RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICO EN OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

FANNY MELISSA ROJAS JUAGINOY
SILVANA NATHALY CIFUENTES BUCHELI

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICO EN OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

FANNY MELISSA ROJAS JUAGINOY
SILVANA NATHALY CIFUENTES BUCHELI

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Catalina María Rúa Alvarez
Doctora en Matemática Aplicada
Co-Asesor
John Hermes Castillo Gómez
Doctor en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

Nota de Aceptación

Catalina María Rúa Alvarez

Directora de Tesis

John Hermes Castillo Gómez

Co-Director de Tesis

Luis Fernando Cáceres Duque

Jurado

Libardo Manuel Jácome

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 7 de 2018

Este trabajo está dedicado a:

Nicole Manuela, por ser mi mayor fuente de motivación e inspiración para querer superarme día a día para un mejor futuro, a mis padres Fanny y Réne por su apoyo, confianza y amor incondicional y a mis hermanos por ser parte de mi vida.

Melissa

Este trabajo está dedicado a:

Miguel Angel, por creer siempre en mí, por brindarme su amor incondicional, por su nobleza y por ser mi mayor motivación para esforzarme por el presente y el mañana.

A mis padres, Ivelia y Arturo, por su firme y constante apoyo y por permitirme crecer día a día a su lado.

Nathaly

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Agradecimientos

Al termino de este trabajo de grado es mi deseo agradecer de todo corazón a mi familia, quienes creyeron en mi y me apoyaron siempre en cada decisión, en especial gracias a mis padres por haberme permitido cumplir con excelencia el desarrollo de esta tesis. Gracias a mis abuelitos Hernando y Carmén por su cariño y apoyo.

Gracias a los profesores Catalina Rúa y John Castillo por guiarme en el proceso para culminar esta etapa tan importante para mí, gracias por brindarme su confianza, su apoyo, paciencia y comprensión, por permitirme aprender lo mejor de ustedes. Realmente fue un privilegio contar con su ayuda y colaboración.

Gracias a las personas de la Universidad de Nariño, por su atención y amabilidad durante mi estadía como estudiante. Mil gracias a todos mis profesores por todo lo aprendido, en particular a los profesores Edinsson Fernández y Andrés Chávez.

Gracias a todos mis amigos y compañeros de la UDENAR, en especial a Mónica y Yadira por su valiosa amistad y compañerismo, las aprecio mucho.

Gracias a Nathaly, mi compañera de tesis, por compartir conmigo la autoría de este bonito trabajo y por brindarme su amistad.

Gracias a la vida por este triunfo, gracias a todas las personas que me apoyaron y creyeron en la realización de esta tesis.

Melissa Rojas

Agradecimientos

Al finalizar este trabajo me invade un gran sentimiento de agradecimiento. Muchas personas confiaron en mis habilidades y fueron un gran apoyo en el transcurso de esta etapa y agradezco a Dios por haberlas puesto en mi camino.

Le agradezco a la Universidad de Nariño porque me abrió las puertas y me brindó un bello espacio de aprendizaje, junto con excelentes docentes, quienes con su dirección y talante han dejado en mí una profunda huella que espero compartir con otros en mi futuro académico. En especial quiero decirles gracias a los docentes: Catalina Rúa y John Castillo, mis asesores, quienes son parte vital del avance en este trabajo de grado y sin ellos este logro no sería lo mismo, gracias por ser un ejemplo de humildad, carácter profesional, pero sobre todo, porque con sus enseñanzas me han convertido en una mejor persona. También al docente Edinsson Fernández, quien con su conocimiento y consejos me llevó a escoger de manera acertada la rama de la geometría y de alguna u otra manera me ayudó a amar esta área de las matemáticas.

Quiero agradecerles de todo corazón a mi hijo Miguel Angel y a mis padres, porque son la fuerza que me impulsa a seguir adelante cada día de mi vida, me han acompañado en todo momento con un apoyo tan incondicional que no me alcanzaría la vida para agradecerles.

A mis amigos gracias, porque hicieron mis días más alegres y bellos, no me dejaron caer en momentos de debilidad e inculcaron en mí el significado de amistad, especialmente a Nathaly y Deiby, mis amigas de mil batallas, a Melissa, mi compañera y cómplice en la realización de este trabajo y a Ángeles por su tiempo y bellas palabras.

Por último, gracias totales a mi compañero de vida, Jeison. Sin duda contar contigo es mi mejor regalo. Por ti, para ti y por nosotros.

Nathaly Cifuentes

Resumen

Los problemas de Olimpiadas matemáticas no son problemas comunes, sino que también requieren un conocimiento profundo, ingenio, creatividad y desarrollo continuo de habilidades, tales como estrategias de resolución de problemas. Todas estas habilidades se adquieren principalmente a través de la práctica.

Este trabajo hizo énfasis en resolver problemas geométricos que están presentes en Olimpiadas matemáticas; la geometría es un área de las matemáticas que ha desaparecido progresivamente de la educación escolar. Sin embargo, se ha encontrado que la presencia de problemas geométricos es bastante significativa en estos concursos, por lo tanto, el estudio de esta área merece la importancia y la seriedad que se le da a otras áreas de las matemáticas.

En este trabajo, se presentan varias estrategias de resolución para problemas geométricos. Para lograr este objetivo, inicialmente se recuerda una serie de conceptos geométricos que podrían ser útiles para resolver problemas presentados en este trabajo. Finalmente, se proponen algunos problemas para ser resueltos con las estrategias estudiadas; algunos de ellos fueron tomados de Olimpiadas matemáticas y otros son el resultado de este trabajo.

Palabras clave. Geometría, Olimpiadas matemáticas, Resolución de problemas, Estrategias de resolución de problemas, AGD.

Abstract

Problems presented in mathematical Olympiads are not common problems, they also require deep knowledge, ingenuity, creativity and continuous skills development such as problem solving strategies. All these skills are acquired mainly through practice.

This work made emphasis on solving geometric problems that are present in mathematical Olympiads; geometry is an area of mathematics that has progressively disappeared from school education. However it has been found that the presence of geometric problems is quite significant in these contests, therefore the study of this area deserves the importance and seriousness that is given to other areas of mathematics.

In this work, several resolution strategies for geometric problems are presented. To achieve this aim, initially there is a collection of geometric concepts that could be useful to solve problems presented in this work. Finally, we proposed some problems to be solved with the studied strategies; some of them taken from mathematical Olympiads and some others are result of this work itself.

Keywords. Geometry, Mathematical Olympiad, Problem solving, Strategies problem solving, AGD.

Índice general

Índice de figuras

Notación

Símbolos

$\cap$	Intersección.
$\cup$	Unión.
$\parallel$	Paralela.
$\perp$	Perpendicular.
$\angle$	Ángulo.
$\llcorner$	Ángulo recto.
$\triangle$	Triángulo.
$<$	Menor que.
$\leq$	Menor o igual que.
$>$	Mayor que.
$\geq$	Mayor o igual que.
$\cong$	Congruente.
$\neq$	Diferente.
$\in$	Pertenece.
$\notin$	No pertenece.
$\subset$	Contenido.
$\subseteq$	Contenido o igual.

Abreviaturas

APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad.
CM	Canguro Matemático.
CRM	Competencia Regional de Matemáticas.
EGMO	European Girls´ Mathematical Olympiad.
IMO	International Mathematical Olympiad.
OCM	Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

OIM	Olimpiada Iberoamericana de Matemática.
OLCOMA	Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas.
OM	Olimpiada de Mayo.
OMAR	Olimpiada Matemática Argentina.
OMCC	Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.
OMCS	Olimpiada Matemática de países del Cono sur.
OMEC	Olimpiada Matemática Ecuatoriana.
OMM	Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
OMPR	Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico.
OM-UDEA	Olimpiadas Matemáticas Universidad de Antioquia.
ORM-UDENAR	Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño.
ORM-UIS	Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander.
ORM-UNIVALLE	Olimpiadas Regionales de matemáticas Universidad del Valle.

Introducción

Las primeras competencias matemáticas nacionales fueron los concursos Eotvos de Hungría que iniciaron en 1894. A consecuencia de esto el Barón de Coubertin en 1896 dio paso a las olimpiadas de la época moderna en Atenas. En 1934, se realizó la primera olimpiada de matemáticas en Leningrado, hoy San-Petersburgo, y dos años más tarde se realizó la segunda en Moscú. Los problemas que se presentan en este tipo de certámenes difieren a los que usualmente se presentan en una clase tradicional de matemáticas, escenario donde el estudiante se limita a resolver problemas de una forma mecánica privándose del placer de resolver un verdadero problema. Al resolver un problema, el estudiante debe tener la oportunidad de adquirir habilidades y destrezas de gran utilidad, así esta nueva forma de aprender matemáticas empezó a tener gran aceptación y ya para los años 50, la Unión Soviética realizó estas competiciones. Más tarde, las olimpiadas se extendieron a otros países socialistas como Hungría, Rumania, Polonia, Alemania Oriental, Bulgaria y Checoslovaquia. En 1959, se llevó a cabo la primera Olimpiada Internacional de Matemáticas donde 7 países tuvieron participación y actualmente, son alrededor de 80 países los que participan en esta olimpiada.

Las matemáticas por lo general son vistas por los estudiantes como algo complicado y difícil de entender, esto quizá se deba a la suposición errónea que la enseñanza de esta ciencia debe estar dirigida solo para algunos estudiantes privilegiados que han sido dotados con ciertas habilidades matemáticas. En realidad cualquier persona es capaz de comprender esta ciencia por más difícil que parezca, solo se necesita una buena actitud para emprender esta tarea. Así, las olimpiadas matemáticas son algo más que un concurso, estas propician un escenario para estudiantes y profesores donde las matemáticas pueden aprenderse y enseñarse de tal manera que se desarrolle una actitud positiva hacia esta área, estimulando el estudio de las matemáticas de una manera amena, generando de esta forma el desarrollo de jóvenes talentos en la ciencia. Por otra parte, el tratar las matemáticas desde la resolución de problemas permite mejorar la práctica docente, dado que de esta manera se apoya la renovación y la innovación del quehacer matemático a través de actividades que son complementarias a las que se desarrollan en la escuela.

La realización de olimpiadas matemáticas se desarrolla en el campo de la resolución de problemas, habilidad que ha sido considerada una de las más esenciales dentro de la educación matemática. En este sentido, George Polya afirma en su texto "Como plantear y resolver problemas", que si bien la resolución de problemas es una actividad compleja es de gran importancia para la formación de cualquier individuo. Al igual que Polya, otros autores han indagado en este campo y han optado por crear una serie de pasos que se pueden tener en cuenta para resolver problemas (Guzmán, 1995; Santos, 2008; Schoenfeld, 1985). Polya, por ejemplo, propone que para empezar se debe comprender el problema, luego se debe idear un plan, ejecutarlo y finalmente hacer una visión retrospectiva del proceso de solución. Aunque cabe aclarar que no basta con seguir los pasos propuestos por

Polya para conseguir el éxito en esta tarea, dado que es importante tener en cuenta el ingenio, la creatividad, la perseverancia y también las experiencias anteriores.

Por otro lado, la geometría es un área de las matemáticas que aunque bien es útil e importante, se ha ido desplazando de los currículos escolares, en las aulas de clase muchas veces no se menciona y en caso de ser así, se hace de una forma muy superficial, presentando a los estudiantes la geometría como algo poco útil y que se limita muchas veces solo al conocimiento de diferentes figuras geométricas al cálculo de áreas y perímetros con el uso mecánico de fórmulas que ya están dadas (Gamboa and Ballestero, 2010). A pesar de esta situación, en diferentes olimpiadas matemáticas la geometría juega un papel importante y por tanto la resolución de problemas de este tipo merece un estudio profundo que con este trabajo se pretende alcanzar aunque sea de manera parcial.

En este trabajo se presentan diferentes estrategias útiles para la resolución de problemas de tipo geométrico, para esto se desarrollan cinco capítulos. En el Capítulo 1, se presentan conceptos, definiciones y teoremas de geometría que serán útiles tanto para la comprensión del texto, como para la resolución de problemas aquí presentados. En el Capítulo 2, se alude en primer lugar a la necesidad del estudio de la geometría, y en segundo lugar a las olimpiadas matemáticas, además se exponen algunos métodos, estrategias o heurísticas de resolución de problemas matemáticos. Seguidamente en el Capítulo 3, se exponen seis estrategias de geometría mediante el tratamiento y resolución de diferentes problemas. Luego para poner en práctica estas estrategias, en el Capítulo 4 se solucionan algunos problemas tomados de diferentes olimpiadas. Finalmente, en el Capítulo 5, se plantea una serie de problemas que el estudiante puede resolver mediante las estrategias presentadas, además se incluyen como resultado de este trabajo problemas de autoría propia.

Capítulo 1

Preliminares

Resolver con éxito un problema geométrico depende de diferentes factores como las habilidades y la creatividad de la persona que lo enfrenta, pero también son de gran importancia los conocimientos geométricos que se poseen, por ello en el presente capítulo se presentan de forma breve algunos conceptos geométricos básicos, definiciones, teoremas, notaciones y observaciones que se utilizarán a lo largo de este texto y se consideran importantes para la comprensión de los temas presentados en capítulos siguientes.

La tarea de definir un término se refiere a dar su significado en otros términos que se suponen conocidos. En matemáticas existen dos tipos de términos, algunos se aceptan como términos primarios y no se les define, y los otros se consideran como términos derivados y se definen de un modo formal, es decir, que se da su significado por medio de términos primarios y de términos derivados, pero previamente definidos. Así, no es posible dar una definición formal de punto, recta y plano, puesto que estos se consideran términos primarios, sin embargo en este trabajo se presentan sus nociones, las cuales están basadas en lo descrito en Hemmerling (1971).

Un ***punto*** es una figura geométrica sin dimensión, la cual describe una posición en el espacio y por tanto no tiene longitud, área ni volumen. Por lo general los puntos se denotan con letras mayúsculas (A, B, C,...). Una ***recta*** describe una sucesión infinita de puntos, situados en una misma dirección y que se prolongan en sentidos opuestos, estas se denotan con letras minúsculas (l, m, n,...) o también por ejemplo de la forma $\overleftrightarrow{AB}$, donde A y B son puntos pertenecientes a la recta. Finalmente un ***plano*** es una superficie bidimensional que se extiende infinitamente en todas sus direcciones y que usualmente se denota con letras griegas minúsculas (α, β, ϕ,...).

Así, con las nociones de *punto*, *recta* y *plano* se presentan las siguientes observaciones y definiciones.

Observación 1.1. *(Observaciones derivadas de recta, punto y plano).*

- *Por un punto A pasan infinitas rectas.*
- *Dados dos puntos A y B, por ellos pasa una y solo una recta.*
- *La intersección de dos rectas es un punto.*
- *Si A, B y C son puntos pertenecientes a l se dice que A, B y C son puntos colineales y se denota A-B-C.*
- *Un plano puede determinarse con tres puntos A, B y C no colineales o con una recta l y un punto A exterior a l.*
- *La intersección de dos planos es una recta.*
- *Una recta divide un plano en dos semiplanos.*

Definición 1. *(Semirrecta). Sea O un punto perteneciente a una recta l, O divide a l en dos semirrectas de origen O. Así, la* ***semirrecta*** *es el conjunto formado por O y todos los puntos que le siguen, o por O y todos los puntos que le anteceden. Las semirrectas se denotan $\overrightarrow{OA}$, donde O es el origen de la semirrecta y A un punto perteneciente a ella distinto de O (ver Figura 1.1).*

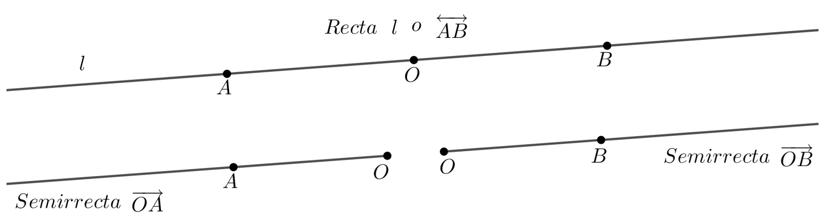


Figura 1.1: Semirrecta.

