

# Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines

Construction of arithmetic-algebraic generalization processes in a sociocultural approach skills-based approach in Quebec and Mexican schools

Fernando Hitt,<sup>1</sup> Samantha Quiroz,<sup>2</sup> Mireille Saboya,<sup>3</sup> José Luis Lupiáñez<sup>4</sup>

**Résumé:** Le monde de l'éducation a été marqué au début de ce siècle par l'implantation, notamment dans les écoles québécoises et mexicaines, de compétences et plus particulièrement en mathématiques. Dans cette nouvelle vision de l'enseignement et de l'apprentissage, la modélisation mathématique est omniprésente et liée à la pensée divergente. Notre projet porte sur le développement de cette pensée chez les élèves lors de la généralisation algébrique pour négocier le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans la transition primaire-secondaire. À travers de la proposition de conditions d'enseignement et d'apprentissage misant sur un travail collaboratif et l'utilisation de ressources technologiques, nous rapportons le développement chez les élèves québécois et mexicains de ce que nous avons nommé la pensée arithmético-algébrique sollicitée lors de la généralisation de suites figurées. Dans cette expérimentation, les élèves des deux pays, ont mobilisé une structure cognitive arithmético-algébrique qui s'est opérationnalisée à travers des procédures de prédiction, des conjectures, du processus de

---

**Fecha de recepción:** 19 de septiembre de 2022. **Fecha de aceptación:** 1 de noviembre de 2023.

<sup>1</sup> Université du Québec à Montréal, [hitt.fernando@uqam.ca](mailto:hitt.fernando@uqam.ca), [orcid.org/0000-0002-9106-8806](https://orcid.org/0000-0002-9106-8806).

<sup>2</sup> Universidad Autónoma de Coahuila, [samantha.quiroz@uadec.edu.mx](mailto:samantha.quiroz@uadec.edu.mx), [orcid.org/0000-0002-1332-8000](https://orcid.org/0000-0002-1332-8000).

<sup>3</sup> Université du Québec à Montréal, [saboya.mireille@uqam.ca](mailto:saboya.mireille@uqam.ca), [orcid.org/0000-0001-9728-5628](https://orcid.org/0000-0001-9728-5628).

<sup>4</sup> Universidad de Granada, [lupi@ugr.es](mailto:lupi@ugr.es), [orcid.org/0000-0003-3337-6517](https://orcid.org/0000-0003-3337-6517).

généralisation d'un point de vue algébrique non institutionnel et d'une validation numérique à l'aide d'applets mis à la disposition des élèves. En outre, les résultats du côté mexicain ouvrent la voie sur la considération des représentations fonctionnelles-spontanées dès l'école primaire dans une perspective de transition primaire-secondaire liée à la pensée arithmético-algébrique.

**Mots-clés:** *pensée arithmético-algébrique, généralisation, représentations spontanées-fonctionnelles, ACODESA*

**Abstract:** The world of education was marked at the beginning of this century by the notion of competence, particularly in Quebec and Mexican schools, and more particularly in mathematics. In this new vision of teaching and learning, mathematical modeling is ubiquitous and linked to divergent thinking. Our project focuses on the development of this thinking in pupils during algebraic generalization to negotiate the transition from arithmetic to algebra in the primary-secondary transition. Through the proposal of teaching and learning conditions based on collaborative work and the use of technological resources, we report the development in Quebec and Mexican pupils of what we have called the arithmetic-algebraic thinking solicited during the generalization of figurative sequences. In this experiment, the pupils of the two countries mobilized an arithmetic-algebraic cognitive structure which was operationalized through prediction procedures, conjectures, the process of generalization from a non-institutional algebraic point of view and from a numerical validation using applets made available to pupils. In addition, the results from the Mexican side open the way to the consideration of functional-spontaneous representations from primary school in a perspective of primary-secondary transition linked to arithmetic-algebraic thinking.

**Keywords:** *arithmetic-algebraic thinking, generalization, spontaneous-functional representations, ACODESA*

## INTRODUCTION

À la fin du XXe siècle, l'enseignement des mathématiques au Québec et au Mexique était centré sur une approche par résolution de problèmes. Au début du XXIe siècle, les ministères de l'Éducation, suivant les nouvelles tendances sur l'enseignement, ont envisagé un programme par compétences. Dans ce texte, nous intéressons, du côté du Québec, à la première compétence, *Résoudre une situation-problème*, ainsi nommée par le ministère de l'Éducation, du Sport et des Loisirs (MELS, 2007) et du côté du Mexique à la résolution de situations-problèmes enchainées tel que décrit dans le Plan d'études mis en place en 2011. La similarité de ces deux contextes nous a amenés à élaborer un projet conjoint Québec-Mexique qui sera détaillé dans les prochaines sections.

### 1. LES COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DANS LE PROGRAMME DE FORMATION DE L'ÉCOLE QUÉBÉCOISE

Au début du XXI<sup>e</sup> siècle, le ministère de l'Éducation au Québec suit les nouvelles tendances sur l'enseignement en Europe et envisage un programme par compétences (implanté en 2001 à l'école primaire et en 2004 à l'école secondaire). Trois compétences en mathématiques sont visées dont la première qui s'intitule *Résoudre une situation-problème*, celle-ci possède les caractéristiques suivantes:

**1<sup>re</sup> compétence:** Sens de la compétence Résoudre une situation-problème

Qu'est-ce qui caractérise une situation-problème? En mathématique, une situation-problème doit satisfaire à l'une ou l'autre des conditions suivantes a) a situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage; b) l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage; c) le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement. (MELS, 2007, p. 19)

La définition de situation-problème (SP à partir de maintenant) est révolutionnaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En effet, si les contenus mathématiques ne sont pas enseignés d'avance, cela veut dire que dans le processus de résolution de la SP, la mathématique émergera de façon naturelle dans l'action. Cet aspect est novateur par rapport à ce qui était fait

auparavant et mise sur l'émergence d'une créativité qui devrait se traduire dans les productions des élèves. La créativité est ainsi au cœur de l'activité mathématique espérée.

Dans le passé, des chercheurs se sont intéressés à la créativité de façon générale (Bear 1993; Guilford 1950, 1967) et certains s'y sont attardé plus particulièrement en mathématiques (Hadamard, 1945, 1975). Guilford souligne que la créativité est liée à une pensée divergente. Il propose un modèle sur l'acquisition des connaissances dans lequel la promotion d'une pensée divergente est suggérée avant la pensée convergente (Guilford, 1967). Razumniskova (2013) résume le travail de Guilford comme suit:

**La pensée divergente** est définie comme la production d'un assortiment diversifié de réponses appropriées à une question ouverte ou à une tâche dans laquelle le produit n'est pas complètement déterminé par l'information. Ainsi, la pensée divergente se concentre sur la génération d'un grand nombre de réponses alternatives, y compris des idées originales, inattendues ou inhabituelles. Ainsi, la pensée divergente est associée à la créativité.

**La pensée convergente** consiste à ne trouver que la seule bonne réponse, conventionnelle à un problème bien défini. (p. 1)

Nous pouvons noter un fort contraste entre la pensée divergente et la pensée convergente qui n'est pas explicité dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, 2006). En effet, celui-ci met l'accent sur les registres de représentation et la conversion entre représentations, constamment mentionnés en faisant référence au travail de Duval (1995). Ceux-ci sont reliés à une pensée convergente alors que la résolution de SP mise sur le recours à une pensée divergente tel que nous l'avons mentionné.

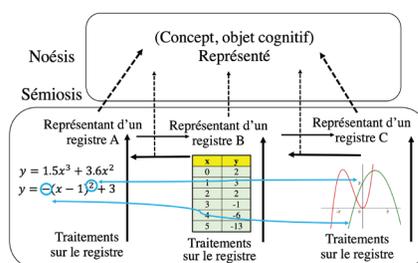
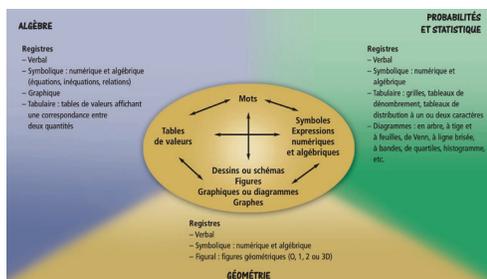


Figure 1. a) Proposition du PFEQ sur la conversion entre représentations; b) Interprétation de la notion de variable visuelle selon Duval (1998, 1993, 1995)

Ainsi, pour appréhender un concept mathématique, des tâches de conversion entre représentations sont proposées à l'élève à travers lesquelles ce dernier est amené à les articuler, ce qui relève d'un processus lié à une pensée convergente. Le registre est lié à une représentation officielle, un système de signes formels avec des opérations et des règles (Hitt et Quiroz, 2019). Lors de la résolution d'une SP, qui est une tâche complexe, la pensée divergente s'exprime essentiellement non pas par le recours à un registre mais par, ce que nous avons nommé, les représentations fonctionnelles-spontanées. Nous reviendrons sur ce point

## 2. LES COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DANS LE PROGRAMME DE L'ÉCOLE MEXICAINE

Le programme scolaire mexicain a subi plusieurs réformes ces dernières années. Dans notre texte, nous faisons spécifiquement référence au Plan d'études implanté en 2011. C'est ce plan qui était en vigueur au moment où l'expérimentation et la collecte des données à l'école primaire ont été réalisées (section 6).

Dans ce Plan, le ministère de l'Éducation publique propose comme axe principal des mathématiques, l'utilisation d'enchaînements de situations mathématiques qui éveillent l'intérêt des élèves et les invitent à réfléchir et à trouver différentes manières de résoudre des problèmes.

Dans sa mise en œuvre, le rôle de l'enseignante est axé sur la proposition et l'analyse de problèmes dument articulés. Lors de la résolution, les élèves tirent parti de leurs connaissances antérieures et progressent dans l'utilisation de techniques pour raisonner de plus en plus efficacement. Un élément important du modèle méthodologique du Plan d'études 2011 est le développement des

compétences mathématiques chez les élèves. Celles-ci s'expriment à travers (SEP, 2011): a) - Résoudre les problèmes de manière autonome; Communiquer des informations mathématiques; c) Valider les procédures et les résultats; d) Gérer efficacement les techniques.

Cette approche de l'école mexicaine est singulière, le fait que le Plan mentionne d'insister sur la *construction du processus d'études plus ou moins long, allant de l'informel au conventionnel*, va précisément à la rencontre des éléments théorico-pratiques (voir plus bas) soulignées par Hitt et Quiroz (2019) à propos des représentations spontanées des élèves, de la pensée divergente et convergente. Ces éléments théorico-pratiques ont été considérés dans l'élaboration des activités pour leur expérimentation tant au Québec qu'au Mexique (voir sections 5 et 6).

