 https://doi.org/10.24844/EM3503.07

¿Cómo varía la forma de las cónicas cuando su excentricidad tiende a uno o a cero? Un estudio exploratorio con profesores de bachillerato de una universidad mexicana

How does the shape of conics vary when their eccentricity tends to one or zero? An exploratory study with high school teachers from a Mexican university

Antonio Rivera-Figueroa,[1] Ernesto Bravo-Díaz[2]

Resumen: Este trabajo forma parte de una investigación más extensa en la que indagamos los conocimiento que docentes de bachillerato de una universidad mexicana tienen respecto a la excentricidad de las cónicas. Aquí, reportamos los conocimiento que mostraron los participantes en relación con el comportamiento de las cónicas, cuando la excentricidad tiende a cero o a uno. Derivado de las declaraciones que algunos autores de libros de texto de geometría analítica, suelen hacer sobre la tendencia de la forma de las cónicas cuando la excentricidad tiende a cero o a uno, o bien cuando a partir del aspecto de una cónica deducen estimaciones sobre los valores de la excentricidad, consideramos pertinente averiguar si los profesores comprenden las afirmaciones de los autores. La base teórica del estudio es el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés Mathematical Knowledge for Teaching) de Ball, Thames, y Phelps (2008). Identificamos el conocimiento de los profesores en sus respuestas a cuestionarios previos y

Fecha de recepción: 17 de julio de 2022. **Fecha de aceptación:** 20 de febrero de 2023.

[1] Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, arivera@cinvestav.mx ORCID 0000-0002-2028-443X

[2] Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, ernesto.bravo@cinvestav.mx

posteriores a una actividad en la que interactuaron los participante con applets y en sus respuestas a entrevistas no estructuradas.

Palabras clave: *Forma y Excentricidad de las cónicas; Conocimiento Matemático para la Enseñanza; Conocimiento Común de Contenido; Conocimiento Especializado de Contenido.*

Abstract: This work is part of a more extensive investigation in which we investigate the knowledge that high school teachers from a Mexican university have regarding the eccentricity of the conics. Here, we report the knowledge that the participants showed concerning the behavior of the conics when the eccentricity approaches zero or one. Derived from the statements that some authors of analytic geometry textbooks usually make about the tendency of the shape of conics when the eccentricity tends to zero or one, or when from the appearance of a conic they deduce estimates about the values of eccentricity, we consider it pertinent to find out if teachers understand the authors' statements. The study's theoretical basis is the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model by Ball, Thames, and Phelps (2008). We identified teachers' knowledge in their responses to questionnaires before and after an activity in which participants interacted with applets and in their responses to unstructured interviews.

Keywords: *Shape and Eccentricity of the conics; Mathematical Knowledge for Teaching; Common Content Knowledge; Specialized Content Knowledge.*

INTRODUCCIÓN

En el siglo pasado el conocimiento de los docentes, en matemáticas, se limitaba a los cursos tomados en la universidad, pero desde hace un par de décadas se "ha analizado y abordado de manera más cualitativa, enfatizando los procesos cognitivos y la comprensión de los hechos, conceptos y principios, y las formas en que están conectados y organizados" (Even y Tirosh, 1995, p. 2). Estudios recientes relacionados con el conocimiento matemático de los profesores (por ejemplo, Hill *et al.*, 2008), muestran que existen fuertes vínculos entre el conocimiento de los docentes y la calidad matemática de su práctica en el aula. Otros trabajos (por ejemplo, Baumert *et al.*, 2010; Blömeke y Delaney, 2012), han identificado dos componentes principales del conocimiento de los docentes que les permite desempeñar su función de manera efectiva: Conocimiento de Contenido (CC) y Conocimiento de Contenido Pedagógico (CCP). Ball, Thames y Phelps (2008), basándose en el trabajo de Shulman (1986), crearon el modelo MKT. Según sus autores, este modelo se refiere al conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas.

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) dio a conocer el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria (MEEO) y el Nuevo Currículo de la Educación Media Superior (NCEMS). Uno de los propósitos principales del NCEMS es alcanzar el máximo logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes. Para cumplir este propósito el MEEO concibe al docente como un profesional que, entre otras cualidades, "tiene el dominio necesario de los contenidos que enseña" (SEP, 2017, p. 86). En coincidencia con esta idea, Fennema y Franke (1992) afirman que "lo que sabe un maestro es una de las influencias más importantes en lo que hace en las aulas y, en última instancia, en lo que los estudiantes aprenden" (p. 147). Por su parte, Mapolelo y Akinsola (2015), en su revisión de literatura sobre conocimiento, creencias y formación de los docentes, señalan que "los docentes son factores críticos en el aprendizaje de las matemáticas y la extensión de su conocimiento de contenido y pedagógico determina el logro de los estudiantes" (p. 505). En este mismo sentido, diversos investigadores de Educación matemática, coinciden respecto al conocimiento amplio y profundo que deben tener los profesores de matemáticas, por ejemplo, Philipp (2014, p. 285) comenta "un maestro que entiende un tema particular de matemáticas de manera profunda, ve interrelaciones entre los conceptos y procedimientos, lo que puede permitirle construir una presentación lógica y rica", por su parte, Baumert *et al.* (2010), mencionan que uno de los principales hallazgos en estudios cualitativos sobre instrucción matemática es que el repertorio de estrategias de enseñanza, el conjunto de representaciones matemáticas alternativas y las explicaciones disponibles para los maestros en el aula dependen en gran medida de la amplitud y profundidad de su comprensión conceptual del tema. Por su parte el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics) (2000, p. 17) en su principio de enseñanza declaran "los profesores deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y ser capaces de hacer uso de ese conocimiento con flexibilidad". Son estas las premisas que dieron origen a nuestra investigación sobre el conocimiento de los profesores acerca de la excentricidad de las cónicas y que ahora reportamos sobre la parte correspondiente al comportamiento de la forma de las curvas en función de la excentricidad.