Definición 2. *(Segmento). Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a una recta l, el conjunto de puntos formado por A, B y todos los puntos sobre la recta l comprendidos entre ellos, se llama* ***segmento*** *y se denota $\overline{AB}$, con A y B como extremos del segmento (ver Figura 1.2).*

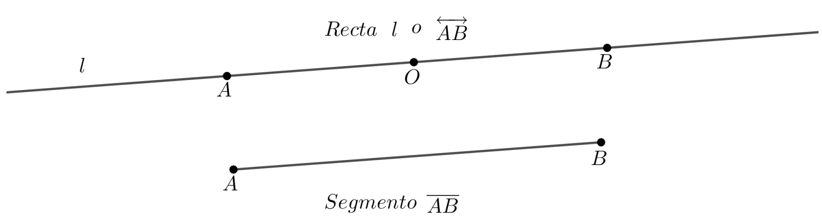


Figura 1.2: Segmento.

Para hacer referencia a la medida del segmento $\overline{AB}$ se usará la notación $\overline{AB}$ seguida del símbolo $=$ y luego la dimensión o valor correspondiente a su medida.

Los distintos tipos de rectas en geometría se distinguen según la relación y posición entre dos de ellas, así es importante que estas se tengan en cuenta en el proceso de resolución de problemas de tipo geométrico.

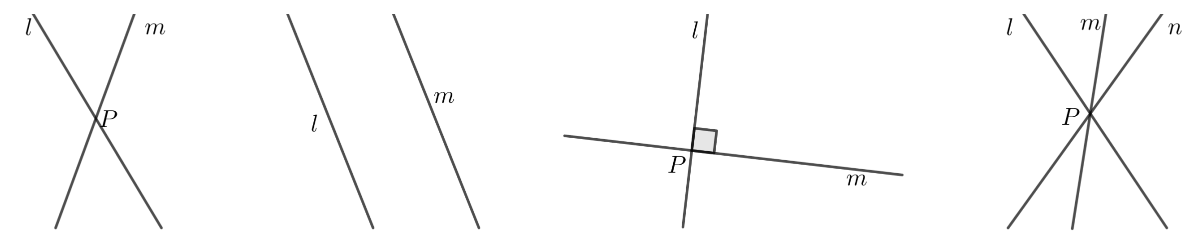
Definición 3. *(Rectas secantes). Dos* ***rectas*** *son* ***secantes*** *si se intercectan en un punto.*

Definición 4. *(Rectas paralelas). Dos* ***rectas*** *son* ***paralelas*** *si son coplanares y no se intercectan, donde la notación* $\|$ *indica dicha relación.*

Definición 5. *(Rectas perpendiculares). Dos* ***rectas*** *son* ***perpendiculares*** *si se intercectan formando un ángulo recto, esta relación se denota con* $\perp$.

Definición 6. *(Rectas concurrentes). Tres o más* ***rectas*** *son* ***concurrentes*** *si se intercectan todas en un mismo punto.*

En la Figura 1.3-a, l y m son rectas secantes puesto que $l \cap m = P$; la Figura 1.3-b, dado que $l \cap m = \emptyset$, representa las rectas paralelas l y m, es decir $l \| m$; en la Figura 1.3-c las rectas son perpendiculares y así $l \perp m$. Finalmente, en la Figura 1.3-d, l, m y n son tres rectas concurrentes, así $l \cap m \cap n = P$.



a)Rectas secantes *b)Rectas paralelas($l \| m$)* *c)Rectas perpendiculares($l \perp m$)* *d)Rectas concurrentes*

Figura 1.3: Tipos de rectas.

Otra parte importante en la resolución de problemas geométricos son los términos de congruencia y semejanza, estos serán utilizados a lo largo del capítulo en diferentes definiciones y observaciones, de modo que resulta conveniente aclarar dichos términos y sus notaciones.

Definición 7. *(Congruencia). Dos* ***figuras geométricas*** *son* ***congruentes*** *y se denota* $\cong$ *si tienen la misma forma y el mismo tamaño o dimensión, sin importar su orientación o posición.*

Definición 8. *(Semejanza). Dos* ***figuras geométricas*** *son* ***semejantes*** *y se denota* $\sim$, *si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño o dimensión. En este caso tampoco influye la orientación o posición de las figuras geométricas, es decir, dos figuras semejantes pueden tener orientación o posición distinta.*

Observación 1.2. *Dos figuras semejantes y con el mismo tamaño, resultan siendo congruentes entre si.*

En este trabajo, se utiliza el símbolo $\cong$ para la congruencia de figuras geométricas. Por otro lado, para dimensiones, longitudes y medidas se usa el símbolo $=$.

Definición 9. *(Punto medio de un segmento). El* ***punto medio de un segmento*** *es un punto que pertenece al segmento y lo divide en dos segmentos congruentes.*

Definición 10. *(Mediatriz de un segmento). La* ***mediatriz de un segmento*** *es la recta perpendicular trazada por el punto medio del segmento.*

En la Figura 1.4-a, C es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, con $A - C - B$. Además, si se traza por C la recta perpendicular a $\overline{AB}$ se obtiene la mediatriz de dicho segmento (ver Figura 1.4-b).

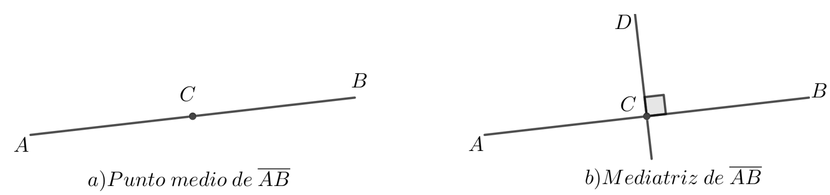


Figura 1.4: Punto medio y mediatriz de un segmento.

Los ángulos también son de mucha importancia dentro de la resolución de problemas. Así en lo que sigue se expone el concepto de ángulo y algunas definiciones que se derivan de dicho concepto.

Definición 11. *(Ángulo). Un* ***ángulo*** *está formado por dos semirrectas distintas que tienen el mismo origen y se denota con el símbolo $\angle$ seguido de tres letras mayúsculas correspondientes a tres puntos, el primero perteneciente a una de las semirrectas, el segundo es el punto de origen de las dos semirrectas que se conoce con el nombre de* ***vértice del ángulo*** *y el tercero pertenece a la otra semirrecta. En algunos casos también se usará para denotar ángulos, el símbolo $\angle$ seguido de una letra griega minúscula (α, β, θ,...).*

Para hacer referencia a la medida de un ángulo, se usará alguna de las notaciones para ángulo descritas anteriormente seguida del simbolo $=$ y luego la dimensión o valor correspondiente a su medida.

Definición 12. *(Bisectriz de un ángulo). La* ***bisectriz de un ángulo*** *es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo, está en su interior y lo divide en dos ángulos congruentes.*

En la Figura 1.5-a se representa $\angle AOB$ con O como vértice y en la Figura 1.5-b se tiene $\overrightarrow{OC}$ que es la mediatriz de dicho ángulo, puesto que $\angle AOC \cong \angle COB$.

Los ángulos se pueden clasificar de acuerdo a su medida, a su posición, a la suma entre dos de ellos y también de acuerdo a su posición al cortar dos rectas con una transversal, como se muestra a seguir.

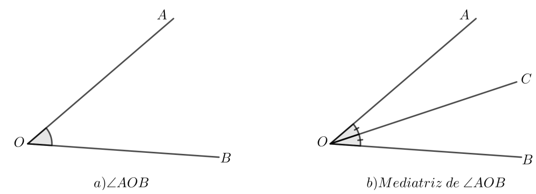


Figura 1.5: Ángulo y bisectriz de un ángulo.

Definición 13. *(Clasificación de ángulos según su medida). Los ángulos pueden clasificarse según su medida así:*

- ***Ángulo recto****: Un ángulo es recto si mide* $90°$.
- ***Ángulo agudo****: Un ángulo es agudo si mide menos de* $90°$.
- ***Ángulo obtuso****: Un ángulo es obtuso si mide más de* $90°$.
- ***Ángulo llano****: Un ángulo es llano si mide* $180°$.

Un ejemplo sobre la clasificación de diferentes ángulos según su medida se presenta en la Figura 1.6-a hasta la figura 1.6-d.

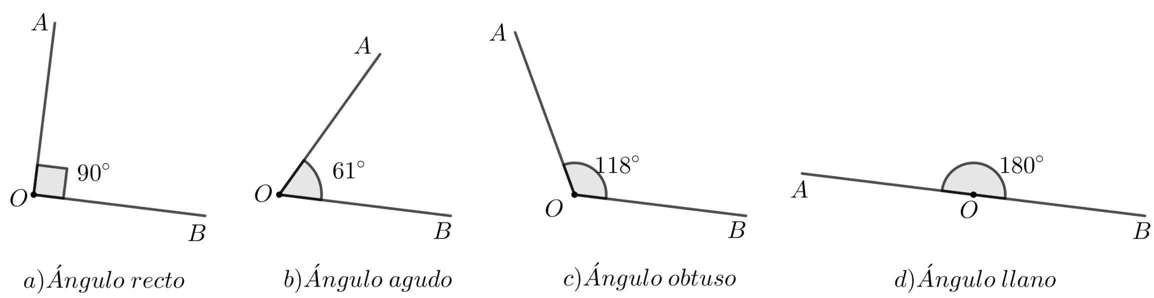


Figura 1.6: Clasificación de ángulos según su medida.

Definición 14. *(Clasificación de ángulos según su posición). Los ángulos pueden clasificarse según su posición como:*

- ***Ángulos adyacentes****: Dos ángulos son adyacentes si tienen el mismo vértice y un lado común.*
- ***Ángulos opuestos por el vértice****: Dos ángulos formados por dos rectas secantes que no son adyacentes, se llaman opuestos por el vértice.*

En la Figura 1.7 se tiene que $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos adyacentes con vértice común O, y los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\theta$ son opuestos por el vértice O.

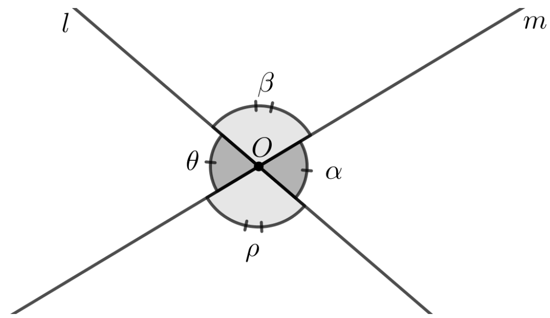


Figura 1.7: Clasificación de ángulos según su posición.

Observación 1.3. *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Así en la Figura 1.7 se tiene que* $\angle\alpha \cong \angle\theta$ *y* $\angle\beta \cong \angle\rho$.

Definición 15. *(Clasificación de ángulos según su suma). Los ángulos pueden clasificarse según la suma entre dos de ellos como:*

- ***Ángulos complementarios****: Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es* 90° *(ver Figura 1.8-a).*
- ***Ángulos suplementarios****: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es* 180° *(ver Figura 1.8-b).*
- ***Ángulos conjugados****: Dos ángulos son conjugados si la suma de sus medidas es* 360° *(ver Figura 1.8-c).*

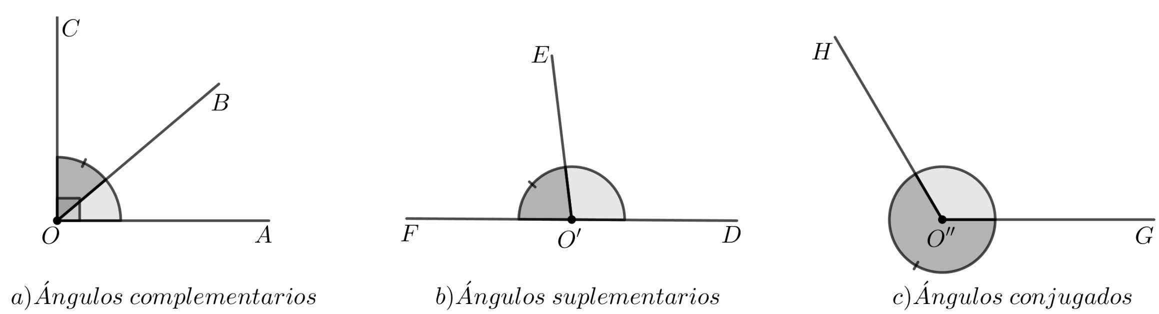


Figura 1.8: Clasificación de ángulos según su suma.

Observación 1.4. *Los ángulos adyacentes son suplementarios. Así en la Figura 1.7 se tiene por ejemplo que* $\angle\alpha$ *es el suplemento de* $\angle\beta$ *y* $\angle\beta$ *es el suplemento de* $\angle\theta$.

Definición 16. *(Ángulos formados por dos rectas y una transversal). Si* m, n *y* t *son tres rectas coplanares y* t *se intersecta con* m *y* n *en dos puntos distintos* P *y* Q *respectivamente, entonces* t

*se llama una **transversal** de m y n, estas tres rectas forman 8 ángulos, 4 internos y 4 externos. Dichos ángulos pueden clasificarse como sigue*

- ***Ángulos alternos internos**: Dos ángulos son alternos internos si son internos, están en semiplanos distintos y no son adyacentes.*
- ***Ángulos alternos externos**: Dos ángulos son alternos externos si son exteriores, están en semiplanos diferentes y no son adyacentes.*
- ***Ángulos correspondientes**: Dos ángulos son correspondientes si uno de ellos es exterior y el otro interior y están en el mismo semiplano y no son adyacentes.*

En la Figura 1.9, $\angle\varphi$ y $\angle\epsilon$ son ángulos alternos internos al igual que $\angle\delta$ y $\angle\gamma$; por otro lado $\angle\theta$ y $\angle\alpha$, y $\angle\rho$ y $\angle\beta$ corresponden a ángulos alternos externos. En la misma figura, se pueden observar 4 parejas de ángulos correspondientes, $\angle\varphi$ y $\angle\beta$, $\angle\theta$ y $\angle\delta$, $\angle\gamma$ y $\angle\alpha$ y también $\angle\rho$ y $\angle\epsilon$.

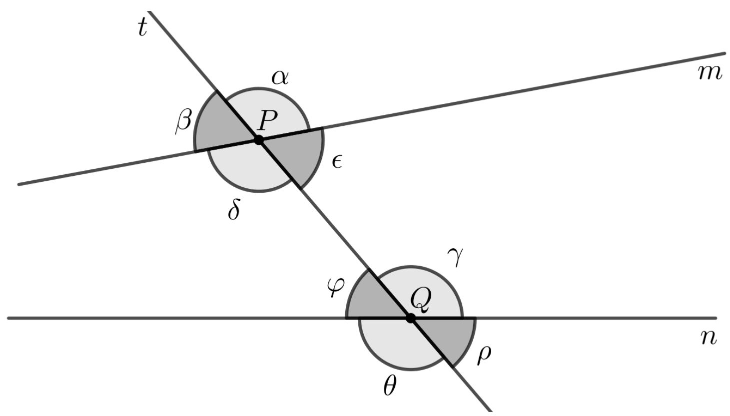


Figura 1.9: Ángulos formados por dos rectas y una transversal.

Observación 1.5. *Sean m, n y t tres rectas coplanares tal que $m \| n$ y t transversal a m y n, entonces se tiene que $\angle\alpha \cong \angle\delta \cong \angle\gamma \cong \angle\theta$ y $\angle\beta \cong \angle\epsilon \cong \angle\varphi \cong \angle \cong \rho$.*

Los triángulos tienen una relevante importancia en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos, por tanto su estudio es realmente útil en la resolución de problemas. La definición de triángulo y sus distintas clasificaciones se presentan en lo que sigue.