Dans ces contextes des écoles québécoise et mexicaine où la pensée divergente n'est pas clairement discutée, nous nous intéressons à *caractériser le développement chez les élèves de la compétence Résoudre une situation-problème (reliée à la pensée divergente) lors de la généralisation algébrique de suites figurées*. Pour mieux comprendre comment s'exprime cette pensée, nous avons mené une première expérimentation au secondaire autour de la situation des nombres triangulaires, celle-ci a pris place dans une classe au Québec et une autre classe au Mexique. Les résultats prometteurs obtenus ont mené à l'élaboration d'une séquence de SP qui s'est implémentée avec un groupe d'élèves du primaire du Mexique dans l'intention de favoriser la transition primaire-secondaire. La méthode ACODESA, qui s'inspire d'une approche socioculturelle de l'apprentissage, a été utilisée. Ces SP misent sur un travail collaboratif et sur l'utilisation de ressources technologiques et visent une articulation entre l'arithmétique et l'algèbre pour favoriser le développement de ce que nous avons nommé la pensée arithmético-algébrique et l'expression de représentations fonctionnelles-spontanées.

### 3. PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÈBRIQUE ET GÉNÉRALISATION ALGÈBRIQUE

Notre projet s'ancre autour de la question de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre à travers les situations de généralisation algébrique. Nous nous intéressons aux conditions qui favorisent le développement d'une pensée arithmético-algébrique et à caractériser cette pensée.

### 3.1 ARTICULATION ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE: LA PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÈBRIQUE

L'intérêt de s'attarder à la pensée arithmético-algébrique n'est pas nouveau. Chevallard (1980, 1989) argumente l'importance de la dialectique qui doit exister entre l'arithmétique et l'algèbre. Dans son article de 1989, il discute de l'équivalence de deux expressions algébriques avec un élève imaginaire. Pour vérifier l'exactitude de cette équivalence, il propose d'exercer un contrôle en procédant à des substitutions numériques qui pourraient montrer à l'élève l'inexactitude d'une procédure (si c'était le cas). Dans cette ligne de pensée, Lee et Wheeler (1989) soulignent ce qui suit en ce qui a trait au lien entre l'arithmétique et l'algèbre:

Our investigations into the algebraic thinking of high school students show that the connection between the algebra and arithmetic in their minds is not always as direct and transparent as the quoted precept might suggest. (p. 41)

Un exemple d'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre est celui proposé par Lee (1996) et Lee et Wheeler (1989). Il repose sur le fait de reconnaître un nombre impair dans l'écriture  $2x+1$  (où  $x$  est un nombre entier), par un regard sur les nombres donc en arithmétique. Il est alors aisé de prouver que la somme d'un nombre  $x$  et de son successeur  $x+1$  est un nombre impair puisque  $x+x+1 = 2x+1$ .

Ces réflexions nous ont amenés à entrevoir la possibilité de concevoir un enseignement où l'arithmétique joue un rôle central comme moyen de contrôle des processus algébriques, ce qui nous a conduits à envisager le développement d'une pensée arithmético-algébrique.

**Définition de Pensée arithmético-algébrique.** Nous appelons l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre la pensée arithmético-algébrique, dont sa fonction est de fournir à l'élève un élément de contrôle sur ses processus algébriques et vice-versa sur ses processus arithmétiques. Cette pensée a un double rôle qui est ancré à l'intérieur de l'individu et se manifeste dans les actions d'anticipation, de prédiction, de conjecture, généralisation et validation.

Cette définition se rapproche des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation de Rabardel (1995) et de Cole (1996) sous l'angle de l'instrument médiateur. Notre projet a pris forme autour du développement de la pensée arithmético-algébrique lors de la transition primaire-secondaire et plus précisément dans la généralisation algébrique puisque comme le précise Radford (2014, p. 2): «Il y a quelque chose de profondément algébrique dans l'arithmétique et

quelque chose de profondément arithmétique dans l'algèbre, et les activités de généralisation rapprochent ces deux domaines».

### 3.2 LA GÉNÉRALISATION ALGÈBRIQUE

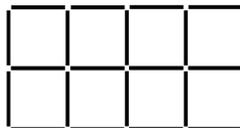
Mason (1996) souligne que la généralisation est au cœur des mathématiques:

Generalization is the life-blood, the heart of mathematics...(…) Gattegno (1990) coined the assertion: «Something is mathematical, only if it is shot through with infinity» I take this to mean that to be fully mathematical, there has to be a generality present.. He suggested that algebra as a disciplined form of thought emerged when people became aware of the fact that they could operate on objects (numbers, shapes, expressions), and could operate on those operations. (p. 74)

Il considère trois étapes au développement cognitif en spirale: la manipulation; donner du sens [prendre connaissance de l'activité] et articuler, la manipulation étant liée à la généralisation: «Manipulation (whether of physical, mental, or symbolic objects) provides the basis for getting a sense of patterns, relationships, generalities, and so on...» (p. 81). L'accent mis par Mason sur l'importance de ces trois étapes, telles que nous les comprenons dans notre contexte, est qu'il considère que la manipulation ouvre un chemin vers l'appropriation de la tâche pour la comprendre, et cela, avec les actions pour la résoudre, permettra la construction des savoirs et leurs articulations, renforçant les processus de généralisation.

Ce chercheur propose une des tâches qu'il soumet aux futurs enseignants (p. 80) et dont la résolution implique l'utilisation du numérique comme élément de contrôle sur l'algébrique (voir Figure 2), soulignant ainsi la portée d'un travail sur des motifs figurés.

The picture below shows a rectangle made up of two rows of four columns and of squares outlined by matches. How many matches would be needed to make a rectangle with R rows and C columns?



**Figure 2.** Problème proposé par Mason (1996, p. 80) dans son cours de formation des enseignantes

Les travaux de Radford (2010, 2011) s'appuient également sur la généralisation algébrique supportée par des suites figurées. Il s'attarde à analyser ce qui est produit par des élèves à l'école primaire et il pose la question de savoir où finit l'arithmétique et où commence l'algèbre (Radford 2011):

...the idea of introducing algebra in the early years remains clouded by the lack of clear distinctions between what is arithmetic and what is algebraic. To make such distinctions would require making explicit our own assumptions about the nature of arithmetic and algebraic thinking and their interrelationships. And, of course, this is not an easy matter, neither for research nor for practice. (p. 304)

Ceci l'amène à considérer la pensée algébrique comme une forme particulière de réflexion mathématique qui est caractérisée par trois éléments qui sont interconnectés (Radford, 2011):

- Indétermination: présence de nombre non connu tel que les inconnues, les variables ou les paramètres.
- Dénotation: les indéterminés peuvent être dénotés de différentes façons, par des signes alphanumériques ou par le langage naturel, les gestes, des signes non conventionnels.
- Analyticité: les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. (p. 218)

Il ne considère pas exclusivement les notations institutionnelles, il souligne l'importance de raisonner avec des quantités indéterminées comme si elles étaient connues, s'attardant aux formes non symboliques. Radford (2017) indique à cet effet:

The theoretical perspective on algebraic thinking that I present here might be of particular interest to early algebra research. Indeed, the criterion about analyticity- i.e., the specific *analytic* calculation with/on unknown quantities-offers an operational principle to distinguish arithmetic and algebraic thinking. The theoretical perspective recognizes the importance of the alphanumeric semiotic system, but does not confine algebraic thinking to it. It opens the door to the investigation of non-symbolic (i.e., non-alphanumeric) forms of early algebraic thinking. (p. 9)

La généralisation de suites figurées apparaît ainsi comme un terreau fertile pour l'émergence d'une pensée arithmético-algébrique. En effet, Bronner (2019) qui s'est intéressé à l'entrée de «l'algèbre avant la lettre» s'appuie sur une situation de généralisation avec un motif figuré. Il constate que les productions des élèves attestent d'une articulation numérique-algébrique.

Misant sur ces résultats, nous nous intéressons aux conditions d'enseignement qui peuvent favoriser le développement d'une pensée arithmético-algébrique lors de la résolution de SP de généralisation appuyée par des suites figurées (tant à l'école primaire comme à l'école secondaire). Notre proposition s'appuie sur un travail collaboratif en suivant la méthode ACODESA et cherche à mieux comprendre comment se développe la pensée arithmético-algébrique à travers la prise en compte des représentations fonctionnelles-spontanées.

#### 4. NOUVELLE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Comme mentionné, la créativité promue à la fois par le ministère de l'Éducation du Québec et du Mexique, est liée à la pensée divergente. Celle-ci peut émerger lors de la résolution de SP à travers le recours par les élèves à des représentations non institutionnelles, les représentations fonctionnelles-spontanées<sup>5</sup> (RF-S). Celles-ci sont définies comme suit (Hitt et Quiroz, 2019):

**Définition de représentation fonctionnelle-spontanée.** Une RF-S est une représentation qui émerge chez les individus dans la pratique, face à une activité non routinière: les actions liées à l'interaction avec la situation ont des caractéristiques fonctionnelles (mentales, orales, kinesthésiques, schématiques) et sont liées à une représentation spontanée (externe). La représentation est fonctionnelle dans le sens où l'élève a besoin de donner un sens à la situation et qu'elle est spontanée, car elle s'exprime naturellement dans l'action quand on essaye de comprendre et de résoudre la situation non routinière. (p. 79)

Se pose la question de savoir comment organiser l'enseignement pour favoriser le développement de compétences chez les élèves. Dans notre contexte, avec

---

<sup>5</sup> Des exemples de représentations fonctionnelles-spontanées et de représentations institutionnelles seront donnés aux sections 5 et 6.

une approche par compétences, l'organisation de l'enseignement devrait suivre l'ordre suivant:

1. Proposition d'une SP. Celle-ci requiert la mobilisation d'une pensée divergente et de la créativité. Les RF-S émergeront lors du traitement de la SP.
2. Proposition de problèmes et donc mise en place d'une pensée convergente.
3. Proposition d'exercices qui vont permettre de renforcer la compétence en développement
4. Proposition d'une situation d'apprentissage et d'évaluation (SAÉ) dont le but est d'évaluer la compétence en s'appuyant sur une tâche complexe.