El estudio de la Geometría Analítica es parte esencial del currículo del bachillerato en México. Dentro de los contenidos considerados para su enseñanza se encuentra el estudio de las cónicas. Uno de los elementos relevantes para estas curvas es su excentricidad, la cual permite analizar aspectos cualitativos de la forma de ellas. Sin embargo, la relación entre los valores de excentricidad y la forma de las cónicas no es un asunto bien atendido en los libros de texto, al respecto coincidimos con el comentario de Foley (2011) "Cuando los estudiantes de matemáticas de bachillerato y la universidad estudian secciones cónicas, a menudo aprenden poco sobre sus formas e incluso pueden formarse conceptos erróneos. Sin duda, entender la forma de las cónicas no es un asunto trivial" (p. 274). En libros de texto y en la literatura matemática solemos encontrar comentarios sobre la forma de las curvas cuando hacemos variar la excentricidad, particularmente cuando tiende a cero o a uno, o bien, estimaciones de los valores de la excentricidad a partir del aspecto de una cónica. Por ejemplo, Foley (2011, p. 275) afirma "Las elipses varían en forma de circulares a casi parabólicas", mientras que Rider (1947, p. 121) señala: "Conforme c tiende a a, esto es, cuando la excentricidad tiende a 1, la elipse se aplana hasta llegar al límite en el que degenera en un segmento de recta". Puesto que ambos casos corresponden a excentricidades cercanas a uno: ¿Hay alguna contradicción o inconsistencia en estas afirmaciones? Una declaración similar a la de Rider la podemos encontrar en Larson y Edwards (2010, p. 271): "Para una elipse alargada, los focos están cerca a los vértices y la razón c/a [excentricidad] es cercana a 1". Realmente, sacar conclusiones sobre la excentricidad a partir de la variación de la forma de una elipse es una actividad cognitiva diferente a la actividad de describir la variación de la forma de una curva en función de la variación de la excentricidad. El comportamiento de la forma de una elipse o una hipérbola para valores de la excentricidad cercanos a uno puede apreciarse de diferentes maneras según las definiciones con las cuales se miren estas curvas. Hay al menos tres acercamientos a las cónicas mediante las cuales podemos definir una elipse y una hipérbola. La definición que quizá es la más conocida por los profesores es en la que la elipse y la hipérbola se caracterizan por dos focos. Otra definición se establece en términos de un foco y una directriz y una tercera definición es la que se refiere a la intersección de un cono y un plano en el espacio tridimensional. En este último acercamiento a las cónicas, al jugar con el movimiento del plano, haciéndolo tender hacia una posición paralela a una generatriz, "resulta evidente" que la parábola es la posición límite tanto de las elipses como de las hipérbolas. Por cierto, aunque no es evidente, en este movimiento particular del plano, la excentricidad de las curvas tiende a uno. Esto lo justificaremos más adelante apoyados en una fórmula que permite determinar la excentricidad cuando las curvas se consideran intersección de un cono y un plano. Un hecho destacable es que la parábola no es la única posición límite de las elipses y las hipérbolas. La dinámica del plano puede ser tal que las elipses tiendan a un segmento o que las hipérbolas tiendan a un par de rayos. Dado que los libros de texto son fuentes importantes de información para los profesores, y derivado de una aparente inconsistencia entre las afirmaciones que antes citamos, consideramos pertinente averiguar si profesores de bachillerato comprenden tales declaraciones y, en su caso, cómo las justifican. Esto fue lo que motivó nuestra investigación.

PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La excentricidad es un parámetro e asociado a las cónicas con el cual podemos generar esta familia de curvas y a su vez tiene un significado geométrico con relación al aspecto de la forma de las curvas. Una buena comprensión del significado geométrico de la excentricidad, se requiere para analizar la variación de la forma de las cónicas cuando variamos los valores de e, particularmente cuando la hacemos tender a los valores cero o uno ($e \to 0$ o $e \to 1$). La variación de la forma de las curvas al tomar estos límites para la excentricidad, depende de otros parámetros de las cónicas y de la definición de excentricidad, así que no es trivial hacer el análisis de cómo varían estas curvas. Nuestra investigación consistió, primero, en analizar cómo presentan los libros de texto el concepto de excentricidad, principalmente para los casos $e = 0$ y $e = 1$, y, segundo, indagar sobre el conocimiento matemático y creencias de profesores de bachillerato con relación a esta variación de las cónicas cuando $e \to 0$ y cuando $e \to 1$. Planteamos como pregunta directriz de la investigación: ¿Qué conocimientos matemáticos muestran los profesores al preguntarles respecto a la forma de las cónicas cuando $e \to 0$ o $e \to 1$? Para responder esta pregunta, nos propusimos como objetivo identificar y caracterizar los conocimiento que mostraron los profesores participantes al cuestionarles sobre la forma de las cónicas para valores de la excentricidad cercanos a cero o a uno. Para caracterizar el conocimiento de los profesores y, de acuerdo con nuestro marco teórico, recurrimos a las categorías Conocimiento Común de Contenido y Conocimiento Especializado de Contenido (CCK y SCK por sus respectivas siglas en inglés *Common Content Knowledge* y *Specialized Content Knowledge*).

MARCO REFERENCIAL

La excentricidad de las cónicas es definida de diferentes formas en los libros de texto de Geometría Analítica; es un concepto cuya definición depende del enfoque o concepción de esas curvas. Para poner en contexto el problema de investigación, exponemos tres acercamientos a las cónicas y sus correspondientes definiciones de excentricidad. También presentamos, como ejemplo, un caso límite de excentricidad de la elipse.

Excentricidad en el acercamiento bifocal (AB)

La elipse y la hipérbola están definidas por dos focos. La elipse es el lugar geométrico de los puntos tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante $2a$. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia positiva de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante $2a$. En ambos casos, los puntos fijos se denominan focos de las curvas (figura 1), y la constante respectiva se llama constante de la curva.

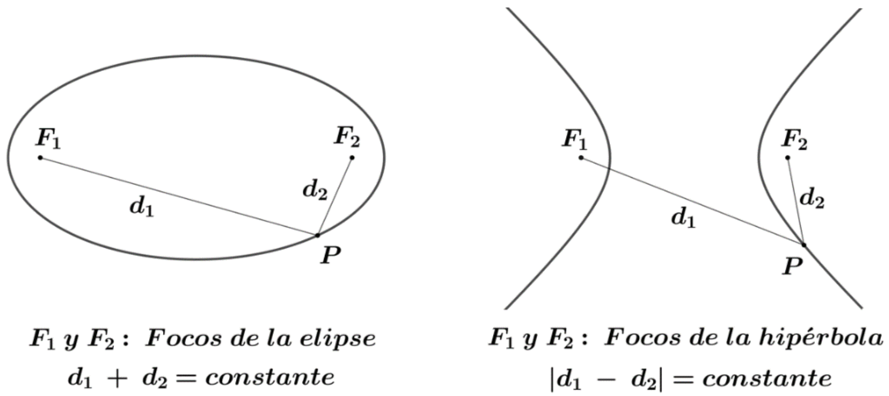

Figura 1. Definición bifocal de la elipse y de la hipérbola.

La recta que contiene los focos de la elipse también contiene dos puntos de la curva, llamados vértices, V_1 y V_2. Al segmento con extremos V_1 y V_2 le llamaremos eje mayor de la elipse. La excentricidad de la elipse es la razón de la distancia $2c$ entre los focos a la distancia $2a$ entre los vértices. Entonces, la excentricidad e es el cociente c/a donde c es la semidistancia entre los focos y a es la longitud del semieje mayor (véase por ejemplo, Larson y Edwards, 2010, p. 701; Lehmann, 1964, p. 176; Rider, 1947, p. 120; Simmons, 1996, p. 536). Al ser $a > c > 0$, tenemos $0 < e < 1$ (ver figura 2a). Algunos autores permiten la coincidencia de los focos $F_1 = F_2$ (p. ej., Rider 1947), y otros permiten la igualdad $2a = 2c$ (Hahn, 1998, p. 91), en cuyo caso los focos coinciden respectivamente con los vértices. Si se permite $F_1 = F_2$, entonces c puede tomar el valor cero, en cuyo caso la excentricidad es cero, y la elipse corresponde a una circunferencia. Al respecto, Rider (1947) comenta “la circunferencia puede considerarse una elipse cuya excentricidad es cero” (p. 121), por su parte, Apostol (1966, p. 498), sin aludir a la excentricidad, señala: “si los focos coinciden, la elipse se reduce a una circunferencia”. Si se permite $2a = 2c$, entonces $e = 1$, y tenemos que “la elipse consta de los puntos del segmento $\overline{F_1 F_2}$“ (Hahn, 1998, p. 91). Las diferencias entre las definiciones de la elipse tienen consecuencias significativas en la interpretación geométrica de la excentricidad.

Para la hipérbola la excentricidad está definida por el mismo cociente $e = c/a$, donde ahora a es la longitud del semieje transversal de la hipérbola, es decir, la semidistancia entre los vértices (Larson y Edwards, 2010, p. 704; Lehmann, 1964, p. 176; Rider, 1947, p. 132; Simmons, 1996, p. 545). Al ser $0 < a < c$, tenemos $e > 1$ (ver figura 2b).