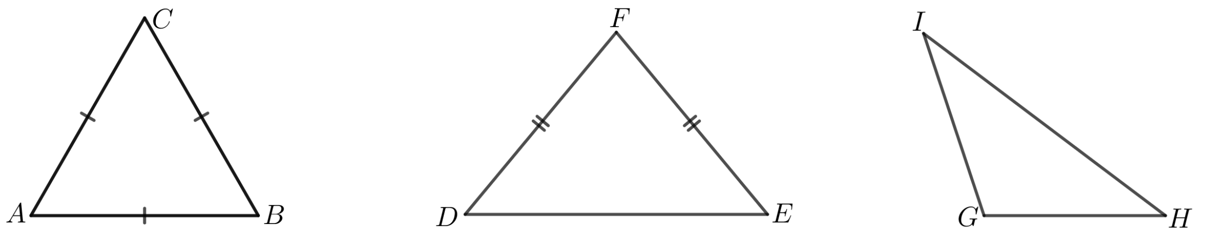
Definición 17. *(Triángulo). Dados tres puntos no colineales A, B y C, la unión de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llama **triángulo** y se denota ΔABC.*

Definición 18. *(Clasificación de triángulos según sus lados). Los triángulos se pueden clasificar según sus lados como:*

- ***Triángulo equilátero**: Es el que tiene sus tres lados congruentes (ver Figura 1.10-a).*

- ***Triángulo isósceles:*** *Es el que tiene dos lados congruentes. Generalmente al lado desigual se llama* **base del triángulo** *(ver Figura 1.10-b).*

- ***Triángulo escaleno:*** *Es el que tiene sus tres lados desiguales (ver Figura 1.10-c).*



a)*Triángulo Equilátero* b)*Triángulo isósceles* c)*Triángulo escaleno*

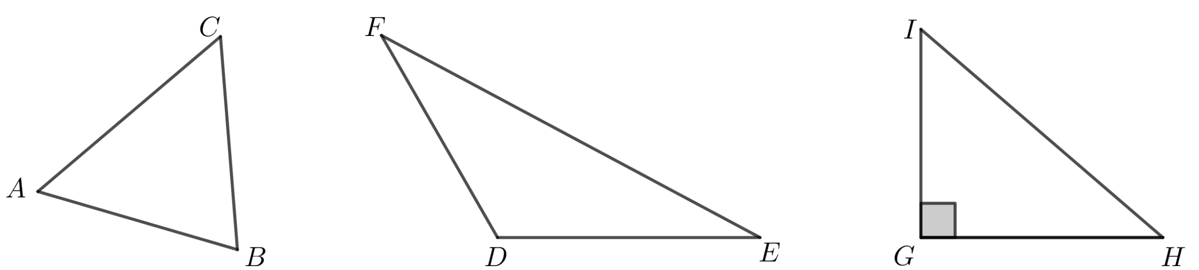
Figura 1.10: Clasificación de triángulos según sus lados.

Definición 19. *(Clasificación de triángulos según sus ángulos). Los triángulos se pueden clasificar según sus ángulos como:*

- ***Triángulo acutángulo:*** *Es el que tiene sus tres ángulos agudos (ver Figura 1.11-a).*

- ***Triángulo obtusángulo:*** *Es el que tiene un ángulo obtuso (ver Figura 1.11-b).*

- ***Triángulo rectángulo:*** *Es el que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman* **catetos** *y el lado opuesto al ángulo recto se llama* **hipotenusa** *(ver Figura 1.11-c).*



a)*Triángulo acutángulo* b)*Triángulo obtusángulo* c)*Triángulo rectángulo*

Figura 1.11: Clasificación de triángulos según sus ángulos.

Los elementos notables en un triángulo son sus rectas y puntos notables, los cuales se definen a continuación.

Definición 20. *(Medianas y baricentro de un triángulo). Las* **medianas de un triángulo** *son los segmentos de recta que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto correspondiente. El* **baricentro** *se define como la intersección de las tres medianas en un triángulo.*

En la Figura 1.12, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ corresponden a las medianas de ΔABC y G es el baricentro de dicho triángulo.

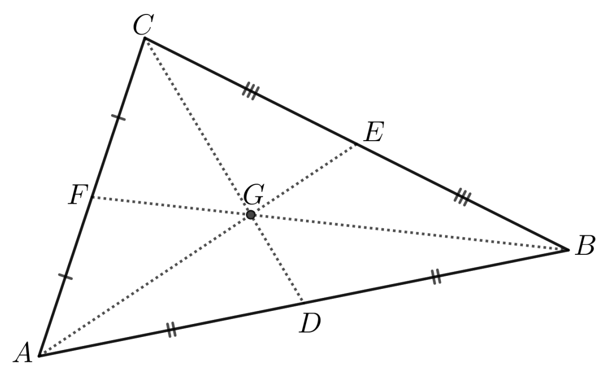


Figura 1.12: Medianas y baricentro de un triángulo

Definición 21. *(Bisectrices e incentro de un triángulo). Las* ***bisectrices de un triángulo*** *son los segmentos que dividen cada uno de sus tres ángulos internos en dos partes iguales y terminan en el correspondiente lado opuesto. La intersección de las bisectrices de un triángulo se denomina* ***incentro****.*

En la Figura 1.13, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ corresponden a las bisectrices de ΔABC y H es el incentro de dicho triángulo, que además corresponde al centro de una circunferencia inscrita en el mismo.

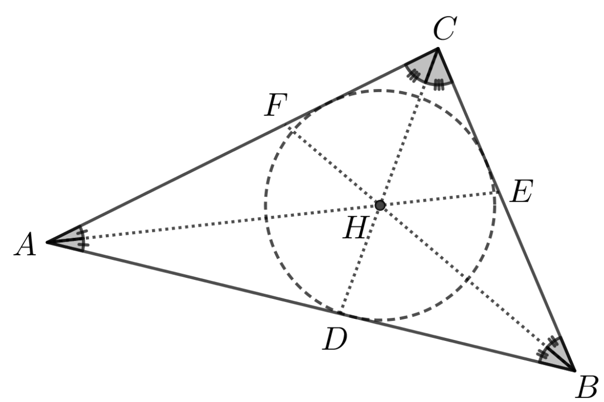


Figura 1.13: Bisectrices e incentro de un triángulo.

Definición 22. *(Alturas y ortocentro de un triángulo). Las* ***alturas de un triángulo*** *son los segmentos de recta perpendiculares trazados desde cada vértice al lado opuesto correspondiente. El punto de corte de las tres alturas se denomina* ***ortocentro****.*

En cada una de las figuras 1.14-a y 1.14-b , $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ son las alturas de ΔABC e I es el ortocentro de dicho triángulo. Como se ve en la Figura 1.14-b, la altura no necesariamente se encuentra en el interior del triángulo.

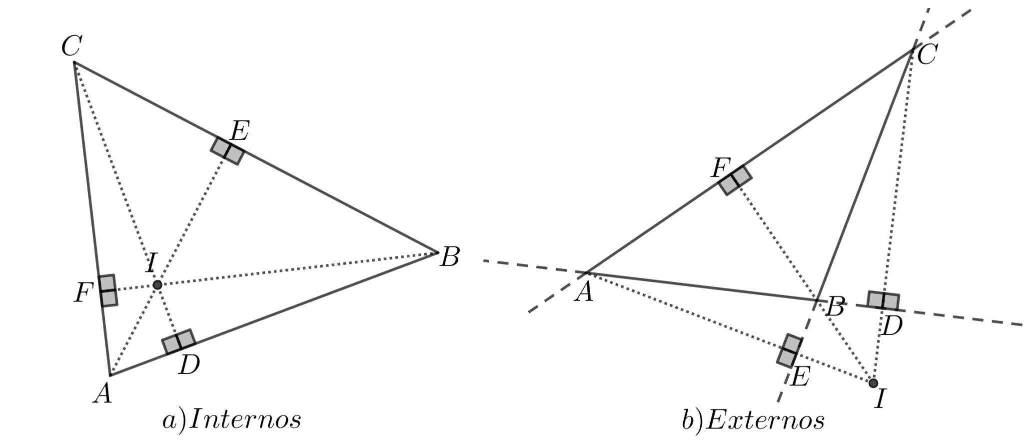


Figura 1.14: Alturas y ortocentro de un triángulo.

Definición 23. *(Mediatrices y circuncentro de un triángulo). Las* ***mediatrices de un triángulo*** *son las mediatrices asociadas a uno de sus lados, es decir, las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el punto medio correspondiente. La intersección de las mediatrices de un triángulo se denomina* ***circuncentro****, este punto corresponde además al centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.*

En cada una de las figuras 1.15-a y 1.15-b , $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ son las mediatrices de ΔABC y el punto J corresponde al centro de una circunferencia circunscrita en dicho triángulo, el cual es el circuncentro.

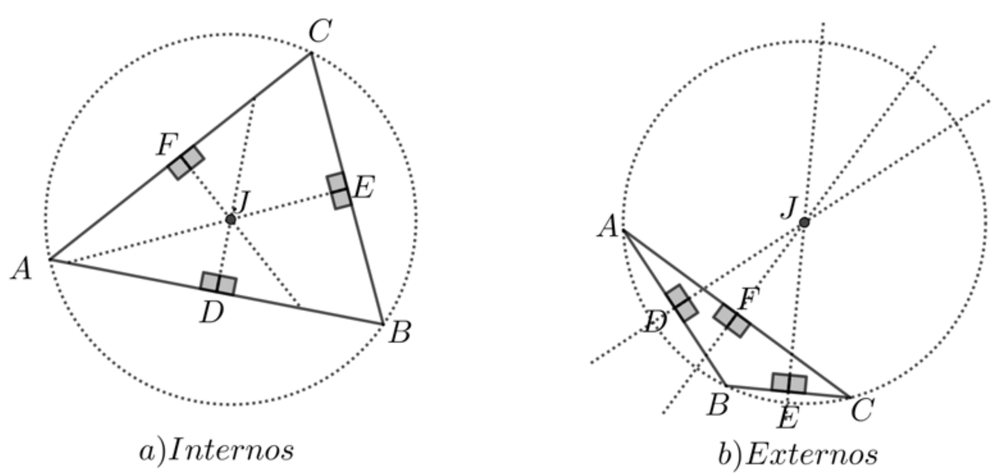


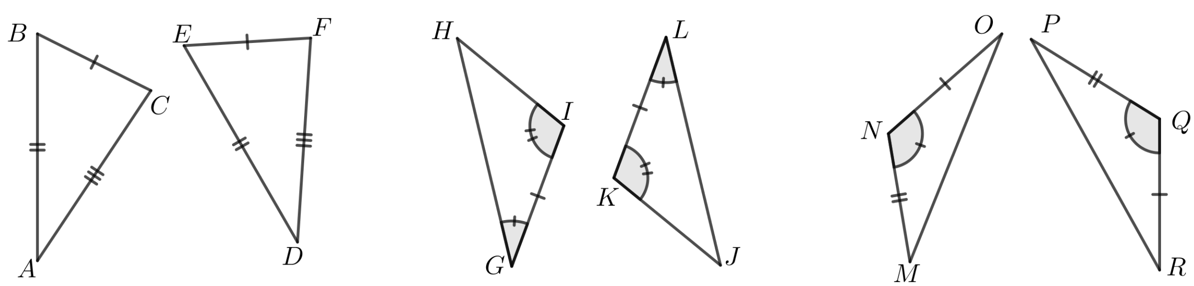
Figura 1.15: Mediatrices y circuncentro de un triángulo.

Después de haber definido lo relacionado con ángulos y triángulos, se presentan en lo que sigue los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, los cuales se deben tener en cuenta en la resolución de problemas geométricos donde se incluyan estas figuras.

Definición 24. *(Criterios de congruencia de triángulos). La congruencia de dos triángulos se puede probar mediante tres criterios:*

- ***Lado-Lado-Lado (L-L-L):*** *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.*
- ***Ángulo-Lado-Ángulo (A-L-A):*** *Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos respectivamente congruentes.*
- ***Lado-Ángulo-Lado (L-A-L):*** *Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo determinado por ellos respectivamente congruentes.*

En la Figura 1.16 se ejemplifican los tres criterios de congruencia anteriormente presentados. En la Figura 1.16-a, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por L-L-L. Por otro lado en la Figura 1.16-b, $\Delta GIH \cong \Delta LKJ$ por A-L-A. Finalmente en la Figura 1.16-c, $\Delta MNO \cong \Delta PQR$ por L-A-L.



a)*Criterio* $L-L-L$ b)*Criterio* $A-L-A$ c)*Criterio* $L-A-L$

Figura 1.16: Criterios de congruencia de triángulos.

Definición 25. *(Criterios de semejanza de triángulos). La semejanza de dos triángulos se puede probar mediante tres criterios:*

- ***Lado-Lado-Lado (L-L-L):*** *Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales (ver Figura 1.17-a).*
- ***Lado-Ángulo-Lado (L-A-L):*** *Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente (ver Figura 1.17-a).*

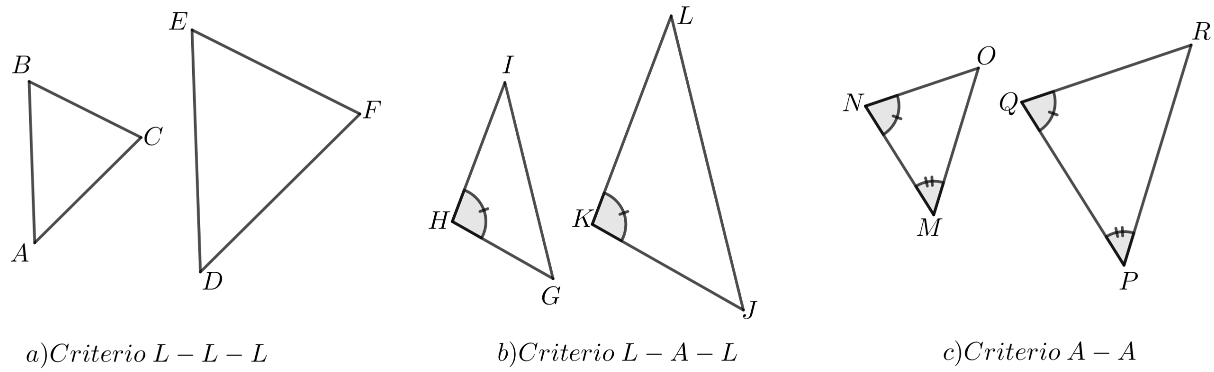


Figura 1.17: Criterios de semejanza de triángulos.

- ***Ángulo-Ángulo (A-A):*** *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes (ver Figura 1.17-a).*

También existen algunos teoremas en geometría que son de mucha utilidad en el proceso de resolver un problema, algunos de ellos son los que se presentan a continuación.

Teorema 1.1. *(Teorema de Pitágoras). Para todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

En la Figura 1.18, la suma de las áreas de los cuadrados sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es igual al área del cuadrado sobre $\overline{BC}$. Así para esta figura se tiene que $a^2 = b^2 + c^2$, lo que es equivalente al teorema de Pitágoras.

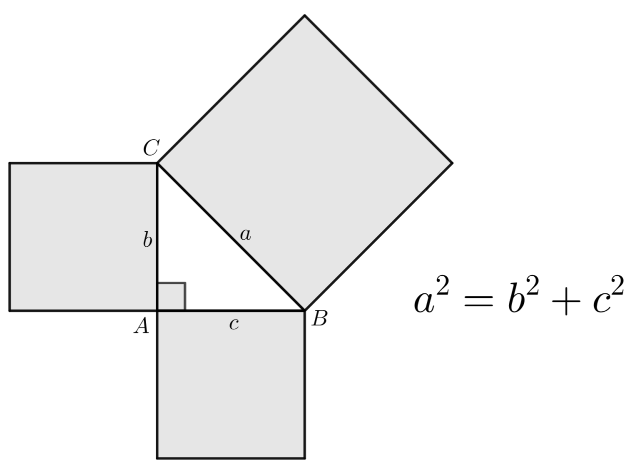


Figura 1.18: Representación gráfica del teorema de Pitágoras.

Teorema 1.2. *(Primer teorema de Thales). Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados o con sus prolongaciones otro triángulo que es semejante al triángulo dado (ver Figura 1.19).*

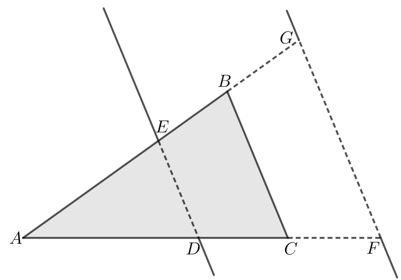


Figura 1.19: Representación gráfica del primer teorema de Thales.

Teorema 1.3. *(Segundo teorema de Thales). Sea C un punto de la circunferencia de diámetro AB, con C distinto de A y de B. Entonces $\angle ACB$ es recto (ver Figura 1.20).*

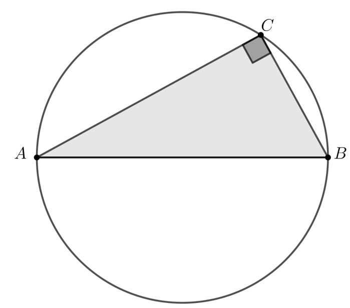


Figura 1.20: Representación gráfica del segundo teorema de Thales.

Los anteriores teoremas por lo general son presentados por el profesor en el aula de clases a sus estudiantes que están cursando grados entre octavo y décimo. Además de estos existen otros teoremas que son poco conocidos por los estudiantes, pero que igualmente son de mucha utilidad en la resolución de problemas y que por tanto deberían ser estudiados en el colegio o al menos por quienes estén interesados en el estudio de la geometría.

