 https://doi.org/10.24844/EM3503.03

De la expresión de la razón con dos números naturales, a su expresión con una fracción. Dos experiencias de ingenieria didáctica en el nivel básico

From the expression of the ratio with two natural numbers, to its expression with a fraction. Two didactic experiences at primary school and high school

David Block Sevilla,[1] Daniela Ramos Banda,[2] Juan José Sosa[3]

Resumen: Se presentan los resultados de un estudio didáctico sobre el tránsito de la expresión de una razón con dos números naturales, a su expresión con una fracción. En este tránsito las fracciones adquieren el significado de razones. El estudio consta de dos experiencias cortas de ingeniería didáctica, con alumnos de entre 11 y 13 años, una en sexto grado de primaria y otra en primer grado de secundaria (séptimo grado). Los resultados dan cuenta de cierto potencial de las situaciones utilizadas para favorecer la consideración de razones y para dar lugar a su expresión con fracciones. Así mismo, dejan ver puntos débiles, y sugieren vías para seguir explorando.

Palabras clave: *Enseñanza de las matemáticas, Aritmética, Razones, Fracciones.*

Fecha de recepción: 3 de junio de 2023. **Fecha de aeptación**: 23 de octubre de 2023.

[1] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Investigaciones Educativas, México dblock@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0002-3914-5544.

[2] Investigadora independiente, danielabanda7@gmail.com.

[3] Universidad Nacional del Nordeste, Argentina sosajuanj@gmail.com.

Abstract - The results of a didactic study about the transition from the expression of a ratio with two natural numbers, to its expression with a fraction and with a percentage, are presented. In this transition, the fractions acquire the meaning of ratios, that is, of relationships between quantities. The study consists of two short experiences of didactic engineering, with students between 11 and 13 years old, one in the sixth grade of primary school and the other in the first grade of high school (seventh grade). The results are encouraging in terms of the potential of the situations used to favor the consideration of ratios and to give rise to their expression with fractions. Likewise, they reveal weak points, and suggest ways to continue exploring.

Keywords: *Mathematics education, Arithmetic, Ratios, Fractions.*

INTRODUCCIÓN

El presente artículo es sobre la génesis de uno de los significados básicos de la noción de fracción: el de la fracción como expresión de una razón geométrica, es decir, de una relación multiplicativa de cantidades[4]. Refiere a expresiones como “3/4 de la naranjada es jugo y ¼ es agua”, en donde no se indica la cantidad de naranjada que hay, ni de jugo, sino la relación que guardan esas dos cantidades, o bien expresiones como “Los intereses son del 4% anual”, en donde la razón se expresa bajo la forma de un porcentaje, vestimenta más conocida de la fracción en el papel de razón. Numerosos investigadores del campo de la educación matemática han destacado, a lo largo de casi medio siglo, la importancia de este significado para la comprensión del concepto de número racional (Brousseau, 1981; Freudenthal, 1983; Kieren, 1988; Vergnaud, 1988; Davis, 2003; Lamon, 2007; Adjiage y Pluvinage, 2007; Pedersen y Bjerre; 2021; Schadl y Ufer, 2023, entre otros). Es probable, en cambio, que en el currículum de educación básica la relación entre las nociones de razón y fracción sea todavía incierta (Clark *et al.*, 2003). En México, hasta antes de la reforma de las matemáticas modernas de los años 70, la noción de razón se enseñaba a través de la teoría de las razones y las proporciones, pero a raíz de esa reforma, dicha

[4] En adelante no precisaremos que se trata de razones geométricas puesto que no hablaremos de otro tipo de razones.

teoría desapareció. En las reformas sucesivas, la noción de razón ha reaparecido en los programas, ligada al tema de proporcionalidad, o al de números racionales (Block, 2006a).

En los libros de texto, sobre todo del siglo pasado y antepasado, se define a la noción de razón directamente como una fracción o como un cociente (i.e. Hernández, 1954). Cabe cuestionar, con Bosch (1995), ¿si ya se tiene a las fracciones, para qué se necesita a las razones? Sin embargo, como lo han mostrado los estudios citados y como se confirma en el presente artículo, para los estudiantes del nivel escolar básico, la definición de la razón como fracción o como cociente no es en lo absoluto un punto de partida: ellos necesitan desplegar un trabajo arduo y prolongado para comprender la noción de razón y, además, para comprender que una razón se puede expresar con una fracción.

A lo largo de 20 años –basándonos en las indagaciones sobre la génesis de la noción de razón (Noelthing, 1980a, 1980b), y en el trabajo pionero de corte didáctico de Brousseau *et al.* (2004), entre otros estudios– hemos implementado varias experiencias didácticas que buscan propiciar que los alumnos de 3º a 5º grados de primaria realicen razonamientos sobre proporcionalidad, manejando razones expresadas con dos números naturales, incluso en casos en los que el valor de las razones no es entero, como en "por cada 3 naranjas que recojas, te doy 2" o bien "te cambio las fichas por estampas a razón de 2 fichas por 3 estampas". Hemos intentado mostrar el valor que esas experiencias pueden tener para alumnos de primaria, en la comprensión de las relaciones de proporcionalidad. También hemos hecho la hipótesis de que las razones expresadas con dos números naturales pueden funcionar como precursoras de la noción de fracción, en el sentido de permitir resolver algunos de los problemas que después se podrán resolver con fracciones (Block, 2006b; Block, 2021; Ramos y Block, 2016). Esta hipótesis converge con planteamientos de estudios más recientes que destacan la contribución del razonamiento proporcional a la comprensión del concepto de número racional (Shadl y Ufer, 2023)

En el presente artículo, se exponen algunos resultados de dos experiencias didácticas en las que se buscó que, alumnos de sexto grado de primaria y de primer grado de secundaria expresaran razones con fracciones. Indagamos en qué medida las situaciones diseñadas propician que alumnos, con conocimientos previos de las fracciones en su acepción típica de partes de unidad para expresar cantidades y medidas, las utilicen ahora para expresar razones. Se trata de experiencias de "micro ingeniería", relativamente cortas, de entre cinco y diez sesiones de clase.

MARCO CONCEPTUAL. RAZONES Y FRACCIONES

La noción de razón se encuentra en la intersección de dos grandes temas, la proporcionalidad y los números racionales, cuyo estudio ha tendido a integrarse. Vergnaud (1988), considera que la adquisición de aspectos fundamentales de la noción de número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, o "multiplicativas" como las llama él:

> ... No resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estructuras multiplicativas. Es sólo hasta que todos estos significados se sintetizan en el concepto de número racional que es posible pensar en las fracciones y las razones como puros números. (p. 158)[5].

Freudenthal (1983), para quien las razones constituyen unas matemáticas "más profundas", explicó uno de los motivos por lo que es importante estudiar las razones aun no expresadas con fracciones:

> El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "*a* es a *b* como *c* es a *d*", sin anticipar que "*a* es a *b*" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud *a/b* (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud) ... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de la lucidez... (p. 180).[6]

Brousseau *et al.* (2004), al desarrollar una experiencia amplía de ingeniería didáctica para la enseñanza de los números decimales, mostraron el importante papel de la proporcionalidad como andamio en una construcción de los racionales, en la que las razones son una especie de crisálida de estos, a la vez que articulan toda la construcción.