Vale la pena notar (en este acercamiento a las cónicas) que la excentricidad no toma el valor 1 y que entonces la parábola no tiene asignada excentricidad alguna.

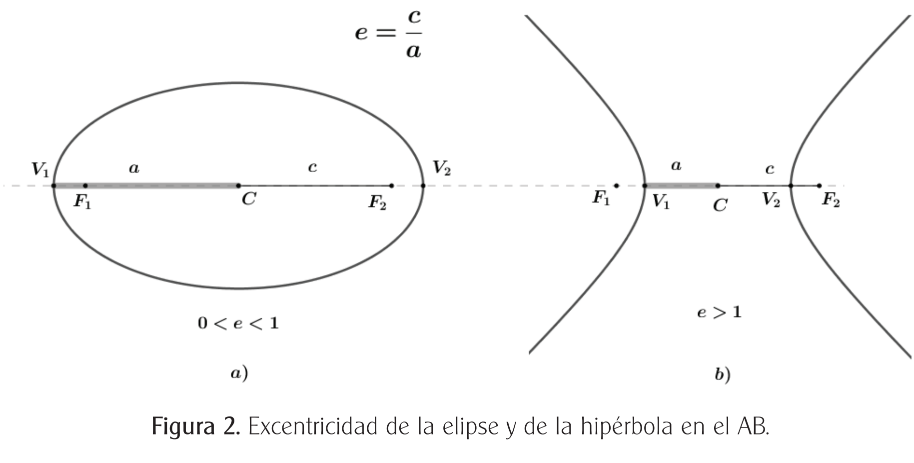

Figura 2. Excentricidad de la elipse y de la hipérbola en el AB.

Excentricidad en el acercamiento foco-directriz (AFD)

La parábola, elipse e hipérbola, se definen de manera unificada en términos de un foco y una directriz. Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P de un plano, tal que la razón de la distancia de P a un punto fijo F, llamado foco, a la distancia de P a una recta L, llamada directriz, que no contiene F, es una constante positiva e (figura 3). Esta constante es definida como la excentricidad de la cónica (ver, por ejemplo, Edwards y Penney, 1994, p. 536-537; Simmons, 1996, p. 552). La curva es una elipse si $0 < e < 1$; una parábola si $e = 1$, y una hipérbola si $e > 1$. La definición de Leithold (1981) difiere con la anterior al considerar que e puede tomar el valor cero, así tenemos $0 \leq e < 1$, y expresa "cuando $e = 0$ tenemos un punto" (p. 589). Es notable que en este acercamiento el círculo está excluido.

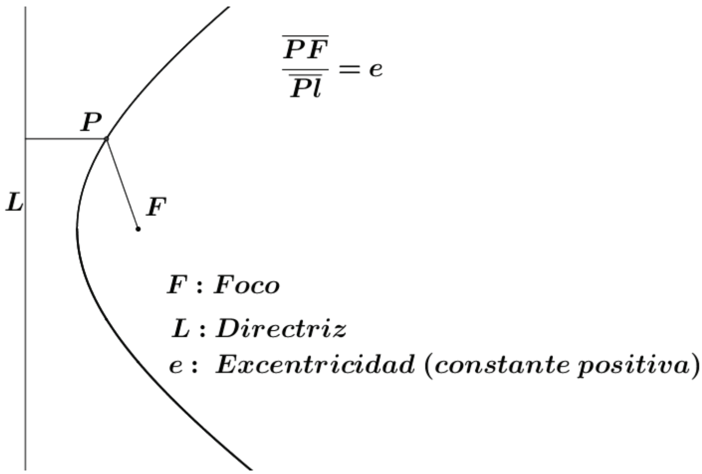

Figura 3. Definición foco-directriz de las cónicas.

Excentricidad en el acercamiento Cono-Plano (ACP)

Las cónicas son las curvas en el espacio tridimensional que, obtenemos al intersecar un cono doble circular recto infinito fijo, con un plano inclinado variable que no pasa por el vértice del cono. Si el plano inclinado corta todas las generatrices del cono y no es perpendicular al eje del cono, la curva es una elipse. Si el plano inclinado es paralelo a una generatriz la curva correspondiente es una parábola (figura 4a). Si el plano inclinado corta ambos mantos del cono doble, la curva es una hipérbola, la cual consta de dos ramas, una en cada uno de los mantos (figura 4b). Notemos que en esta definición los elementos de las curvas: centro, focos y directriz, no están incluidos.

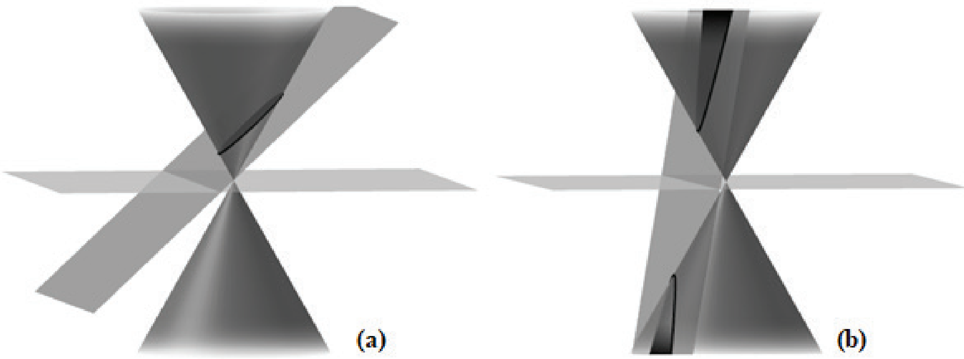

Figura 4. Definición cono-plano de la elipse y la hipérbola.

La excentricidad tampoco está involucrada en estas definiciones de las curvas, aparece en el contexto de una proposición, la cual describimos a continuación: Consideremos un cono doble circular recto infinito con un plano inclinado que lo corta. Construyamos una esfera inscrita en el cono, tangente al cono y al plano inclinado (figura 5). El punto de tangencia F de la esfera y el plano inclinado le llamaremos *foco* de la curva. El conjunto de puntos de tangencia de la esfera y el cono es una circunferencia que determina un plano al que llamaremos plano Π; este plano corta al plano inclinado en una recta d que llamaremos *directriz* de la curva. La *excentricidad* de la curva es el cociente que se obtiene al dividir la distancia al foco F desde cualquier punto P de la curva entre la distancia de este punto P a la recta d. Esta razón es constante y es igual a $\operatorname{sen} \propto / \operatorname{sen} \beta$, donde $\propto$ es el ángulo entre el plano inclinado y el plano Π, y β es el ángulo entre un plano perpendicular al eje del cono y la generatriz del cono que pasa por P (figura 5). La prueba de esta proposición se debe al matemático francés Germinal Pierre Dandelin y podemos encontrarla en Brannan *et al.* (2012, p. 22) y Simmons (1996, pp. 551-552). En esta definición de excentricidad está implícito que $\propto$ es diferente de cero, lo que garantiza la existencia de la directriz. A medida que el ángulo $\propto$ disminuye y se aproxima a cero, la directriz se aleja más de la cónica y la cónica se vuelve cada vez más "redonda". En este enfoque, el valor cero de la excentricidad solo puede entenderse como un valor límite, y se asigna al círculo, pues éste sería el límite de las elipses correspondientes.