Finalmente, se presentan los conceptos de perímetro y área, los cuales se introducen desde muy temprana edad en las aulas, pero que suelen ser confundidos por los estudiantes con mucha frecuencia.

Definición 26. *(Perímetro). El* ***perímetro*** *es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana. Se denota con la letra* ***P*** *y entre paréntesis la figura referida.*

Definición 27. *(Área). El* ***área*** *es la superficie comprendida dentro del perímetro de una figura geométrica plana. Se denota con la letra* ***A*** *y entre paréntesis la figura referida.*

En la Tabla 1.1 se presentan las fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas de algunas figuras geométricas, las cuales se consideran de mucha utilidad en el desarrollo de este trabajo.

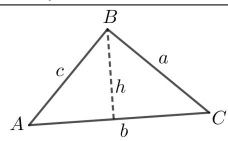
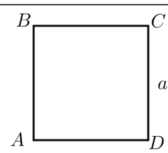
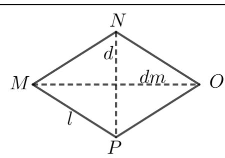
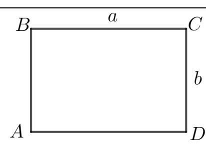
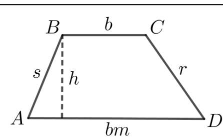
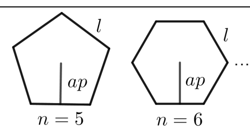
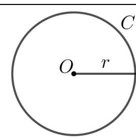
Perímetro y área de figuras geométricas			
Figura geométrica	*Gráfica*	*Perímetro* ($\boldsymbol{P}$)	*Área* ($\boldsymbol{A}$)
Triángulo		$\boldsymbol{P}(\Delta ABC) = a + b + c$	$\boldsymbol{A}(\Delta ABC) = \frac{b.h}{2}$
Cuadrado		$\boldsymbol{P}(ABCD) = 4a$	$\boldsymbol{A}(ABCD) = a^2$
Rombo		$\boldsymbol{P}(MNOP) = 4l$	$\boldsymbol{A}(MNOP) = \frac{d.dm}{2}$
Rectángulo		$\boldsymbol{P}(ABCD) = 2(a + b)$	$\boldsymbol{A}(ABCD) = a.b$
Trapecio		$\boldsymbol{P}(ABCD) = s + b + r + bm$	$\boldsymbol{A}(ABCD) = \frac{h(b + bm)}{2}$
Polígono regular de n lados		$\boldsymbol{P}(Pol) = nl$	$\boldsymbol{A}(Pol) = \frac{n.l.ap}{2}$
Circulo		$\boldsymbol{P}(C) = 2\pi r$	$\boldsymbol{A}(C) = \pi r^2$

Tabla 1.1: Perímetro y área de figuras geométricas.

Lo expuesto en este capítulo, son conceptos y definiciones básicas de geometría que se usarán en la resolución de problemas en los próximos capítulos de este trabajo. Sin embargo, se recomienda al lector revisar el texto Hemmerling (1971) si desea profundizar en otros temas de geometría.

Capítulo 2

La geometría y la resolución de problemas

La matemática es una de las áreas fundamentales para la formación académica y personal del estudiante. Se destaca entre sus áreas la geometría, que describe el mundo en el que vivimos y por tanto es de gran interés para el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, en la actualidad la geometría se ha dejado de lado dentro del campo de la educación. El presente capítulo expone la importancia de la reintegración de esta área a los procesos de enseñanza-aprendizaje y propone cómo la resolución de problemas y las olimpiadas matemáticas, pueden conformar un medio que permita generar un espacio para la reintegración de dicha área.

2.1. Importancia de la geometría

Si se habla de la capacidad aritmética o incluso la algebraica, estas nunca han sido puestas en entredicho en el currículo escolar. Por otra parte, los contenidos geométricos sí han sufrido la condición de ser dejados a un lado y creerlos de poca importancia, especialmente en los planes de estudio durante la época de los años sesenta y setenta, como consecuencia del posicionamiento de las llamadas matemáticas modernas caracterizadas por su formalismo y la algebrización de la geometría (Marmolejo, 2010). Hoy por hoy, hay un gran número de miembros pertenecientes a la comunidad matemática internacional quienes comparten la idea de que la geometría debería ser revitalizada o reintegrada en sus múltiples aspectos y en todos los niveles escolares tras ser abandonada.

La importancia de la geometría como una asignatura del currículo escolar ha sido ampliamente reconocida por autores como Almeida (2002), quien señala que tener y aplicar conocimientos geométricos, plantear y resolver problemas relacionados con la geometría y hacer uso de diferentes lenguajes y representaciones, entre otros, hacen parte de la formación básica de todo ciudadano. La geometría se puede considerar una herramienta que permite resolver problemas reales de un mundo que posee una amplia variedad de formas y representaciones geométricas tanto en escenarios naturales como artificiales.

Desafortunadamente, en las instituciones educativas usualmente se presentan a los estudiantes los contenidos de matemáticas y en especial de geometría, como un producto acabado de la actividad matemática, dejando de lado los procesos implícitos de razonamiento y construcción de dicho conocimiento (Gamboa and Ballestero, 2010) . La enseñanza tradicional, limita a la geometría a un estudio memorístico de fórmulas como áreas o volúmenes y presenta al estudiante definiciones y teoremas de forma descontextualizada, incluso algunos docentes priorizan la enseñanza de otras áreas de la matemática, desplazando los contenidos geométricos hacia el final de los años escolares, lo que en muchas ocasiones lleva a excluir del todo estos temas o a ser presentados a los estudiantes de una forma muy superficial. Esta situación no es acorde con las tendencias actuales, que sugieren oportunidades de aprendizaje donde los estudiantes participen de forma activa en el desarrollo de su conocimiento y se apropien de él (Hernández and Villalba, 2001).

Las consecuencias de la enseñanza de la geometría de forma tradicional lleva a la concepción de esta como una área difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes, cuando en realidad es todo lo contrario. La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de la formación académica y cultural del hombre, gracias a su aplicación en diversos contextos y su capacidad para desarrollar pensamiento lógico, visualización, deducción, intuición, planteamiento de conjeturas, procesos de demostración, entre otras habilidades que son esenciales al momento de resolver problemas de cualquier índole.

El National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000), dentro de su propuesta de estandarización de la enseñanza de las matemáticas, expone que los procesos de descripción, comprensión, análisis, construcción, exploración, visualización, argumentación, aplicación, entre otros, deben ser implementados en la enseñanza de geometría mediante el planteamiento y resolución de problemas que le exijan al estudiante un nivel cognitivo que no lo limite al uso de una fórmula o proceso algorítmico, problemas que susciten estudiantes creativos, que conjeturen, descubran, inventen, comuniquen ideas y las prueben mediante la argumentación, estudiantes capaces de descubrir sus capacidades y sus aficiones.

Para un docente de matemáticas conocer y considerar la utilidad de la geometría y su aplicación al mundo real, pueden convertirse en elementos esenciales que lo guíen al planteamiento de problemas que creen en sus estudiantes conflictos cognitivos que les permitan desarrollar sus capacidades de percepción espacial y visual y resten dificultades en el aprendizaje durante el proceso de resolución. Enseñar geometría implica contextualizar la enseñanza de teoremas y propiedades, apreciar el contexto cultural e histórico de la geometría, comprender la variedad de usos y contextos en los cuales está presente la geometría y reconocer y seleccionar problemas geométricos interesantes

(Jones, 2002).

En este orden de ideas, las olimpiadas matemáticas pueden ser una fuente potencial de búsqueda, debido a que ofrecen problemas cuyo planteamiento y desarrollo no es habitual, en especial los problemas de tipo geométrico, los cuales tiene un gran impacto en la forma en que los estudiantes y docentes perciben su poder creativo y matemático para dar solución a dichos problemas. Por tanto, la siguiente sección presenta un recuento de lo que son las olimpiadas matemáticas, la metodología de algunas que fueron tomadas como referencia para el presente trabajo y la presencia de la geometría en dichos certámenes.

2.2. Olimpiadas matemáticas

Las olimpiadas matemáticas son competiciones de resolución de problemas de matemáticas e ingenio para estudiantes de distintos niveles educativos. Las olimpiadas han llegado a tomar diferentes formas, desde pruebas de selección múltiple hasta pruebas de tipo investigativo de varias semanas de duración, compuestas por tareas que colindan o conllevan a problemas abiertos. Independientemente de la forma y envergadura que puedan tener los problemas, la matemática es tan suficientemente amplia y flexible que permite proponer problemas que desarrollan la capacidad del estudiante hacia la superación personal no solamente en matemáticas sino también en otros ámbitos de la vida cotidiana. Se presenta a continuación algunas de las olimpiadas matemáticas de nuestro interés.

1. ***Olimpiada Internacional de Matemática (Iternational Mathematical Olympiad, IMO por sus siglas en inglés)***: es una competencia anual para estudiantes pre universitarios y es una de las mas antiguas de las olimpiadas internacionales de ciencias. Estas competiciones comenzaron como competencias ínter-escolares en el imperio Austro-Húngaro en el siglo XIX. La era moderna de las competiciones de matemáticas comenzó en 1959 cuando se celebró la primera IMO en Rumanía entre los 7 países del bloque soviético. A cada país se le permitió enviar hasta 8 concursantes y hubo 6 preguntas, con varios puntajes por pregunta, sumando un total de 40 puntos. Finlandia envió un equipo en 1965 y poco a poco la competencia se expandió para incluir otros equipos europeos, llegando a 13 equipos en 1967. El primer equipo de América en competir fue Cuba, que se unió en 1971. Vietnam ingresó con un equipo en 1974, convirtiéndose en el primer país del sudeste asiático. En 1975, Estados Unidos se unió a la competencia y Argelia se convirtió en la primera nación africana participante en 1977 cuando el número de países competidores llegó a 21 países.

   En 1979 se produjo la primera participación sudamericana, con la entrada de Brasil, y en 1981, todos los continentes estuvieron representados, con la incorporación de un equipo australiano y otros equipos de África y América del Sur. Con Sudáfrica como sede de la competencia de 2014, el evento habrá sido realizada en todos los continentes y existe una gran competencia para albergar eventos futuros con anfitriones determinados de cuatro a cinco años antes de la competencia. El último país anfitrión fue Brasil-Río de Janeiro en 2017 con una participación de 615 concursantes, 553 hombres y 62 mujeres. En este año la IMO se llevó a cabo en Rumania-Cluj-Napoca (IMO, 2018).

El objetivo de la competencia ha sido apoyar a los jóvenes en edad escolar a desarrollar sus habilidades para resolver problemas. Los concursantes deben ser menores de veinte años y no deben estar matriculados en instituciones de educación superior. Cada país envía seis participantes y las preguntas se eligen entre las cuatro áreas temáticas de álgebra, combinatoria, geometría y teoría de números.

2. ***Canguro Matemático (CM)***: es un evento internacional que tuvo lugar a finales del año 1994, cuando la Societat Catalana de Matemátiques convocó por primera vez en Cataluña, la prueba canguro en el marco de la organización internacional Le Kangourou sans frontiéres, que unos años atrás había "importado" hacia Europa una idea procedente de un grupo de profesores australianos organizado por la Asociación Canguro Matemático Sin Fronteras. El número de alumnos de secundaria aumenta año tras año y ahora ya son más de 18.000 en todos los países Catalanes. El propósito del examen es descubrir las matemáticas de una manera más lúdica fomentando la imaginación y el ingenio de los estudiantes, además de desarrollar su talento.

   El concurso cuenta con 6 niveles distribuidos así: nivel 1 para alumnos de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), nivel 2 para alumnos de 2º ESO, nivel 3 para alumnos de 3º de ESO, nivel 4 para Alumnos de 4º de ESO, nivel 5 para alumnos de 1º de bachillerato y nivel 6 para alumnos de 2º de bachillerato y sus equivalentes, en todos los niveles, en formación profesional (CM, 2018).

3. ***Olimpiadas Colombianas de Matemáticas (OCM)***: Dado el impacto de las olimpiadas, en Colombia desde 1981 la Universidad Antonio Nariño crea las OCM. Estas olimpiadas ofrecen concursos como: la OCM para primaria y secundaria, la CRM, el concurso futuros olímpicos y el concurso internacional CM. Todos estos concursos están divididos en tres niveles, primer nivel, nivel intermedio y nivel superior, donde cada uno tiene la complejidad de los problemas y escolaridad de los estudiantes (OCM, 2018).

   A través de las OCM los estudiantes tienen la oportunidad de ser seleccionados para representar a Colombia en prestigiosas competencias y olimpiadas internacionales, como son: IMO, OIM, OMCC, OM, entre otras.

4. ***Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico (OMPR)***: enmarcadas dentro de un proyecto liderado por el Departamento de Ciencias Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez y dirigido por el Doctor Luis Fernando Cáceres, este proyecto inició en 1999 impactando un número pequeño de estudiantes aunque en los últimos años han participado miles de alumnos. Su propósito es identificar estudiantes interesados en las matemáticas y apoyarlos para que desarrollen ese potencial que tienen, y también impactar a los maestros que atienden a esos alumnos y mostrarles que las matemáticas son bonitas y atractivas, y que a través de ellas se pueden estudiar carreras donde hay oportunidades de trabajo.

   Este proyecto cuenta con tres niveles distribuidos así: nivel elemental correspondiente a 3er-5to grados, nivel intermedio a 6to-8vo grados y nivel superior con 9no-11mo grados. El certamen se lleva a cabo cada año en el mes de abril con un examen distribuido a través de su página web oficial y termina con un campamento con los mejores estudiantes de Puerto Rico, de donde se seleccionan los equipos que representarán posteriormente a Puerto Rico en las competencias internacionales: en la OMCC, en la OIM y en la IMO. Los participantes en el campamento reciben entrenamiento en problemas de olimpiadas, materiales de estudio, alimentación y hospedaje (OMPR, 2018).

5. ***Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño (ORM-UDENAR)***: En el año 2016 bajo la coordinación de los docentes Catalina Rúa, John Castillo y Omar Lasso, nacen las ORM-UDENAR con el fin de poner en práctica las metodologías estudiadas en el proyecto de investigación “Resolución de problemas: un medio para la formación matemática”, financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones y Relaciones Internacionales, llevado a cabo por integrantes de los grupos de investigación ALTENUA y GESCAS, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño (ORM-UDENAR, 2016).

   Estas olimpiadas se desarrollaron en dos niveles, nivel 1 para estudiantes de grado sexto y séptimo de bachillerato y nivel 2 para estudiantes de octavo y noveno grado de bachillerato, quienes presentan exámenes en tres diferentes fases de selección.

6. ***Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS)***: estas surgen en el año 2009 y buscan mejorar la calidad de educación básica en su región de incidencia a través del desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes y capacitación docente. Buscan presentar las matemáticas de tal forma que los niños y niñas se sientan atraídos por el deseo de enfrentar nuevos retos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas mediante su participación en las olimpiadas. Estas se desarrollan a nivel de primaria y secundaria en tres fases y en tres niveles de escolaridad. Para primaria el nivel básico corresponde a estudiantes de grado tercero, nivel medio para grado cuarto y nivel superior para grado quinto. Para secundaria el nivel básico corresponde a estudiantes de grado sexto y

séptimo, nivel medio para grado octavo y noveno y nivel superior para grado décimo y once. En cada nivel se realizan tres fases: clasificatoria, selectiva y final; en cada una de las tres áreas, teoría de números y combinatoria, álgebra y lógica, y geometría (ORM-UIS, 2008).

En las tablas 2.1, 2.2 y 2.3, de forma respectiva, se presentan otras olimpiadas a nivel internacional, nacional y regional, que se tuvieron en cuenta para la realización de este trabajo.

Olimpiadas de matemáticas a nivel internacional			
Olimpiada	*Siglas*	*Año inicio*	*Enlace*
Asian Pacific Mathematics Olympiad	APMO	1994	https://cms.math.ca/Competitions/APMO/
Canguro Matemático	CM	1994	http://www.canguromat.org.es
European Girl's Mathematical Olympiad	EGMO	2011	https://www.egmo.org/
International Mathematical Olympiad	IMO	1959	https://www.imo-official.org
Olimpiada Iberoamericana de Matemática	OIM	1985	http://www.oei.es/historico/oim/problemas.htm
Olimpiada de Mayo	OM	1985	http://www.oma.org.ar/internacional/may.htm
Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe	OMCC	1999	http://www.oei.es/historico/oim/iicentro.htm
Olimpiada Matemática de países del Cono Sur	OMCS	1990	http://www.oma.org.ar/internacional/cono.htm

Tabla 2.1: Olimpiadas matemáticas internacionales.