[5] Traducción de los autores.
[6] Traducción de los autores.

La razón de cantidades de magnitud

Una razón expresa una relación de tipo multiplicativo entre dos cantidades. La relación multiplicativa entre dos cantidades es el cociente de una entre la otra, pero, como comentamos arriba, el cociente que la cuantifica puede quedar implícito, por ejemplo, en expresiones como "Los dulces se venden a 3 por 5 pesos" o "La escala es 1 a 1000". Las situaciones en las que la noción de razón cobra vida, además de las de tratamiento de la información en las que facilitan comunicar el tamaño de las cantidades mediante expresiones como "6 de cada 10 estudiantes son mujeres", son aquellas en las que:

- se comparan razones, por ejemplo, una naranjada se preparó con 2 vasos de agua por cada 3 de jugo, y otra se preparó con 3 de agua por cada 4 de jugo. ¿Qué naranjada sabe más a naranja?
- hay una razón constante entre cantidades que varían, por ejemplo, se hace una copia A' a escala de la figura A, en la que a 4 cm de la figura original le corresponden 3 cm en la copia. ¿Qué medida corresponde a un lado de 6 cm de la figura original?

Las magnitudes que se ponen en relación pueden ser de la misma naturaleza −cantidades homogéneas− o no −cantidades heterogéneas−. Las razones entre cantidades heterogéneas, por ejemplo, entre distancia y tiempo, dan cuenta de una nueva magnitud, velocidad en este caso, cuya unidad de medida se expresa como relación entre las unidades: kilómetros por hora. Las razones entre cantidades homogéneas, en cambio, dan lugar a números sin dimensión (escalares, números de veces), por ejemplo, en una escala, la razón "10 a 5" puede expresarse como "2 veces mayor" o "el doble".

Puede decirse también que las razones expresan cantidades *intensivas* (Schwartz, 1988; Simon y Placa, 2012). Así, es en el ámbito de los problemas con números "concretos" en el que tiene sentido trabajar con la noción de razón.

Las fracciones

Cuando se estudia a los números racionales en los contextos en los que funcionan como herramientas de resolución de problemas, se hace visible el hecho de que estos números cobran distintos significados dependiendo del tipo de problema. Esta polisemia de los racionales ha sido analizada desde hace varias décadas, desde distintas perspectivas por investigadores del campo de la enseñanza de la matemática. Freudenthal (1983), al analizar los fenómenos que las fracciones ayudan a organizar, distinguió las siguientes grandes clases: como operador fracturador, como comparador, como transformador y como operador razón que transforma valores de magnitud. Kieren (1988) distinguió cinco subconstructos de las fracciones: como relaciones parte-todo; como medidas; como razones; como cocientes y como operadores multiplicativos. En la secuencia didáctica que Brousseau diseñó sobre los decimales (1981, 2004), las fracciones emergen primero como razones y como cocientes en el papel de expresar medidas, y después en el papel de expresar aplicaciones lineales. Más adelante volveremos sobre este tema.

Las fracciones en relación con las razones

Para los antiguos matemáticos griegos, durante años no hubo otros números que los naturales, y las razones entre naturales hacían las veces de nuestras fracciones. Así, para expresar, por ejemplo, que un punto divide a un segmento S en dos partes, una de 1/3 y otra de 2/3 de S, se hablaba de partes que estaban en una razón de 1 a 3 y 2 a 3 respecto de S. Las fracciones (y los decimales) permiten hacer eficientes los cálculos que involucran razones, como la comparación de razones o su aplicación a cantidades como operadores multiplicativos. Sin embargo, como dice Freudenthal, en la cita anterior, este logro es "a costa de la lucidez"; es decir, de la claridad conceptual que aporta el trabajo con razones expresadas con pares de naturales. Las fracciones son números difíciles de conceptualizar y de operar para los aprendices. Su intervención en las situaciones de proporcionalidad puede obscurecer la comprensión de la proporcionalidad misma. Por ello puede ser conveniente dar un espacio, en la enseñanza escolar básica, al estudio de la proporcionalidad mediante razones no expresadas aun con fracciones y, cuidar el paso, no trivial, de la expresión de razones con dos números a su expresión con una fracción. Se desprende también la importancia de mantener una distinción entre los conceptos de fracción y de razón.[7]

[7] Clark *et al.* (2003) identifican y analizan cuatro posibles relaciones entre los conjuntos F (de fracciones) y R (de razones): $F \subset R$; $R \subset F$; $F \cap R = \emptyset$ y $F \cap R \neq \emptyset$. En coincidencia con estos autores, en este trabajo, se optó por la última, la intersección no vacía. Las razones pueden jugar el papel de razones y expresarse como tales, pero hay razones que no pueden expresarse con fracciones, como la que hay entre el diámetro y la circunferencia, y hay fracciones que no tienen nada que ver con la noción de razón, por ejemplo, las que se expresan con puntos en la recta numérica.

Cabe hacer dos precisiones más sobre la relación entre fracciones y razones. La primera precisión es, con respecto a la importancia de distinguir los dos diferentes papeles que pueden jugar las fracciones en una relación de proporcionalidad: expresando una cantidad y expresando la relación misma, como se aprecia en la figura 1 sobre una escala 1 a 10.

Figura A	Figura B
10 cm	1 cm
1 cm	**1/10** cm

X1/10

Figura A	Figura B
10 cm	1 cm

Figura 1. Dos papeles de las fracciones en una relación de proporcionalidad.

En la tabla de la izquierda, la fracción 1/10 expresa una medida, se trata de una fracción de centímetro. En cambio, la fracción que está sobre la tabla de la derecha expresa una relación constante entre dos conjuntos de medidas, y más precisamente, la razón constante, en este caso, el factor de escala. Así, la escala en juego se puede representar mediante parejas ordenadas de medidas (10, 1), (20, 2), (1, 1/10), etc., en las que está implícito aquello que es constante, o explícitamente mediante un solo número, 1/10, en el papel de valor de la razón constante. Cuando hablamos de la expresión de razones mediante una fracción nos referimos a este segundo caso.

La segunda precisión tiene que ver con la equivalencia: en su papel de expresar razones, por ejemplo, en una mezcla, la equivalencia de dos fracciones no remite a partes del mismo tamaño (como en ½ y 2/4 de pizza), se trata de una "equivalencia proporcional" (Pedersen y Bjerre, 2021), por ejemplo, entre el sabor a naranja de una naranjada con 2 vasos de jugo y uno de agua, y el de una con 4 vasos de jugo de 2 de agua. En este caso, a diferencia del de la pizza, los "todos" (las cantidades de naranjada) y las "partes" (las cantidades de agua y de jugo) varían de tamaño.

HIPÓTESIS

En el proyecto de investigación que presentamos aquí, partimos de la hipótesis de que el conocimiento que los alumnos adquirieron en sus primeros años de estudio de las fracciones, en tanto partes de un todo −3/4 de unidad entendido 3 veces la cuarta parte de una unidad, por ejemplo−, en el papel de expresar medidas, puede enriquecerse al articularse con el significado más amplio de las fracciones como razones. Suponemos que lo anterior es posible si las fracciones se hacen intervenir en contextos muy favorables a la consideración de la razón y si, además, dichas fracciones coexisten con otras expresiones de las razones familiares para los alumnos, tales como la clásica "*a* de cada *b*", la del porcentaje, o la que aportan las fracciones clave "la mitad" y "la cuarta parte". Es específicamente en la comprensión de esta resignificación de las fracciones, de ser concebidas como expresiones de cantidades, a serlo como razones entre cantidades, en lo que pretende aportar el presente estudio de corte didáctico.