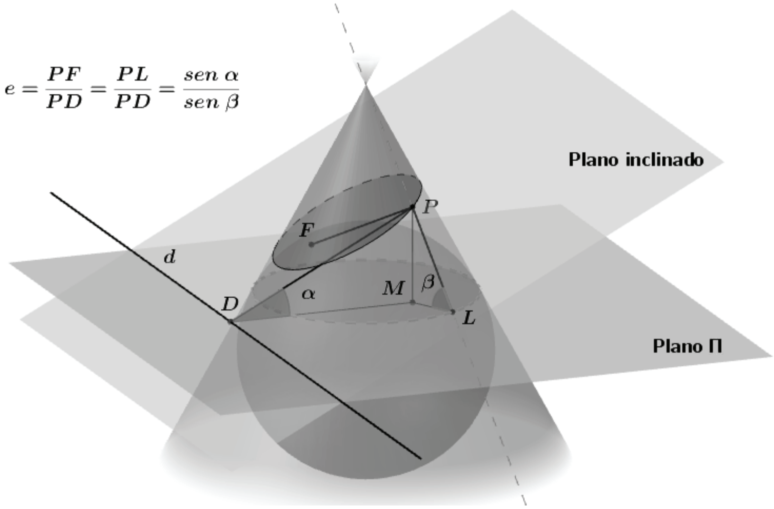

Figura 5. Excentricidad de las cónicas en el ACP.

Casos límite de la excentricidad de las cónicas

Para la elipse la excentricidad e toma valores en el intervalo $0 < e < 1$, y es común que se afirme que, cuando $e = 0$ la elipse "se reduce" a una circunferencia y de esto se infiere que si hacemos tender e a cero las elipses tienden a una circunferencia. Similarmente, en ocasiones se afirma que el valor $e = 1$ corresponde a una parábola (aunque no en el acercamiento bifocal) y que, en consecuencia, cuando hacemos tender e a uno, las elipses tienden a una parábola. También suele decirse que cuando la excentricidad tiende a uno, la elipse se hace más achatada. Dado que en el acercamiento bifocal la excentricidad es una función de dos variables, $e = c/a$, la toma de los límites $e \to 0$ y $e \to 1$ puede hacerse de diversas maneras, lo que implica que la situación geométrica es un tanto compleja. Cuando hacemos tender e a cero o a uno, las curvas límite dependerán de cuál sea el enfoque a las cónicas (bifocal, foco-directriz o cono-plano). También tenemos situaciones diversas para la hipérbola cuando

$e \to 1$. A continuación, exponemos el análisis de los casos límite de la excentricidad en cero y en uno, de la elipse en el acercamiento foco-directriz.

Caso límite de la elipse en su definición foco-directriz

Supongamos que L, F y e, son la directriz, foco y excentricidad respectivamente. Sea Q el pie de la perpendicular a la directriz L desde el foco F y sea $p = |\overline{QF}|$ (figura 6).

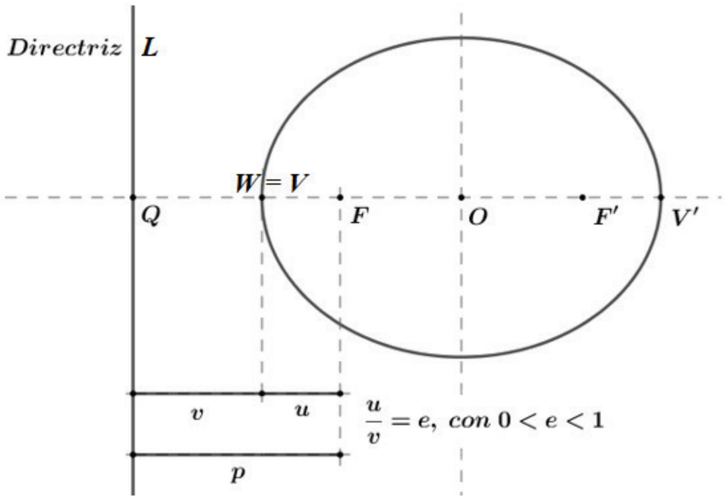

Figura 6. La elipse en su definición foco-directriz, con $u/v = e$.

Supongamos $0 < e < 1$; entonces, por definición, la cónica es una elipse. En el segmento $\overline{QF}$ hay un punto V de la elipse. En efecto, sea W un punto arbitrario sobre este segmento. Sean $u = |\overline{WF}|$ y $v = |\overline{QW}|$; entonces tenemos $u + v = p$. Para que W sea un punto sobre la elipse es necesario y suficiente que se cumpla $u/v = e$. De las dos condiciones sobre u y v obtenemos:

$$u = \frac{pe}{1 + e} \qquad (1)$$

$$v = \frac{p}{1 + e} \qquad (2)$$

Si elegimos estos valores para u y v obtenemos un punto sobre la elipse pues ciertamente de (1) y (2) obtenemos $u/v = e$. Llamaremos V a este punto. Sobre la semirrecta $\overrightarrow{QF}$ que contiene a V también hay un segundo punto V' de la elipse. En efecto, sea V' un punto sobre la semirrecta $\overrightarrow{QF}$ que no esté en el segmento $\overline{QF}$; denotemos por $2a$ la longitud del segmento $\overline{VV'}$. La distancia entre V' y F es entonces $2a - u$, y la distancia de V' desde L es $2a + v$, así que para que V' esté sobre la curva es necesario y suficiente que se cumpla

$$\frac{2a - u}{2a + v} = e. \tag{3}$$

De las relaciones (1), (2) y (3) obtenemos

$$a = \frac{pe}{1 - e^2} \tag{4}$$

La condición (4) es necesaria para que V' sea un punto de la elipse. Esta condición también es suficiente; es decir, para este valor de a el punto V' está sobre la elipse. Los puntos V y V' son los únicos de la curva que se encuentran sobre la recta que pasa por Q y F, son puntos notables de la elipse que se llaman vértices. El eje mayor de la elipse es el segmento que tiene por extremos V y V'. La fórmula (4) expresa la longitud del semieje mayor. El punto medio del segmento $\overline{VV'}$, es el centro O de la elipse, el cual está a una distancia $v + a = p/(1 - e^2)$ desde el punto Q, y a una distancia $c = |FO| = a - u = pe^2/\,(1 - e^2)$ desde el foco.

Otro par de puntos notables de la elipse son B y B' los cuales se encuentran sobre la mediatriz del eje mayor a una distancia a del foco y a una distancia

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = pe/\sqrt{1 - e^2} \tag{5}$$

del centro O. Se verifica fácilmente que los puntos B y B' satisfacen la condición de la definición foco-directriz.

Analicemos algunas situaciones de límite de la excentricidad. En lo que sigue supondremos que están fijos el foco y la directriz, así que p es fijo.

A) Caso $e \to 0$. De las expresiones (1) y (4) tenemos que $u \to 0$ y $a \to 0$, cuando $e \to 0$; entonces $V \to F$ y $V' \to F$. Además de la ecuación (5) obtenemos $b \to 0$, por lo tanto, las elipses se colapsan en F, así que tienen como límite el punto F (ver figura 7). Este punto F también pudo haberse obtenido como caso particular de cónica, si se hubiese permitido el valor $e = 0$, esto discreparía del hecho de que, en el acercamiento bifocal de la elipse, la excentricidad cero se asigna al círculo. De cualquier manera, la discrepancia es inevitable, pues cuando se consideran los casos límite, la excentricidad cero corresponde a un punto.

