispersos y no ordenados, donde el reconocimiento de la regla de formación exige alguna estrategia como ordenar, añadir valores, determinar una regla de formación, reducir a la unidad, etc.
d) *Relación entre valores*: de una relación "local" (*razón externa*), entre parejas de valores consecutivos (valor faltante o razones equivalentes) a una relación "global", que implique determinar una regla general de formación.
e) *Campo numérico*: del campo numérico de los números naturales $(\mathbf{N})$ al campo numérico de los números racionales positivos $(\mathbf{Q}+)$.

Castro, Martínez y Pino-Fan (2017) ponen énfasis en la aparición progresiva de los niveles de algebrización, más allá de su descripción formal como niveles acabados o cerrados. Así, considerando que el tránsito de un nivel del RAE a otro se produce de manera gradual, se emplea aquí la notación nivel X-Y para señalar que se consolida el nivel X y se encuentran indicios del nivel Y. Así, el análisis de las prácticas matemáticas de los alumnos debería permitir analizar su progreso en los niveles del RAE desde el nivel básico (0-1), propio en las prácticas iniciales con 9-10 años, hasta el nivel más algebrizado (2-3), con 11-12 años.

Teniendo en cuenta lo anterior y la evolución de los seis objetos primarios (lenguajes, concepto-definición, procedimientos, propiedades y argumentos), en este trabajo se proponen indicadores de progreso del RAE para las soluciones de tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores (tabla 1).

Tabla 1. Indicadores RAE en tareas de proporcionalidad modelizadas mediante tablas de valores y su resolución esperada

Objeto	Nivel RAE 0-1	Nivel RAE 1-2	Nivel RAE 2-3
Lenguajes	Natural Uso de flechas o símbolos reiterativos que relacionan celdas consecutivas de una misma variable	Natural y matemático en relaciones de igualdad "aritmética" entre valores de las variables	Matemático en relaciones de igualdad "por equivalencias" entre las variables
Conceptos	Progresiones aritméticas	Progresiones geométricas Razón en $\mathbf{N}$	Función lineal Razón en $\mathbf{Q+}$ Constante de proporcionalidad
Procedimientos	Doble-mitad, reducción a la unidad en $\mathbf{N}$	Reducción por agrupamientos mínimos en $\mathbf{N}$	Reducción a la unidad en $\mathbf{Q+}$
Propiedades	Multiplicidad y divisibilidad	Propiedades de la función lineal en $\mathbf{N}$: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $f(na) = n\,f(a)$ $(n, a, b \in \mathbf{N})$	Propiedad de la función lineal en $\mathbf{Q+}$ asociada a la constante de proporcionalidad: $f(k) = kf\ (1),\ (\mathrm{k} \in \mathbf{Q+})$
Argumentos	Determinación de relaciones entre valores consecutivos en una serie ordenada de valores de menor a mayor	Determinación de un patrón general que relaciona valores consecutivos	Identificación del coeficiente de proporcionalidad para la determinación de cualquier valor

Así, a partir de la caracterización de la actividad matemática que desarrollan los estudiantes, al resolver tareas sobre proporcionalidad modelizadas a través de tablas de valores y, teniendo en cuenta el rol del docente durante las clases, se caracterizan "tipos" de alumnos según el nivel RAE que alcanzan y se señala el nivel en proceso:

- Nivel RAE 0-1: Se hace uso del lenguaje natural, así como de flechas que relacionan valores consecutivos de una misma variable (*razón interna*). Se emplean conocimientos previos de doble o mitad. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila, pero no se establece relación entre las dos

variables. Se ordenan los valores en forma creciente, se completa la secuencia en forma exhaustiva y se reiteran las operaciones entre dos columnas, señalando la diferencia.
- Nivel RAE 1-2: Se hace uso del lenguaje natural, así como de números en relaciones de igualdad aritmética. Se reconocen progresiones geométricas en cada fila y una relación entre las variables (*razón externa*) a partir de un agrupamiento mínimo en $\mathbf{N}$. Se emplean propiedades de la linealidad para determinar algunos valores, sin necesidad de ordenar en forma creciente los valores de cada fila de la tabla.
- Nivel RAE 2-3: Se emplea lenguaje matemático con el signo igual como equivalencia entre valores de variables. Se reduce a la unidad en $\mathbf{Q}+$, mediante el *agrupamiento mínimo*, o se emplean fracciones equivalentes. Se emplean de manera consistente las propiedades de la linealidad. Se identifica una relación explícita entre las dos variables a partir del coeficiente de proporcionalidad.

Aspectos metodológicos

Tras el diseño del instrumento, que tiene en cuenta los indicadores RAE para tareas de proporcionalidad modelizadas mediante tablas de valores (tabla 1) y su resolución esperada, se lleva cabo la experimentación. Es necesario tener en cuenta la influencia de la organización del proceso de enseñanza para comprender los resultados, siendo que la descripción de un método depende fundamentalmente del papel atribuido a los sujetos (docente y estudiantes), a la forma en que se distribuye la responsabilidad matemática, al modo de regulación del proceso de estudio y, finalmente, al modo y momento de explicitación del saber objetivo y su institucionalización. Así, atendiendo al proceso de estudio, el docente "ajusta" el modelo haciéndolo variar entre los dos extremos constructivista y objetivista, adoptando en general modelos mixtos (Godino *et al.*, 2019).

Además, como los diseños de experimentación se realizan por lo general con muestreos no aleatorios, intencionales, en grupos de cohortes y en contextos específicos que condicionan las decisiones, se adoptan metodologías focalizadas en la validación interna. En estas condiciones, la ingeniería didáctica (Godino *et al.*, 2014b) permite obtener conclusiones mediante el contraste entre lo previsto (*análisis a priori*) y lo observado (*análisis a posteriori*), estableciendo triangulación de resultados extraídos mediante análisis cuantitativos o cualitativos (Wilhelmi *et al.*, 2021).

Para el trabajo experimental se consideran dos grupos de estudiantes de sexto grado de primaria, con los cuales se siguen dos métodos de enseñanza distintos y se analiza de qué manera la forma en la que el docente gestiona las interacciones, influye en los resultados. El análisis a posteriori incluye un análisis descriptivo de las variables identificadas de forma aislada, así como análisis relacionado de las mismas, mediante un análisis de similaridad y un análisis estadístico implicativo.