METODOLOGÍA

El estudio incluye el diseño de situaciones didácticas a partir de un análisis epistemológico de las nociones en juego (la razón y la fracción), el cual hemos esbozado anteriormente y, de una concepción de aprendizaje de las matemáticas en la que estas se construyen como herramientas en la resolución de determinados problemas. Por ello, optamos por la Teoría de las Situaciones Didácticas -TSD- (Brousseau, 1998) como marco de referencia. La metodología es la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), la cual consta de: a) un análisis preliminar que incluye una dimensión epistemológica sobre las nociones en juego, su génesis histórica, un análisis curricular y una exploración sobre conocimientos de los alumnos -este análisis se viene realizando desde trabajos anteriores (Block, 2006a; 2006b)-; b) un diseño de situaciones acompañado del análisis previo que fundamenta a cada situación; c) la experimentación en aula, y d) un análisis de la implementación que contrasta lo previsto con lo ocurrido.

Las experiencias que presentamos se llevaron a cabo en dos grupos escolares, uno de 6º de primaria, con 32 alumnos, en el marco de la tesis de Ramos (2014), y otro de 1º de secundaria, con 40 alumnos, en el marco de la tesis de maestría de Sosa (2018).[8] En ambos casos las docentes conocían algunas características del enfoque didáctico: dar un espacio para la resolución del problema individualmente o por equipos, recuperar las distintas respuestas de los alumnos en las puestas en común, organizar momentos de verificación, y destacar al final los hallazgos. En la observación de las clases, participaron de tres a cuatro miembros del equipo. Los observadores eventualmente pedían a los alumnos alguna explicación de lo que habían hecho, pero no intervinieron en el desarrollo de las clases. Todas las clases fueron video grabadas. Los análisis se realizaron centrando la mirada en las formas de dar la consigna, las ayudas del profesor, los procedimientos desarrollados por los alumnos, las participaciones en las puestas en común, y ponderando estos aspectos a la luz de lo previsto en los análisis previos. Básicamente se buscó saber en qué medida las situaciones dieron lugar a los procedimientos de resolución previstos.

ANÁLISIS PREVIO DE LAS SITUACIONES

En este apartado, presentamos las situaciones diseñadas, sus propósitos didácticos, y destacamos algunas de sus características.

Las situaciones

En las tablas 1 y 2, pueden verse los propósitos de las situaciones que se plantearon en cada grado.

[8] En ambos casos se solicitó permiso a la dirección de las escuelas para llevar a cabo el estudio. Las escuelas a su vez solicitaron la anuencia de los padres de familia.

Tabla 1. Secuencia de situaciones en 6º de primaria

<table>
<tr><th></th><th>Propósito</th><th>Ejemplo de tarea (primaria)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Poner en juego razonamientos cualitativos que permitan comparar dos razones expresadas con dos números naturales.</td><td>En la huerta A les ofrecen 2 naranjas por cada 5 naranjas que recojan y en la huerta B les ofrecen 2 naranjas por cada 6 naranjas que recojan ¿cuál creen que les conviene más a los niños?
Ejemplo de resolución: si en los dos tratos me dan la misma cantidad, pero en uno debo recoger menos, me conviene más ese.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Desarrollar el procedimiento para comparar razones, que consiste en generar razones equivalentes, con un término común.</td><td>“En la huerta A por cada 3 naranjas que recojan les dan 2; y en la B por cada 5 naranjas que recojan les dan 3. ¿Qué huerta conviene más a los niños?”
Para comparar 3 de cada 5 contra 2 de cada 3, se obtienen las razones equivalentes 9 de cada 15 y 10 de cada 15.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Dar una entrada a las fracciones como razones, a través de la razón $\frac{1}{2}$ en situaciones de comparación.</td><td>Por cada 10 naranjas que recojas, te doy 6, o bien, por cada 30 naranjas, te doy 15. ¿Qué trato te conviene más?
Una posible resolución consiste en considerar que en la primera oferta dan más de la mitad y en la segunda solo la mitad.</td></tr>
<tr><td>Utilizar fracciones en el papel de expresar razones, de manera intercalada con razones expresadas con dos números.</td><td>“Te doy $\frac{2}{3}$ de las naranjas que recojas” contra “Por cada 2 naranjas que recojan, te doy 1” ¿Qué trato conviene más?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Expresar razones con fracciones.</td><td>Completa la siguiente tabla con los datos que faltan para que los tratos sean equivalentes.
<table>
<tr><th colspan="2">Te doy__ de lo que recojas</th></tr>
<tr><td>Por cada</td><td>te doy</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fuente: Ramos, 2014.

Nos centraremos en las tareas segunda y tercera, en las que entran en juego explícitamente las fracciones. Más detalles sobre las tareas 1 y 4 pueden verse en Ramos (2014) y en Ramos y en Ramos y Block (2016).

Tabla 2. Secuencia de situaciones en 1º de secundaria

	Propósito	Ejemplo de tarea (secundaria)
1	Poner en juego razonamientos cualitativos que permitan comparar dos razones expresadas con dos números naturales.	*En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?*
2	Propiciar el uso de la expresión fraccionaria de las razones en una situación de ordenamiento de razones. Las fracciones están dadas.	Se presentan los resultados de 5 jugadores, para cada uno hay tres datos, dos se dan, el tercero se calcula: total de tiros, tiros encestados, y fracción del total de tiros que representan los encestados. Los alumnos deben ordenar a los jugadores en función del desempeño.
3	Relacionar razones expresadas con dos números naturales con fracciones, al ubicar a las primeras entre ciertas fracciones conocidas, en la recta numérica.	Se dan dos datos de 5 escuelas cuyos alumnos presentaron un examen: el total de alumnos y los que aprobaron. Deben ubicar las escuelas en función del desempeño de cada una en una recta numérica en la que están señalados los números $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$. Se da un ejemplo.
4	Interpretar una fracción como una razón que expresa una relación entre cantidades variables.	Se da el dato de una sexta escuela bajo la forma de fracción ("aprobaron 3/7 de los alumnos), y se pregunta si se puede comparar con las otras escuelas.

Fuente: Sosa, 2018.

Cabe observar que, en la secuencia de sexto grado, el uso de fracciones se propicia al final, pues se da un espacio importante previo al trabajo con razones sin fracciones. En la secuencia de secundaria, el trabajo con fracciones se propicia desde el principio.

Otras características relevantes de las situaciones

Usar y resignificar vs construir desde cero. Como puede observarse en las dos secuencias, no se pretende que los alumnos pongan en juego por sí mismos las fracciones, se pretende que utilicen, en el papel de razones, las que se les dan y que enriquezcan así el conocimiento previo que ellos ya tienen sobre esas fracciones.