En accord avec l'émergence de la créativité, la construction du signe d'un point de vue d'une construction sociale est importante: «[...] la construction du signe est totalement une question déterminée par la communication. Après tout, l'existence du signe n'est que la matérialisation de cette communication» (Voloshinov, 1973, p. 13). Donc, dans un travail en collaboration dans la classe de mathématiques où l'action est importante d'un point de vue de la théorie de l'activité (Leontyev 1978), l'organisation dans l'exécution des tâches entre les membres d'une équipe est fondamentale et peut inclure l'utilisation des instruments technologiques (Engeström, 1999). Avec cette approche, nous rejoignons Radford (1998) quand il regarde la classe de mathématique comme un système sémiotique culturel:

...signs do not lie randomly in the cultural space of the individuals. Given that culture is not homogeneous, signs are not equally distributed nor used in an indifferent manner. Rather, signs are culturally patterned and socially distributed [...]. They are embodied by what we want to call different cultural semiotic systems... (p. 11)

Précisément, sous cette ligne de pensée, si on réfléchit à la résolution des SP dans un milieu d'apprentissage socioculturel, les travaux de Bourdieu (1980) traitant de la construction sociale des représentations sont intéressants. La notion d'*habitus* est particulièrement porteuse, il s'agit de construire une structure cognitive qui va permettre d'organiser et de produire de nouvelles idées quand on doit faire face à une nouvelle situation:

Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire

en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement « réglées » et « régulières » sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre. (pp. 88-89)

En nous basant sur ces travaux, de notre point de vue, cinq étapes peuvent être pensées pour organiser la classe de mathématiques, dont les trois premières sont: 1) un travail individuel suivi 2) d'un travail collaboratif en équipes et 3) d'une discussion en grand groupe. La deuxième et troisième étape prend en considération les travaux de Legrand (2001) autour de la notion de « débat scientifique ». Dans l'approche de Legrand, le rôle de l'enseignante est fondamental. De plus, le constat de Thompson (2002) sur le fait que le consensus dans la classe est éphémère nous a amenés à considérer, suite à la discussion en grand groupe, 4) un travail individuel de reconstruction de ce qui a été produit en équipe et en grand groupe que nous avons nommée étape d'auto-réflexion. Finalement, 5) un processus d'institutionnalisation des connaissances. Dans cette 5<sup>e</sup> étape, le rôle de l'enseignante est central, il/elle est un guide dans les trois premières étapes (voir Figure 3). En suivant cette avenue, nous avons mené différentes expérimentations dans la classe (Hitt et González-Martín, 2015; Hitt, Saboya et Cortés, 2016, 2017; Hitt et Quiroz, 2019) dans le but de préciser une méthode d'enseignement de travail collaboratif que nous avons appelée ACODESA (**A**pprentissage **C**ollaboratif, **D**ébat **S**cientifique, **A**utoréflexion, voir Figure 3).

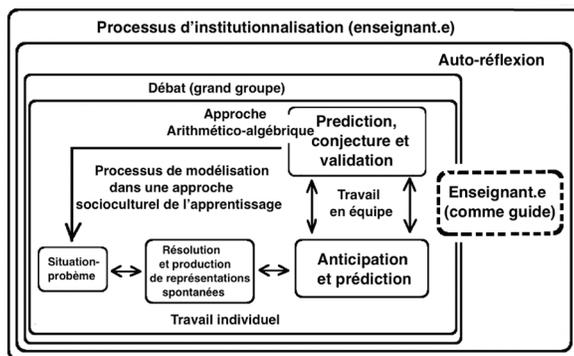


Figure 3. Les cinq étapes de la méthode ACODESA dans la classe de mathématiques

Hitt et Quiroz (2019) déclinent les différentes étapes comme suit:

**Première étape: le travail individuel.** L'objectif de cette étape est la promotion d'un dialogue intérieur dans le sens de Vygotsky (1932,1962). C'est une étape dans laquelle l'élève se prépare pour le travail en équipe. La production issue de ce travail est liée à la pensée divergente et à la créativité, les premières RF-S dans l'action vont ici émerger (Leontyev, 1978).

**Deuxième étape: le travail en équipe.** La communication et la confrontation d'idées sont essentielles dans cette étape. Les RF-S vont subir des changements et de nouvelles idées vont émerger dans l'action (Leontyev, 1978). Dans un processus d'objectivation, la communication va promouvoir la validation d'idées et de procédures (Radford 1998, 2003).

**Troisième étape: la discussion en grand groupe.** Le rôle de l'enseignante est crucial dans cette étape. Il/Elle devrait créer un climat favorable au débat scientifique dans le sens de Legrand (2001). Le processus d'objectivation se poursuit à cette étape.

**Quatrième étape: l'autoréflexion (retour au travail individuel).** La reconstruction de ce qui a été fait en classe dans un nouveau document est requise puisque comme le souligne Thompson (2002), le consensus est éphémère dans la classe de mathématiques. L'enseignante ramasse les productions des élèves produites dans ces quatre étapes et propose un travail individuel de reconstruction qui devrait prendre en considération ce qui a été discuté en classe.

**Cinquième étape: processus d'institutionnalisation des connaissances.** L'enseignante discute de la pertinence des représentations et des idées des élèves, avant d'introduire les représentations institutionnelles et le nouveau contenu mathématique. (pp. 82-83)

Sous ce point de vue, les SP doivent être élaborées comme une séquence de tâches enchainées qui vont permettre le passage d'une étape à l'autre (voir Figure 4).

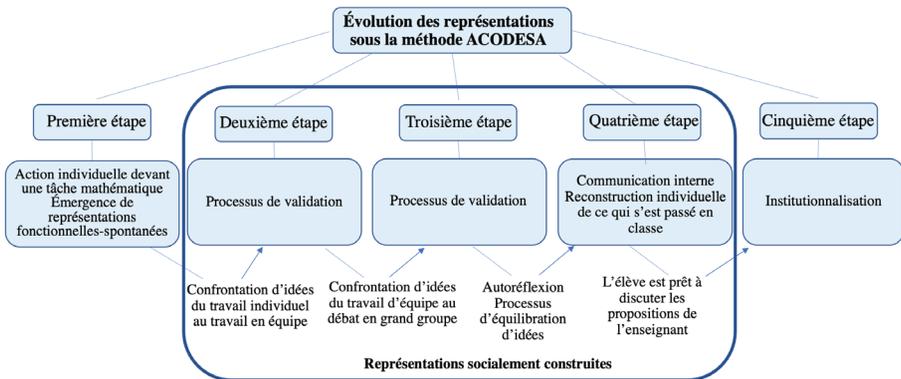


Figure 4. Étapes d'ACODESA et attentes (Hitt et Quiroz, 2019, p. 83)

C'est dans cette perspective de la théorie de l'activité que Hitt et Quiroz (2019) ont proposé la définition de «représentation fonctionnelle-spontanée (RF-S)» telle que proposée plus haut. On assiste ainsi avec ACODESA à la prise en compte et à l'évolution des RF-S vers les représentations socialement construites et finalement à l'*habitus* (Bourdieu, 1980). La communication en classe est essentielle pour l'émergence de RF-S (Hitt et Quiroz, 2019) lors de la résolution de situations non routinières comme des SP.

**Représentation socialement construite (RSC).** Dans un processus d'apprentissage en collaboration, face à une activité non routinière qui passe par le travail individuel, le travail en équipe, la discussion en grand groupe et un processus d'autoréflexion, les RF-S initiales se transforment et donnent lieu, à la fin des quatre premières étapes, à une représentation interne-externe que nous nommerons «représentation socialement construite». (p. 83)

Ainsi, notre recherche s'attarde à la généralisation de motifs figurés lors du passage du primaire au secondaire à travers le développement d'une pensée arithmético-algébrique. Cette pensée est en cohérence avec les auteurs qui considèrent que la relation dialectique entre arithmétique *et* algèbre est importante (Bronner, 2019; Chevallard, 1980, 1989; Lee, 1996; Lee et Wheeler, 1989; Mason, 1989, 1996; Radford, 2014). Dans les expérimentations que nous avons menées, nous avons cherché à étudier l'émergence et l'évolution des RF-S. Dans la prochaine section, nous rapportons les résultats obtenus avec la classe du Québec. Notre recherche s'inscrit dans un paradigme phénoménologique où une méthodologie qualitative a été utilisée. Le type d'étude était de cas multiples, les données ont été recueillies et ensuite analysées.

## 5. ÉTUDE MENÉE AU SECONDAIRE AU QUÉBEC

### 5.1 DESCRIPTION DE L'ÉTUDE

L'étude a été menée à la première année du 1<sup>er</sup> cycle (âge 12-13 ans) dans une école intéressée à l'utilisation de la technologie, douze élèves ont participé.

Un ordinateur était mis à la disposition de chaque équipe composée de 3 à 4 élèves. Dans cette école, le manuel scolaire choisi était Panoram@th (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005). Dans ce manuel, les auteurs présentent des nombres polygonaux dont les nombres triangulaires, carrés et pentagonaux. Ce numéro est plutôt un exercice de routine qui ne requiert pas de processus de généralisation, l'élève doit réfléchir à partir de représentations algébriques institutionnelles qui sont données (Figure 5).

**Algorithmes; Exercices et les nb polygonaux (Panoramath, 1A, V. 2)**

**Nombres triangulaires**

1 3 6 10

**Nombres carrés**

1 4 9 16

**Nombres pentagonaux**

1 5 12 22

a. Dans chacune de ces suites, dessine le nombre polygonal suivant.  
 b. Dessine les trois premiers termes de la suite des nombres hexagonaux.  
 c. Voici trois expressions dans lesquelles  $n$  représente le rang du terme dans une suite. Associe chaque expression à l'une des trois suites illustrées ci-dessus.  
**1)  $n^2$ ; 2)  $(3 \times n - 1) \times n \div 2$ ; 3)  $n \times (n + 1) \div 2$**   
 d. Détermine le terme :  
 1) 15 dans la suite des triangulaires;  
 2) 21 dans la suite des nombres carrés;  
 3) 8 dans la suite des pentagonaux.

Figure 5. Les nombres polygonaux présentés dans le Manuel Panoramath (2007, p. 135)

Dans le c), on peut remarquer que les élèves sont invités à substituer des valeurs dans des expressions algébriques données et ainsi en déduire l'expression qui convient parmi celles données et qui correspondent aux nombres triangulaires, carrés et pentagonaux.

Prenant en considération ce constat, nous avons modifié cette situation en une SP. Elle a été conçue pour favoriser une construction en spirale des connaissances (Mason, 1996). Les activités qui la composent et la description de chacune d'entre elles sont présentées ci-dessous (Tableau 1).