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI

Sobre las tareas en contexto consideradas en el cuestionario

Desde la década de los 80 se resalta la importancia de utilizar situaciones en contexto para la enseñanza de las matemáticas (Carraher *et al.*, 1988; Freudenthal, 1991) y esta máxima sigue hoy vigente. Así, las matemáticas escolares deben ayudar al individuo a identificar y comprender el papel que juega esta disciplina en la comprensión del mundo y deben también permitirle tomar decisiones en su vida como ciudadano (OCDE, 2011). En esta misma línea, ya el National Councild of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), había planteado la vinculación de las matemáticas enseñadas en la escuela con la vida actual y futura de los estudiantes, aspecto en el que sigue incidiendo (www.nctm.org). En el caso peruano, el Currículo Nacional (MINEDU, 2016) señala que la enseñanza escolar debe tener en cuenta contextos de la vida cotidiana del alumno, de modo que estos sean de su interés, que lo comprometan afectivamente y que desarrollen competencias necesarias para afrontar su papel como ciudadano.

Por lo anterior, el diseño del cuestionario se basa en una situación contextualizada sobre la proporcionalidad, que busca, también, involucrar al estudiante. Así se tiene en cuenta que las estrategias de solución están relacionadas con el contexto del problema (Misailidou y Williams, 2003). Se buscan contextos "de referencia" que puedan ser utilizados de forma eficaz en la docencia del tema. Obando *et al.* (2014) justifica la importancia de ciertos problemas para la introducción y desarrollo del razonamiento proporcional: problemas de tasa y mezclas, problemas con conceptos matemáticos (semejanza de figuras, funciones lineales, etc.) y de otras ciencias como la física (problemas de velocidad constante, etc.). Así, la elección del contexto para el cuestionario es la mezcla de pinturas, que ya Tourniaire y Pulos (1985) estudiaron, aunque sin poner el énfasis en el uso de tablas de valores.

Cuestionario

El cuestionario consiste en un problema de proporcionalidad con tablas de valores que consta de dos tareas relativas a mezclas de pinturas (figura 2).

Tarea 1

La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves. Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	3	6	9	12						30
Azul (litros)	12									

Indica qué has hecho para completar la tabla.

Tarea 2

La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

Blanca (litros)	6	15	21	9	
Azul (litros)	14				

Indica qué has hecho para completar la tabla.

Figura 2. Cuestionario

Los propósitos de la tarea 1: a) garantizar la comprensión de la situación; b) constatar que los alumnos tienen los conocimientos de base previstos. Por ello, en la tarea 1, los valores están ordenados, son todos múltiplos de 3 o de 12 (según el color que se mezcla), la secuencia de valores es exhaustiva (todos los múltiplos entre el primer y último valor de la variable 1) y la constante de proporcionalidad es entera (4). Así, la resolución esperada exige un nivel de algebrización 0-1 y, por lo tanto, se prevé una tasa de éxito alta.

La tarea 2 busca que los alumnos modifiquen su estrategia de solución ya que los valores aparecen desordenados, la lista no es exhaustiva y además se debe establecer una relación explícita entre los valores de las dos variables, lo que implica tener una visión global de la tabla. Dicha relación se establece a través de un agrupamiento mínimo en $\mathbf{N}$ (Nivel 1-2) o mediante la constante de proporcionalidad en $\mathbf{Q+}$ (Nivel 2-3). Además, la tabla se completa de forma "natural" empleando propiedades de la linealidad. Para esta tarea se espera, una tasa de respuesta inferior.

EXPERIMENTACIÓN

En el presente apartado se describe la muestra, el proceso de estudio, el cuestionario planteado y su operacionalización en variables observables. La muestra está constituida por 48 estudiantes de sexto grado de Educación Primaria (11-12 años), distribuidos en dos grupos A y B de 22 y 26 estudiantes, respectivamente, del mismo centro educativo, que forma parte de una red de colegios privados con 77 sedes en todo el Perú. El mismo docente tiene a cargo ambos grupos.

El proceso de estudio se desarrolla al finalizar el año escolar en 3 sesiones de clase de 60 minutos cada una. Las sesiones se desarrollan on-line de manera sincrónica, debido a la pandemia de la COVID-19. El docente regula las intervenciones del alumnado y hace seguimiento en tiempo real de sus producciones en Google Classroom.

El docente organiza el proceso de estudio mediante momentos de familiarización de los enunciados de las tareas, momentos de trabajo autónomo y momentos de discusión dialógica. Sin embargo, el docente ordena de diferente forma las actividades en los grupos A y B. Por un lado, en el Grupo A, propicia un trabajo más autónomo y una posterior puesta en común, sin intervenciones intermedias de regulación o de valoración (carácter esencialmente constructivista). Por otro lado, en el Grupo B, el docente organiza el proceso de enseñanza de una forma estándar, es decir, regula el proceso con exposiciones explícitas en las que da sugerencias previas a la realización de las tareas (modelo colaboracionista-objetivista (Godino *et al*, 2019)).

De esta forma, se tiene un diseño experimental con grupo de control intencional, es decir, los grupos experimental A y de control B no se conforman mediante asignación aleatoria de los sujetos a los grupos, ni por asignación aleatoria de los tratamientos a los grupos. De hecho, como es usual, los grupos quedan constituidos por las clases definidas por el centro educativo.

Se establece que la clase A es el grupo experimental dado que el proceso de estudio ("tratamiento A") tiene una organización no estándar, donde la actividad es constructivista-autónomo, basada en la discusión entre iguales, y donde la institucionalización se produce de forma dialógica. El grupo de control es la clase B, dado que el proceso de estudio ("tratamiento B") se sigue de una organización más estándar, donde el docente orienta la actividad mediante información útil que introduce de forma magistral.

La diferente organización del proceso de estudio justifica que las expectativas de respuesta e intervenciones de los estudiantes sean distintas en ambos grupos y, en general, exige el análisis diferenciado de las respuestas en los dos grupos. Por ejemplo, en la tarea 2, el docente sugiere en el grupo B completar la columna en blanco con el valor 3 y, por lo tanto, la presencia de la razón "3:7" en las respuestas de este grupo no implican necesariamente el uso de este conocimiento para completar el resto de la tabla, es decir, su asunción más allá del conocimiento aislado de la pareja de valores (3,7).

A partir del análisis *a priori*, en particular de los indicadores RAE en tareas de proporcionalidad modelizadas mediante tablas de valores y su resolución esperada (tabla 1), y de una revisión exhaustiva de todas las respuestas se definen las variables operativas (tabla 2). En el apartado siguiente, se establecen y discuten los resultados, señalando, en su caso, su relación con los tratamientos A-experimental y B-control. Para facilitar la comprensión, se incluyen ejemplos de respuesta asociadas a algunas de las variables.