Olimpiadas de matemáticas a nivel nacional			
Olimpiada	*Siglas*	*Año inicio*	*Enlace*
Olimpiadas Colombianas de Matemáticas	OCM	1981	http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas
Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas	OLCOMA	1989	http://olcoma.com/
Olimpiada Matemática Argentina	OMAR	1983	http://www.oma.org.ar/
Olimpiada Mexicana de Matemáticas	OMM	1987	http://www.ommenlinea.org/
Olimpiada Matemática Ecuatoriana	OMEC	1998	https://omec-mat.org/
Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico	OMPR	1999	http://www.ompr.pr

Tabla 2.2: Olimpiadas matemáticas nacionales.

Al hacer una revisión de las diferentes olimpiadas presentadas anteriormente, se encontró que buena parte de los problemas presentados en estos certámenes son de tipo geométrico (ver Figura 2.1), aunque también se encuentran problemas referente a otras áreas como aritmética, álgebra, combinatoria y lógica, entre otros. Así por ejemplo, en la Figura 2.1, se tiene que a nivel internacional hay un total de 4.052 problemas, de los cuales 1.183 son de geometría; a nivel nacional se encontraron 1.162 problemas en el área de geometría de un total de 4.294 problemas y en las olimpiadas a nivel

Olimpiadas de matemáticas a nivel regional en Colombia			
Olimpiada	*Siglas*	*Año inicio*	*Enlace*
Competencia Regional de Matemáticas	CRM (2018)	1981	http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matemáticas
Olimpiadas Matemáticas Universidad de Antioquia	OM-UDEA	1996	http://ciencias.udea.edu.co/olimpiadas/
Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño	ORM-UDENAR	2016	http://orm.udenar.edu.co
Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad del Valle	ORM-UNIVALLE	2007	http://matematicas.univalle.edu.co/orm/
Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander	ORM-UIS	2008	http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas

Tabla 2.3: Olimpiadas matemáticas regionales.

regional de los 2.004 problemas presentados, 492 son de tipo geométrico. En general, de los 10.350 problemas que se encontraron en las diferentes olimpiadas, 2.837 son problemas de tipo geométrico, lo cual equivale al 27 %.

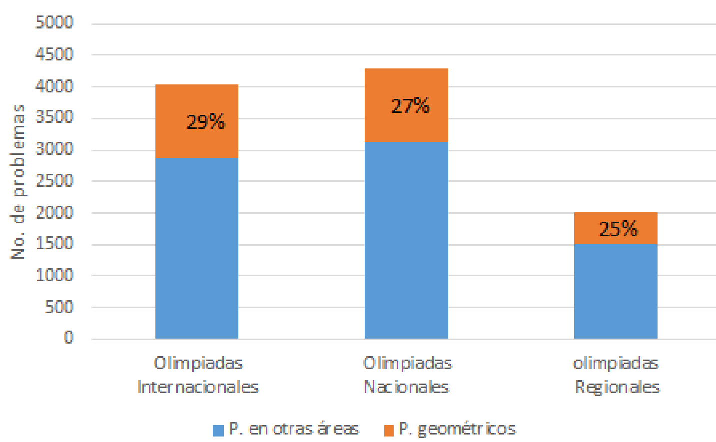


Figura 2.1: Problemas geométricos en olimpiadas matemáticas a nivel internacional, nacional y regional.

Se aclara que para realizar el análisis estadístico, se procedió a hacer la revisión individual de cada una de las olimpiadas de forma manual haciendo el conteo del total de problemas presentados por año y luego seleccionando solo los problemas de tipo geométrico que se consideran pertinentes para la realización de este trabajo, es decir problemas donde se apliquen conceptos de geometría plana. Los resultados aquí presentados en cuanto a la presencia de problemas geométricos en olimpiadas matemáticas se obtuvieron del material disponible en cada una de las paginas web de las diferentes olimpiadas (ver tablas 2.1, 2.2 y 2.3).

El tipo de problemas que se presentan en olimpiadas son problemas que un estudiante no afronta con frecuencia en el aula de clase, por tanto es importante dotar al estudiante de ciertas herramientas que le permitan solucionar problemas de este tipo. En matemáticas existen diferentes estrategias de resolución de problemas que se consideran importantes dentro del conocimiento del estudiante y también del profesor, en la siguiente sección se presentan algunas de ellas.

2.3. Estrategias de resolución de problemas matemáticos

En la resolución de problemas es importante disponer de ciertas herramientas que permitan guiar la acción y el camino de solución del estudiante, con el fin de ser capaces de superar las dificultades que se vayan presentando durante todo el proceso (Polya, 1965; Puig, 1993; Schoenfeld, 1985). Al igual que Polya, otros autores como Schoenfeld, Guzmán y Mason, confirman la existencia de ciertas etapas para enfrentarse a un problema (Guzmán, 1995; Mason et al., 1982; Schoenfeld, 1996). En este trabajo se tendrán en cuenta los cuatro pasos para resolver un problema propuestos por Polya, los cuales se exponen a continuación.

1. ***Comprender el problema***: es familiarizarse y apropiarse de la situación, tratando de entender a fondo lo que se plantea, es importante entonces organizar la información dada por el problema, de esta forma será mas fácil responder a cuestiones tales como ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es el punto de partida? y ¿A dónde se debe llegar?

2. ***Concebir un plan***: consiste en empezar a explorar varias alternativas y caminos de solución, la tarea es entonces determinar unas cuantas estrategias para atacar el problema; se puede por ejemplo, empezar haciendo un dibujo, esquema o diagrama, anotar los datos que da el problema, suponer el problema resuelto o también buscar algún problema similar que se haya resuelto antes y pensar si este problema se puede resolver de la misma manera o si se conoce alguna definición o teorema que sea útil, también se puede omitir alguna condición del problema o hacer el problema más general o particular con el fin de hacerlo más sencillo. Además es importante que dentro del proceso de resolución se tengan en cuenta todos los datos y condiciones que proporciona el problema.

3. ***La ejecución del plan***: se refiere a poner en marcha y llevar a cabo las ideas que se pensaron en la etapa anterior justificando cada una de las acciones que se realicen en el proceso de resolución, alguna de las estrategias que surgieron en la fase de concepción debe ser la indicada para solucionar este problema. Es importante además perder el miedo a equivocarse puesto que para solucionar un problema es importante explorar varios caminos, por tanto no es adecuado de ninguna manera insistir solucionar el problema con una estrategia que no esta funcionando, en este caso lo mejor es intentar buscar otro camino.

4. ***Examinar la solución obtenida***: esta etapa de alguna manera es una de las mas fructíferas dentro la resolución de problemas, esta permite que el estudiante reexamine y reflexione sobre la solución dada al problema, verificando dicha solución e intentando solucionar el problema de una manera diferente. El estudiante en esta etapa será capaz de analizar su propio pensamiento y concluir cual es su potencial dentro de este proceso.

Para comprender mejor los pasos propuestos por Polya para la resolución de problemas matemáticos se expone un problema en donde se simulará un diálogo ficticio entre un profesor y su estudiante, donde el profesor mediante preguntas orientadoras llevará al estudiante a la resolución del problema propuesto.

Problema 2.1. ***ORM-UIS (2014), nivel básico.***

$ABCDE$ es un pentágono regular (ver Figura 2.2). ΔCDF es un triángulo equilátero y $CFGH$ es un cuadrado. La medida en grados del ángulo $\angle BCH$ es:

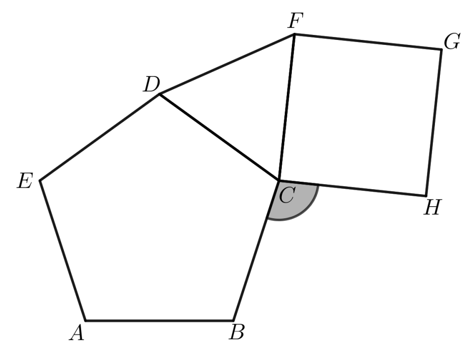


Figura 2.2: Ilustración del Problema 2.1.

a) 92 *b)* 102 *c)* 132 *d)* 138 *e)* 168

Solución

Teniendo en cuenta las etapas que propone Polya, el primer paso es ***comprender el problema***. Para esto es necesario que el estudiante lea detenidamente el enunciado e identifique cuales son los datos que le proporciona el problema y también que es lo que desconoce y debe hallar. Sin embargo muchas veces es difícil para el estudiante comprender el problema, aún más cuando no se ha entrenado lo suficiente como para atacarlo, es aquí donde el profesor juega un papel importante, pues es él, quien deberá guiar este proceso. Según Polya (1965), una de las tareas del profesor es ayudar a sus estudiantes y una de sus mejores herramientas son las preguntas orientadoras, las cuales permitirán que el profesor guíe a su estudiante de una manera efectiva y natural, sin imponérsele en ningún momento. En la mayoría de los casos la primera pregunta que formula el profesor es ¿Cuáles son los datos del problema? A lo que el estudiante responderá:

- $ABCDE$ es un pentágono regular.
- ΔCDF es equilátero.
- $CFGH$ es un cuadrado.

Seguidamente el profesor preguntará ¿Cuál es la incógnita? Puede suceder que el estudiante no comprenda esta pregunta, entonces el profesor podrá cambiar su pregunta por ¿Qué es lo que te pide el problema? Ahora el estudiante responderá: "lo que me pide es la medida de $\angle BCH$".

Lo que sigue es ***concebir un plan***. Para esto el estudiante deberá empezar a explorar diferentes caminos que crea le sean útiles para la solución del problema, puede empezar por ejemplo por rayar su hoja. Si es necesario el profesor puede actuar nuevamente y lanzar más preguntas, por ejemplo: ¿Qué tienen en común los polígonos del problema? el estudiante responderá: "todos son polígonos regulares". Nuevamente es el turno del profesor, ¿Cómo son los ángulos internos en los polígonos regulares? El estudiante dirá: "son todos congruentes". Quizá con esto el estudiante ya sea capaz de resolver el problema, si no es así se pueden seguir formulando más preguntas, por ejemplo: ¿Conoces la medida de algunos ángulos en la figura? El estudiante dirá: "si, por ejemplo los ángulos internos en el cuadrado son todos de 90°".

Hasta este punto el estudiante ya debe tener claro su plan de ataque, entonces lo que sigue es ***ejecutar el plan***. Así el estudiante puede empezar haciendo algunas marcas en la figura proporcionada por el problema como se puede ver en la Figura 2.3.

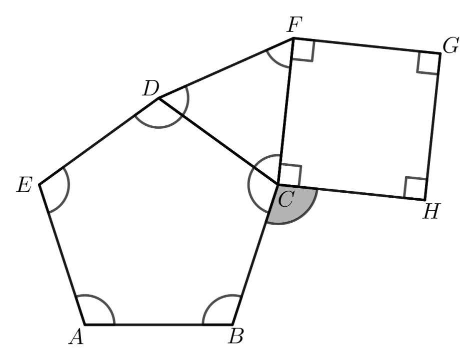


Figura 2.3: Solución del Problema 2.1.

En la Figura 2.3, los ángulos internos de $ABCDE$ son todos congruentes y tienen una medida de 108° por ser este un pentágono regular, en ΔCDF también se tienen sus ángulos internos congruentes y miden 60° por tratarse de un triángulo equilátero y de igual forma los ángulos internos en el cuadrado $CFGH$ son congruentes y miden 90°.

Ahora se halla la medida del ángulo conjugado de $\angle BCH$, para esto se suman las medidas de $\angle BCD$, $\angle DCF$ y $\angle FCH$. Entonces la medida del ángulo conjugado será

$$108^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 258^\circ.$$

Por tanto el valor de $\angle BCH$ será

$$360^\circ - 258^\circ = 102^\circ.$$

$\square$

Ya se resolvió el problema, lo que sigue es una ***mirada retrospectiva*** de la solución. De hecho esta es la mejor parte, es momento de que el estudiante reflexione sobre su forma de proceder. Se puede pensar entonces si en realidad era necesario marcar los ángulos en los polígonos de la Figura 2.2, o si se podía llegar a la solución sin necesidad de estas. El estudiante muy probablemente hizo estas marcas de forma inconsciente, pero estas le ayudaron a ver el camino que debía seguir. Al comparar las figuras 2.2 y 2.3, es evidente que en la segunda la solución del problema ya es clara aunque si es posible solucionar el problema sin necesidad de marcar los ángulos.

En esta fase, también se puede pensar en tratar de resolver el problema de una forma diferente, o también en modificar el problema cambiando algunas de sus condiciones para crear un nuevo problema. Por ejemplo: ¿Qué pasaría si alguno de los polígonos en el problema no es regular? o ¿Qué pasaría si $FCHG$ es un rectángulo? ¿La solución sería la misma? Algunos autores como Freudhental, Malaspina y Polya consideran la creación de problemas como una experiencia matemática importante para el estudiante, es más el NCTM reconoce la resolución y formulación de problemas como el alma del hacer matemáticas (Freudenthal, 1973; Malaspina, 2013; Polya, 1965). Como se puede observar el llevar al estudiante a reflexionar sobre su proceso de resolución es realmente enriquecedor, puesto que le permite crear sus propios conocimientos, además de permitirle identificar sus potencialidades y también debilidades en las que debe trabajar.

Según Guzmán (1995), una misma situación o un mismo problema puede abordarse con diferentes herramientas o estrategias de resolución, pero con frecuencia una de estas será más efectiva que las otras, este calificativo es más bien personal, puesto que depende de las capacidades y habilidades desarrolladas por el estudiante. Así una estrategia habrá alcanzado un grado de eficacia satisfactorio cuando el estudiante se ha enfrentado a varios problemas donde su manera de proceder ha sido la misma, y por tanto es capaz de eliminar del proceso de resolución pasos inútiles e innecesarios de los cuales ahora tiene conciencia y que por tanto ha ido depurando. Como consecuencia de este proceso de entrenamiento el estudiante habrá adquirido la capacidad de intuir el camino correcto y más directo para solucionar el problema al cual se enfrenta. Así por ejemplo, en el problema presentado anteriormente se puede observar que este puede ser resuelto omitiendo la realización de marcas en los ángulos.

A continuación, se presentan algunas ***estrategias generales de pensamiento*** (Fernández, 2013; Guzmán, 1995) presentes en la resolución de problemas matemáticos:

- ***Empezar por lo más fácil:*** muchos problemas pueden parecer a primera vista demasiado complicados, tal vez porque su enunciado es muy largo, enredado y difícil de comprender, tiene una gran cantidad de información que no se puede procesar de un solo golpe o los datos que proporciona son tantos que al parecer ni siquiera tienen conexión. Entonces se empieza por hacer este problema un poco más sencillo, quien intenta resolver el problema puede proponerse así mismo un problema semejante e intentar resolverlo, después de conseguir dar solución a este nuevo problema será más fácil solucionar el problema propuesto inicialmente. Cuando se presente un problema que se muestre irresoluble o inabordable, se puede optar también por dividirlo en pequeños problemas y empezar por resolver una de estas partes, la que esté al alcance, es decir, dividir el problema en sub-problemas, solucionar cada uno de estos y finalmente unir estas soluciones para dar solución al problema original (Cabezas, 2017).

- ***Particularizar y generalizar:*** hay problemas que son muy generales, en este caso muchas veces resulta conveniente resolver el problema para uno o varios casos en específico. El realizar este proceso de experimentación permite observar y conjeturar sobre la existencia de cierto patrón o propiedad que se presenta en un conjunto de elementos y así llegar a la solución buscada. Dado que el elemento del conjunto para el que se reconoce dicha regularidad ha de ser cualquiera, permite llegar a concluir que dicha propiedad es válida para todo el conjunto (generalización).

- ***Realizar un esquema, figura o diagrama:*** este tipo de representaciones por lo general son de mucha ayuda en la resolución de problemas. La realización de un esquema, una figura o un diagrama nos permiten ver el problema más claro que cuando se apoyaba solo de símbolos o palabras, es importante además tener en cuenta que esta representación debe incluir de forma sencilla la esencia del problema para no inducir a una confusión. Para evitar que esto suceda se puede por ejemplo usar diferentes colores en el dibujo, esto hará más sencilla la visualización de las relaciones y elementos que presenta la situación.