**Tableau 1.** Situation problème utilisée dans l'expérimentation au Québec

Page	Présentation de l'activité	Description										
1	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>Page 1</b></p> <p>Nom de l'élève : _____</p> <p>Noms des membres de l'équipe : _____</p> <p>Groupe : _____</p> <p>Date : _____</p> <p><b>Directives :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à encre noire ou bleue.</li> <li>• Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à encre rouge.</li> <li>• Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à encre verte.</li> </ul>  </div>	<p>Des informations générales sur l'élève et son équipe ont été demandées. Il leur a été demandé d'écrire dans une couleur différente selon le travail: individuel, en équipe ou en grand groupe (cela a permis d'analyser ultérieurement l'évolution des RF-E).</p>										
2	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20%;"></td> <td style="width: 20%;"></td> <td style="width: 20%;">?</td> <td style="width: 20%;">?</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td><b>Triangulaire 1</b></td> <td><b>Triangulaire 2</b></td> <td><b>Triangulaire ?</b></td> <td><b>Triangulaire ?</b></td> <td><b>Triangulaire 5</b></td> </tr> </table> <p>1) Observe bien ces nombres. Quel est le troisième nombre triangulaire? Représente-le. Explique la façon dont tu as procédé.</p> <p>2) Peux-tu imaginer le 4<sup>e</sup> nombre triangulaire sans faire un dessin?</p>			?	?		<b>Triangulaire 1</b>	<b>Triangulaire 2</b>	<b>Triangulaire ?</b>	<b>Triangulaire ?</b>	<b>Triangulaire 5</b>	<p>Dans la 2<sup>e</sup> page, après un paragraphe expliquant la production des Grecs sur les nombres polygonaux, les deux premières questions sont présentées afin que l'élève se familiarise avec le contenu. Les processus mathématiques de visualisation, d'anticipation et de prédiction sont encouragés.</p>
		?	?									
<b>Triangulaire 1</b>	<b>Triangulaire 2</b>	<b>Triangulaire ?</b>	<b>Triangulaire ?</b>	<b>Triangulaire 5</b>								
3	<p>3) D'après toi comment sont construits ces nombres triangulaires? Qu'observes-tu?</p> <p>4) Quel est le 11<sup>ième</sup> nombre triangulaire? Explique comment tu fais pour le trouver.</p> <p>5) Tu dois écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83. Décris ce que tu lui écrirais. TU N'AS PAS À FAIRE LES CALCULS!</p> <p>6) Et pour calculer n'importe quel nombre triangulaire, comment ferait-on (on veut encore ici un message COURT).</p>	<p>À la page 3, les questions liées visent à favoriser une généralisation progressive. Une construction en spirale au sens de Mason ou celle d'une mathématique verticale au sens de Freudenthal (1991). Les auteurs s'attendaient à ce que certains élèves dessinent la figure correspondant à 11e triangulaire, et que d'autres entament un processus de généralisation d'une nature différente: visuelle, numérique, itérative.</p>										
4 y 5	<p>7) Que fais-tu pour trouver le 6<sup>ième</sup>, 7<sup>ième</sup> et 8<sup>ième</sup> nombres triangulaires? Est-il possible de calculer: <i>le nombre triangulaire 30: _____ ; le nombre triangulaire 83: _____ ; le nombre triangulaire 120: _____</i></p> <p><i>Comment as-tu procédé?</i></p> <p>8) Quelles sont les limitations et les possibilités de cette façon de procéder?</p> <p>9) Donne les opérations à faire pour calculer n'importe quel nombre triangulaire.</p>	<p>Les pages 4 et 5 étaient un retour aux nombres triangulaires dans un environnement Excel et de généralisation itérative. A ce stade, la généralisation liée à l'itération était attendue (questions 8 et 9).</p>										

<p>6 y 7</p>	<p>10) Démarche (opérations, dessins...)  <i>Écris la règle ou formule que tu as trouvée:</i>                  11) Triangulaire 10: _____ ; Triangulaire 20: _____  <i>Avec ta formule, peux-tu calculer le nombre triangulaire 120? Triangulaire 120 =</i></p>	<p>Dans les questions 10 et 11 des pages 6 et 7, on espérait favoriser la généralisation en renforçant la pensée arithmético-algébrique. Ce qui précède est lié à la conjecture et à la validation numérique à l'aide d'un applet qui ne fournit que la réponse numérique. La présentation des nombres triangulaires est maintenant similaire à celle des manuels. Dans ces deux pages, la relation explicite entre l'arithmétique et l'algèbre était attendue. Nous pensons que les processus de visualisation mathématique seraient plus solides en favorisant une structure de contrôle et de recherche au sens de Perkins et Simonns (1988); et par l'approche socioculturelle, un habitus au sens de Bourdieu (1980).</p>
--------------	---	--

Voici les principales caractéristiques de cette SP:

- Elle est organisée avec une série de tâches enchainées.
- Au début, nous avons prévu une activité pour rappeler aux élèves l'utilisation d'Excel (30 minutes) puis nous les avons plongés dans la résolution de la SP après une brève présentation de l'origine des nombres triangulaires.
- Les quatre premiers nombres triangulaires étaient présentés sous forme de triangles rectangles isocèles au lieu de triangles équilatéraux (comme c'est le cas pour le manuel Panoramath) pour ouvrir au recours à la formule de l'aire d'un triangle,<sup>6</sup> et promouvoir un conflit cognitif.
- Le passage vers la symbolisation (non nécessairement avec une représentation institutionnelle) va être motivé par la nécessité de produire un texte donc un message court.
- Nous nous inspirons ici des situations de généralisation développées par Landry (2001) et Bednarz (2005). La représentation officielle pour les nombres triangulaires est régulièrement exprimée par  $n(n+1)/2$ ,  $n$ , étant un nombre naturel différent de 0.

<sup>6</sup> Dans l'expérimentation au 3e secondaire menée au Mexique (voir Hitt, Saboya et Cortés, 2016), les élèves sont passés par la formule de l'aire du triangle et se sont aperçu d'une contradiction.

Nous nous restreignons dans cette section sur deux élèves pour illustrer les résultats que nous avons obtenus.<sup>7</sup>

Un de ces deux élèves est le leader dans son équipe, et l'autre élève, une fille plutôt timide qui laisse parler les autres membres de son équipe (qui sont tous des garçons). Notre analyse s'attarde à retracer l'évolution des RF-S produites par les élèves qui sont reliées au développement d'une pensée arithmético-algébrique.

## 5.2 RÉSULTATS: DIFFÉRENTES GÉNÉRALISATIONS RESSORTIES

Selon la méthode d'enseignement ACODESA, dans la première étape, les élèves travaillent individuellement, ce qui leur permet d'être outillés lors de la discussion en équipe (2<sup>e</sup> étape). Lors de cette 2<sup>e</sup> étape, les différentes équipes ont présenté au tableau ce qu'ils ont produit (Figure 6). Ainsi pour le onzième nombre triangulaire, des RF-S sont ressorties. Dans la discussion en grand groupe, un des élèves a changé en cours de route l'approche de son équipe pour aller vers un processus itératif (voir la troisième production de la Figure 6).

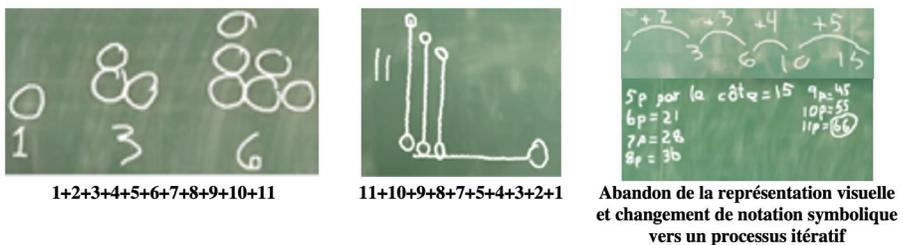


Figure 6. Trois types de propositions pour le nombre triangulaire 11 présentées au tableau

Ainsi, le travail en équipe a donné lieu à des RF-S (externes) qui illustrent quatre approches sur la généralisation:

1. Généralisation arithmético-visuelle géométrique locale. La présentation géométrique va suivre la même forme que celle présentée dans le document et va promouvoir la représentation arithmétique pour  $T_{11}$ :  $1+2+\dots+11$  (Figure 6, première production). Deux équipes ont procédé ainsi: pour trouver le triangulaire 11, il est nécessaire de construire les nombres triangulaires

<sup>7</sup> Le lecteur peut se référer aux articles publiés pour avoir une vue plus large des résultats obtenus (Hitt, Saboya et Cortés, 2016; Hitt et González-Martín, 2015; Hitt, Saboya et Cortés, 2016, 2017).

précédents. Nous avons pu observer qu'un des membres d'une des deux équipes avait débuté une itération pour le calcul des nombres triangulaires lors du travail individuel (Figure 7), mais pendant le travail en équipe, cette stratégie a été abandonnée.

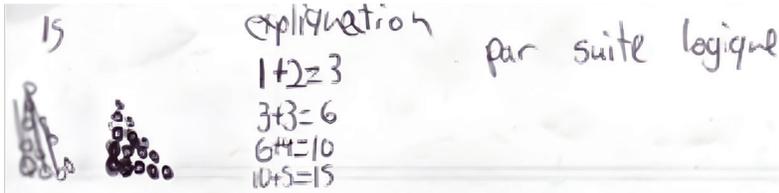


Figure 7. Stratégie individuelle qui a été abandonnée pendant le travail en équipe.

2. Généralisation arithmético-visuelle-géométrique mentale. Une transformation mentale a été faite de la représentation présentée dans le document, et va donner une nouvelle représentation arithmétique pour  $T_{11}$ :  $11+10+\dots+1$  (voir Figure 6, case du centre). Les élèves voient le nombre triangulaire à la verticale en partant par la gauche, le nombre de points sur la première colonne correspond à la position ou au rang du nombre triangulaire et il y a un point de moins par colonne jusqu'à arriver à 1. Il y a déjà là un processus mental analytique dans le sens de Radford (2011, 2017). Les élèves arrivent à concevoir n'importe quel nombre triangulaire cherché avec une seule représentation visuelle du nombre triangulaire et non en ayant besoin de construire les nombres triangulaires précédents comme pour les deux premières équipes.
3. Généralisation diagrammatico-itérative. Les relations en jeu entre les différents nombres triangulaires sont présentées par des flèches: un bond de 2 entre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>e</sup> nombre triangulaire, un bond de 3 entre le 2<sup>e</sup> et le 3<sup>e</sup>, un bond de 4 entre le 3<sup>e</sup> et le 4<sup>e</sup> et un bond de 5 entre le 4<sup>e</sup> et le 5<sup>e</sup>. Donc la valeur du bond est un de plus que le bond précédent quand on considère les nombres ordonnés. Une procédure itérative pour le calcul des nombres triangulaires prend place (Figure 6, troisième production, en haut).
4. Généralisation itérative. En prenant en compte la configuration diagrammatico-itérative précédente, mais en abandonnant la représentation visuelle, une procédure itérative est proposée pour calculer  $T_{11}$ . Ici on passe à une notation symbolique exprimée par  $p$  pour «points» et par le signe d'égalité

(Figure 6, troisième production, en bas).

À titre d'exemple, présentons l'intervention de l'enseignante qui reprend en grand groupe la généralisation arithmético-visuelle géométrique locale qui est celle qui est la plus ressortie dans la classe et qui amène les élèves à passer à la symbolisation. Ainsi, l'enseignante repart de l'écriture  $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11$  pour trouver le 11<sup>e</sup> nombre triangulaire. Pour trouver le nombre triangulaire 83, il faudrait ajouter les nombres consécutifs de 1 jusqu'à 83. L'enseignante demande comment on pourrait représenter le dernier nombre de la somme après les trois points:  $1+2+3+\dots+?$ , pour que cette égalité s'applique à n'importe quel nombre. Voici les échanges qui ont eu lieu dans la classe suite à cette question (Figure 8).