Tabla 2. Variables operativas relativas a la resolución de las tareas 1 y 2

N	Variable	Descripción
1	V1RC	Tarea 1 (T1): Resolución *correcta*
2	V2RC	Tarea 2 (T2): Resolución *correcta*
3	V2NR	T2: *No responde*
4	V12L	Tareas 1 o 2 (T12): Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido las tablas 1 o 2
5	V12M	T12: Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido las tablas 1 o 2
6	V12C	T12: Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla
7	V1A1	T1: Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)
8	V1A2	T1: Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)
9	V1G1	T1: Establece una progresión geométrica de razón x3 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)
10	V1G2	T1: Establece una progresión geométrica de razón x12 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)
11	V1Ru	T1: Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “reducción a la unidad”
12	V1RQ	T1: Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”
13	V237	T2: Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)
14	V2Ru	T2: Establece la razón 1:2,333... en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)
15	V2RQ	T2: Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”
16	V2PD	T2: Establece la pareja 12:28 como el doble de 6:14
17	V2PA	T2: Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros
18	V2FL	T2: Completa alguna columna usando propiedades de la función lineal $f(a+b) = f(a) + f(b); f(ka) = kf(a))$.
19	V2MM	T2: Reordena las columnas de menor a mayor.
20	V2N3	T2: Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3
21	V2FA	T2: Relaciona las filas a través de una función afín (por ejemplo, $2x + 2$ o $2(x+1)$, donde x es el número de la primera fila)

ANÁLISIS *A POSTERIORI*: RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

Análisis puntual de la presencia y ausencia de las variables en los grupos

En la tabla 3 se muestran las frecuencias absolutas y el porcentaje en las distintas variables en los grupos A y B. La tasa de respuesta correcta en la tarea 1 (V1RC = 96,2 y 100%, respectivamente en los grupos A y B) permite afirmar que la actividad es comprendida por los estudiantes y que, por lo tanto, ambos grupos tienen estrategias de base para la resolución de este tipo de tareas. Sin embargo, el grupo A presenta una tasa de respuesta a la tarea 2 de casi el doble que el grupo B (V2RC = 61,5% *vs.* 31,8%). Este es un primer resultado que resalta cómo las distintas organizaciones de la clase en los grupos A y B han tenido impacto en los aprendizajes. Esta tesis se verá reforzada por el análisis pormenorizado de otras variables.

Como era previsible en esta etapa educativa (11-12 años), en ambos grupos, la mayor parte de las justificaciones dadas por los estudiantes son en lenguaje natural. Sin embargo, la intervención más explícita del docente en el grupo B, tiene como consecuencia que este grupo se “aleje” del lenguaje natural y, en términos relativos, se utilice más el lenguaje matemático, dado que la “brecha” entre estas dos formas de justificar es menor (V12L − V12M = 35,8% *vs.* 18,2%) (figura 3).

Tabla 3. Frecuencias absolutas (fa) y porcentajes (%)

Grupo A

	V1RC	V2RC	V2NR	V12L	V12M	V12C	V1A1	V1A2	V1G1	V1G2
Fa	25	16	5	19	9	7	12	6	2	0
%	96,2	61,5	19,2	73,1	34,6	26,9	46,2	23,1	7,7	0,0

	V1RQ	V1Ru	V237	V2Ru	V2RQ	V2PD	V2PA	V2FL	V2MM	V2N3	V2FA
Fa	1	15	11	4	1	13	2	4	4	1	2
%	3,8	57,7	42,3	15,4	3,8	50,0	7,7	15,4	15,4	3,8	7,7

Grupo B

	V1RC	V2RC	V2NR	V12L	V12M	V12C	V1A1	V1A2	V1G1	V1G2
Fa	22	7	4	13	9	1	9	1	2	2
%	100,0	31,8	18,2	59,1	40,9	4,5	40,9	4,5	9,1	9,1

	V1RQ	V1Ru	V237	V2Ru	V2RQ	V2PD	V2PA	V2FL	V2MM	V2N3	V2FA
Fa	3	10	8	0	1	6	7	6	3	0	3
%	13,6	45,5	36,4	0,0	4,5	27,3	31,8	27,3	13,6	0,0	13,6

Respuesta que contiene "lenguaje verbal" (*V12L*) y "lenguaje matemático" (*V12M*)

Lo que hice fue analizar la parte de pintura blanca (litros), en ese caso vi que se le sumaba tres y los números son múltiplos de 3 pero en orden, es como un patrón. Entonces en el caso de abajo sume más 12 a cada número anterior o también se puede encontrar por cuál número se multiplicó arriba para hacerlo abajo, ejemplo: 3 x 4 = 12 | 12 x 4 = 48 .

$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ **Equivalen a lo mismo ya que 3/7 es la mínima expresión de 6/14.**

Así que trabajemos con la mínima expresión:

3 x 2 = 6 | 3 x 3 = 9
7 x 2 = 14 | 7 x 3 = 21
-------------- --------------
3 x 5 = 15
7 x 5 = 35
----
3 x 7 = 21
7 x 7 = 49

Yo encontre el resultado, trabajando con la mínima expresión de 6/14, que es 3/7, está me permitió entrar el valor de la pintura azul en litro relacionada con la pintura blanca.

Figura 3. Ejemplos de respuestas de "lenguaje" (V12L y V12M)

Las orientaciones docentes afectan la necesidad de explicitar la relación entre dos valores consecutivos en la tabla, mediante flechas o escritura numérica reiterada (V12C = 26,9% vs. 4,5%). De hecho, en el grupo B, las intervenciones del docente inciden en la justificación de la tarea, en buscar patrones y en establecer la diferencia entre las tareas 1 y 2. Estas orientaciones explícitas tienen como consecuencia que, los estudiantes "abandonen" su forma "natural" de construir y comunicar los conocimientos matemáticos. Este hecho "positivo", no tiene reflejo en la resolución ya que, como se ha mostrado, tienen un impacto negativo en la tasa de éxito en la tarea 2.

En ambos grupos, la justificación de la tarea 1 mediante una progresión geométrica no alcanza el 10% (V1G1 = 7,7% *vs.* 9,1%), lo cual es consistente con las expectativas para la etapa, donde la modelización mediante progresiones geométricas está en construcción. Sin embargo, la justificación mediante "reducción a la unidad", que se introduce en cursos previos (10-11 años), se utiliza más en el grupo A que en el B (V1Ru = 57,7% vs. 45,5%) (figura 4). De hecho, en la tarea 2 el grupo A también presenta una mayor presencia de esta variable (V237 + V2Ru = 57,7% *vs.* 36,4%).