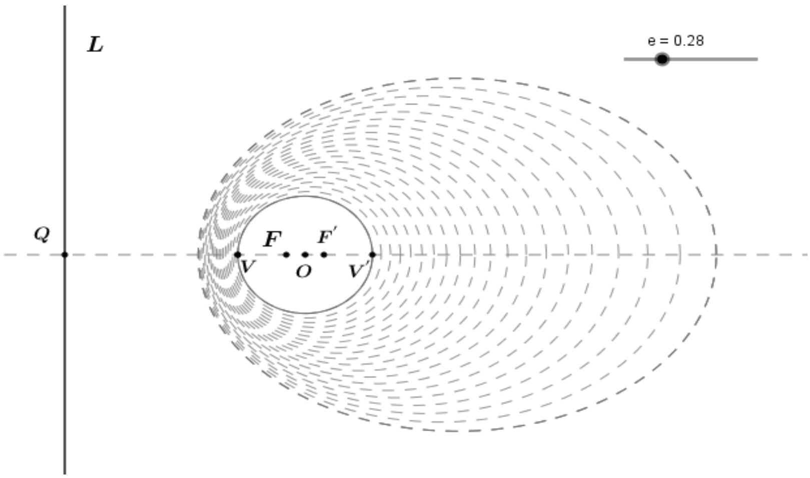

Figura 7. La elipse se colapsa en F cuando $e \to 0$.

B) Caso $e \to 1$. De las relaciones (1) y (2) tenemos que $u \to p/2$ y $v \to p/2$, cuando $e \to 1$; entonces V tiende al punto medio del segmento $\overline{QF}$. Además, de (4) tenemos que $a \to \infty$, lo que significa que el eje mayor de la elipse tiende a infinito, es decir, las elipses crecen ilimitadamente. De alguna manera percibimos que la curva límite es una parábola, con vértice en el punto medio del segmento $\overline{QF}$. En términos más precisos tenemos que si e está 'muy cerca' de 1, la curva es una 'gran elipse' que localmente (alrededor del vértice) 'se pega' a la parábola. Es importante notar que entre más cerca esté e de 1, las elipses serán más grandes, y localmente 'se pegarán más a la parábola', sin embargo, cuando las curvas se miran desde lo lejos, los puntos sobre las elipses que no están cercanos al vértice V se encuentran alejados de la parábola. Esto lo podemos percibir en los extremos del eje menor y más contundentemente en los puntos alrededor del vértice variable V' (figura 8).

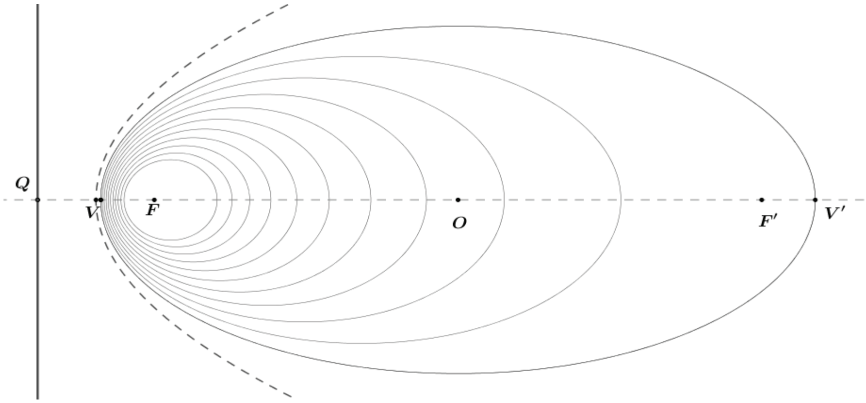

Figura 8. La elipse se pega 'localmente' a una parábola.

En la tabla 1 presentamos, para los tres acercamientos a las cónicas, algunos casos relevantes de situaciones límite para la elipse y, en la tabla 2 para la hipérbola, cuyo análisis no hicimos en este artículo.

Tabla 1. Curvas límite para la elipse

Acercamiento a la elipse $0 < e < 1$	Curvas límite cuando $e \to 0$	Curvas límite cuando $e \to 1$
Bifocal	Una circunferencia	Segmento, Parábola
Foco-Directriz	Un punto	Parábola
Cono-Plano	Una circunferencia	Segmento, Parábola

Tabla 2. Curvas límite para la hipérbola

Acercamiento a la hipérbola $1 < e$	Curvas límite cuando $e \to 1$
Bifocal	Dos rayos, Parábola
Foco-Directriz	Parábola
Cono-Plano	Dos rayos, Parábola

Marco Teórico

La presente investigación tuvo su fundamento teórico en el modelo MKT de Ball, Thames, y Phelps (2008). El MKT está formado por los dominios Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. A su vez, el primer dominio se constituye por tres subdominios: CCK, SCK y conocimiento de horizonte de contenido. Para nuestra investigación fueron de interés los subdominios CCK y SCK, por lo que a continuación los describimos brevemente:

CCK. Este conocimiento lo posee todo adulto o profesional con conocimientos básicos de matemáticas. El término común no significa que todos tengan ese conocimiento, sino más bien que se trata de uno utilizado, también, en ambientes distintos a la enseñanza. Algunos aspectos relacionados con el CCK son: (a) Calcular una respuesta. (b) Resolver problemas matemáticos empleando fórmulas sin estar consciente de que si son o no aplicables. (c) Enunciar definiciones de manera muy limitada y sin explicación.

SCK. Es el conocimiento matemático deseable para la enseñanza. El término especializado se refiere al conocimiento profundo de contenido matemático específico y no se refiere al conocimiento de temas matemáticos avanzados. Algunas características relacionadas con el SCK son: (a) Conocer en profundidad los conceptos fundamentales de cada uno de los temas. (b) Justificar el uso de las normas aplicadas, entendiendo por qué funcionan y cuándo son aplicables. (c) Desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más sencillos y comprensibles para sus alumnos. (d) Establecer conexiones entre diferentes sistemas de representación.

Marco teórico para describir los conocimientos de los profesores acerca de la excentricidad

Para alcanzar los objetivos de este trabajo, propusimos un marco teórico en el que consideramos exclusivamente los subdominios CCK y SCK, con los que, en el contexto de la excentricidad para cada uno de los acercamientos de las cónicas, se constituyeron las categorías de análisis del presente estudio (tabla 3 y tabla 4). Las abreviaturas utilizadas fueron:

A: Acercamiento; AB: Acercamiento Bifocal; AFD: Acercamiento Foco-Directriz; ACP: Acercamiento Cono-Plano

Tabla 3. Categorías de análisis para el CCK mostrado por los participantes.

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
AB	6) La excentricidad se define como el cociente $e = c/a$, donde c es la semidistancia entre los focos y a es la semidistancia entre los vértices.	CCK-AB-1
	7) Para la elipse: $0 < e < 1$.	CCK-AB-2
	8) La forma de la elipse va desde muy circular hasta muy alargada.	CCK-AB-3
	9) La circunferencia es un caso especial de la elipse con $e = 0$.	CCK-AB-4
	10)Para la hipérbola: $e > 1$.	CCK-AB-5
	11)Las ramas de la hipérbola van desde muy cerradas hasta muy abiertas.	CCK-AB-6
AFD	1) El foco F y la directriz L son fijos.	CCK-AFD-1
	2) La excentricidad se define como una constante positiva e que resulta de la razón PF/PL (la distancia de P desde un punto fijo F, llamado foco, a la distancia de P desde una recta L, llamada directriz, que no contiene F).	CCK-AFD-2
	3) Para la elipse: $0 < e < 1$	CCK-AFD-3
	4) Para la parábola: $e = 1$	CCK-AFD-4
	5) Para la hipérbola: $e > 1$	CCK-AFD-5

Tabla 4. Categorías de análisis para el SCK mostrado por los participantes.