**Enseignante (Ens):** *Comment je vais l'écrire mon nombre que je ne connais pas?*

**Élève 2 (É2):** *Point d'interrogation «?»*

**Ens:** *Point d'interrogation «?» Vous êtes tous d'accord avec ça?*

**É2:** *Plus x.*

**É3:** *Oui, plus x.*

**Ens:** *x? Est-ce que je peux mettre autre chose? Oui? [Pointe un élève]*

**É4:** *Ben, n'importe quelle lettre.*

**Ens:** *N'importe quelle lettre, oui, y? Un cœur? Est-ce qu'on peut mettre un cœur?*

**É5:** *On peut mettre n'importe quoi, qui n'est pas un chiffre.*



**Figure 8.** Un extrait des échanges entre l'enseignante et les élèves lors du retour en grand groupe

Nous pouvons noter que les élèves proposent en premier lieu le signe «?» (RF-S). Après incitation de l'enseignante, ils énumèrent naturellement différentes symbolisations, acceptant tout type de symbolisations comme un cœur (représentation non institutionnelle).

Par la suite, l'approche papier crayon, l'utilisation des outils technologiques et la discussion en grand groupe ont promu une évolution des RF-S. L'enseignante pour promouvoir l'engagement des élèves ajoute: *moi, je suis capable de trouver n'importe quel nombre triangulaire en trois coups* [en faisant juste trois opérations]. L'enseignante pensait l'expression institutionnelle  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$  lorsqu'elle affirme qu'en «trois coups» (une addition:  $n + 1$ , une multiplication:  $n(n + 1)$  et une division:  $\frac{n(n+1)}{2}$ ). Soulignons que la formule ressortie par les élèves n'est pas très efficace,<sup>2</sup> elle requiert un grand nombre d'additions, c'est long. L'enseignante pousse donc les élèves à être efficaces, le rôle de l'enseignante est ainsi central comme le mentionne Legrand (2001).

La Figure 10 présente l'évolution des représentations en six étapes d'un élève que nous avons nommé *Yan* qui a travaillé en équipe avec deux filles. En premier (voir le 1<sup>er</sup> cadre, Figure 10), les élèves utilisent Excel (un ordinateur par équipe) et retranscrivent dans une colonne la position ou le rang du nombre triangulaire à laquelle ils associent dans la colonne adjacente le nombre triangulaire associé à son rang ou position. L'équipe est ainsi capable de générer jusqu'au nombre triangulaire 84 grâce à la technologie. En observant la suite de nombres générés, l'équipe remarque, en cadre 2 (voir Figure 9), qu'en ajoutant un à la position du 83<sup>e</sup> nombre triangulaire et en divisant par 2, ils trouvent 42. Pour trouver le 83<sup>e</sup> nombre triangulaire, il suffit alors de multiplier la position 83 par 42. Après avoir expliqué cette façon de procéder à l'enseignante, celui-ci leur demande si leur façon de faire marche pour n'importe quel nombre triangulaire. Les élèves de cette équipe répondent que oui et *Yan* propose de le faire pour trouver le 101<sup>e</sup> nombre triangulaire. Anticipant qu'en choisissant une position ou rang impair, l'ajout de 1 et la division par 2 va donner un entier naturel, l'enseignante demande à l'équipe de choisir plutôt le 100<sup>e</sup> nombre triangulaire. Après une hésitation face au décimal obtenu, dans la division par 2, les élèves retournent au travail en équipe et les trois élèves vont remarquer que le résultat obtenu après avoir ajouté 1 et divisé par 2 importe peu. *Yan* qui est le représentant de l'équipe écrit alors «x» pour désigner ce résultat, il n'aura par la suite qu'à multiplier par 100 pour trouver le 100<sup>e</sup> nombre triangulaire (voir la case 3 dans la Figure 10). *Yan* comme représentant de l'équipe passe au tableau, pendant que les deux filles manipulent l'ordinateur de *Yan* (voir Figure 9, case 5) pour procéder aux calculs que *Yan* mène au tableau.

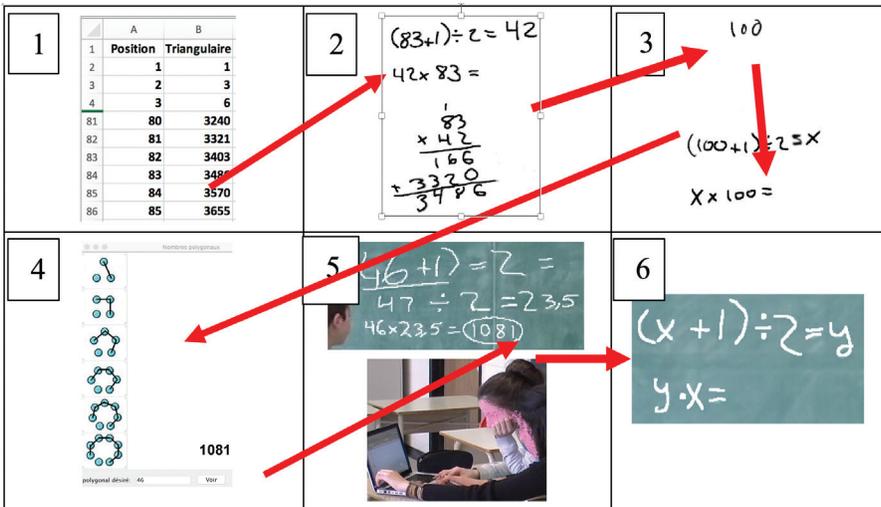


Figure 9. Différentes étapes de la résolution des nombres triangulaires par une équipe

Yan et son équipe utilisent fréquemment un ancien applet mis à la disposition des élèves (voir Figure 9, cases 4 et 5) qui, à partir de la position ou le rang du nombre triangulaire fournit le motif figuré de ce nombre et le nombre de points correspondant. L'utilité de cet applet (comme le nouveau fait avec GeoGebra) était de faire sortir les élèves de l'itération pour aller vers une formule générale en combinant l'aspect visuel et numérique. Ainsi, quand Yan passe au tableau, il présente la façon de faire de son équipe pour le 46<sup>e</sup> nombre triangulaire et demande à ses coéquipières (voir cadre 5, Figure 9) de vérifier le résultat. À ce moment, la cloche sonne et tout le monde commence à ramasser ses affaires, une élève d'une autre équipe demande à l'enseignante d'expliquer comment faire pour calculer un nombre triangulaire «en trois coups» comme elle l'avait annoncée. Yan répond que lui il le sait et il généralise alors face au tableau à la dernière minute (voir case 6), en indiquant «x» comme la position de tout nombre triangulaire à laquelle on ajoute 1 (première opération) et on divise par 2 (deuxième opération), le résultat obtenu est représenté par «y», ce résultat sera multiplié par la position du nombre triangulaire donc «x» (troisième opération). La représentation institutionnelle  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$  n'a pas émergé, on observe l'émergence d'une représentation tout aussi valide construite par les élèves.

### 5.3 RÉSULTATS: QUARANTE-CINQ JOURS APRÈS L'EXPÉRIMENTATION - L'EXEMPLE DE YAN

Pour comprendre ce que les élèves ont retenu de cette SP, 45 jours après cette expérimentation, nous avons proposé aux élèves une version abrégée de la SP en modifiant, dans quelques questions, les nombres triangulaires cherchés. Nous avons observé un fait intéressant. Yan qui avait construit une formule pour calculer n'importe quel nombre triangulaire lors de l'expérimentation a fait une erreur en calculant le nombre triangulaire  $T_{11}$ . Il écrit avoir procédé avec la formule qu'il avait trouvée, mais celle-ci a été de toute évidence oubliée (Figure 10).

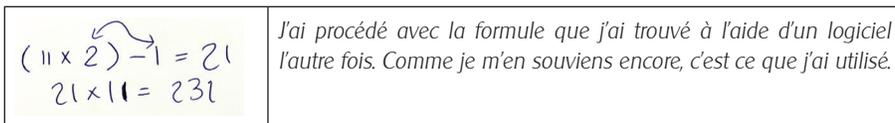


Figure 10. 45 jours après, Yan se trompe dans la formule construite précédemment

Nous avons glissé une feuille supplémentaire, uniquement pour cet élève (il ne le savait pas), avec de questions pour trouver une formule permettant de calculer tout nombre pentagonal. Il est intéressant de constater qu'il n'a pas oublié sa stratégie et il l'utilise correctement pour procéder au calcul des nombres pentagonaux (Figure 11 pour le calcul du 34<sup>e</sup> nombre pentagonal). Au départ, Yan identifie les figures par leur position: 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>. Il utilise les bonds tel que fait avec ses coéquipières. Il débute en s'intéressant au 4<sup>e</sup> nombre pentagonal, 22, il divise par 4, il obtient 5,5. Il nous explique par la suite qu'il s'est dit que pour trouver 5,5, il pouvait prendre la position ou le rang 4 et lui ajouter 1,5. Il essaie après avec le 3<sup>e</sup> nombre pentagonal pour voir si ça marche. Il divise 12 par la position qui est 3, il obtient 4. Il remarque que s'il ajoute 1 à la position ou au rang, il obtient 4. Yan procède de la même façon avec le 2<sup>e</sup> nombre pentagonal qui est 5, il divise par 2 ce qui donne 2,5. S'il ajoute à 2, 0,5 il va obtenir 2,5. Il en vient alors à voir qu'il peut retrancher 0,5 à la position ou au rang.

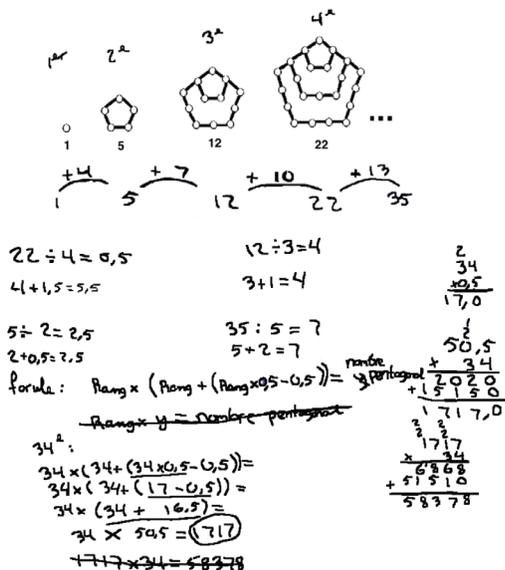


Figure 11. L'élève est capable de réinvestir pour les nombres pentagonaux

Ces constats sur les quatre premiers nombres pentagonaux et le fait de vouloir trouver une formule qui seront composés d'opérations qui impliquent uniquement la position ou le rang amènent Yan à observer que pour trouver un nombre pentagonal, il faut multiplier la position du nombre par la position à laquelle on ajoute la position divisée par 2 et retranchée de 0,5. Par exemple, pour le quatrième nombre triangulaire qui est 22, on fait  $4 \times 5,5$  (position fois 5,5), mais 5,5 s'écrit comme  $4 + 1,5$  (position plus 1,5) et 1,5 peut se retrouver en divisant la position par 2 et en retranchant au résultat 0,5 comme suit  $4 \times 0,5 - 0,5 = 1,5$ . Donc la suite d'opérations à faire pour trouver le quatrième nombre triangulaire est [Équation]. La Figure 12 présente la formule généralisée en s'appuyant sur le rang ou position du nombre pentagonal.