T1:

12 / 3 = 4

por cada 3 litros de pintura blanca hay 12 litros de pintura azul. Entonces 1 litro de pintura blanca equivale 4 litros azules

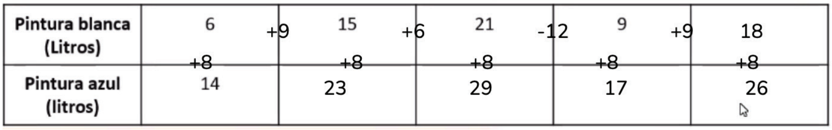
- "Cada 3L de pintura blanca son 7L de pintura azul"

T2:

14 / 6 = 2.3333333333333333 15 * ¯2.3¯ = 35 21 * ¯2.3¯ = 49 9 * ¯2.3¯ = 21	El tono más alto es el primero ya que 12 / 3 = 4 (por cada litro de pintura blanca hay 4 de pintura azul) 14 / 6 = 2.3333 (por cada litro de pintura blanca hay 2.3 periodico puro de pintura azul)

Figura 4. Ejemplos de respuestas "reducción a la unidad" (V1Ru, V2Ru)

Los resultados señalados sobre la "reducción a la unidad", refuerzan la tesis según la cual la organización de trabajo autónomo y discusión entre pares iguales en el grupo A ha sido más eficaz. Aún más, en la tarea 2, 50% de los estudiantes del grupo A establecen la relación 12-28 (relación doble-mitad), mientras que en el grupo B el porcentaje baja a casi la mitad (V2PD = 27,3%). También se tienen diferencias en las variables de "patrón aditivo" (V2PA) y "función afín" (V2FA). De hecho, la mejor adaptación a la tarea 2 del grupo A se observa en la menor incidencia de la estrategia aditiva errónea "sumar la misma cantidad a las dos cantidades de pintura" (V2PA = 7,7% *vs*. 31,8%) (figura 5).



"Juan [sabe] que el patrón de la pintura blanca que se iba dando era +9, +6, -12 y al hallar la pintura azul se dio cuenta que debía sumar el número de la pintura blanca +8."

Figura 5. Ejemplos de respuestas de "patrón aditivo" (V2PA).

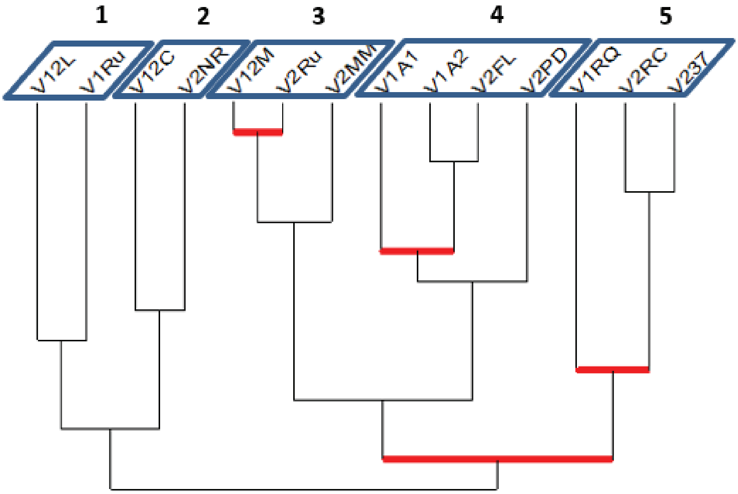
Análisis de similaridad e implicativo

Hasta aquí, se ha realizado un análisis puntual, variable a variable. A continuación, se realiza un análisis relacional, mediante análisis de similaridad y análisis implicativo (Wilhelmi *et al.*, 2021). Para este análisis estadístico de similaridad e implicativo se suprimen las variables con un porcentaje de presencia inferior al 10% o superior al 90%, dado que la baja o alta frecuencia está mejor adaptada al análisis cualitativo ya realizado.

Análisis de similaridad

En el grupo A se establecen 5 agrupamientos de relaciones entre variables (figura 6). Estas relaciones son consistentes con el análisis *a priori*, es decir, admiten una explicación basada en las expectativas de resolución en Primaria. Los agrupamientos identificados son:

1. *Nivel 0-1 de desarrollo RAE: reducción a la unidad en* $\mathbf{N}$ *y uso de lenguaje natural*. El uso del lenguaje natural (V12L) está relacionado con la resolución por reducción a la unidad en la tarea 1 (V1Ru), donde la resolución se realiza en $\mathbf{N}$. Esta situación es consistente con los conocimientos previos de los estudiantes y, por lo tanto, les capacita para una resolución correcta con un coste cognitivo bajo (*eficacia y eficiencia en la resolución*).



Leyenda
1: Nivel 0-1 de desarrollo RAE: reducción a la unidad en **N** y uso de lenguaje natural.
2: Nivel 0-1 de desarrollo RAE: necesidad de tablas de valores ordenadas y sus restricciones.
3: Reglas del contrato didáctico.
4: Nivel 1-2 de desarrollo RAE: progresiones aritméticas, relaciones doble-mitad y propiedades de la función lineal.
5: Nivel 1-2 de desarrollo RAE: resolución por agrupamientos mínimos y por razones equivalentes.

Figura 6. Árbol de similaridad del grupo A (en rojo, nodos más significativos).

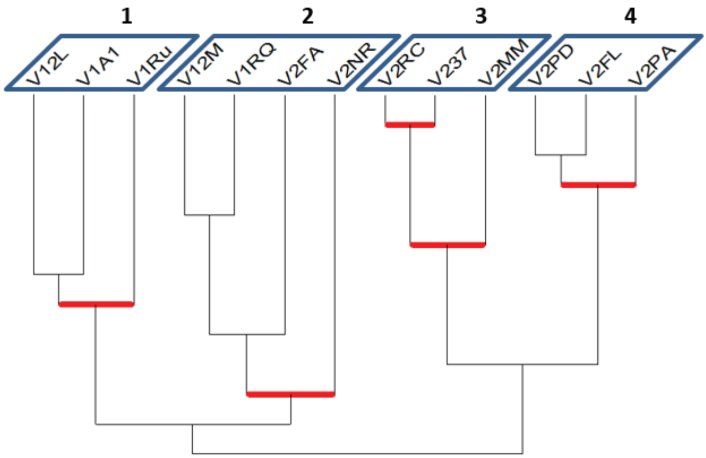
2. *Nivel 0-1 de desarrollo RAE: necesidad de tablas de valores ordenadas y sus restricciones*. Con 9-10 años, las tablas de valores se introducen como instrumento para representar la relación proporcional entre dos variables. En estas tablas, los valores se introducen de forma ordenada, de menor a mayor, según el sentido de la escritura (de izquierda a derecha). La representación de flechas o de una escritura reiterada de valores en la tabla para remarcar la relación entre valores consecutivos (V12C) es pues, una estrategia que parte de este saber previo, pero no garantiza la resolución en tareas donde la reducción a la unidad no venga dada o no sea sencilla de determinar. Por ello, no es de extrañar la observación de una relación del uso de estos ostensivos con la no resolución de la tarea 2 (V2NR).
3. *Reglas del contrato didáctico*. Como ya se ha indicado, el ordenamiento de valores (V2MM) es un paso intermedio para la interpretación de las tablas de valores y, por lo tanto, es parte del contrato didáctico vinculado al