- ***Elegir un lenguaje y notación apropiados:*** el resolver o no un problema depende muchas veces de la utilización de un lenguaje o una notación adecuados, ya que el pensamiento está estrechamente conectado con las palabras, así el elegir una buena notación es un paso realmente decisivo. Dicha notación debe ser clara, concisa y no debe crear ningún tipo de ambigüedades.

- ***Buscar un problema semejante:*** a medida que se resuelven más y más problemas, las situaciones que se proponen se tornan similares a otras que anteriormente ya se han afrontado. El solo hecho de relacionar un nuevo problema con uno antiguo, dará la sensación y la seguridad de ser capaz de resolverlo. El recuerdo del problema que ya se ha resuelto proporcionará de cierta manera ideas de cómo resolver y enfrentar el nuevo problema.

- ***Suponer el problema resuelto:*** ¿qué pasa si el problema ya está resuelto? muchas veces tomar la solución del problema como punto de partida resulta muy útil para aproximarse o llegar a la solución del problema. Al tener el problema ya solucionado se pueden apreciar ciertos detalles de la situación que antes no se habrían podido percibir con facilidad.

- ***Supongamos que no:*** este tipo de argumento consiste en probar la veracidad de una proposición a partir de la demostración de que si no lo fuese se llegaría a algo que resultaría ser de una u otra forma absurdo e irracional.

Además de las estrategias presentadas en este capítulo existen otras que nos permiten solucionar problemas de áreas especificas de las matemáticas, en el siguiente capítulo se presentarán algunas estrategias útiles en la resolución de problemas en el área de geometría.

Capítulo 3

Estrategias de resolución de problemas geométricos

El resolver un problema geométrico depende no solo de los conocimientos previos del área sino también de las habilidades y la creatividad de la persona que se enfrenta a el, es por ello que estos problemas tienen un gran impacto en la forma en que los estudiantes y docentes perciben su poder creativo y matemático para determinar su solución. Dado que usualmente los problemas geométricos presentes en olimpiadas matemáticas no dependen únicamente de conceptos teóricos para su solución, sino de identificar y analizar detalles particulares de ellos, en este capítulo se presentan a través de la solución de problemas geométricos de olimpiadas matemáticas algunas estrategias que pueden ayudar a enfrentar problemas en esta área.

Cada una de las estrategias será introducida con la solución detallada de un problema. Luego, para profundizar un poco más, se resuelve de forma breve otro problema usando la misma estrategia. Algunas de las estrategias presentadas se realizan siguiendo textos de resolución de problemas como son Cabezas (2017), Castillo et al. (2016), Polya (1965) y Chen (2016), y estrategias como *Uso de AGD* se desarrollan a partir de la experiencia adquirida durante este trabajo.

3.1. Elementos auxiliares

Al resolver problemas es común incluir elementos que no se consideran o presentan en el enunciado del problema. Se introducen estos elementos con el fin de encontrar la solución, dichos elementos son conocidos como ***Elementos auxiliares***.

Existen diversos tipos de elementos auxiliares, por ejemplo: esquemas, incógnitas, variables, figuras geométricas, entre otros. Así, si se está resolviendo un problema relacionado con álgebra se pueden incluir incógnitas o variables auxiliares para ejecutar el plan que se tiene pensado. En el caso de problemas de tipo geométrico, los elementos auxiliares más comunes que se incluyen al momento de resolverlos son: puntos, segmentos, rectas, circunferencias, entre otros.

Polya (1965), menciona que las razones que suscitan la introducción de elementos auxiliares son diversas. Una de estas razones es la inclusión de elementos auxiliares por analogía, es decir, es posible que el problema a resolver tenga semejanzas con algún problema anteriormente resuelto, de modo que el estudiante intenta agregar elementos auxiliares de forma similar para tratar de resolver el problema. Otra razón puede ser porque se requiere incluir un elemento auxiliar con el fin de hacer uso de alguna definición o teorema. Por ejemplo, para usar la definición de círculo no solo se debe conocer dicho elemento, sino que además se deben conocer su radio y su centro, por lo que es posible incluirlos como elementos auxiliares del problema. Una de las razones que personalmente se cree más recurrente, es encontrar que los datos dados por el enunciado son insuficientes para resolver el problema, esta falta de datos lleva al estudiante a introducir elementos que le permitan deducir mayor información para llegar a la solución.

No obstante, independientemente de la razón que lleva a introducir elementos auxiliares, dicha inclusión debe ser siempre justificada, no es correcto introducirlos sin razón. En palabras de Polya, "no debe introducirse gratuitamente ningún elemento auxiliar", dado que incluir un elemento que no se usa al momento de resolver el problema podría dificultar el proceso de resolución. Así, justificar la inclusión de un elemento auxiliar es además una herramienta útil para acercar al estudiante a la demostración formal, el justificar por qué se incluye un elemento auxiliar que permite resolver el problema puede ser una tarea incluso más interesante que resolver el problema mismo.

Con el fin de ilustrar esta estrategia, se presenta a continuación la solución de un problema en la cual se hará uso de la estrategia de ***Elementos auxiliares***, además de seguir el método propuesto por Polya según se presentó en el Capítulo 2.

Problema 3.1. ***OCM (2000), nivel 1.***

En el trapecio $ABCD$, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales (ver Figura 3.9). El perímetro de $ABCD$ es:

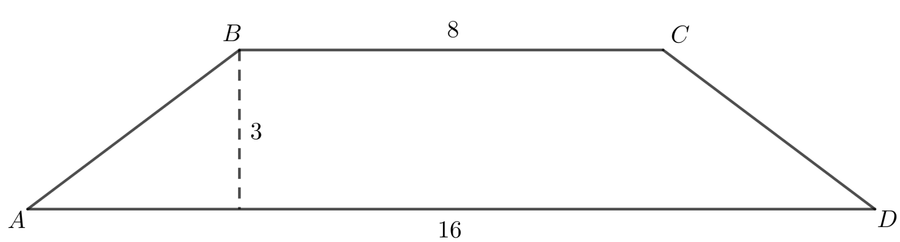


Figura 3.1: Ilustración del Problema 3.1.

a) 27 *b)* 30 *c)* 32 *d)* 34 *e)* 48

Solución

Teniendo en cuenta los cuatro pasos de Polya, para ***comprender el problema*** se deben identificar los datos que este proporciona y también la incógnita del problema.

En este caso, se debe hallar $\boldsymbol{P}(ABCD)$ y los datos que ofrece el problema son:

- Base menor: $\overline{BC} = 8$.
- Base mayor: $\overline{AD} = 16$.
- Altura del trapecio: $h = 3$.
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Una vez establecido lo que se debe responder y los datos que se tienen hasta el momento, se puede empezar por recordar que el perímetro de un trapecio es la suma de sus cuatro lados, es decir que

$$\boldsymbol{P}(ABCD) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}. \tag{3.1.1}$$

Luego, reemplazando en (3.1.1) los valores conocidos y teniendo en cuenta que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, se concluye que

$$\boldsymbol{P}(ABCD) = \overline{AB} + 8 + 16 + \overline{AB},$$

de donde

$$\boldsymbol{P}(ABCD) = 2\overline{AB} + 24. \tag{3.1.2}$$

De modo que, para encontrar el perímetro del trapecio se debe hallar el valor de $\overline{AB}$. Como se puede observar los datos que el enunciado presenta no permiten encontrar directamente el valor de $\overline{AB}$, en otras palabras, los datos presentados hasta el momento por el problema son insuficientes para encontrar una solución. Este es uno de los motivos por los cuales se introducen ***elementos auxiliares***.

Se introduce el elemento auxiliar, el punto de corte de la altura del trapecio desde el punto B sobre $\overline{AD}$ y se denota B', como se ve en la Figura 3.2. De aquí, $\angle AB'B$ es recto por lo cual se puede usar el teorema de Pitágoras para hallar $\overline{AB}$, que corresponde a la hipotenusa de $\Delta ABB'$. Se conoce el cateto $\overline{BB'} = 3$ y se desconoce el cateto $\overline{AB'}$, la pregunta ahora es ¿cómo hallar el valor de $\overline{AB'}$? Seguidamente, analizando los datos que se tiene, se introduce $\overline{CC'} \perp \overline{AD}$ (ver Figura 3.2) y se exploran los datos que puede ofrecer este nuevo elemento auxiliar.

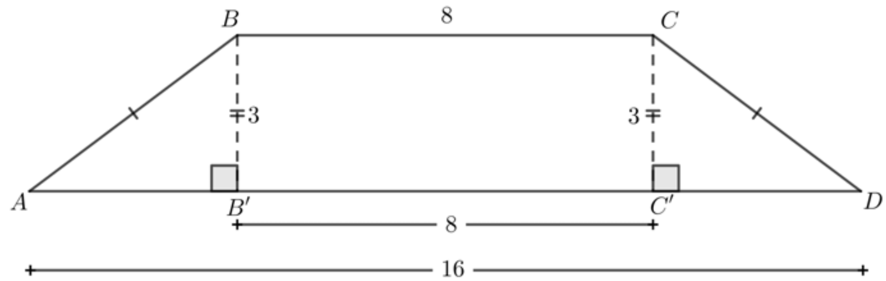


Figura 3.2: Inclusión de elementos auxiliares Problema 3.1.

Puesto que $\overline{CC'}$ es también la altura del trapecio, se sigue que $\overline{BB'} \cong \overline{CC'}$ y así $\overline{CC'} = 3$. Por otro lado como $BCC'B'$ es un rectángulo, se tiene que $\overline{B'C'} = 8$, entonces

$$\overline{AB'} + \overline{DC'} = 8. \tag{3.1.3}$$

Luego, por Pitágoras en $\Delta ABB'$ se tiene que $\overline{AB}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BB'}^2$ y dado que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ por hipótesis, se concluye que

$$\overline{CD}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BB'}^2. \tag{3.1.4}$$

Ahora aplicando nuevamente Pitágoras al triángulo DCC' se determina que

$$\overline{CD}^2 = \overline{DC'}^2 + \overline{CC'}^2. \tag{3.1.5}$$

De donde igualando (3.1.4) y (3.1.5), y reemplazando $\overline{BB'}^2 = \overline{CC'}^2 = 9$ se sigue

$$\overline{AB'} = \overline{DC'}. \tag{3.1.6}$$

Así, sustituyendo (3.1.6) en (3.1.3), se concluye que $\overline{AB'} = 4$.

Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en $\Delta ABB'$, se sigue que

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Luego al sustituir este valor en (3.1.2), se tiene

$$\mathbf{P}(ABCD) = 2(5) + 24 = 34.$$

Concluyendo así que la respuesta correcta es *d)*.

$\square$

Cabe resaltar que concebir y ejecutar un plan son dos pasos que van de la mano, puesto que aplicar una idea lleva al estudiante a evidenciar si esta es de ayuda o genera acercamientos a la solución del problema; o si por el contrario, se debe seguir un camino diferente en búsqueda de la solución. Para este caso, la inclusión de los elementos auxiliares fue clave en el proceso de hallar el valor de la incógnita de una manera asertiva. Sin embargo, se resalta que este no es el único camino para determinar la solución. Por ejemplo, si el estudiante conoce propiedades sobre trapecios isósceles podría simplificar muchos procesos de los realizados. El profesor podría referenciar los trapecios isósceles y sus propiedades como parte de la mirada retrospectiva, e indagar a los estudiantes sobre que podrían cambiar en la solución realizada con las nuevas propiedades que se mencionaron.

El siguiente problema se expone con el fin de que el lector en esta ocasión comprenda el uso específico de esta estrategia ***Elementos auxiliares***.

Problema 3.2. ***OMPR (2015), nivel 2***

En el dibujo $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente a una circunferencia C con centro O y $\overleftrightarrow{PB}$ biseca el ángulo $\angle TPA$. Calcule el ángulo $\angle TBP$ (ver Figura 3.3).

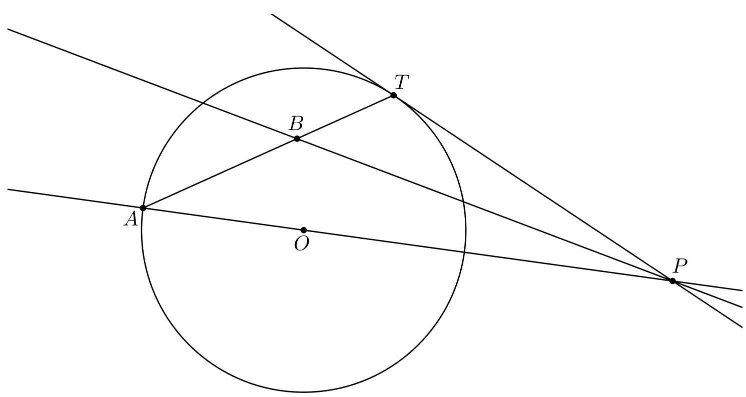


Figura 3.3: Ilustración del Problema 3.2.

Solución

El problema nos proporciona de manera explícita la siguiente información:

- $\overleftrightarrow{PB}$ biseca a $\angle TPA$.
- $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O.

Dado que $\overleftrightarrow{PB}$ biseca a $\angle TPA$, se tiene que $\angle TPB \cong \angle BPA$ los cuales se denotan por x en la Figura 3.4.

La información obtenida hasta el momento es insuficiente para resolver el problema, es entonces cuando el estudiante procede a introducir elementos auxiliares. Así pues, para resolver este problema se traza un elemento auxiliar que es el radio $\overline{OT}$ (ver Figura 3.4).

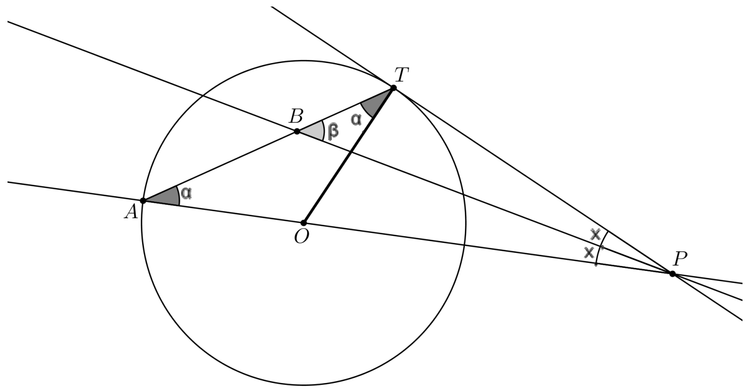


Figura 3.4: Inclusión de elemento auxiliar Problema 3.2.

Se observa ahora la información que se obtiene a partir de la construcción del elemento auxiliar y se deduce que:

- $\overline{OT}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{PT}$, por lo tanto $\angle OTP$ es Recto.
- $\overline{OT}$ y $\overline{OA}$ son radios de la circunferencia de centro O, por lo tanto $\overline{OT} \cong \overline{OA}$. Así, ΔAOT es isósceles, lo que implica que $\angle OTA \cong \angle OAT$ y se denotan por α.

Luego por suma de ángulos en ΔPTA,

$$2x + \alpha + (\alpha + 90^\circ) = 180^\circ,$$

de donde

$$x + \alpha = 45^\circ. \tag{3.1.7}$$

De forma similar en el ΔPTB, donde β denota la medida de $\angle TBP$, se tiene que

$$x + (\alpha + 90^\circ) + \beta = 180^\circ,$$

lo que implica que

$$x + \alpha + \beta = 90^\circ. \tag{3.1.8}$$

Sustituyendo lo obtenido en (3.1.7), en (3.1.8) se tiene que

$$45^\circ + \beta = 90^\circ.$$

Finalmente despejando obtenemos que el valor del ángulo pedido es $\beta = 45°$.

□

En los dos problemas que se presentaron en esta sección la inclusión de elementos auxiliares hizo referencia a la construcción de segmentos, para el primer problema se trazó una altura del trapecio con lo cual se pudo concluir datos que inicialmente no se tenían y posteriormente se trazaron otros segmentos que permitieron hallar el perímetro del trapecio dando respuesta al problema. De manera similar, para el segundo problema la construcción del radio de la circunferencia dada en el problema evidenció de una u otra manera el camino que se debía seguir para encontrar el valor del ángulo solicitado.

Así, se puede concluir que el uso de esta estrategia en la resolución de un problema geométrico requiere la habilidad de construcción de elementos que hagan el papel de auxiliares en la resolución del mismo y en ningún momento se deben construir elementos sin sentido, dado que si se hace de esta manera cabe la posibilidad de errar en el proceso de resolución.