<p>Formule: <math>\text{Rang} \times (\text{Rang} + (\text{Rang} \times 0,5 - 0,5)) = \text{nombre Pentagonal}</math></p>	<p>Interprétation:  <math>n \times (n + (n \times 0,5 - 0,5)) = P_n</math></p>
---	--

Figure 12. Formule trouvée par l'élève.

On peut remarquer que la représentation de l'élève est très éloignée de la représentation officielle:  $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ ,  $n$  étant un nombre naturel non nul, mais elle est parfaitement utile pour calculer n'importe quel nombre pentagonal.

L'expérimentation en classe et les productions d'élèves dans un milieu d'apprentissage socioculturel illustrent que les RF-S des élèves ont évolué grâce à la communication entre pairs promue avec ACODESA. L'analyse des productions des élèves 45 jours après nous a permis de mieux comprendre la notion d'*habitus* de Bourdieu (1980) sur la construction d'une *structure structurante* qui va permettre d'attaquer d'autres SP et problèmes. Aussi, nous pouvons dire que cette expérimentation illustre le développement d'une «structure cognitive de contrôle» dans le sens de Perkins & Simmons (1988), qui leur permet d'attaquer un problème et de surveiller leurs actions pour en trouver la solution.

Cette étude nous a encouragés à poursuivre notre recherche sur la pensée arithmético-algébrique, mais cette fois-ci nous avons ciblé la transition primaire-secondaire. L'expérimentation au Québec n'a pas pu débiter à cause de la COVID-19, heureusement, l'expérimentation au Mexique avait commencé avant la pandémie. Nous rapportons dans la section qui suit les résultats obtenus.

## 6. ÉTUDE MENÉE AU MEXIQUE

### 6.1 DESCRIPTION DE L'ÉTUDE

Cette expérimentation a pris place dans le cadre d'un projet Québec-Mexique. Au Mexique, un groupe de douze élèves d'une école primaire d'une zone urbaine marginalisée à faible niveau socio-économique a été sélectionnée. Le groupe a été classé comme sous-performant en mathématiques. Une tablette électronique a été remise aux élèves pour faciliter leur interaction et pour permettre la validation numérique de leurs conjectures (Figure 13).

Une séquence de SP a été élaborée (Figure 13) dont trois SP ont été expérimentées (sans technologie) par d'autres chercheurs, Celles-ci ont toutefois été repensées pour se conformer à la méthodologie ACODESA, à l'utilisation des applets, et à la construction en spirale des savoirs dans une approche socioculturelle de l'apprentissage. L'expérimentation e eu une durée totale de 17h30 pour les 5 activités premières activités de la Figure 13.

Pour la quatrième SP, une suite de motifs figurés est proposée, qui a été pensée par l'équipe, il s'agit du «Camino de las calaveritas», celle-ci prend en

considération le contexte mexicain, en s'inspirant de la tradition du jour des Morts (au Québec le contexte de l'Halloween a été utilisé). La cinquième activité sollicite des processus de généralisation complexes et sans contexte réel, la suite de motifs a été également construite par l'équipe de chercheurs. La sixième SP porte sur les nombres polygonaux et est destinée aux élèves du secondaire. Toutes ces SP sont consultables intégralement en anglais, en français et en espagnol sur le site: Hitt et Quiroz (2019). Dans les activités ont été priorisés la construction des représentations: dessin, verbal en mots et arithmético-algébriques (Figure 13).

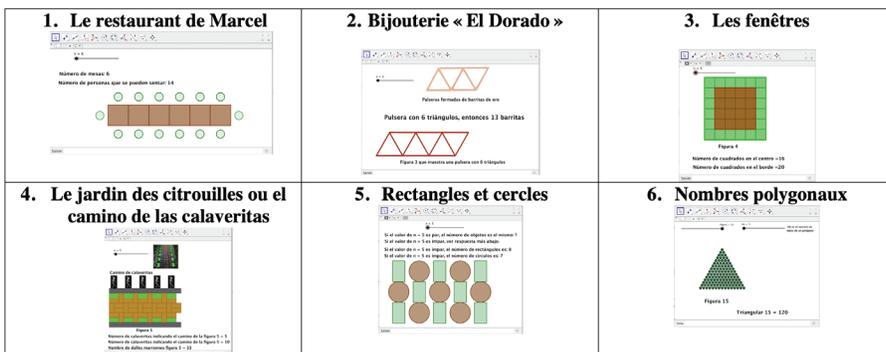


Figure 13. Présentation de la séquence des 6 SP

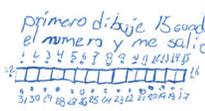
Chacune de ces SP a été rédigée selon le modèle de la SP sur les nombres triangulaires (Tableau 1). Pour présenter les résultats, nous avons sélectionné les questions pour lesquelles les élèves ont produit des représentations fonctionnelles-spontanées intéressantes du point de vue de notre objet de recherche.

## 6.2 RÉSULTATS: ÉVOLUTION DES RF-S - L'EXEMPLE D'ALD

Suivant la méthode d'enseignement ACODESA, les élèves ont travaillé en équipe, en utilisant différentes couleurs de stylos afin de repérer le travail individuel (bleu), en équipe (rouge), en grand groupe (vert) et le travail d'autoréflexion (blue). Les productions reprises ci-dessous sont teintées par ce code de couleurs. La première SP qui a été présentée est le restaurant de *Marcel*. La Figure 14 illustre la production d'un élève que nous avons appelé «Ald». Nous pouvons observer que celui-ci reste collé au contexte lors du travail individuel (question 3) en dessinant 15 tables et on comptant les personnes, il reste dans l'étude du cas particulier. Lors du travail en équipe, à la question 8, des

représentations fonctionnelles-spontanées émergent (en rouge), les élèves utilisent deux représentations différentes pour indiquer le nombre de tables. Après la discussion en grand groupe, *Ald* reproduit la représentation en vert.

Dans son restaurant Marcelo a des tables... elles sont disposées comme suit [tables collées en ligne, voir Figure 6 case 1]... Marcelo aimerait ne pas avoir à compter les chaises à chaque fois que des clients arrivent..

<p>3. Et pour 15 tables, peux-tu trouver une stratégie pour calculer rapidement le nombre de personnes sans dessiner ?</p> <p><i>primero dibuje 15 cuadrados, luego en los lados puse el numero y me salió 32</i></p> 	<p>8. Les messages sont très longs. Marcelo a besoin de messages indiquant les opérations qu'il doit effectuer plus facilement. Rédiger le même message, mais simplifié, en indiquant les opérations que Marcelo doit effectuer.</p> <p><del><math>15 \times 2 + 2</math></del> <math>2 \times 2 + 2</math> <math>- 2 + 2</math> <math>\square \times 2 + 2</math></p>
---	--

**Figure 14.** Questions 3 et 8 du Restaurant de Marcel et exemple de production individuelle de l'élève *Ald* (question 3) et de la production du même élève dans son travail d'équipe (question 8)

Dans l'écriture de l'expression construite en grand groupe (en vert), le fait qu'*Ald* ait fait des points pour représenter les 4 chaises autour du carré peut nous faire douter sur sa compréhension de la discussion qui a eu lieu. En effet, pour une configuration de plus de 2 tables, les chaises qui sont à la jonction doivent être omises. Un co-équipier d'*Ald* que nous avons nommé *Mic* (Figure 15 à droite) montre une bonne compréhension de la proposition de ses collègues dans la discussion en grand groupe puisqu'il utilise la variable «tables» ainsi que la notation «□».

	<p><i>mesas x2+2</i>    <math>\square \times 2 + 2</math></p>
---	---

**Figure 15.** Production de *Ald* et *Mic* (même équipe) après la discussion en grand groupe.

Dans cette SP, différentes représentations fonctionnelles-spontanées de la variable «nombre de tables» émergent naturellement: ?; \_;  $\cdot \square \cdot$ ; □. Différentes productions d'expressions sont également utilisées pour calculer le nombre de

personnes pouvant être assises dans un arrangement quelconque de tables:  
 $? \times 2 + 2 = ; \_ \times 2 + 2 = ; \cdot \square \times 2 + 2 = ; \square \times 2 + 2 = .$

Dans la 2<sup>e</sup> SP, celle de la bijouterie «El Dorado», Ald répond comme suit (Figure 16).

Dans la bijouterie Madero appelée «El Dorado», Fernando confectionne des chaînes en or en forme de mailles triangulaires...	
<p>3. Et pour 15 mailles, peux-tu trouver une stratégie pour calculer rapidement le nombre de pièces sans avoir à compter un par un et sans dessiner?</p> <p style="text-align: center; color: blue; font-size: 1.2em;">31 los imagine</p>	<p>4. En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvées pour calculer le nombre de pièces dont nous avons besoin pour 15 mailles. Est-ce que tout le monde avait la même stratégie ? Trouver au moins 2 stratégies pour calculer le nombre de pièces nécessaires pour 15 mailles triangulaires.</p> <p style="color: red; font-size: 0.8em;"> <math>-x2+1</math> Cada triángulo equivale a 2 tigas. Ejemplo:  </p>

**Figure 16.** Questions 3 et 4 de la SP El Dorado, et exemple de la production individuelle de l'élève Ald (question 3) et de la production du même élève dans son travail d'équipe (question 4)

Individuellement, Ald arrive à la bonne réponse, on n'a toutefois pas accès à la façon dont il s'y est pris puisqu'il dit qu'il l'a fait dans sa tête. On observe un changement par rapport à la résolution de la première SP pour laquelle il avait eu recours au dessin pour trouver le nombre de personnes nécessaire. Lors de la discussion en équipe, on peut observer que les élèves de l'équipe d'Ald comptent le nombre de tiges de deux façons différentes. Ils repèrent deux tiges par maille et une tige supplémentaire pour fermer le motif ( $-x2 + 1$ ). L'autre façon de faire est de considérer qu'il y a deux tiges par maille triangulaire sauf pour la première maille pour laquelle ils comptabilisent 3 tiges. Pour cette deuxième façon de faire, on observe que les élèves n'ont pas recours à une expression du même type que pour le premier message, ils utilisent les mots et un exemple qui illustre leur raisonnement (Figure 16). On peut penser ici que l'écriture en une chaîne d'opérations avec une variable pose problème à l'équipe.

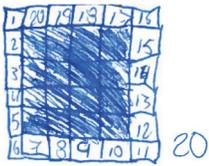
Dans cette SP, les élèves de la classe ont utilisé différentes notations pour désigner le nombre variable de tiges pour une chaîne de mailles: « $\Delta x 2 + 1 =$ ». Le « $? x 2 + 1 =$ », « $\square x 2 + 1 =$ » ou « $- x 2 + 1 =$ » pour un même message.

Nous pouvons observer que les élèves, guidés à la fois par les questions des SP et par l'enseignante, progressent rapidement vers la généralisation et la production spontanée d'expressions non institutionnelles. L'enseignante insiste sur les questions où il est précisé qu'il ne faut pas utiliser de mots, elle dira aux élèves qu'ils doivent omettre l'utilisation de mots dans les messages qu'ils fournissent afin de présenter un message abrégé, raccourci, court et ne pas oublier d'indiquer les opérations en jeu.