desarrollo de la proporcionalidad. Este contrato didáctico establece también que la reducción a la unidad (V2Ru) es un procedimiento adecuado. Por último, los estudiantes son conscientes de que la resolución debe concluir con una descripción “matemática” (V12M). Así, este grupo de variables relaciona reglas del contrato didáctico vinculadas a la resolución de tareas de proporcionalidad que involucren el instrumento “tabla de valores”.

4. *Nivel 1-2 de desarrollo RAE: progresiones aritméticas, relaciones doble-mitad y propiedades de la función lineal*. En las tablas de valores como instrumentos para representar la relación proporcional entre dos variables, es usual identificar progresiones aritméticas (V1A1, V1A2) que relacionan valores consecutivos. Este procedimiento estándar supone un nivel de algebrización 1. Sin embargo, si la tabla no tiene una colección exhaustiva de valores o estos no aparecen ordenados, el éxito en la resolución exige movilizar procedimientos alternativos, tales como la determinación de parejas de valores que preservan la razón (V2PD) o la aplicación de las propiedades de la función lineal (V2FL). Así, este grupo de variables es indicador de un progreso de un nivel 1 de algebrización a un nivel 2.
5. *Nivel 1-2 de desarrollo RAE: resolución por agrupamientos mínimos y por razones equivalentes*. Siguiendo con la idea de progreso entre los niveles de algebrización, el desarrollo del nivel 2 supone encontrar algún patrón general (V237) que permita la resolución correcta de la tarea (V2RC). Estas reglas generales son el resultado de un *significado más holístico* (Wilhelmi *et al*., 2007a; 2007b), que se construye paulatinamente en la resolución de clases de problemas. En este caso, se relacionan “razones equivalentes” en la tarea 1 (V1RQ) con la razón “3:7” que representa el agrupamiento mínimo (V237).

A diferencia del grupo A, donde las relaciones entre variables descritas son todas consistentes con el análisis *a priori*, en el grupo B se establecen relaciones incoherentes entre las variables, en el sentido de que: a) o bien se establece un agrupamiento de variables que vincula resoluciones incorrectas con respuestas bien adaptadas a la situación problemática; b) o bien se carece de un descriptor común al grupo de variables compatible con los indicadores de desarrollo RAE.

En el grupo B se establecen 4 grandes agrupamientos de variables (figura 7), que describen ciertas características de la actividad. Las agrupaciones de variables 1 y 3 son consistentes con el análisis *a priori*; las agrupaciones 2 y 4 son incoherentes y son prueba de que las intervenciones magistrales del docente han condicionado la evolución del aprendizaje.



Leyenda
1: Nivel 0-1 de desarrollo RAE: Progresiones aritméticas, reducción a la unidad en **N** y uso de lenguaje natural.
2: Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: función afín incorrecta.
3: Nivel 1-2 de desarrollo RAE: ordenamiento de valores y resolución por agrupamientos mínimos.
4: Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: patrón aditivo incorrecto.

Figura 7. Árbol de similaridad del grupo B (en rojo, nodos más significativos).

Los agrupamientos identificados en la figura 7 describen ciertas características de la actividad mostrada por los estudiantes:

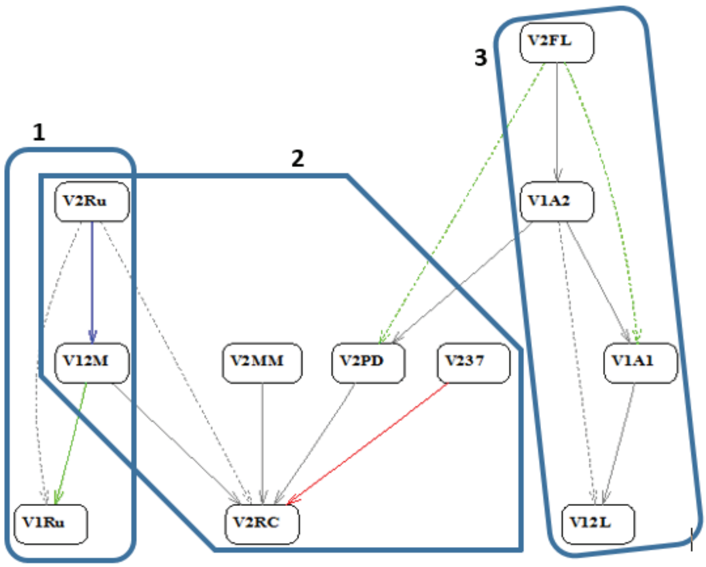
1. *Nivel 0-1 de desarrollo RAE: Progresiones aritméticas, reducción a la unidad en* **N** *y uso de lenguaje natural.* Como se ha señalado en el grupo A, el uso del lenguaje natural (V12L) está relacionado con la resolución en **N** por reducción a la unidad en la tarea 1 (V1Ru) y con la identificación de una progresión aritmética en esa misma tarea (V1A1). Esta situación es consistente con los conocimientos previos de los estudiantes y, por lo tanto, les capacita para una resolución correcta con un coste cognitivo bajo.
2. *Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: función afín incorrecta.* El uso de lenguaje matemático (V12M), la determinación de razones

equivalentes (V1RQ) o la utilización de propiedades de la función lineal (V2FA) no permite la resolución de la tarea 2 (V2NR). Así, conocimientos que denotan un desarrollo del nivel 2 del RAE no se evidencian en una resolución de la tarea 2 y, por lo tanto, las prácticas operativas no tienen un correlato directo con las discursivas, que involucran la identificación de conceptos-definición y del uso de un lenguaje más matemático.