3.2. Simetría

En ocasiones, ante un problema suele ocurrir que son tantos los detalles a tener en cuenta que es complicado concebir una idea clara de un camino que guíe hacia la solución. Establecer comparaciones y encontrar similitudes entre diferentes partes del problema puede resultar de gran utilidad. Aprender a identificar cuándo figuras o expresiones matemáticas distintas aluden a lo mismo hace referencia a la estrategia de ***Simetría***.

La simetría es un término que generalmente se escucha cuando se estudia geometría, en donde dicha palabra hace alusión a transformaciones como rotaciones, traslaciones y reflexiones con respecto a puntos, rectas o planos de figuras geométricas. Polya (1965), comenta que la palabra simetría puede verse en dos sentidos, desde lo geométrico que es lo más usual pero también puede usarse este término a modo más general. La concepción general del término simetría, expone que un objeto es simétrico si está compuesto por partes intercambiables, partes que permiten sustituirse o cambiarse de posición de modo que no alteran el objeto. Por ejemplo, un hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros congruentes, dichos triángulos son partes que se pueden intercambiar en el hexágono y esto no altera la figura. Así, la simetría se refiere a la correspondencia exacta en tamaño y forma de un todo. Por tanto, un objeto es simétrico si hay una o más acciones que dejan el objeto sin cambios, donde las acciones se denominan simetrías del objeto (Cabezas, 2017).

Si se observan estos dos sentidos del término simetría, se puede notar claramente que la concepción general del término abarca la concepción geométrica y da incluso mayores posibilidades en el caso de la resolución de problemas, pero no se debe olvidar que gran parte de las posibilidades que ofrece una estrategia depende del bagaje de problemas resueltos que el estudiante tenga, pues su experiencia le permitirá acceder a la familiarización y aprehensión de la estrategia y por ende a la resolución de muchos problemas más.

En este trabajo, la estrategia de simetría se utiliza generalmente cuando se trata de encontrar el valor de un área en específico, donde esta área resulta en cierta medida difícil de calcular mediante métodos aritméticos, así se recurre a la búsqueda de partes intercambiables y transformaciones geométricas para dar lugar a una figura geométrica donde el área a calcular resulte más sencilla. El problema a seguir ejemplifica este hecho.

Problema 3.3. ***ORM-UDENAR (2016), nivel 2.***

Calcule el área de la región sombreada, teniendo en cuenta que $ABCD$ es un cuadrado de área $25cm^2$, y que se tienen dos semicircunferencias de diámetro el lado del cuadrado, como se muestra en la figura (ver Figura 3.5).

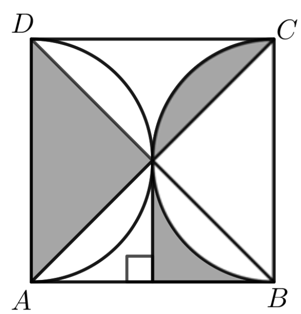


Figura 3.5: Ilustración del Problema 3.3.

a) $\frac{75}{8}cm^2$ *b)* $\frac{3}{2}cm^2$ *c)* $111cm^2$ *d)* $75cm^2$ *e)* $100cm^2$

Solución

Para una mejor comprensión del problema, en la Figura 3.6 se ubican puntos de intersección y con letras minúsculas algunas regiones.

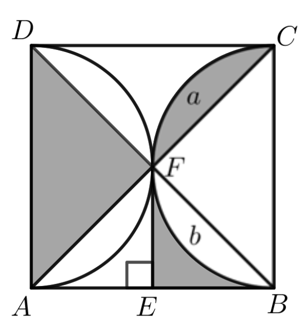


Figura 3.6: Inclusión de notación en la figura del Problema 3.3.

En la Figura 3.6 las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intercectan en F, que es su punto medio, por tanto $\overline{AF} \cong \overline{CF} \cong \overline{BF} \cong \overline{DF}$. De lo anterior se concluye que los arcos $\overset{\frown}{CF}$ y $\overset{\frown}{BF}$ son congruentes, por lo cual las regiones denotadas como a y b son simétricas y pueden ser intercambiadas, tal como se muestra en la Figura 3.7.

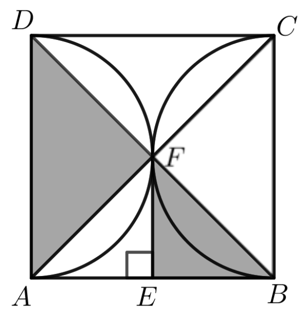


Figura 3.7: Primera simetría Problema 3.3.

Como $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, donde E corresponde al punto medio de $\overline{AB}$ por ser F el centro del cuadrado, se tiene por el criterio de congruencia de triángulos L-L-L que $\Delta AEF \cong \Delta BEF$. Por tanto, haciendo uso nuevamente de la estrategia de simetría se pueden intercambiar las regiones correspondientes a ΔAEF y ΔBEF como se ve Figura 3.8.

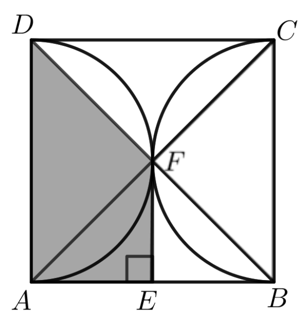


Figura 3.8: Segunda simetría Problema 3.3.

Para calcular el área de la región sombreada en la Figura 3.5 se debe calcular el área de la región sombreada en la Figura 3.8, esta región corresponde a un trapecio donde las longitudes de sus lados son desconocidas. Sin embargo, dado que por hipótesis $\boldsymbol{A}(ABCD) = 25cm^2$, mediante un cálculo sencillo se tiene que la longitud de cada uno de los lado del cuadrado es $5cm$ y por tanto la base mayor en el trapecio será $\overline{AD} = 5cm$. Para la altura del trapecio se tiene que por ser E punto medio de $\overline{AB}$, esta tiene valor $\overline{AE} = \frac{5}{2}cm$. Además, como F es el centro del cuadrado, se tiene que $\overline{AE} = \frac{5}{2}cm$ lo que equivale a la mitad de la longitud de cada lado.

Finalmente se calcula el área del trapecio en la Figura 3.8, así

$$\boldsymbol{A}(AEFD) = \frac{\overline{AF}(\overline{AD} + \overline{EF})}{2}, \tag{3.2.1}$$

de donde al reemplazar $\overline{AF} = \frac{5}{2}$, $\overline{AD} = 5cm$ y $\overline{EF} = \frac{5}{2}cm$ en (3.2.1) se tiene que,

$$\boldsymbol{A}(AEFD) = \frac{\frac{5}{2}cm\left(5cm + \frac{5}{2}cm\right)}{2} = \frac{75}{8}cm^2.$$

Así la respuesta es *a)*.

□

Al observar inicialmente las regiones sombreadas por el problema se puede pensar en determinar el área de cada región de forma independiente, pero para algunas de ellas no se tiene una fórmula de área fija. Al usar simetrías y hacer transformaciones, encontrar el área de la región sombreada en este caso, se redujo al cálculo del área de un trapecio. Así, se puede afirmar que la estrategia ***Simetría*** es eficaz en la resolución de problemas geométricos que requieren hallar áreas de figuras para las cuales no hay fórmulas, siempre que se puedan encontrar regiones o figuras simétricas que puedan intercambiarse para formar figuras menos complejas. Para evidenciar este hecho, se presenta el siguiente problema.

Problema 3.4. ***CM (2016), nivel 3.***

$ABCD$ es un rectángulo y M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Las circunferencias son tangentes a los lados del rectángulo y tangentes entre sí (ver Figura 3.9). Si la medida de $\overline{AB}$ es $10cm$, el área de la región gris es:

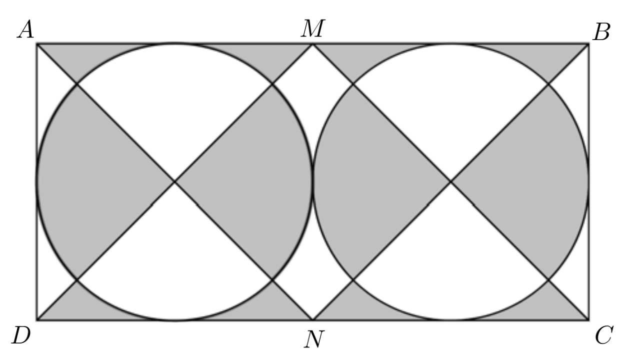


Figura 3.9: Ilustración del Problema 3.4.

a) $\frac{25\Pi}{4}$ cm^2 *b)* 20 cm^2 *c)* $50 - \frac{25\Pi}{4}$ cm^2 *d)* 25 cm^2 *e)* 5 cm^2

Solución

Como $ABCD$ es un rectángulo, por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Ahora, dado que por hipótesis $\overline{AB} = 10cm$, entonces $\overline{CD} = 10cm$. Por otro lado como M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, se tiene que $\overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CN} \cong \overline{ND}$ y su medida es $5cm$.

Puesto que las circunferencias contenidas en el rectángulo $ABCD$ son tangentes entre sí y tangentes al rectángulo, se puede afirmar que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y por tanto $\overline{BC} = 5cm$. Así al trazar $\overline{MN}$, se divide el rectángulo $ABCD$ en dos cuadrados congruentes como se puede ver en la Figura 3.10.

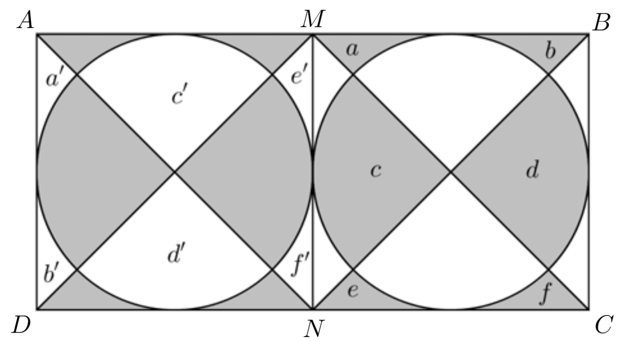


Figura 3.10: División de $ABCD$ y notación Problema 3.4.

En la Figura 3.10, se han denotado las regiones de color gris. Nótese que en esta figura $a \cong a'$, $b \cong b'$, $c \cong c'$, $d \cong d'$, $e \cong e'$ y $f \cong f'$. Por lo tanto, las regiones de color gris se pueden intercambiar con las regiones de color blanco, por ejemplo a se intercambia con a', b con b' y así sucesivamente hasta obtener la Figura 3.11.

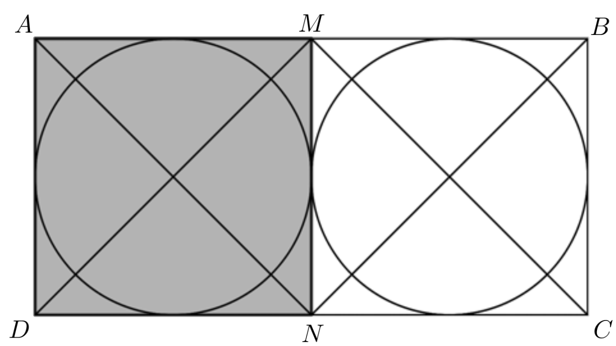


Figura 3.11: Simetrías Problema 3.4.

La región de color gris en la Figura 3.11, ahora es igual a uno de los cuadrados de lado $5cm$ formados antes, por lo que el área de dicha región es $25cm^2$. Así la respuesta correcta en el problema es *d)*.

□

Para este caso, igual que en el anterior problema, se intercambiaron algunas partes de la figura que se encuentran sombreadas con otras que no lo están, para obtener una figura conocida y poder calcular el área sombreada de una forma mucho más sencilla y rápida.

En los dos problemas que se presentaron en esta sección, se puede observar que las figuras proporcionadas por los problemas de una u otra forma llevan a quién los resuelve a realizar las transformaciones geométricas que se llevaron a cabo en las soluciones implícitamente, pero existen otros problemas donde estas no son tan evidentes como se puede ver en los problemas 3.1, 3.2 y 3.3 presentados en Cabezas (2017), quién afirma que "para trabajar con simetrías es necesario tener en cuenta dos aspectos, el primero es ver simetrías en lugares inimaginables y el segundo, buscar la armonía y la belleza siempre que se esté resolviendo un problema".

3.3. Fraccionamiento de la figura

El concepto de fracción es ampliamente utilizado en el diario vivir, desde muy temprana edad se entra en contacto con las fracciones probablemente sin hacer conciencia de ello. Frases como "la mitad del vaso", "un cuarto de queso", "media libra de arroz", "un octavo de cartulina", entre otras, son cotidianas para muchos. En la escuela también se introduce a edad temprana el concepto de fracción como resultado de la partición de una unidad en partes iguales, así por ejemplo se menciona a los niños el hecho de tomar una manzana, partirla en cuatro partes iguales y comer una de ellas, lo que es equivalente a 1/4 de manzana. El estudiante es capaz de comprender este concepto de forma natural.

Desafortunadamente, a pesar de lo cotidiano que puede resultar el concepto de fracción la construcción y concepción de este causa gran dificultad en los estudiantes. Esto en cierta medida se justifica dadas las múltiples interpretaciones del término fracción, dado que este puede verse como la relación entre la parte y el todo, como un punto sobre la recta numérica, también como un operador, como una razón o como un cociente.

En el caso de la resolución de problemas geométricos, la interpretación más adecuada es la primera de las mencionadas anteriormente, esta nos permite hacer uso de la representación gráfica de la fracción para resolver problemas donde generalmente se pide calcular el área de una figura a razón de otra. Así, esta estrategia consiste en fraccionar la figura presentada en partes iguales, tomando como unidad el total de la figura y seguidamente se hace el conteo de las subdivisiones sombreadas para llegar a la respuesta. El problema que sigue permite al lector comprender mejor lo anteriormente expuesto.

Problema 3.5. ***OMPR (2010), nivel elemental.***

La figura de abajo está formada por hexágonos regulares y triángulos equiláteros. El área total es $154cm^2$*. ¿Cuál es el área de la región sombreada? (ver Figura 3.12).*

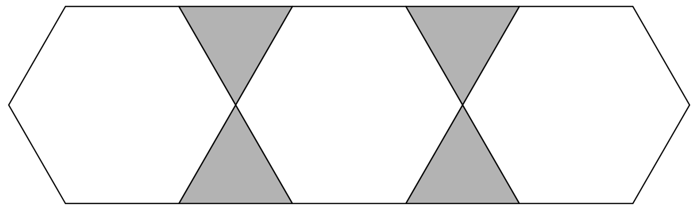


Figura 3.12: Ilustración del Problema 3.5.

a) 16 cm^2 *b)* 24 cm^2 *c)* 28 cm^2 *d)* 32 cm^2 *e)* 36 cm^2

Solución

En la Figura 3.12 se tienen 3 hexágonos regulares. Si se trazan las 3 diagonales en cada hexágono se obtienen 6 triángulos equiláteros congruentes para cada uno, obteniendo así un total de 22 triángulos equiláteros congruentes como se puede ver en la Figura 3.13.

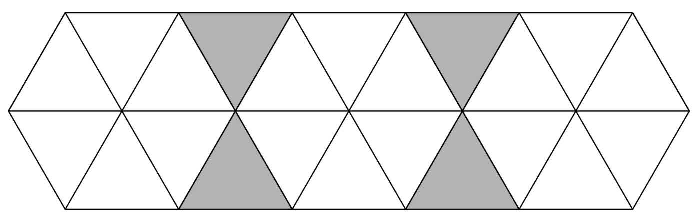


Figura 3.13: Fraccionamiento Problema 3.5.

Así, tomando la figura original como una unidad de la cual se conoce que el área es $154cm^2$ y teniendo en cuenta que solo cuatro de los 22 triángulos de la Figura 3.13 están sombreados, al relacionar con una fracción se obtiene el valor del área de la región sombreada. De donde,

$$4\left(\frac{154cm^2}{22}\right) = 28cm^2,$$

por lo cual la respuesta correcta para este problema es la indicada en *c)*.

□

En la resolución de este problema se consideró la figura original como una unidad, la cual posteriormente se fraccionó en partes congruentes. Luego se procede a contar el número total de partes obtenidas durante el fraccionamiento y la cantidad que están sombreadas. Con este proceso, se puede llegar a la solución del problema de una manera sencilla dado que para este problema en particular el área total de la figura es conocida. Por ejemplo, el Problema 3.3 de la sección anterior puede ser resuelto de una forma muy práctica si se usa la estrategia de fraccionamiento para lo cual no es necesario aplicar la fórmula del área del trapecio .