En ce qui concerne la 3<sup>e</sup> SP (les fenêtres), la Figure 17 illustre la production de l'élève *Ald*.

J'ai un ami qui a une petite usine de fenêtres. Les fenêtres fabriquées sont de forme carrée et sont composées de petits carrés rouges au centre et de carrés gris autour d'eux. Voici quelques exemples [voir Figure 13]:

2. Si nous cherchons le nombre de carrés verts pour une fenêtre qui a 4 cases rouges de chaque côté (ou 6 carrés verts de chaque côté), avez-vous besoin d'un dessin pour trouver la réponse ou avez-vous trouvé une façon rapide de procéder ?



3. Et la fenêtre de 15 carrés rouges par côté (ou 17 carrés verts par côté), saurez-vous trouver une stratégie pour calculer rapidement le nombre de carrés verts au total sans avoir à compter un par un et sans avoir à piocher ?

64

$15 \times 4 = 60 + 4 = 64$

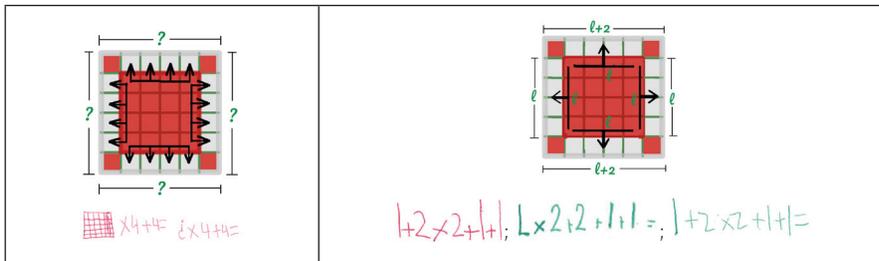
**Figure 17.** Questions 2 et 3 de l'usine de fenêtres et exemple de production individuelle de l'élève *Ald* (question 2) et de la production du même élève (question 3)

On peut remarquer que l'élève *Ald* a besoin, dans cette SP, d'un dessin pour pouvoir répondre à la question 2 (qui demande le nombre de carrés verts pour une fenêtre qui a 4 carrés rouges sur le côté du carré central). Encore une fois, cet élève a un grand besoin de faire des dessins et de compter un à un les carrés du pourtour. Il est intéressant de noter que lorsque le nombre demandé est grand, *Ald* quitte le dessin (tel que prévu dans la SP pour favoriser l'apprentissage en spirale). Il trouve la bonne réponse, 64 carrés verts. On peut observer, d'après la chaîne d'opérations qu'il propose, qu'*Ald* a multiplié le nombre de carrés rouges sur un côté par 4 et il ajoute les 4 coins. L'égalité mathématique ainsi écrite est incorrecte, il aurait dû écrire  $15 \times 4 = 60$  et

$60 + 4 = 64$  mais elle rend quand même compte de la façon dont l'élève s'y est pris pour trouver le nombre de carrés verts.

### 6.3 RÉSULTATS: DIFFÉRENTES GÉNÉRALISATIONS RESSORTIES

Dans la troisième SP, les fenêtres, on observe dans les productions en équipe et en grand groupe l'émergence d'une généralisation visuo-arithmétique. Pour l'expression «nombre associé au côté du carré formé des petits carrés rouges  $\times 4 + 4$ », les élèves prennent les côtés du carré rouge formé par les petits carrés et les déplacent sur les côtés du grand carré et ajoutent les carrés des coins (Figure 18). Pour représenter cette variable, les élèves utilisent soit le dessin d'un carré rouge soit un point d'interrogation à l'envers. Une autre façon de compter le nombre de carrés verts émerge dans l'équipe d'Ald et également en grand groupe. Il s'agit d'ajouter 2 au nombre de carrés rouges sur un côté, on obtient ainsi le nombre de carrés verts sur un côté. On multiplie ce nombre par 2 pour obtenir les carrés verts qui sont vis-à-vis et il suffit par la suite d'ajouter deux fois le nombre de carrés rouges sur un côté. Les élèves utilisent «1» pour désigner le nombre de carrés rouges sur un côté. On peut remarquer qu'ils ont oublié d'écrire les parenthèses pour que l'expression soit correcte:  $(1 + 2) \times 2 + 1 + 1$ , l'écriture ne traduit pas leurs propos.



**Figure 18.** Stratégies visuelles de généralisation et de construction d'une expression permettant de calculer le nombre de carrés sur la périphérie pour n'importe quelle figure

Tel que précisé, cette SP, comme les précédentes, a été utilisée dans différentes recherches qui visent l'introduction de l'algèbre («Le problème des frontières» de Boaler et Humphreys, 2005 aux États-Unis et «le carré bordé» de Coulange et Grugeon, 2008 en France). Une question que nous nous sommes posés est la suivante: Quelle est la différence entre les résultats des élèves mexicains et les élèves des États-Unis et de la France?

Un élément de réponse est que la formulation des questions et le guide de l'enseignante au Mexique ont favorisé l'utilisation spontanée de représentations non institutionnelles telles qu'exprimées dans la Figure 17, soulignant que ces élèves classés comme peu performants peuvent mener des démarches de généralisation comme les élèves plus âgés des USA et de la France.

Pour ces trois SP, on peut voir que le signe «?» a été constamment utilisé par les élèves comme variable. Dans les deux études, les représentations fonctionnelles-spontanées non institutionnelles ont émergées de façon naturelle (voir en ce sens diSessa, Hammer, Sherin & Kolpakowski, 1991).

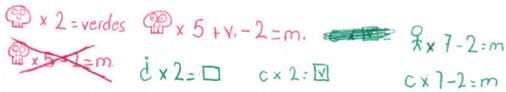
C'est dans la 4e SP sur «El camino de las calaveritas» (chemin des crânes) qu'on assiste à une explosion de représentations. Les élèves ont utilisé différentes variables pour la même SP (Figure 19).

Au Mexique, tout le monde se prépare pour la fête du jour des Morts. Dans le parc communautaire, le directeur responsable du parc décide de faire un «chemin des crânes»... Le problème commence lorsque le directeur veut connaître le prix pour faire le chemin, et compter les crânes, les briques lumineuses vertes, et les briques brunes, pour les acheter.

13. Rédigez un message écrit dans lequel vous expliquez comment vous pouvez calculer le nombre de crânes, de briques claires et de briques brunes pour n'importe quelle figure de la même manière que vous avez travaillé auparavant.

*es el mismo numero de la fila.  
multiplicando x2 el numero de la fila.  
multiplicando las calaveras x5 mas los verdes y restando 2.*

14. Les messages sont très longs. Rédigez le même message simplifié indiquant les opérations que le directeur doit effectuer.





**Figure 19.** Questions 13 et 14 de la SP «El camino de calaveritas» et exemple du travail en équipe et en grand groupe

Dans le cas de l'expérimentation au Québec, les élèves avaient également tendance dans leurs productions à fournir des expressions pour calculer les nombres triangulaires en deux étapes «1ère étape:  $(x+1) \div 2 = y$ ; 2<sup>o</sup> étape:  $y * x =$ » (voir dernier encadré de la Figure 10). Dans la SP du *El camino de las calaveritas*, un élément nouveau apparaît, les élèves combinent des variables pour pouvoir calculer, par

exemple, les briques marrons. Les élèves poseront que pour avoir le nombre de briques marrons, il faut multiplier par 5 le nombre de têtes de morts y ajouter les briques vertes et soustraire 2 au résultat. Là encore on voit que le contexte joue un rôle important dans le recours à des représentations fonctionnelles-spontanées. Dans ce cas des lettres, des squelettes, des crânes apparaissent pour désigner un certain type de variable, ce qui permet de construire une expression algébrique pour le calcul général, que ce soit pour des briques vertes ou marrons.

Dans la dernière SP proposée aux élèves (la 5<sup>e</sup>) sur les cercles et les rectangles, le contexte de la vie réelle disparaît, et un calcul plus complexe s'impose où il faut distinguer si le motif est pair ou impair; et dans le cas d'être impair, distinguer une expression pour le calcul des rectangles, différente du calcul du nombre de cercles pour la même figure. Si  $n$  désigne la variable, notre interprétation avec une notation officielle serait de la forme:

- 1<sup>re</sup> étape:  $3 \cdot n / 2$  pour le calcul des cercles ou rectangles d'une figure paire.  
 2<sup>e</sup> étape:  $n + (n+1) / 2 = (3n+1) / 2$  pour le calcul des rectangles de chiffre impair.  
 3<sup>e</sup> étape:  $n + (n-1) / 2 = (3n-1) / 2$  pour le calcul des cercles de chiffre impair.

Nous présentons ci-dessous la production en équipe et en grand groupe du travail en équipe (rouge) et du travail en grand groupe (vert) (Figure 20).

Nous avons une série de rectangles et de cercles disposés comme indiqué dans la figure ci-dessous [voir Figure 6]	
8. Écrivez un message dans lequel vous expliquez comment vous pourriez calculer le nombre de rectangles et de cercles pour n'importe quelle figure selon la même forme que vous avez faite auparavant.	
E1: dividir la figura por la mitad y multiplicar x3	E2: restarle a la figura 1 multiplicar x3 y sumarle 2 rectangulos y 1 circulo
9. Les messages sont très longs. Rédiger le même message, mais simplifié, en indiquant les opérations que vous devez effectuer.	
$-1r$ $2\sqrt{r} \times 3 + 2r + 1c = c_{yr}$ impar	$2\sqrt{r} \times 3 = c_{yr}$ par
$1 \times 3 \div 2 = c_{yr}$	

**Figure 20.** Questions 8 et 9 de la SP des rectangles et des cercles et production en équipe et en grand groupe

La complexité de la tâche fait que le passage du verbal à «l'algébrique non institutionnel» produit des notations très variées telles que celles proposées dans

la Figure 19. En termes verbaux, l'explication est explicite et complexe en notation non institutionnelle. Par exemple, si nous prenons notre variable comme « $n$ », pour le calcul des cercles et des rectangles relatifs au nombre pair, la notation  $2\overline{1F} \times 3 = c \ y \ r$  exprime que si la variable est « $n$ »,  $n$  serait le dividende, 2 le diviseur. C'est-à-dire,  $2\overline{1n} \times 3 = c \ y \ r$ , une notation que nous pouvons écrire sous la forme  $n/2 \times 3 = \text{nombre de cercles ou nombre de rectangles}$ .

La notation utilisée par les élèves pour les nombres impairs est beaucoup plus sophistiquée (Figure 20, expression à gauche). Le  $-1F$  signifie qu'il faut soustraire un au nombre du chiffre impair (obtenir un nombre pair); et, immédiatement, on peut calculer le nombre de cercles ou de rectangles avec l'expression  $(n-1)/2 \times 3 + 2r + 1c = c$  et  $r$ . Autrement dit, cela signifie que si nous voulons calculer les rectangles, nous devons utiliser  $(n-1)/2 \times 3 + 2r$ ; et si on veut calculer les cercles, il faut utiliser  $(n-1)/2 \times 3 + 1c$ . Ces deux expressions, utilisant des représentations fonctionnelles-spontanées, sont extrêmement riches et permettent le calcul pour n'importe quel motif pair ou impair.