3. *Nivel 1-2 de desarrollo RAE: ordenamiento de valores y resolución por agrupamientos mínimos*. Como en el grupo A, el desarrollo del nivel 2 supone encontrar algún patrón general (V237) que permita la resolución correcta de la tarea (V2RC). Esta resolución comporta transformar previamente el problema para identificar de forma más "canónica" las relaciones, ordenando los valores en la tabla (V2MM).
4. *Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: patrón aditivo incorrecto*. En la tarea 2, se pueden obtener respuestas parciales determinando parejas de soluciones (V2PD) o aplicando propiedades de la función lineal (V2FL). Sin embargo, si se desconoce la razón "3:7", en la solución de la tarea se pueden cometer errores (V2PA) que son muestra de la falta de operativización eficaz de los conocimientos.

Análisis estadístico implicativo

En el grupo A se establecen 3 agrupamientos de implicaciones (figura 8). Estas relaciones son consistentes con el análisis *a priori* y, por lo tanto, tanto con el análisis descriptivo previo de las variables y con el análisis de similaridad.



Leyenda
Índices de implicación: rojo 95; azul 90; verde 85; gris 75
1: Indicios de la estabilidad de la estrategia "reducción a la unidad" en las tareas 1 y 2.
2: Contribución de los distintos métodos de resolución en la tarea 2.
3: Indicios del desarrollo RAE del nivel 0-1 al nivel 1-2.

Figura 8. *Gráfico implicativo del grupo A*

Los 3 agrupamientos identificados en la figura 8 representan:

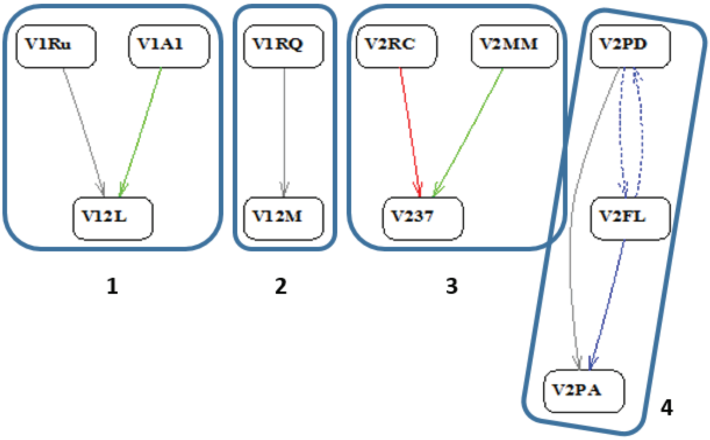
1. *Indicios de la estabilidad de la estrategia "reducción a la unidad" en las tareas 1 y 2.* Hay un conjunto de estudiantes que utilizan de forma eficaz la técnica de "reducción a la unidad" en ambas tareas. De hecho, la resolución de la tarea 2 por esta técnica (V2Ru) implica su uso también en la tarea 1 (V1Ru). La dirección de la tarea es consistente con las expectativas, dado que la tarea 2 tiene una tasa de éxito inferior. Esto es así porque en la interpretación de las implicaciones estadísticas hay que tener en cuenta su modelización conjuntista: Si la variable v1 implica la variable v2, entonces el conjunto caracterizado por la primera variable está cuasi-contenido en el conjunto caracterizado por la segunda (Lacasta y Wilhelmi, 2008). Además, esta estabilidad está relacionada con el uso del lenguaje

matemático (V12M). Así, el conjunto de estudiantes que contribuye a este grupo muestra al menos un nivel RAE 1-2.

2. *Contribución de los distintos métodos de resolución en la tarea 2*. Distintos métodos (V2PD, V237, V2Ru) permiten obtener resultados parciales o globales de la tarea 2 (V2RC). La actividad matemática relacionada puede implicar la transformación de la información para la obtención de una presentación clásica por ordenación de los términos (V2MM) y la interpretación en lenguaje matemático. Así, el conjunto de estudiantes que contribuye a este grupo muestra indicios de un nivel RAE 2-3.
3. *Indicios del desarrollo RAE del nivel 0-1 al nivel 1-2*. El método de resolución por progresiones aritméticas en la tarea 1 (V1A1, V1A2), justificadas en lenguaje natural (V12L), es el método base del establecimiento de propiedades de la función lineal (V2FL). Así, se resalta la importancia de las tareas para promover el progreso del nivel RAE 0-1, esencialmente aritmético, al nivel RAE 1-2.

Como ya se ha resaltado en el análisis de similaridad, a diferencia del grupo A, donde las relaciones entre variables descritas son todas consistentes con el análisis *a priori*, en el grupo B se establecen relaciones implicativas incoherentes entre las variables.

En el grupo B se establecen 4 agrupamientos de variables (figura 9).



Leyenda
Índices de implicación: rojo 95; azul 90; verde 85; gris 75
1: Indicios de nivel de desarrollo RAE 0-1.
2: Indicios de nivel de desarrollo RAE 1-2.
3: Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: la determinación de la razón "3:7" en la tarea 2 no implica su resolución completa.
4: Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos: relación entre el modelo aditivo erróneo y las propiedades de la función lineal

Figura 9. *Gráfico implicativo del grupo B*

Las agrupaciones de variables 1 y 2 son consistentes con el análisis *a priori* y son muestra de niveles de algebrización 0-1 y 1-2, respectivamente. Las agrupaciones 3 y 4 son incoherentes y evidencian falta de *significado operativo* de procedimientos (V2PD, V237) o propiedades (V2FL), es decir, se observa el uso de estos procedimiento o propiedades adecuados, pero o bien no implica su uso en la resolución correcta o bien se relacionan con errores que denotan un nivel 0 del RAE.

- *Indicios de nivel de desarrollo RAE 0-1 o 1-2*. En el análisis implicativo del grupo B, la agrupación 1 muestra relaciones aritméticas propias del nivel RAE 0-1 vinculadas a la determinación de la unidad en **N** (V1Ru) y el establecimiento de sucesiones aritméticas (V1A1) descritas en lenguaje natural (V12L). La agrupación 2 muestra que quienes justifican la tarea mediante razones equivalentes (V1RQ) utilizan un lenguaje matemático (V12M) en su justificación. Así, los estudiantes que contribuyen a la constitución de estas implicaciones muestran indicios de un nivel de algebrización 1-2.