Relaciones parte-todo. En ambos niveles se trata de razones entre una parte y el todo. Debido a que las fracciones que los alumnos han estudiado previamente son, sobre todo de este tipo, suponemos que será más factible que vean la pertinencia de expresar las razones con fracciones. No obstante, esta decisión constituye también una limitación pues podría favorecer ideas tales como que la razón, el porcentaje y, la fracción son siempre necesariamente menores que uno. Es necesario extender la experiencia a contextos con relaciones parte-parte, con fracciones mayores que uno.

Las formulaciones de las razones: "m de n" y "m por cada n". En los problemas sobre tratos que planteamos en primaria, las razones se formulan con la expresión "*m por cada n*", lo que les da un carácter dinámico, de operador multiplicativo (Parker y Leinhardt, 1995). La expresión "*m por cada n*" permite generar pares de cantidades, "*km, kn*", que guardan entre sí la misma razón. Esta característica puede facilitar el procedimiento para comparar razones que consiste en generar razones equivalentes para igualar un término. En los problemas que se plantearon en secundaria, en cambio, las razones no tienen el carácter de operador, se trata de pares de cantidades que ocurren una vez, por ejemplo, 14 tiros encestados de 21, y es el contexto el que debe propiciar que se considere la razón entre las cantidades. Usar el procedimiento de generar razones equivalentes con un término común, puede ser ahora más difícil, pues nada sugiere que iterando las cantidades de una razón se pueda obtener otra equivalente.

Los contextos. El del desempeño de los tiradores al aro tiene la debilidad de que no es obvio que sea justo comparar los desempeños de los jugadores a partir de distintos números de tiros, aun cuando lo que se considere sea la razón. Para aminorar el efecto de esta debilidad se usaron cantidades totales de tiros lanzados por los distintos jugadores relativamente cercanas entre sí.

La verificación empírica. La secuencia que se aplicó en 6º de primaria ofrece una forma de verificar empíricamente: se da a los alumnos una cantidad de fichas que representan a las naranjas recogidas, y ellos deben aplicar a ciertas cantidades de naranjas las dos reglas que compararon para comprobar cuál regla da más. Al verificar, ya sea haciendo la acción de separar de la cantidad total, *m* naranjas de cada *n*, o dividiendo la cantidad entre *m* y multiplicando por *n*, los alumnos tienen la oportunidad de comprender el funcionamiento de las razones, y de cuestionar las hipótesis incorrectas.[9] La secuencia de secundaria no ofrece esta retroalimentación empírica. La única manera de invalidar una respuesta incorrecta es semántica, es decir, mediante argumentos, lo cual, si bien constituye un reto formativo, descarga en el docente el difícil trabajo de ayudar a evidenciar los errores.

---

[9] No se comunicó a los alumnos, antes de la verificación, cuántas naranjas se repartirían, pues de haberlo hecho se hubiera eliminado el momento de la anticipación y solo habría quedado el de la aplicación de las "reglas" a determinadas cantidades.

ANÁLISIS POSTERIOR

La experiencia en sexto grado de primaria

Los alumnos trabajaron en equipos de 4, aunque las participaciones en las puestas en común tendieron a ser a título individual.

Tareas 1 y 2: comparación de razones expresadas con dos números naturales

Al principio, las elecciones de los alumnos estuvieron basadas en criterios distintos al de obtener más naranjas. Por ejemplo, para comparar los tratos E (por c/5, 4) y F (por c/20, 8)[10] un alumno dijo "trabajaré en el E porque todos van a querer trabajar en el otro"; otro alumno comentó "trabajaré en el E porque me gusta ayudar". Más tarde, todos asumieron que se trataba de escoger el trato en el que les dan más naranjas por las que se recogen, Marijose, por ejemplo, intuye que el trato E (por c/5, 4) es mejor, dejando ver que desde el principio tiene en cuenta, de manera cualitativa, la razón entre las cantidades: "(en la E) recolectas cinco naranjas más rápido y te dan casi todas, nada más no te quedas con una, entonces es la E ¿por qué? Porque te dan casi todas". También ocurrió que algunos alumnos interpretaron los tratos como si expresaran dos cantidades fijas y no una relación dinámica, por ejemplo, el trato E (por c/5, 4) fue interpretado como si en total se hubieran recogido solamente 5 naranjas. Aplicar un trato a una cantidad grande de naranjas recogidas para calcular las que debían darse en pago, ayudó a comprender el funcionamiento de los tratos.

El procedimiento de igualar un término. El procedimiento que consiste en igualar el número de naranjas recogidas para poder comparar acabó por establecerse. Algunas veces se hizo de forma explícita, por ejemplo, Alan, al comparar el trato E (por c/5, 4) con el trato F (por c/20, 8), afirmó: "[...] cuatro naranjas por cinco naranjas te dan veinte, multiplico cuatro por cuatro nos da dieciséis, sería lo doble de esto, de lo que nos da aquí la regla. Entonces el E es mejor". Alan generó el par "por 20 te doy 16", equivalente al trato original E (por c/5, 4), igualando las naranjas recogidas a 20 (figura 2) y, finalmente, comparó exitosamente. Encontrar el factor por el que hay que multiplicar los dos términos de un trato para igualar uno de ellos al del otro trato es relativamente fácil cuando

[10] Esta nomenclatura se usará en el presente artículo para referirnos a los tratos con los que trabajaron los alumnos. "E por c/5, 4" significa que "el trato E ofrece dar cuatro de cada cinco naranjas que recojas".

los números no son muy grandes, y cuando uno de los que se van a igualar es múltiplo del otro. Implícitamente, se trata de un cociente, en este caso 20÷5, que juega como razón interna entre 5 y 20.[11]

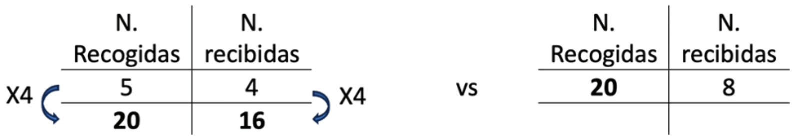

Figura 2. Obtención de un trato equivalente mediante conservación de las razones internas.

Uso espontáneo de fracciones. Algunos alumnos acudieron en algún momento al uso de fracciones de manera espontánea, poniendo en juego la comparación contra la mitad, cuando esto permitía comparar. Por ejemplo: al comparar los tratos C (por c/10, 6) y D (por c/30, 15) Luis dice que "de treinta te da justo la mitad, pero en la otra, de diez no te da la mitad, te da un poco más". "La mitad" emerge claramente como una expresión de la razón independiente de las cantidades específicas. Algunos alumnos, pocos, fueron más allá de estimar contra la mitad, y expresaron tratos con fracciones. José, por ejemplo, explicó, con respecto al trato A (por c/3, 2):

> Ah, es que vi que eran tres, por cada tres que recogías te daban dos, entonces lo acomodé en modo de fracción, y como no te daban tres por cada tres o cuatro por cada tres que recogías, era menos de un entero y acomodé el mayor abajo y el menor arriba y así obtuve ésta [dos tercios].

Otro alumno, Germán, al aplicar el trato "por cada 3, 2" a 60 naranjas explicó: "Yo sólo vi dos de tres, dos tercios, entonces dividí el sesenta entre tres, son veinte, por dos son cuarenta".

Así, algunos alumnos logran poner en juego las fracciones, por cuenta propia, pero es el caso solamente de unos pocos, por lo que más adelante, las fracciones se introducen para todos, desde la situación misma.