En résumé, pour l'expérimentation au Mexique avec des élèves classés comme peu performants, la production de représentations fonctionnelles-spontanées est suscitée par la méthode d'enseignement socioculturel (ACODESA). Voici quelques constats:

- Les situations déclenchent chez les élèves des processus de généralisation dans le sens de Radford (2011, 2017), des formes indéterminées émergentes qui sont traitées analytiquement.
- Le travail individuel, le travail en équipe, le débat et l'auto-réflexion suivant la méthode ACODESA semblent donner de bons résultats pour promouvoir la réflexion et les processus de généralisation avec des élèves peu performants en mathématiques.
- Le rôle de l'enseignant a été crucial, favorisant l'utilisation d'autres types de représentations que l'écrit, favorisant la généralisation avec des représentations spontanées dans une approche arithmétique-algébrique.
- L'utilisation de la technologie (iPad dans notre cas, avec les applets faits avec GeoGebra), semble jouer un rôle important, comme un moyen de contrôle numérique et de validation pour les prédictions faites par les élèves.
- La formation d'équipes de deux ou trois membres semble corroborer l'affirmation de Prusak, Hershkowitz et Schwarz (2013) sur l'efficacité de la communication entre les membres d'une équipe.

## CONCLUSION

Les SP que nous avons proposées sont constituées de tâches enchainées et encadrées par les étapes de la méthode d'enseignement ACODESA dans une approche instrumentée de l'apprentissage. Nous avons montré que c'est dans un processus de communication et d'objectivation par étapes avec la méthode ACODESA, qu'il est possible que les élèves construisent une structure cognitive puissante avant même que l'enseignante passe à l'étape d'institutionnalisation. Les élèves développent des connaissances et sont plus outillés quand arrive le moment de l'institutionnalisation. Le processus d'enseignement est ainsi inversé dans cette approche instrumentée de l'apprentissage. De plus, la visualisation à travers les motifs figurés est un support important pour développer la pensée arithmético-algébrique.

L'analyse des deux expérimentations tant au Québec comme au Mexique avec des élèves de 11 à 13 ans, fait entrevoir une diversité dans la nature des processus de généralisation construits par les élèves. Il a été important de promouvoir la visualisation jumelée à des processus d'anticipation et l'établissement de conjectures pour arriver à une généralisation arithmético-visuelle-géométrique. Les élèves ont progressé grâce au travail en équipe, discussion en grand groupe et processus d'autoréflexion.

Les résultats des deux expérimentations montrent que les RF-S possèdent un caractère analytique tel que défini par Radford (2011, 2017). Nous nous inscrivons ainsi dans un processus de généralisation pour lequel (Radford, 2010):

Ces signes peuvent être des lettres, mais pas nécessairement. Utiliser des lettres ne veut pas dire nécessairement qu'on fait de l'algèbre. L'histoire des mathématiques montre clairement que l'algèbre peut également être pratiquée en recourant à d'autres systèmes sémiotiques. (p. 39)

L'apport de l'arithmétique est également important à considérer, le recours au numérique permettant la construction de formules, mais également enclenchant un processus de validation des formules construites. Ainsi, l'arithmétique constitue, non seulement un point de départ vers la généralisation et vers l'algèbre, mais aussi, un moyen de contrôle de l'algèbre. Nos résultats illustrent que l'arithmétique et l'algèbre sont intimement liées tels que mentionné par Chevallard (1980, 1989), Lee (1996), Lee et Wheeler (1989), Mason (1996) et Radford (2014). Ainsi, à partir de nos expérimentations, nous avons remarqué l'importance de

promouvoir une pensée arithmético-algébrique dans la transition primaire-secondaire. Cette idée n'est pas tout à fait nouvelle. Ce qui est nouveau, c'est la considération des RF-S qui émergent de façon naturelle et mobilisent une pensée divergente et créative dans un processus de résolution d'une tâche complexe.

L'approche ACODESA, centrée sur la communication qui permet la construction du signe (Voloshinov, 1973) va dans le sens de Radford (1998) qui mentionne l'importance de promouvoir les processus d'objectivation dans la classe de mathématiques en regardant cette classe comme un système sémiotique culturel. ACODESA ouvre la possibilité de développer dans la classe de mathématiques une structure de contrôle dans le sens de Perkins et Simmons (1988), et plus important, un *habitus* (dans le sens de Bourdieu, 1980). Sous cette perspective liée à un enseignement et apprentissage dans un milieu socioculturel, nous devons promouvoir:

- Les représentations (en utilisant le papier crayon),
- La visualisation mathématique dans les processus de modélisation,
- La communication pour discuter les premières idées élaborées d'abord individuellement puis en équipe (2 ou 3 membres) et finalement en grand groupe. C'est un contexte propice pour solliciter l'énonciation de conjectures et la validation des processus de généralisation,
- La sensibilité à la contradiction, si les résultats des équipes diffèrent. Il faut promouvoir la validation des stratégies et des résultats obtenus, promouvoir un débat scientifique (Legrand, 2001),
- L'importance de l'arithmétique comme moyen de vérification des règles algébriques (émergence d'une pensée arithmético-algébrique qui articule les deux types de pensées),
- L'utilisation de la technologie (Excel, applets, etc.) dans une approche instrumentée de l'apprentissage comme moyen de vérifier les conjectures des élèves par une approche numérique,
- L'autoréflexion pour consolider ce qui a été discuté en classe.

La méthode d'enseignement ACODESA favorise l'émergence et l'évolution des RF-S. Toutefois, pour *Ald*, l'élève ayant vécu l'expérimentation au Mexique, nous avons trouvé un cas similaire au Québec. Dans les deux cas, le travail individuel était minime, mais les élèves ont évolué remarquablement, grâce au travail collaboratif. La question qui émerge est de savoir comment renforcer la pensée arithmético-algébrique qui semble fragile chez les élèves ayant vécu notre expérimentation.

Les SP proposées s'inscrivent dans les directives d'une approche par compétences tant du côté du ministère de l'Éducation du Québec que du Mexique (l'utilisation d'enchaînements de situations mathématiques). Dans cette étude, nous nous sommes limités à explorer les processus de généralisation à l'école primaire et au début du secondaire sous l'angle du développement de la pensée arithmético-algébrique, d'autres recherches permettraient d'en savoir plus sur cette pensée lors de la résolution de SP dans d'autres contextes que la généralisation. Pour l'enseignement, nous prônons l'importance de proposer aux élèves une séquence enchaînée qui devrait promouvoir leur créativité et donc la pensée divergente à travers la résolution de SP; suivies de problèmes, d'exercices et des situations d'apprentissage et d'évaluation mobilisant plutôt une pensée convergente.

Finalement, les résultats de l'expérimentation au Mexique ouvrent une voie pour la construction d'une structure arithmético-algébrique à l'école primaire. L'étude a été fait avec des élèves de 6<sup>e</sup> année, il serait intéressant, même important d'expérimenter avec des élèves moins âgés.

## AGRADECIMIENTOS

Ce travail a été développé dans le cadre du projet de recherche PID2021-128261NB-I00 (PROESTREAM), financé par MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER Una manera de hacer Europa.

## RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <http://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Bear, J. (1993). *Creativity and divergent Thinking. A Task-Specific Approach*. Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, 136, 20-23.
- Boaler, J., & Humphreys, C. (2005). *Middle school video cases to support teaching and learning*. Heinemann.
- Boucher, A-C, Loïselles, A-N et Reiber, D. (2006). *Les situations d'apprentissage et d'évaluation. Lexique*. Commission scolaire des patriotes. Québec.

- Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Éditions de Minuit.
- Bronner, A. (2019). Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre: Apport d'une analyse praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 278-297. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p278-297>
- Brousseau, G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Cadieux, R., Gendron I. et Ledoux A. (2005). *Panoramath 1er cycle secondaire, manuel A*, v. 2. Éditions CEC.
- Cole, M. (1996). *Cultural psychology. A once and future discipline*. The Belknap Press of Harvard University Press.
- Coulange, L. et Grugeon B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78(1), 5-23.
- Chevallard, Y. (1980). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5(1), 51-94.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, 19(1), 43-72.
- Díaz-Barriga, A. (2022). *Retos de la docencia ante el Marco Curricular 2022*. Secretaría de Educación Pública.
- diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10(1), 117-160.
- Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 1, 235-253. [Traducción en *Antología en Educación Matemática*. In R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), (pp. 125-139). México: DME-Cinvestav, 1992.]
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5(1), 37-65. [Traducción en F. Hitt (Ed., 1998), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201), Grupo Editorial Iberoamérica.]
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen et R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). Cambridge University Press.
- Guilford, J-P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, 5(1), 444-454.
- Guilford, J-P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. McGraw-Hill.

- Hadamard, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Gauthier-Villars.
- Landry, M. (2001). Approche à l'algèbre avec des élèves faibles en deuxième secondaire. *Envol*, 115(1), 21-24.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bernarz, C. Kieran, et L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Kluwer Academic Publishers.
- Lee, L. and Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 41-54.
- Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp.127-135). Kluwer Academic Publishers.
- Leontyev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice Hall.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the learning of mathematics*, 9(2), 2-8.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, et L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006, 2007). *Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire*. Gouvernement du Québec.
- Perkins, D., and Simmons R. (1988). Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, 58(1), 303-326.
- Programme de Formation de l'École Québécoise. (2006). *Gouvernement du Québec*. [http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site\\_web/documents/PFEQ/prfrmsec1ercycle2.pdf](http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PFEQ/prfrmsec1ercycle2.pdf)
- Prusak, N., Hershokwits R. et Schwarz B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 266-285. <http://doi.org/10.1080/14794802.2013.836379>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin.
- Radford, L. (1998). *On Culture and mind, a post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought*. Paper presented at the 23rd annual meeting of the semiotic society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998. Retrieved from <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. [http://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501\\_02](http://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02)

- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62. <http://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai et E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Kluwer.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 6(2), 257-277.
- Radford, L. (2017). The emergency of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer.
- Razumnikova, O. (2013). Divergent versus convergent thinking. In E-G. Carayannis (Ed.), *Encyclopedia of creativity, invention, innovation and entrepreneurship* (Section D, pp. 1-7). Springer.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011, Educación Básica*. Secretaría de Educación Pública.
- Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN.
- Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Translated by Matejka L. And Titunik I. R. Harvard University Press.
- Vygostky, L. (1932/1962). *Thought and Language*. MIT Press.

#### AUTOR DE CORRESPONDENCIA

SAMANTHA QUIROZ RIVERA

**Dirección:** Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Unidad Campo Redondo Edificio "A",  
Apartado Postal 25000, Saltillo, Coahuila, México.

**Teléfono:** (52) (8) 414 47 39