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
	Para la elipse:	
	1) Si mantenemos $a > 0$ fija y $e \to 0$, entonces $c = ae \to 0$ y la elipse tiende a la circunferencia de centro C y radio a.	SCK-AB-1
	2) Si mantenemos $a > 0$ fija y $e \to 1$, entonces $c = ae \to a$ y la elipse tiende al segmento VV'.	SCK-AB-2
	3) Se cumple la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$. De manera que podemos definir $e = \sqrt{1-(b/a)^2}$.	SCK-AB-3
	4) Si los semiejes tienden a ser iguales ($a \to b$ o $a \to 0$), la elipse tiende a la circunferencia de radio a y centro C, y entonces $e = \sqrt{1-(b/a)^2} \to 0$.	SCK-AB-4
AB	5) Si mantenemos $a > 0$ fija y $b \to 0$, la elipse tiende al segmento VV', y entonces $e = \sqrt{1-(b/a)^2} \to 1$.	SCK-AB-5
	Para la hipérbola:	
	6) Si mantenemos $a > 0$ fija y $e \to 1$, entonces $c = ae \to a$ y la hipérbola tiende a dos rayos disjuntos de extremo los vértices.	SCK-AB-6
	7) Se cumple la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$. De manera que podemos definir $e = \sqrt{1+(b/a)^2}$.	SCK-AB-7
	8) Si mantenemos $a > 0$ fija y $b > 0$, las ramas de la hipérbola tienden a cerrarse cada vez más, es decir, la hipérbola tiende a dos rayos disjuntos de extremo los vértices, y entonces $e = \sqrt{1+(b/a)^2} \to 1$.	SCK-AB-8
	9) Si $e \to \infty$, las ramas de la hipérbola tienden a abrirse cada vez más.	SCK-AB-9
	Para la elipse:	
	1) Si $e \to 0$, $PF \to 0$ y dado que el foco es fijo, entonces $V \to F$ y $V' \to F$, por lo que el caso límite de la elipse es el punto F, es decir, las elipses se colapsan en un punto.	SCK-AFD-1
AFD	2) Si $e \to 1$, entonces PF y PL tienden a ser iguales, por lo que la curva límite es una parábola, con vértice el punto medio del segmento $\overline{QF}$, siendo Q el pie de la perpendicular a la directriz L desde el foco F.	SCK-AFD-2
	Para la hipérbola:	
	3) Si $e \to 1$, entonces PF y PL tienden a ser iguales, por lo que la curva límite es una parábola, con vértice el punto medio del segmento $\overline{QF}$, siendo Q el pie de la perpendicular a la directriz L desde el foco F.	SCK-AFD-3

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
ACP	1) $e > 0$ garantiza la existencia de la directriz, así $e = 0$ no está permitido.	SCK-ACP-1
	2) La excentricidad se define como $e = \mathrm{sen}\propto/\mathrm{sen}\,\beta$.	SCK-ACP-2
	Para la elipse: 3) Si el plano inclinado tiende a ser perpendicular al eje del cono, entonces $e \to 0$ y las elipses tienden a una circunferencia.	SCK-ACP-3
	4) Si el plano inclinado tiende a ser paralelo a una, mientras generatriz del cono, entonces $e \to 1$ y las elipses tienden a la parábola.	SCK-ACP-4
	5) Si el plano inclinado tiende a ser tangente al cono en una generatriz, entonces $e \to 1$ y las elipses tienden a un segmento.	SCK-ACP-5
	Para la hipérbola: 6) Si el plano inclinado tiende a ser paralelo a una generatriz del cono, entonces $e \to 1$ y las hipérbolas tienden a una parábola.	SCK-ACP-6
	7) Si el plano inclinado tiende a ser tangente al cono en una generatriz, entonces $e \to 1$ y las hipérbolas tienden a dos rayos disjuntos.	SCK-ACP-7

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

La investigación fue de carácter cualitativo y, en una primera etapa hicimos un estudio exploratorio con cinco profesores de Geometría Analítica del bachillerato de una universidad pública estatal en México, para el cual diseñamos un cuestionario con el objetivo de indagar sobre sus conocimientos matemáticos sobre la forma de las cónicas cuando la excentricidad tiende a cero o a uno. Previo a la aplicación del cuestionario, explicamos su objetivo y describimos de manera general su contenido. El cuestionario fue aplicado por el investigador en los diferentes lugares de trabajo de los participantes. Se informó a los participantes que su colaboración era voluntaria, con derecho a interrumpirla en cualquier momento y que, sus respuesta serían anónimas, confidenciales y solo se utilizarían para los fines de esta investigación. Los docentes dieron verbalmente su consentimiento para participar. En una segunda etapa pedimos, a los profesores participantes, que exploraran unos applets diseñados con GeoGebra, incrustados en el editor de contenido educativo eXeLearning y alojados en la web por medio del servidor gratuito drv.tw, en donde se ilustran diversas situaciones de curvas límite cuando $e \to 0$ y cuando $e \to 1$, para lo cual se les proporcionó la liga: https://z7xdb7ow3mk7bmhvyk2w9g.on.drv.tw/Curvas_y_excentricidades_lmite/.

Después de que los profesores interactuaron con los applets y, como tercera etapa, se les aplicó nuevamente el cuestionario original, se llevaron a cabo entrevistas no estructuradas para profundizar en sus argumentos. Las entrevistas fueron personales y se llevaron a cabo en un aula escolar habilitada para tal fin. La entrevista fue transcrita por el investigador. Contrastamos sus respuestas de la primera aplicación del cuestionario con sus respuestas a la segunda aplicación y, procedimos a identificar su CCK y SCK, relacionados con la excentricidad. A continuación, presentamos el cuestionario, cuyas respuestas, junto con la información obtenida de las entrevistas no estructuradas, nos permitieron alcanzar los objetivos planteados en este artículo.

Cuestionario

Indicaciones: Por favor responda las siguientes preguntas procurando ser lo más explícito posible.

1. ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor cero?
2. ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?
3. ¿Qué ocurre con la forma de la hipérbola cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?

Sobre la exploración de los applets

Durante cuatro semanas, los participantes interactuaron con los applets diseñados con GeoGebra. El número de sesiones por semana, así como el tiempo de cada sesión, quedó a criterio de cada participante. Los applets muestran diversas situaciones de curvas límite cuando $e \to 0$ y cuando $e \to 1$, tanto en el plano como en el espacio. En el espacio las variaciones de las curvas se logran mediante un cono fijo y un plano que se mueve a voluntad. Por ejemplo, se muestra cómo la elipse puede tender a un segmento, tanto en el acercamiento bifocal como en el acercamiento cono-plano. En este último acercamiento quizá sea difícil imaginar cómo podríamos variar el plano para lograr esta situación de límite, el applet nos muestra cómo hacerlo. En el acercamiento foco-directriz, precisamos lo que significa que las elipses tiendan a una parábola. Esta concepción de la parábola como límite de elipses comúnmente está soportada en lo que se percibe en el acercamiento cono-plano, lo cual tiene un rasgo de creencia. Cada participante exploró las actividades en el momento y lugar que les fuese más conveniente.

Análisis de resultados previos a la exploración de los applets

Analizamos las respuestas de cada pregunta del cuestionario, agrupamos aquellas que tuvieron coincidencias y las categorizamos según las categorías de análisis mostradas en las tabla 3 y tabla 4, colocando entre corchetes su respectiva codificación. A continuación, se muestra el análisis de resultados previos a la exploración de los applets.

Pregunta 1

Los cinco participantes expresaron que cuando $e \to 0$, la elipse se vuelve cada vez más 'redonda'. Explicaron que esto ocurre porque cuando $e = 0$ la curva es una circunferencia [CCK-AB-4].