Uso espontáneo del porcentaje. En la segunda clase de la secuencia, dos alumnos, Maribel y Germán, expresaron algunos tratos con parejas de números naturales, con una fracción, con porcentajes. Por ejemplo, al comparar los

---

[11] En las entrevistas que se hicieron en el estudio preliminar (Block, 2006a, 2006b), se muestra que para algunos de los alumnos -de entre 3º y 5º de primaria-, no era evidente que dicho múltiplo existiera.

tratos C (por c/10, 6) y D (por c/30, 15), Maribel explicó: "Si dicen que por cada 10, el 10 es el 100 por ciento y entonces el 6 es el 60% y el 30 de la D es el 100%, y como nada más te van a dar la mitad, 15, es el 50%". Expresar razones con porcentajes no había sido considerado un objetivo de la secuencia, sin embargo, los porcentajes son probablemente la expresión de las razones más conocida (Parker y Leinhardt, 1995), lo cual, aunado al hecho de que se estaban estudiando en clase de manera paralela, explica que algunos alumnos pensaran en utilizarlos.

Tarea 3: comparación de tratos expresados con una fracción, con tratos expresados con dos números naturales

A fin de dar lugar al uso de fracciones como expresión de las razones, primero se propusieron razones expresadas con dos números naturales que pudieran compararse a través de la fracción ½, lo cual numerosos alumnos efectivamente hicieron. Posteriormente, se compararon tratos expresados con una fracción, contra tratos expresados con dos números naturales. Al cabo de algunos intentos, varios alumnos más lograron pasar de una expresión a la otra para compararlas. A continuación, mostramos algunos ejemplos. Cuando Samantha compara los tratos E (2/3) y D (por c/6, 4), escribe: "son iguales porque el 6 lo convertimos a 12 sería por cada 12 te doy 8 y en el E por cada 12 nos darían igual 8" (figura 3). Giovanni, al comparar los tratos E (2/3) y C (por c/4, 3), comienza escribiendo con la fracción ¾ y compara ambos tratos en el terreno de las fracciones: "conviene el C porque ¾ es más grande que 2/3". Así, en el marco de una relación de proporcionalidad, la fracción *m/n* funge como una razón constante, y más específicamente, como un factor constante que da lugar a un conjunto de tratos equivalentes del tipo (k*m* por cada k*n*). En esto vemos un enriquecimiento de la noción de fracción, con respecto a su papel inicial de partes de unidad.

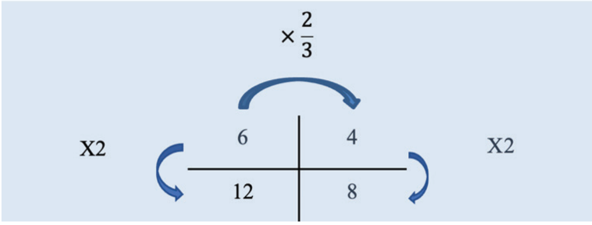

Figura 3. La razón "por cada 6, 4" es equivalente a la razón "$\frac{2}{3}$de"

Comentarios sobre la experiencia en primaria

Las respuestas de varios alumnos en esta última parte de la secuencia, cuando se introducen las fracciones, constituyen indicadores de avances probables en dos niveles: por una parte, los alumnos mejoran sus técnicas para comparar razones y, por otra parte, utilizan a las fracciones como relaciones entre dos cantidades. El hecho de que la experiencia pudiera plantearse en ciertos momentos con material concreto (naranjas simuladas con fichas) constituyó una ayuda importante para que algunos alumnos comprendieran el funcionamiento de las razones y, para cuestionar algunas participaciones erróneas.

La experiencia en 1º de secundaria

Los alumnos trabajaron organizados en equipos de cuatro. Después de un tiempo asignado para resolver, la docente organizó las puestas en común.

Tarea 1: comparar pares de razones expresadas con dos números naturales.

Este tipo de tarea constó de varias comparaciones que no involucran fracciones. La primera fue:

> En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?

Enseguida se plantearon más casos: Pedro (4 de 6 tiros) vs Martín (3 de 7); Silvia (4 de 5) vs Vanesa (6 de 10). Se buscó facilitar la comparación de razones de varias maneras: el contexto pretende ser accesible; hay razones iguales a la mitad, una mayor que ½ y la otra menor (como 4 de 6 vs 3 de 7), o un término es el doble de su homólogo (como 4 de 5 vs 6 de 10). Fueron numerosos los alumnos que tomaron en consideración las razones, apoyándose en la posibilidad de usar la razón ½ como intermediaria o el 50%.

Edu [escribe]: José [es mejor], porque Juan tiro menos de la mitad y José tiro la mitad.

Lupita [escribe]: José, porque Juan tiró 7 veces y encestó 3 que es menos del 50%, en cambio, José tiró 4 y encesto 2 que es el 50%.

Byron [escribe]: Pedro encestó más de 50% y Martín menos de 50.

En la puesta en común, la profesora destacó el recurso al porcentaje, que, como en primaria, pusieron en juego algunos alumnos. Con la participación de Byron, quedó asentada una explicación de cómo se obtuvo el porcentaje de tiros que corresponde a los tiros encestados (figura 4).

Figura 4. Procedimiento escrito en el pizarrón durante la puesta en común para saber qué porcentaje es una cantidad de otra

Más allá de ½, no aparecieron las fracciones. Algunos alumnos se deslizaron, en algún momento, hacia el modelo aditivo, incluso cuando en algún ítem anterior habían logrado considerar la razón. Por ejemplo, para la comparación del desempeño de Pedro (4 de 6) contra el de Martín (3 de 7), Edu expresa lo siguiente.

> Pedro tuvo 4 por lo tanto le faltaban 2, por eso sacó mayor... y este... Martin sacó 3 y para 7 faltaban 4, tiene menos.

Tarea 2: ordenar razones, teniendo las fracciones que las representan a la vista

Este tipo de tarea se planteó a continuación de la anterior. El propósito fue que los alumnos usaran fracciones para expresar razones, junto con otras formas de expresión. Se entregó la ficha de la figura 5.

En la siguiente tabla, están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, las veces que encestó y la parte del total de tiros que encestó.

a. Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto		6	$\frac{1}{2}$
Mary	24		$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	
Valeria		14	$\frac{2}{3}$
Tatiana		16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$

b. Ubica a los jugadores, indicando quiénes son los mejores y quiénes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto

Figura 5. Ficha de trabajo de la actividad “comparar pares de razones”

Con el inciso *a* se pretendía que los alumnos entraran en relación con las fracciones, calculando uno de los tres valores: la fracción parte-todo, o la parte, o el todo, a partir de conocer dos de estos. Este ejercicio fue resuelto por un buen número de alumnos con pocas dificultades. Las dificultades aparecieron en el inciso *b*. Contra lo que supusimos, el hecho de tener a la vista las fracciones, aunado al conocimiento que demostraron tener sobre ellas, no los llevaron a considerarlas para ordenar a los jugadores del mejor al menos bueno. Ordenar a los jugadores en base a su desempeño causó en los equipos varias discusiones. Los alumnos oscilaron entre la comparación aditiva y la multiplicativa. A continuación mostramos algunos fragmentos expresivos.