- *Indicadores de nivel 1-2 de desarrollo RAE no operativos*. Por un lado, en la agrupación 3, se observa que la determinación de la razón "3:7" (V237) en la tarea 2 no implica su resolución completa (V2RC). De hecho, se invierte la dirección de la implicación en relación con el grupo A, donde el número de personas que resuelven bien la tarea es mayor que los que utilizan la técnica de los agrupamientos mínimos estableciendo la razón "3:7". Esta circunstancia se explica porque el docente indicó expresamente que utilizaran la relación "3 es a 7" para completar las celdas vacías. Este conocimiento no cumple una función regulativa en el proceso, sino la aceptación de una regla pedagógica según la cual "hay que cumplir con las indicaciones del docente", aunque estén desprovistas de significado matemático. Por otro lado, en la agrupación 4, se observa que, aunque un grupo de estudiantes establece una relación correcta entre las variables V2PD ("determinación de la pareja 12:28 como el doble de 6:14") y V2FL ("propiedades de la función lineal"), las variables quedan relacionadas con un modelo aditivo incorrecto (V2PA). Este hecho evidencia, nuevamente, falta de operatividad y significatividad al conocimiento emergente "propiedades de la función lineal".

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y CUESTIONES ABIERTAS

La construcción de los métodos de resolución algebraicos no se realiza "en oposición" a los aritméticos, sino en una sucesiva adaptación a las tareas. Así, las prácticas operativas y discursivas deben contribuir a la construcción paulatina del significado algebraico. El desarrollo de la noción de proporcionalidad es clave en este continuo aritmético-algebraico. A partir de los 9-10 años se introduce como procedimiento de resolución de problemas de proporcionalidad la construcción de tablas de valores que relacionan valores de variables sujetas por una razón de proporcionalidad. Sin embargo, si se realizan modificaciones adecuadas a las tablas de valores, es posible que las tareas demanden mayores grados de razonamiento algebraico.

Por ello, se elabora una propuesta de indicadores para los niveles de razonamiento algebraico en la resolución de tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores. Se identifican aspectos que evolucionan de un nivel a otro y se construye un instrumento (cuestionario) cuya resolución demanda dicha evolución. Los datos experimentales permiten validar los indicadores propuestos para la identificación del nivel de razonamiento algebraico mostrado por los estudiantes.

En las actividades introductorias de tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores, los valores se presentan de forma ordenada y se determinan progresiones aritméticas para cada una de las variables (*razón interna o relación entre valores de una misma variable*). Además, partiendo de relaciones "doble-mitad", se establecen relaciones de "múltiplo-divisor" y se reduce a la unidad como estrategia para introducir la *razón externa* o, por defecto, *razón*. Es decir, se establece la correspondencia de una unidad (1) en una de las variables con un número natural *n* en la otra variable. En todo este proceso inicial, se utiliza un lenguaje natural para describir las relaciones y las operaciones que se realizan. Estas operaciones involucran generalmente valores naturales entre 1 y 30, lo que permite que su construcción se realice mediante cálculo mental.

A partir de estos conocimientos de base, las tareas propuestas en la experimentación exigen progresar del nivel RAE 0-1 de base a un nivel RAE 1-2 emergente. En efecto, las pruebas experimentales muestran la emergencia de conocimientos asociados al segundo estado descrito en la tabla 1. Además, eventualmente, algunos estudiantes han mostrado indicadores de nivel 2-3, lo que motiva, como se verá más adelante en las cuestiones abiertas, la necesidad de proponer nuevas tareas cuya resolución esté condicionada por esta progresión y que enmarcarán estudios futuros.

Los datos experimentales también permiten identificar tipologías de estudiantes: en el grupo A, por un lado, se observa un grupo de estudiantes que, partiendo de los conocimientos de base (nivel RAE 0-1), progresan hacia un nivel 1-2; y, por otro lado, estudiantes que muestran un nivel RAE 2 operativo eficaz, que, eventualmente, muestran indicadores de progreso hacia un nivel 3. En el grupo B, sin embargo, hay un grupo de estudiantes que o bien no muestra progreso en los conocimientos de base o bien muestra indicadores de nivel 2 con pérdidas de significado tanto operativas como discursivas; a saber:

- *Pérdidas de significado operativas*. Se aportan soluciones incorrectas relacionadas con el *modelo aditivo* o con el de una *función afín*.
- *Pérdidas de significado discursivas*. Se aportan soluciones incorrectas no consistentes con otras correctas y no se controla ni discute esta inconsistencia.

El hecho de que los grupos experimental A y de control B estén constituidos por estudiantes del mismo centro educativo y, sean impartidos por el mismo docente mediante el mismo formato online, permite afirmar que la organización más autónoma en el grupo A ha permitido una adaptación más "natural" a la tarea 2, es decir, partir de los conocimientos de base y adecuarlos a dicha tarea. Esta adecuación se puede lograr mediante tres procedimientos: a) identificación de *razones equivalentes* (primero, 6/14=12/28; luego, 3/7=6/14, etc.); b) determinación del *agrupamiento mínimo* (razón 3:7); c) *reducción a la unidad* (1:7/3 o 1:2,3333...). Los dos primeros procedimientos pueden ser abordados en $\mathbf{N}$, mientras que el segundo exige trabajar en $\mathbf{Q}+$. De esta forma, la resolución de los estudiantes por sí misma no puede ser tomada como indicativa de su nivel RAE, ya que necesariamente, para que aparezcan indicios del nivel RAE 2-3 la tarea debe precisarlos para su resolución. Este hecho es crucial para las futuras investigaciones, donde, para establecer una tipología de estudiantes según su competencia algebraica, se pueden proponer tareas que necesariamente exijan la progresión a un nivel 3 RAE.

Estas tareas adicionales deberían tener en cuenta los siguientes aspectos:

- *Exhaustividad*. La tabla de la tarea 2 no es exhaustiva ni permite, en la presentación dada a los estudiantes, indicar la correspondencia entre todos múltiplos de 3 entre 3 y 21 en la primera variable. Así, una posible modificación de esta tarea consistiría en introducir un número mayor de celdas a completar, que "animara" a los estudiantes a determinar la razón 3:7 y la correspondencia entre todos los múltiplos de 3 hasta un máximo.
- *Reducción a la unidad en* $\mathbf{Q}+$**.** La tabla de la tarea 2 incluye únicamente múltiplos de 3. Así, una posible modificación de esta tarea consistiría en solicitar la correspondencia de números que no sean múltiplos de 3, de modo que se precise la reducción a la unidad en $\mathbf{Q}+$. Además, hay que observar que no es lo mismo solicitar la correspondencia de 4 que de 16, dado que 4 es un número muy próximo a 3 y, por lo tanto, "la unidad" es "casi visible". Además, en el análisis de las respuestas habrá que tener en cuenta el modo de obtención de la razón:

a) Razón fraccionaria como resultado de una operación: "si a 3 le corresponde 7, entonces a 1/3 de 3 (es decir, 1) le corresponde también 1/3 de 7".
b) Razón fraccionaria como operador: "3 es a 7 como 1 es a 7/3". Además, si no se solicita explícitamente la correspondencia de 1 y, por lo tanto, este cálculo juega una función auxiliar, algunos estudiantes

podrán optar por el cálculo mediante *razones equivalentes* y determinación del *elemento faltante*; por ejemplo: "Si , entonces ". Por último, el uso o no de calculadora podría condicionar que las respuestas se dieran mediante fracciones o fracciones mixtas o mediante números decimales.