Pregunta 2

Cuatro participantes mencionaron que cuando $e \to 1$, la elipse se vuelve cada vez más alargada [CCK-AB-3]. Explicaron que $e = c/a$ [CCK-AB-1], por lo que $e \to 1$ solo cuando la distancia entre los focos tiende a ser igual a la distancia entre los vértices y en ese caso la elipse se vuelve alargada. El participante restante comentó que $b \to 0$, por lo que la elipse se 'aplasta' hasta parecer un segmento (figura 9). Aunque este participante no hace alusión a la distancia entre los focos, la figura que muestra pone en evidencia que se basa en que $c \to a$, con $a > 0$ fija y que la elipse tiende al segmento de extremos los vértices [SCK-AB-5].

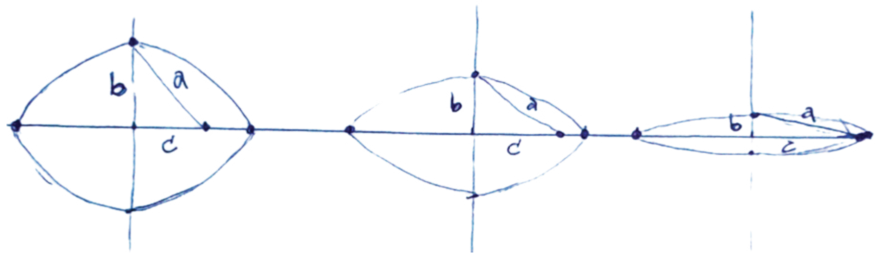

Figura 9. La elipse tiende a un segmento.

Pregunta 3

Los cinco participantes expresaron que cuando $e \to 1$ la hipérbola tiende a una parábola. Tres participantes justificaron diciendo que la parábola tiene excentricidad uno [CCK-AFD-4], por lo que la si la excentricidad de la hipérbola tiende a uno, entonces la hipérbola tiende a la parábola. Los otros dos participantes no explicaron su respuesta.

Análisis de resultados posteriores a la exploración de los applets

Las respuestas a cada pregunta del cuestionario fueron analizadas, se agruparon aquellas que tuvieron coincidencias y se categorizaron, colocando entre corchetes su respectiva codificación, según las categorías de análisis mostradas en las tabla 1 y tabla 2. Las respuestas que guardaron similitud con las obtenidas en el cuestionario aplicado previo a la fase de experimentación fueron omitidas.

Pregunta 1

Tres participantes expresaron que cuando $e \to 0$, la elipse, además de tender a la circunferencia, también puede tender a un punto [SCK -AFD-1] si se le considera como el lugar geométrico de un punto P que cumple ciertas condiciones en relación con un punto y una recta, ambos fijos [CCK-AFD-1]. Ninguno de ellos fue explícito respecto a las condiciones que debe cumplir P, así como tampoco explicaron por qué la elipse tiende a un punto. Los otros dos profesores no mostraron nuevos conocimientos.

Pregunta 2

Dos participantes respondieron que si $e \to 1$, la elipse tiende a un segmento; uno de ellos explicó “cuando los focos tienden hacia los vértices el semieje menor tiende a cero y entonces la elipse se ‘alarga’ hasta parecer un segmento” [SCK-AB-5). Un tercer docente, sin dar explicaciones, comentó: “la elipse puede tender a un segmento o a una parábola, dependiendo del enfoque que se considere”. Un cuarto participante, de manera incompleta, explicó: “cuando el plano que corta al cono se mueve de manera que su ángulo de inclinación y el ángulo en la base del cono tiendan a ser iguales, la elipse tiende a una parábola” [SCK-ACP-3]. El participante restante no mostró nuevos conocimientos.

Pregunta 3

Cuatro participantes expresaron que si $e \to 1$ la hipérbola tiende a una parábola porque PF y PL tienden a ser iguales y la condición $PF = PL$ corresponde a una parábola (SCK-AFD-2). Estos mismos profesores agregaron que también puede tender a dos rayos [SCK-ACP-7), aunque solo uno explicó: “Si el plano que corta al cono tiende “a estar” sobre una generatriz del cono, entonces la hipérbola se cierra cada vez más hasta parecer dos semirrectas”. El participante restante no mostró nuevos conocimientos.

Entrevistas no estructuradas

Mostramos, a continuación, algunas partes de las entrevistas con los profesores participantes, que llevamos a cabo después de que exploraron los applets. Varios de ellos mostraron rasgos de haber adquirido nuevos conocimientos, tanto CCK como SCK, aunque tuvieron dificultades con sus explicaciones.

Entrevista a uno de los tres profesores que respondieron que la elipse tiende a un punto.

Investigador En tu respuesta a la pregunta uno comentas que la elipse puede tender a un punto cuando $e \to 0$, ¿puedes decirme por qué la elipse tiende a un punto? Por favor, explícame lo más que puedas tus ideas.

Profesor	Bueno, en una de las actividades [en uno de los applets] se define la excentricidad como un cociente: la distancia de todo punto P de la elipse al foco, entre la distancia de P a la directriz [CCK-AFD-2]. Entonces, cuando hacemos tender la excentricidad a cero, la elipse se vuelve cada vez más pequeña porque la distancia P al foco tiende a cero, o sea que todos los puntos de la elipse tienden al foco, que está fijo [SCK-AFD-1].

El profesor se estaba refiriendo al acercamiento Foco-Directriz.

Entrevista al profesor que respondió que "la elipse puede tender a un segmento o a una parábola dependiendo del enfoque que se considere".

Investigador	En tu respuesta a la pregunta dos, comentas que la elipse puede tender a un segmento o a una parábola. ¿Recuerdas en qué circunstancias ocurren estos dos casos? Por favor, explícame lo más que puedas, tus ideas.
Profesor	Dependiendo del enfoque, la elipse puede tender a curvas diferentes, aunque también dentro de un mismo [enfoque] pasa eso. Recuerdo que en el enfoque tridimensional [ACP] $e \to 1$ de dos formas y en una de ellas, la elipse tiende a un segmento y en la otra a una parábola.
Investigador	¿Puedes explicar esas dos formas a las que haces referencia?
Profesor	Bueno, tienen que ver con la forma en que el plano que corta al cono gira sobre un vértice fijo en el cono. Si el plano gira de manera que la elipse se hace cada vez más grande y los focos están cada vez más distantes entre ellos, la elipse tiende a la parábola [SCK-ACP-4]. Y si el plano inclinado gira de manera que el otro vértice de la elipse se va hacia el vértice del cono, entonces la elipse se hace cada vez más alargada y tiende a un segmento [SCK-ACP-5].
Investigador	¿Y qué relación hay entre los ángulos α y β cuando las elipses tienden a la parábola?
Profesor	No recuerdo, presté más atención a lo que le sucedía a la elipse al mover el plano inclinado.
Investigador	¿Recuerda la posición límite del plano inclinado con respecto a la generatriz del cono, en cada caso?
Profesor	No, lo siento, no presté atención a eso.

Entrevista al participante que respondió: "Si el plano que corta al cono tiende a estar sobre una generatriz del cono, entonces la hipérbola se cierra cada vez más hasta parecer dos semirrectas".

Investigador: Por favor, coménteme ¿por qué en su respuesta a la pregunta tres dice que la hipérbola tiende a dos semirrectas cuando $e \to 1$?

Profesor: Mire, una rama de la hipérbola está en el cono superior y la otra rama en el cono inferior. Cuando giramos el plano inclinado para que la excentricidad tienda a uno, ambas ramas de la hipérbola se cierran cada vez más y se asemejan [cada a una] a una semirrecta [SCK-ACP-7].