Lo aditivo empieza imponiéndose. Las fracciones "tiros encestados/total de tiros" no aportan información. En varias parejas consideran las cantidades absolutas para comparar. Un ejemplo expresivo es la discusión entre Mauro y Aline sobre a quién corresponde el primer lugar —si a Valeria (14-21) o a Tatiana (16-24)— en la que se omite el hecho de que ambas jugadoras encestaron la misma fracción de sus tiros: 2/3.

Mauro: El mejor puesto sería Valeria. [Pausa] Solo le faltaron 7. Y a Tatiana le faltaron 8. [Escribe] Valeria primer puesto.

Axel: Aquí, primero es Tatiana [Indica el primer puesto, se fija en los tiros encestados]

Mauro: Sí, pero los que no encestó, le faltaron cuánto; le faltaron 8 [Indica en su hoja]

En cierto momento, Mauro y Axel optaron por igualar el número de tiros realizados por las dos jugadoras, para compararlas más fácilmente, pero lo hicieron aditivamente.

Mauro: [Enfático] Si este tuviera 24 [refiriéndose a los 21 tiros de Valeria], le sumamos 3. Entonces a Valeria le sumamos 3 de los que anotó, serían 17. Serían 17, para que estén parejo 24 y 24. Serían 17. ¡Y aquí sólo anotó 16! [refiriéndose a Tatiana]. ¡Y aquí serían 17! [sonríe. Axel queda dudando]

Durante la puesta en común, emergieron las contradicciones, lo cual es una virtud didáctica del caso examinado. Para algunos equipos, Tatiana fue mejor jugadora que Valeria porque encestó más tiros, para otros Valeria fue menor, porque falló en menos tiros, y para otros ambas deben estar en el primer puesto. La profesora no insistió en las contradicciones y optó por dar lugar a que se mostraran dos resoluciones correctas, probablemente por la presión del tiempo.

Llama la atención que las fracciones, explícitas y visibles en la tabla desde el principio, no aportaron, a la mayoría de los alumnos, información significativa para decidir quién jugó mejor. La idea misma de proporción parecía estar en ciernes.

Emerge tímidamente la consideración de una razón fraccionaria. Mauro y Aline, frente a los datos de Mary (24, 8), comentan:

Mauro: [refiriéndose a Mary] ¡Le faltaron dos tercios!

Aline: No, porque Mary tiró 24 veces. Es muchísimo. Y encestó... encestó 8. Perdió 16 tiros.

Mauro: Por eso, esa es peor, ¡Le faltaron dos tercios!

Así, los alumnos entretejen, en su interacción, argumentos aditivos y multiplicativos.

Comparación mediante el cálculo de porcentajes. Nuevamente, un equipo puso en juego los porcentajes. Para determinar qué porcentaje de una cantidad de tiros representa la cantidad de tiros encestados, probablemente los alumnos se apoyaron en las fracciones dadas: pasaron de una expresión de las razones con fracciones ("8 de 24" = 1/3) a una con porcentajes (1/3 = 33%), motivados por la facilidad para comparar estos últimos. Puede decirse entonces que estos alumnos sí utilizaron las fracciones.

La comparación de fracciones. Finalmente, un solo equipo ordenó las razones mediante la obtención de fracciones equivalentes con el mismo denominador (30). Es la resolución que se esperaba favorecer. Sin embargo, no es seguro que para todos fuera claro el motivo por el cual, el orden entre esas fracciones era a la vez el orden de los desempeños de los jugadores.

Tarea 3: ubicar razones entre fracciones en la recta numérica

El contexto del tercer tipo de tarea consiste en comparar el desempeño de escuelas en base al número de alumnos que aprueban un examen, considerando el total de alumnos (por ejemplo, en la escuela A de 300 alumnos, aprobaron 70). Después de un trabajo preliminar sin fracciones (incisos *a* y *b* de la tarea que se muestra abajo), se buscó que los alumnos analizaran el papel que pueden jugar las fracciones para expresar razones mediante la ubicación de estas últimas en una recta numérica, entre fracciones clave. Se entregó la ficha de la figura 6.

a) **Los totales de alumnos aprobados en cada escuela fueron:**

Escuela	Alumnos aprobados
A	70
B	28
C	28
D	12

¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados? Explica tu respuesta.

b) **Los totales de alumnos por escuela eran:**

Escuela	Alumnos aprobados	Total de alumnos
A	70	300
B	28	30
C	28	120
D	12	120

Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados?, ¿y los peores?

c) **En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas. No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.**

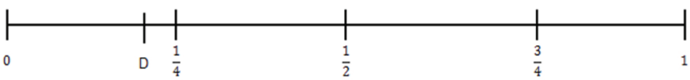

Figura 6. Ficha de trabajo de la actividad de ubicar razones entre fracciones

Centraremos la atención en el inciso c, ubicar a las escuelas en la recta numérica, entre los números 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y 1, según su desempeño. Varios alumnos lograron ubicar las escuelas viendo a cuántos alumnos corresponde $\frac{1}{4}$ de cada escuela, o $\frac{1}{2}$, tal y como lo sugiere la instrucción. Veamos cómo lo hace Axel.

[...]

Axel: Oigan, el C [28 de 120], es **menos de la cuarta parte** [Interrumpe]… Porque **la cuarta parte sería 30**.

[...] [Ubica C entre D y $\frac{1}{4}$]

Axel: [Continua su cálculo mental, ahora aplica ¼ a los 300 alumnos de la escuela A] 300 entre 2… 150… 75… Ah, no, sí, sí. [Escribe A entre C y ¼]

Finalmente, Axel ubica B entre ¾ y 1 a partir de una estimación de que 28 de 30 es casi todo (ver figura 7)

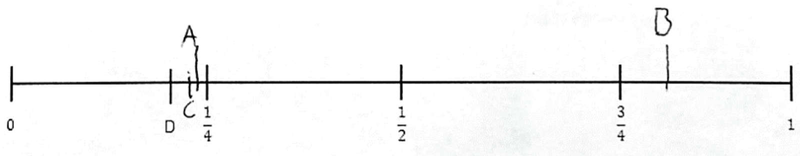

Figura 7. Puntos en la recta ubicados por Axel.

Varios alumnos hicieron algo similar, calcular un ¼, ½ y ¾ de las cantidades totales de alumnos. Este resultado contrastó con el escaso recurso a las fracciones en la tarea anterior (dadas las cantidades de tiros lanzados y encestados, así como las fracciones "tiros encestados/tiros lanzados", ordenar las razones), en la que disponer de las fracciones, por sí mismo, llevó a pocos alumnos a usarlas para comparar las razones en juego. ¿Qué hace la diferencia entre las dos situaciones? Una posible explicación radica en la información que se dio a los alumnos evocando una fracción en su papel de razón mediante la expresión familar "menos de la cuarta parte aprobó", con la cual se les encarriló a hacer lo mismo con los datos de la otras escuelas. En la tarea 1, las fracciones están presentes, pero están de alguna manera "mudas", no hay ninguna formulación que sugiera verlas como las razones que guarda la parte con el todo.