– *Determinación de la correspondencia para valores "grandes"*. En las tareas 1 y 2, el número de valores que deben ser calculados es bajo (a lo sumo 3) y, por lo tanto, el cálculo mental está perfectamente justificado, más aún, cuando todos los valores son múltiplos de 3, como ya se ha discutido. Así, sería necesario solicitar la correspondencia de valores para los cuales el cálculo mental no es tan usual y, por lo tanto, pierde eficacia: 87, 126, 257, etc. Para estos valores "grandes", los procesos de generalización se revelan más eficaces y, por lo tanto, surgen como respuesta a una necesidad matemática y no a una solicitud expresa del docente.
– *Uso de tablas dinámicas*. Antes de la introducción formal de la función lineal mediante la fórmula $y = ax$ y su significación funcional, es posible modelizar la proporcionalidad mediante tablas dinámicas (Excel, hoja de cálculo en GeoGebra, etc.). En la figura 10 se muestra la resolución de la tarea 2 en Excel. No se trata de una mera transcripción de datos, sino la obtención de valores calculando la razón de los litros de pintura azul y blanca por cociente de los valores en las primeras celdas (=B2/B1) y el uso fijo de este valor (B3) para el cálculo en las sucesivas celdas (*constante de proporcionalidad*). Más aún, el propio cálculo mediante "arrastre" permite constatar el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes. Finalmente, en la celda F1 se puede introducir cualquier valor para obtener automáticamente la cantidad de pintura azul que mantiene constante la proporción. Es decir, la última columna F se constituye en una calculadora que arroja el valor "proporcional" para cualquier valor (sin limitación del campo numérico): al introducir cualquier valor en la celda F1 automáticamente se muestra el valor proporcional en la celda F2, según la proporción 2,333 (celda F3).

Resultados

	A	B	C	D	E	F
1	Blanca(litros)	6	15	21	9	3
2	Azul (litros)	14	35	49	21	7
3		2,3333	2,3333	2,3333	2,3333	2,3333

Fórmulas

	A	B	C	D	E	F
1	Blanca(litros)	6	15	21	9	
2	Azul (litros)	14	=C1*B3			
3		=B2/B1	=C2/C1			

arrastre de las celdas C2 y C3

Figura 10. Tablas dinámicas.
Fuente: elaboración propia.

Las tareas adicionales se pueden proponer en una secuencia similar a las ya propuestas o mediante la elaboración de una *situación didáctica* que tendría en cuenta para su gestión *variables didácticas* (Brousseau, 2007) asociadas a los objetos primarios de la tabla 1, que son indicadores del progreso en los niveles de algebrización: desde un nivel incipiente de algebrización (RAE 0-1) hacia un nivel que siente las bases del acceso, ya en Educación Secundaria, de un nivel estable de algebrización (RAE 3).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló como parte del proyecto CAP PI1029 Razonamiento algebraico elemental generalizado para el desarrollo de las competencias matemáticas del currículo en Educación Secundaria, con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

REFERENCIAS

Block, D. (2006). Se cambian fichas por estampas Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática*, *18*(2), 5-36.

Block, D. (2021). "Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación matemática*, *33*(2), 115-146.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas*. Zorzal.

Burgos, M., y Godino, J. D. (2019a). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31*(3), 117-150. https://doi.org/10.24844/em3103.05

Burgos, M., y Godino, J.D. (2019b). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *BOLEMA, 33*(63), 1-21.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

Brinker, L. (1998). Using recipes and ratio tables to build on students' understanding of fractions. *Teaching children mathematics*, *5*(4), 218-224.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1988). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo XXI.

Castro, W. F., Martínez, J. D., & Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education*, *6*(2), 164-191. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(2), 18-22.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluver Academia Publishers.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(3), 237-284.

Godino, J.D., Batanero, C., Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), pp. 127-135

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA*, *26* (42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014a). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza Ciencias*, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014b). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico Semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2–3), 167–200. https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., y Wilhelmi, M. R. (2019). Analysis of Didactical Trajectories in Teaching and Learning Mathematics: Overcoming Extreme Objectivist and

Constructivist Positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(1), 147-161. https://doi.org/10.12973/iejme/3983

Kieran, C. *et al.* (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching.* Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2

Lacasta, E., y Wilhelmi, M. R. (2008). The graphic illusion of high school students. In R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet and F. Spagnolo, *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications*, pp. 99-117. Springer.

Middleton, J. A., y Heuvel-Panhuizen, M. van den (1995). "The ratio table", *Mathematics Teaching in the MiddleSchool* 1(4), pp. 282-288.

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2016). Currículo nacional de la educación básica, https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4551

Misailidou, C., y Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*(3), 335–368.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(1), 59-81.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2011). Informe PISA 2009: Lo que los estudiantes saben y pueden hacer. https://doi.org/10.1787/9789264174900-es

Ramírez, M., y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, *21*(1), 63-90.

Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*. *13*(3), 289-327.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2001). *When tables become function tables.* Paper presented at the Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204. http://www.jstor.org/stable/3482345

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2/3), 133-170.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007a). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 27*(1), 77-120. https://revue-rdm.com/2007/configuraciones-epistemicas/

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007b). Didactic Effectiveness of Mathematical Definitions: The Case of the Absolute Value. *IEJME*, *2*(2), 72-90. https://doi.org/10.29333/iejme/176

Wilhelmi, M. R. (2017). Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano *et al.* (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). SEIEM. https://n9.cl/zlt38

Wilhelmi, M. R., Belletich, O., Abaurrea, J., Iribas, H., y Lasa, A. (2021). Triangulation en recherche qualitative à l'aide de l'analyse statistique implicative. En J.-C. Régnier *et al.*, *Analyse statistique implicative 11,* pp. 149-167. Université Bourgogne Franche-Comté – Besançon. https://n9.cl/xc4t6

Autor de correspondencia

Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Dirección: Av. Universitaria 1801, San Miguel 15088. Lima, Perú

cgaita@pucp.edu.pe