Investigador: ¿Y qué relación hay entre los ángulos α y β cuando las hipérbolas tienden a dos semirrectas o rayos?

Profesor: La elipse tiende a dos semirrectas cuando $e \to 1$, entonces, para que la excentricidad tienda a uno los ángulos α y β deben ser casi iguales, por lo de la fórmula $e = \operatorname{sen} \propto / \operatorname{sen} \beta$, pero como el cono es fijo, entonces β es fijo y como el plano rota sobre un vértice fijo, entonces α debe tender a β, sí eso. Recuerdo que hay dos casos en los que $\alpha \to \operatorname{sen} \beta$, pero la hipérbola tiende a diferentes curvas. Estoy seguro de que un caso es el de las dos semirrectas [SCK-ACP-7].

Investigador: Estas haciendo alusión al ACP, ¿recuerdas cuál era la posición límite del plano en los dos casos que mencionas?

Profesor: ¡Ya, lo tengo!, como le decía, en ambos casos $\alpha \to \operatorname{sen} \beta$, pero el plano inclinado tiende a posiciones diferentes y por eso son diferentes curvas a las que tiende la hipérbola, aunque solo recuerdo uno. Cuando el plano inclinado rota sobre uno de los vértices de la hipérbola y tiende a estar sobre una generatriz del cono [tiende a ser tangente al cono], entonces la hipérbola tiende a dos rayos [SCK-ACP-7].

RESULTADOS

Identificados y clasificados los conocimientos exhibidos por los docentes, tanto en los cuestionarios como en las entrevistas, mostramos a continuación los resultados de este trabajo.

Respecto a la forma de la elipse cuando $e \to 0$

Previo a la exploración de los applets, los profesores solo relacionaban la forma límite de la elipse con la circunferencia cuando $e \to 0$. Para justificar se apoyaron en el CCK de que a la circunferencia se le considera un caso especial de la elipse y se le asigna $e = 0$. Posterior a esta fase de experimentación, los docentes mostraron SCK de aspectos relacionados con la excentricidad de las cónicas desde el AFD, pues ya hacían alusión al punto como curva límite de la elipse cuando $e \to 0$. Los participantes no dieron muestras de haber adquirido CCK o SCK relacionado con la forma de la elipse cuando $e \to 0$ desde el ACP.

Respecto a la forma de la elipse cuando $e \to 1$

Previo a la exploración de los applets, el CCK y el SCK que los profesores exhibieron estuvieron limitados a aspectos relacionados con la excentricidad de las cónicas desde el AB, pues solo relacionaban la forma límite de la elipse con un segmento. Posterior a la fase de exploración, los docentes mostraron SCK de aspectos relacionados con la excentricidad de las cónicas desde el ACP, ellos identificaron la forma límite de la elipse con un segmento o una parábola. No les causó conflicto que hubiese ambas situaciones. Los participantes exhibieron haber adquirido SCK relacionado con la forma de la elipse cuando $e \to 1$ desde el AFD.

Respecto a la forma de la hipérbola cuando $e \to 1$

Previo a la exploración de los applets, todos los profesores exhibieron CCK de aspectos relacionados con la excentricidad de la hipérbola desde el AFD al expresar que la forma límite de la hipérbola cuando $e \to 1$ es la parábola, justificando que esto sucede porque la parábola tiene excentricidad $e = 1$. Posterior a esta fase de experimentación, los docentes mostraron SCK de aspectos relacionados con la excentricidad de las cónicas desde el ACP, al justificar sus respuestas apoyados en la posición del plano que corta al cono doble. Los profesores también dieron muestras de haber adquirido SCK, al señalar que las cónicas pueden tender a diferentes curvas límite dependiendo del enfoque desde el que se estudie la excentricidad, y reconocieron que esto también puede ocurrir dentro de un mismo acercamiento.

Los resultados muestran que los profesores desarrollaron SCK de aspectos relacionados con la excentricidad de las cónicas desde diferentes acercamientos después de explorar las actividades diseñadas.

CONCLUSIONES

Apoyándonos en los resultados obtenidos, podemos decir que el CCK y el SCK pueden reafirmarse, fortalecerse e incluso incrementarse cuando los profesores interactuan con las actividades diseñadas exprofeso. En la investigación, los applets que diseñamos brindaron a los profesores la oportunidad de explorar relaciones geométricas que hay entre la forma de la cónica y su excentricidad cuando esta tiende a cero o a uno. La gama de relaciones geométricas exploradas ofreció a los docentes la posibilidad de reafirmar, fortalecer, incrementar y profundizar su conocimiento matemático respecto a la excentricidad de las cónicas desde diferentes acercamientos.

Para finalizar, reconocemos que las actividades de los docentes se limitaron a la exploración de elementos y relaciones variables en construcciones geométricas ya terminadas. Una tarea pendiente, probablemente, podría ser que los docentes realizaran construcciones geométricas incrustadas en cada una de las actividades. Tal vez, esa experiencia podría ayudarles a encontrar más relaciones entre las diferentes definiciones de excentricidad, a descubrir los elementos en que se basan tales definiciones y así comprender con mayor profundidad cómo se obtienen las curvas límite a las que tienden las cónicas cuando la excentricidad tiende a cero o a uno. En consecuencia, enriquecerán su SCK. Las definiciones matemáticas para la enseñanza requieren que el profesor sea el primero en comprenderlas (Ball and Bass, 2003), de ahí la importancia del SCK.

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1966). *Calculus*, Vol I, (Second edition). John Wiley & Sons.

Ball, D. L., y Bass, H. (2003). Toward a Practice-based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, *26*, 3-14.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., ... Tsai, Y. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Blömeke, S., y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *44*(3), 223-247. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7

Brannan, D. A., Esplen, M. F., y Gray, J. J. (2012). *Geometry* (Second edi). Cambridge University Press.

Edwards, C. H., y Penney, D. E. (1994). *Calculus with analytic geometry* (Fourth edi). Prentice-Hall Inc.

Even, R., y Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 1-20.

Fennema, E., y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Macmillan.

Foley, G. D. (2011). The Shape of an Ellipse. *The Mathematics Teacher, 105*(4), 274-279. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.4.0274

Hahn, A. J. (1998). *Basic Calculus From Archimides to Newton to its Role in Science*. SpringerVerlag.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (Ninth Edit). Brooks/Cole CENGAGE Learning.

Lehmann, C. H. (1964). *Analytic Geometry*. J. Willey and Sons.

Leithold, L. (1981). *The Calculus, with Analytic Geometry* (Fourth edi). Harper & Row.

Mapolelo, D. C., y Akinsola, M. K. (2015). Preparation of Mathematics Teachers : Lessons from Review of Literature on Teachers ' Knowledge , Beliefs , and Teacher Education, *3*(4), 505-513. https://doi.org/10.12691/education-3-4-18

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.

Philipp, R. A. (2014). Commentary on Section 3: Research on Teachers' Focusing on Children's Thinking in Learning to Teach: Teacher Noticing and Learning Trajectories. En J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest, & SpringerLink (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (1.a ed., pp. 285-293). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_15,

Rider, P. R. (1947). *Analytic Geometry*. The MacMillan Company.

SEP. (2017). *Modelo educativo para la educación obligatoria* (Segunda Ed). https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: A Conception of Teacher Knowledge. *Educational Researcher*, *10*(1), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004
Simmons, G. F. (1996). *Calculus with Analytic Geometry* (Second edi). McGraw-Hill, Inc.

Autor de correspondencia

Antonio Rivera-Figueroa

Dirección: Departamento de Matemática Educativa, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, Ciudad de México, Código Postal 07360.
arivera@cinvestav.mx