Tarea 4: comparar una razón expresada mediante una fracción con otras razones expresadas mediante dos números

Se plantéo el siguiente problema:

> Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

La mayoría de los alumnos pareció descartar de entrada la posiblidad de que la fracción 3/7 aportara información suficiente para compararla con las otras escuelas. Para desatorar la situación, la profesora les ofreció varias ayudas: anotó en el pizarrón los datos de todas las escuelas, y añadió la escuela E; luego los llevó a expresar todas las razones con fracciones (7/30; 28/30; etc.).

A pesar de ello, en un primer momento del trabajo en equipos la mayoría de los alumnos no prestó atención a las fracciones recien puestas en el pizarrón, seguían considerando que la escuela E no se podía comparar con las demás escuelas. Veamos ahora cómo se lograron aproximar tres equipos.

La potencia de la razón ½. En el equipo 3 convirtieron las fracciones a 30 avos. La profesora aprovechó la intervención de un alumno para cuestionar la idea de la imposiblidad, mediante comparaciones con la razón ½:

Andrés:	[...] convertimos la C y la D a treintavos
[...]	
Profesora:	Okey, y entonces aquí teníamos treintavos, treintavos, treintavos, treintavos... ¿y qué pasó aquí? ¿Cómo lo compararon? [Indicando la fila de la escuela E, con la fracción 3/7].
Andrés:	Porque...estuvo a punto de llegar a la mitad de...
Profesora:	Bien, eso es importante. Dicen ellos: casi hizo la mitad. ¿Alguno de los anteriores hizo menos de la mitad?
Aos:	Sí.
Profesora:	¿Quién hizo menos?
Alumnos:	La A, C y D.
Profesora:	Ellos hicieron menos [que ½; coloca una viñeta en el pizarrón]. Entonces, ¿quién es mejor?... en relación a la E... o la A, o la B... o la C o la D.
Alumnos:	La B.
Profesora:	Pero si yo les pregunto la A, la C, y la E, ¿quién es mejor?
Alumnos:	La E.
Profesora:	¿Por qué la E, Byron?
Byron:	Porque la E casi llega a la mitad, y en la C le falta mucho para...

El poder comparar a todas las razones contra ½ efectivamente ayudó a mostrar que la razón 3/7 sí era comparable con las otras. Comparar con otras escuelas el desempeño de una escuela de la que se desconoce la cantidad de alumnos aprobados y la cantidad total, pero se conoce la razón de aprobados, constituye, nos parece, un paso importante en la conceptualización de la noción.

Identifican un par de cantidades cuya razón es 3/7. Poco a poco más alumnos descubren un primer par de cantidades cuya razón es 3/7, a saber, 3 aprobados de 7.

Byron: Nosotros diremos que lo hicimos así: [escribe] "Eran 3... eran 7 alumnos y nomás 3 pasaron, faltaron 4. Y la B, tuvieron 28...

María: De 30.

Byron: De 30. Y nada más faltaron 2.

Una escuela con solamente 7 alumnos es algo poco común, y tampoco sería sensato compararla con, por ejemplo, una escuela con 700 alumnos, aun cuando la razón de aprobados fuera la misma. No obstante, este hecho fue dejado de lado. Frente a la negativa a considerar la posibilidad de comparar a la escuela E con las otras, el que encontraran un primer par de cantidades cuya razón es 3/7 representó un avance significativo.

Un par o infinitos pares. La siguiente intervención de Byron es importante, pues a la vez que deja ver que es posible encontrar varias parejas de datos cuya razón es 3/7, considera que algo está mal pues no se sabe cuál de ellas es la correcta, como si existiera una sola correcta.

Byron: ¡De cuántos alumnos eran!... pues pueden ser ¡30, los que pasaron de 70!... ¡300 de 700!...¡¡3000 de 7000!!... nunca sabremos la verdad... [pausa]

Esta observación encierra una cuestión esencial de la noción de razón: que expresa la relación que guardan infinidad de pares de números, –y no un solo par–, y que esa relación, –y no las cantidades–, es el objeto de la comparación. Lamentablemente esta observación no fue retomada.

El porcentaje. Una vez más, la noción de porcentaje surge como portadora accesible de la noción de razón. En esta ocasión, además, la posibilidad de obtener los porcentajes se erige en prueba de que la razón 3/7 es comparable con las demás:

Marian: [...] sí se puede comparar porque... [Interrumpe]. Porque... haga de cuenta, los que restan... puede... los podemos convertir en porcentaje del total y así podemos saber esteee..., cuán... ¿qué porcentaje fue más grande o qué porcentaje fue menor y el menor porcentaje fue...?

La comparación de fracciones. Un equipo explicó que comparó convirtiendo todas las fracciones al denominador común 210. Al expresar todas las razones con fracciones y compararlas entre sí y con 3/7, ¿están aceptando que la escuela E, cuya razón es 3/7 si es comparable con las otras aunque se desconozcan sus datos (número total de alumnos, número de aprobados)? No pudimos saberlo con certeza, no obstante, parece claro, que los alumnos se encaminaban hacia esa conclusión. Hizo falta al menos una experiencia más.

Comentarios sobre la experiencia en secundaria

En los cuatro tipos de tarea presentados, ciertas características de las situaciones favorecieron que cada vez más alumnos tomaran en consideración las razones expresadas con dos números naturales al hacer las comparaciones, estas fueron: contextos accesibles, razones susceptibles de compararse a simple vista, o mediante el intermediario de la mitad, o mediante porcentajes fáciles de obtener. Solamente algunos alumnos mostraron no haber superado, en el corto periodo de la experimentación, el centramiento en las cantidades absolutas, tiros encestados o no encestados, alumnos aprobados o no aprobados.

Desde el punto de vista del objetivo de hacer funcionar a las fracciones en el papel de razones, los tipos de tarea más productivos fueron: el tercero, ubicar razones en la recta, entre fracciones clave; y el cuarto, dada una razón expresada con una fracción, compararla con otras expresadas de manera clásica. En la tercera tarea, la comparación de una razón con la fracción ¼ ayudó a tender un puente entre ambos conceptos. La recta numérica jugó un papel como representación visual del orden. Probablemente la petición de ubicar las escuelas en la recta vehiculiza la idea de que las razones corresponden a puntos en la recta, y por lo tanto a números (Adjiage y Pluvinage, 2007). En la cuarta tarea fue difícil comprender que el rendimiento de escuelas de las que se conoce el total de alumnos y el total de aprobados se puede comparar con el de una escuela de la que solo se sabe que su razón de aprobados es 3/7, pero se pudo apreciar, en los intentos de resolución de los alumnos, que lograrlo constituyó un paso significativo en el proceso de comprender la noción de fracción jugando el papel de una razón. De nuevo, la fracción ½ jugó un papel como intermediaria clave. Quedó pendiente avanzar en la comprensión de un aspecto fundamental: 3/7 es la expresión de la razón de infinitos pares de cantidades (y no solamente de "3 de 7"), y todos ellos son equivalentes en cuanto al "desempeño de la escuela".

CONCLUSIONES

Hay un claro consenso entre investigadores del campo de educación matemática, Brousseau (1981), Freundenthal (1983), Vergnaud (1988), Lamon (2007), por citar solamente a algunos, en la existencia de una sinergia entre las nociones de razón y de fracción: la comprensión de una, favorece la de la otra. Sin embargo, en el currículo esta relación tiende muchas veces a reducirse a una defnción de la razón como fracción, perdiéndose con ello la posilibildad de dicha sinergia (Freudenthal, 1983; Bosch, 1995; Clark *et al.* 2003, entre otros). En el presente trabajo partimos de distinguir claramente los dos objetos y, nos interesamos por conocer el potencial de determinadas situaciones didácticas para propiciar la utilización de fracciones en el papel de razones, por alumnos con cierto conocimiento previo de las fracciones como partes de unidad expresando cantidades y medidas. El estudio aporta elementos que permiten sostener que las situaciones favorecen que los alumnos enfrenten los tres desafíos implicados en las tareas, a saber: 1) considerar la razón entre las cantidades y no las cantidades mismas, 2) desarrollar procedimientos para comparar razones y 3) utilizar fracciones como razones. Consideramos que este uso de las fracciones redunda en un conocimiento más amplio de las mismas: las fracciones no solamente permiten cuantificar cantidades de magnitud y medidas, también dan cuenta de *relaciones* entre cantidades.

Por otra parte, la experiencia permitió destacar características específicas de las situaciones que fueron relevantes, así como dificultades y limitaciones. A continuación precisamos estos resultados.

- *La dificultad no es solamente obtener la fracción, sino verla como razón.* En secundaria, disponer de las fracciones que corresponden a los pares de cantidades casos favorables/total de casos (tarea 2), no fue por sí solo suficiente para que los alumnos las utilizaran para comparar las razones. Incluso, el que a dos pares de cantidades les correspondiera la misma fracción, no llevó a algunos a considerar que las razones eran equivalentes. Este resultado da cuenta al mismo tiempo de la necesidad de un trabajo específico para que los alumnos atribuyan un significado de razones a las fracciones, aun en el caso, como el de este estudio, de razones entre una parte y un todo.
- *Papel estratégico de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ y de los porcentajes.* La comparación de una razón expresada con dos números, contra una razón

expresada con una fracción y, en particular contra ½ o ¼ fue un disparador efectivo de la comprensión de las fracciones como razones. Incluso algunos alumnos acuden espontáneamente a la fracción ½ para comparar otras razones no expresadas con fracciones. Probablemente este sea el caso también de fracciones usuales como 1/3, 2/3, 1/5 y 1/10. Por su parte, los porcentajes puestos en juego por algunos alumnos también contribuyeron a la conceptualización de las fracciones como razones. Es probable que un estudio articulado de razones, fracciones y porcentajes sea beneficioso para las tres nociones.

- *El papel de la recta numérica.* Ubicar a cada escuela en un intervalo de la recta numérica, entre determinadas fracciones, en función de su desempeño (razón de alumnos aprobados respecto del total), muy probablemente contribuyó a la conceptualización de las razones como fracciones.
- *Papel de la verificación*. Una segunda característica que también tuvo el efecto de facilitar el estudio en primaria fue la posibilidad de verificar empíricamente las conjeturas. Este es un pendiente en las situaciones de secundaria.
- *Limitaciones de los contextos*. En el análisis previo se anticipó que, en secundaria, podía haber un cuestionamiento a la legitimidad de las comparaciones, debido a que los totales de las las razones que se comparan son distintos. Hasta donde se pudo observar, dicho cuestionamiento no ocurrió, posiblemente gracias a que las diferencias entre las cantidades no fueron grandes. Sin embargo, es necesario explorar otros contextos que no presenten esta debilidad potencial. Por otra parte, ya se comentó la necesidad de considerar también, en cierto momento, relaciones “parte-parte” en las que tengan sentido fracciones mayores que la unidad.

Finalmente, cabe hacer una observación acerca de la relación ecológica (Artaud, 1997, citado en Wonziak, 2019) del estudio de las razones, con otros contenidos del currículo. En la primaria, el estudio de las razones forma parte del estudio de la proporcionalidad y da lugar a una segunda introducción de la noción de fracción, esta vez como razón. A lo largo de la secundaria, los alumnos seguirán estudiando razones, expresadas de modos diversos, por ejemplo, las nociones de probabilidad, de razón trigonométrica, de densidad, de velocidad, de interés bancario. El estudio de cada uno de estos contenidos ofrece una nueva oportunidad, no para “aplicar” lo aprendido sobre la noción de razón, sino para reconstruirla, en el nuevo contexto, como expresión de una nueva magnitud. Se esperaría que cada vez se pudiera ir más lejos en su conceptualización y en las distintas maneras de expresarla, con dos números, con un porcentaje, con una fracción o con un decimal.

Esperamos haber contribuido a la exploración de recursos didácticos que respondan a los planteamientos téoricos esbozados en la primera parte de este texto, sobre la importancia de vincular las nociones de razón y fracción en la enseñanza.

REFERENCIAS

Adjiage, R., y Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 149-175. https://doi.org/10.1007/s1049-066-9049-x

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Block, D. (2006a). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. En *Tesis de Doctorado DIE* (versión disco compacto). Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav.

Block, D. (2006b). Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática, 18*(2), 5-36. https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507002.pdf

Block, D. (2021). "Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación Matemática*, *33*(2), 115-146. https://doi.org/10.24844/em3302.05.

Bosch, M. (1995). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. [Tesis de doctorado no publicada]. Departent de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Univeristat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2(*1), 37-127. https://revue-rdm.com/1981/problemes-de-didactique-des/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*. La Pensée Sauvage, Éditions

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(1), 1-20. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Clark, M. R., Berenson, S. B., y Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00023-3

Davis, G. E. (2003). From parts and wholes to proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 213-2016. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00020-8

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Kluwer Academic Publishers.

Hernández, S. (1954). *Aritmética y Nociones de Geometría* (8ª ed.). Herrero Hnos. Sucs., S. A.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol 2, pp. 162-181). Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for Research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 629-668). Information Age Publishing y National Council of Teachers of Mathematics.

Parker, M., y Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-481. https://doi.org/10.2307/1170703

Pedersen, P. L., y Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 135-157. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253. https://doi.org/10.3102/00346543065004421

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages. Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363. https://doi.org/10.1007/bf00697744

Ramos, D. (2014). La fracción como vía de expresión de una razón y de un cociente. Análisis de una experiencia didáctica. [Tesis de maestría no publicada]. Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Ramos, D., y Block, D. (2016). "Por cada tres naranjas que recojas, te doy dos". Una propuesta didáctica para trabajar con razones y expresarlas con fracciones. *Revista para maestr@s de educación básica. Digital "Entre Maestr@s", 16*(57), 54-63.

Schadl, C., y Ufer, S. (2023). Beyond linearity: Using IRT-scaled level models to describe the relation between prior proportional reasoning skills and fraction learning outcomes. *Child Development, (vista temprana)*, 1–17. https://doi.org/10.1111/cdev.13954

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert, y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol 2, pp. 41-52). Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M. A., y Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41. https://www.jstor.org/stable/23391962

Sosa, J. (2018). *La probabilidad como lugar de encuentro de razones, fracciones y decimales. Un estudio didáctico en primer grado de nivel secundaria.* [Tesis de maestría no publicada], Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol 2, pp. 141-161). Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Wonziak, F. (2019). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *39*(1), 15-50.

Autor de correspondencia

David Block Sevilla

Dirección: Av. Tenorios 235, colonia Granjas Coapa
Alcaldía Tlalpan, CP 04330

Teléfono: (52) 55 54 83 28 00