A continuación se presenta un segundo problema tomado de la ORM-UNIVALLE, la cual se desarrolló en el año 2011, para esta ocasión el problema se propuso a estudiantes de grados octavo o noveno. Cabe resaltar que a diferencia del primer problema, en este el área total de la figura es desconocida.

Problema 3.6. ***ORM-UNIVALLE (2011), nivel medio.***

En la Figura 3.14, $ABIF$ y $CDEG$ son cuadrados iguales. El punto G está en el centro del cuadrado $ABIF$ y el punto I está en el centro del cuadrado $CDEG$. Si el área sombreada es $90cm^2$, ¿cuál es el área en cm^2 del polígono $ABCDEF$?

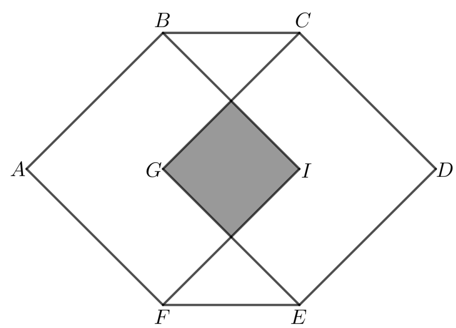


Figura 3.14: Ilustración del Problema 3.6.

Solución

Para empezar se trazan las cuatro diagonales en los cuadrados $ABIF$ y $CDEG$ respectivamente, obteniendo la Figura 3.15-a. Posteriormente se trazan las rectas $\overleftrightarrow{EG}$,$\overleftrightarrow{BI}$, $\overleftrightarrow{CG}$ y $\overleftrightarrow{FI}$, como se muestra en la Figura 3.15-b.

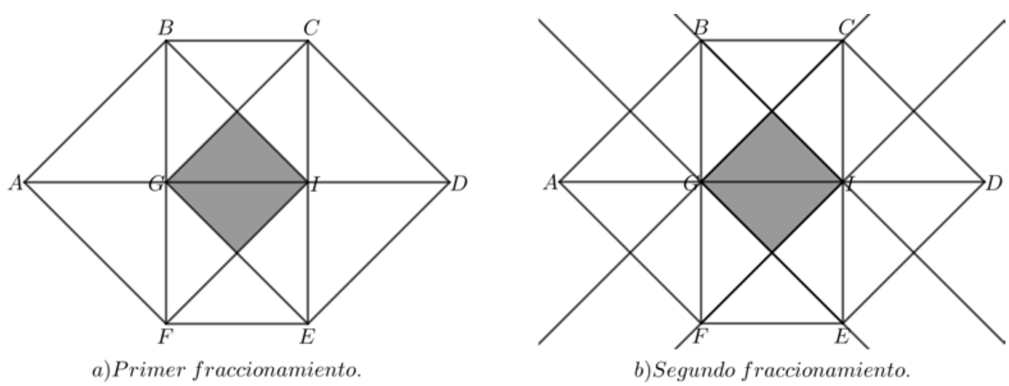


Figura 3.15: Fraccionamientos Problema 3.6.

Con las construcciones que se han realizado hasta el momento se tienen 16 triángulos isósceles congruentes, dado que por hipótesis los cuadrados $ABIF$ y $CDEG$ son congruentes y además los puntos G e I están en los centros de dichos cuadrados respectivamente, y por tanto coinciden con los puntos de intersección de las diagonales de cada cuadrado.

Por otro lado, se tiene que el área sombreada es de $90cm^2$, por tanto el área de cada uno de los triángulos sombreados es de $45cm^2$. Así dado que la unidad se dividió en 16 triángulos congruentes, basta hacer el siguiente cálculo para hallar el área del polígono $ABCDEF$, es decir

$$\boldsymbol{A}(ABCDEF) = 45cm^2 \times 16 = 720cm^2.$$

$\square$

Como se mencionó inicialmente, en este problema el área total de la figura es desconocida, de hecho esto es lo que se pide encontrar. Sin embargo, el fraccionamiento de esta figura en regiones congruentes, permite relacionar el área sombreada con el área total de la figura y de esta manera encontrar el valor deseado.

Note que esta estrategia se puede combinar con la de simetría presentada en la anterior sección, tal como se observa en la Figura 3.16. Para este caso el área del polígono $ABCDEF$ se obtiene al multiplicar los $90cm^2$ del área sombreada por ocho rombos. De donde igual a lo obtenido el área es $90cm^2 \times 8 = 720cm^2$.

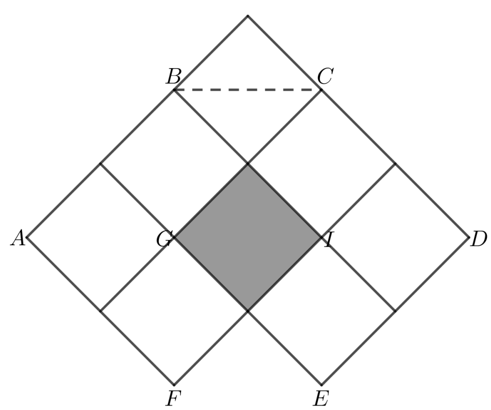


Figura 3.16: Solución con simetría Problema 3.6.

Finalmente a manera de conclusión, se tiene que para usar esta estrategia es importante tener en cuenta si las partes obtenidas después de fraccionar la figura son congruentes para proceder a hacer el conteo, de lo contrario se obtendrá una respuesta errónea. Aunque muchos estudiantes lo hacen de forma intuitiva, justificar el motivo por el que se dan las congruencias es también importante puesto que lleva a entender e identificar teoremas y propiedades geométricas.

3.4. Algebrización

El desarrollo del razonamiento algebraico en los diferentes niveles educativos es un tema que resulta de gran interés para diversos investigadores debido a su importancia en el que hacer de las matemáticas (Godino et al., 2015). En la resolución de problemas se considera también una estrategia de gran valor, Polya (1965) menciona esta estrategia con el nombre de planteo de ecuaciones y describe básicamente que, en matemáticas, el planteo de una ecuación es similar a realizar una traducción, es expresar con símbolos matemáticos una condición formulada en palabras. En los problemas geométricos también es posible realizar este tipo de "traducciones" a través de la geometría analítica, que se basa en establecer una correspondencia entre las curvas y figuras geométricas con las ecuaciones algebraicas. Esta correspondencia permite reformular problemas geométricos como problemas equivalentes en álgebra y viceversa.

Así, para algebrizar un problema geométrico se puede ubicar la figura proporcionada por el problema en un sistema coordenado o plano cartesiano, lo que permite expresar el problema en una o varias expresiones algebraicas (ecuaciones) haciendo uso de las coordenadas representadas en la figura ya ubicada dentro del sistema coordenado, para posteriormente con herramientas propias del álgebra, analizar a fondo las propiedades y datos de dichas figuras tales como distancias, áreas, puntos de intersección, ángulos de inclinación, volúmenes, etc. Lo anterior puede proporcionar datos claves para la solución del problema o incluso, solucionar el problema. Así, se recrea lo descrito mediante el siguiente problema.

Problema 3.7. ***OCM (2016), nivel 1***

El rectángulo $DEFA$ que se muestra a continuación es un rectángulo de 3×4 con $\overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA} = 1$ (ver Figura 3.17). El área de las "alas del murciélago" (el área sombreada) es:

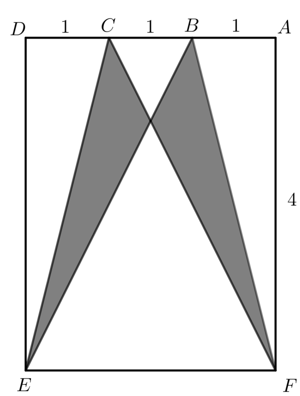


Figura 3.17: Ilustración del Problema 3.7.

a) 2 *b)* $2\frac{1}{2}$ *c)* 3 *d)* $3\frac{1}{2}$ *e)* 4

Solución

A partir de la información proporcionada en el problema podemos concluir que el área del rectángulo $DEFA$ es $12u^2$, sin embargo no es posible calcular a partir de estos datos el área deseada. Para esto optamos entonces por ubicar la figura en el plano cartesiano, ubicando el vértice E del rectángulo en el origen de coordenadas, y dos de los lados del rectángulo sobre los ejes de coordenadas x e y respectivamente (ver Figura 3.18).

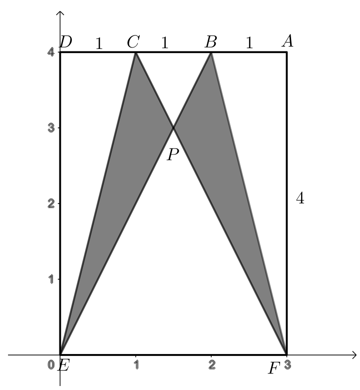


Figura 3.18: Ilustración del Problema 3.7 ubicada en el plano.

La figura ubicada en el plano cartesiano nos permite conocer las coordenadas exactas de los puntos A, B, C, D, E y F, y a partir de esta información podemos deducir las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos que forman las "alas del murciélago" en la figura. Así, $\overleftrightarrow{EC}$ tendrá por ecuación $y_1 = 4x$, $\overleftrightarrow{EB}$ tendrá por ecuación $y_2 = 2x$, $\overleftrightarrow{FB}$ tendrá por ecuación $y_3 = -4x + 12$ y $\overleftrightarrow{FC}$ tendrá por ecuación $y_4 = -2x + 6$.

Para este momento, el lector ya habrá intuido que en realidad se está trabajando la resolución de problemas geométricos por medio de geometría analítica. Lo que sigue entonces es encontrar las coordenadas del punto P intersección de $\overleftrightarrow{EB}$ y $\overleftrightarrow{FC}$, solucionando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x \\ y_4 &= -2x + 6. \end{aligned}$$

Ahora, el alumno deberá poner en juego lo aprendido en las clases de álgebra de la secundaria, recordando los métodos de igualación, sustitución, reducción y Gauss, útiles para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El alumno determina que $x = 3/2$ y $y = 3$, así el punto P tiene por coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

Al conocer las coordenadas del punto P podemos calcular cada una de las siguientes áreas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\Delta EDC) &= 2u^2,\\ \boldsymbol{A}(\Delta FAB) &= 2u^2,\\ \boldsymbol{A}(\Delta EPF) &= \frac{9}{2}u^2,\\ \boldsymbol{A}(\Delta CPB) &= \frac{1}{2}u^2.\end{aligned}$$

El área no sombreada equivale entonces a la suma de las áreas halladas anteriormente, es decir $9u^2$. Finalmente el área de las "alas del murciélago" será la diferencia del área del rectángulo $DEFA$ y el área no sombreada, es decir $12u^2 - 9u^2 = 3u^2$.

$\square$

Como se pudo observar se dio solución al problema anterior utilizando conocimientos propios del álgebra, aún cuando el problema inicialmente aparentaba tener una solución geométrica al pedir en su enunciado calcular el valor de un área.

El problema anterior se propuso para nivel 1 que corresponde a estudiantes de sexto y séptimo grado de secundaria, quienes posiblemente no estén muy familiarizados con algunos de los conceptos usados. Así, se aclara que dicha solución se presentó con el fin de ejemplificar la estrategia de *Algebrización*. Otra opción para determinar el área sombreada, usando conceptos más básicos, es expresar el área de una de las "alas del murciélago" como la diferencia entre áreas de triángulos para los cuales se expresa su altura en términos de una única variable, ver Figura 3.19-a. Otra posibilidad para determinar la solución podría llevarse a cabo mediante el uso de la estrategia *Fraccionamiento*, ver Figura 3.19-b.

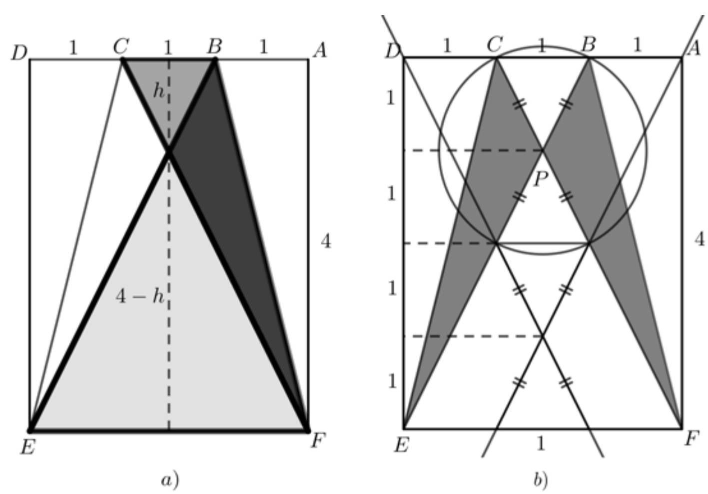


Figura 3.19: Otras posibles soluciones para el Problema 3.7.

La anterior situación no solo evidencia el hecho de la existencia de distintas soluciones para un problema, sino también que se debe tener en cuenta para la resolución del problema el nivel para el cual fue propuesto.

A continuación se presenta la solución de un problema tomado de la etapa semifinal estatal de la OMM, donde se hará uso igualmente de la estrategia de algebrización.

Problema 3.8. ***CM (2008), nivel 6***

El cuadrado $ABCD$ de la Figura tiene lado 1 y M es el punto medio del lado $\overline{AB}$ (ver Figura 3.20). ¿Cuál es el área de la región sombreada?

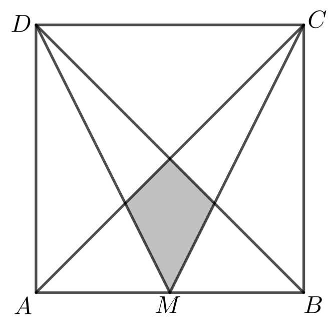


Figura 3.20: Ilustración del Problema 3.8.

a) $\frac{1}{24}$ *b)* $\frac{1}{16}$ *c)* $\frac{1}{8}$ *d)* $\frac{1}{12}$ *e)* $\frac{2}{13}$

Solución

Igual que en el problema anterior se empieza por ubicar la gráfica proporcionada por el problema en el plano cartesiano, haciendo coincidir el punto A de la figura con el origen de coordenadas (ver Figura 3.21).

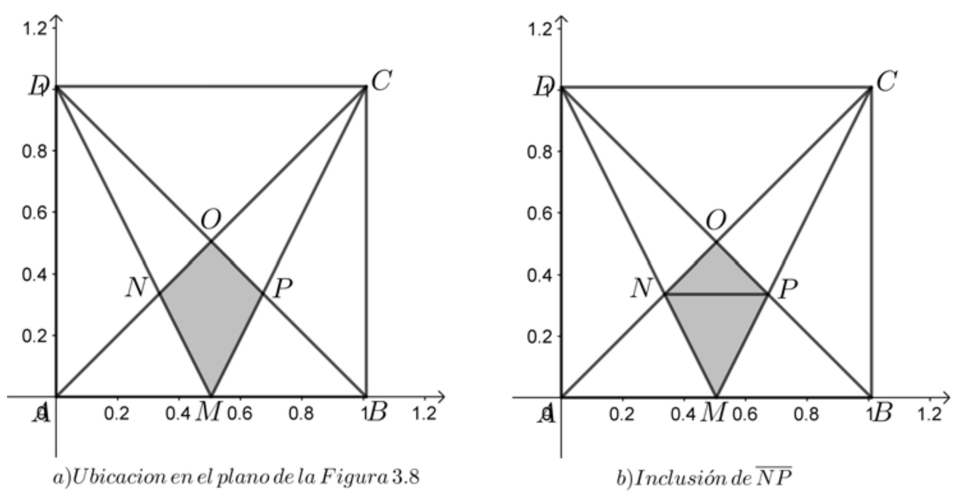


Figura 3.21: Ubicación en el plano del Problema 3.8 e inclusión de $\overline{NP}$.

La Figura 3.21-a permite determinar las coordenadas de los puntos A, B, C y D. Las coordenadas de M también se conocen dado que este es es el punto medio del lado $\overline{AB}$. Conociendo estas coordenadas se pueden determinar las ecuaciones para las rectas que contienen a $\overline{AC}$, $\overline{CM}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DM}$. Así la ecuación para $\overleftrightarrow{AC}$ es $y_1 = x$, para $\overleftrightarrow{CM}$ es $y_2 = 2x - 1$, $\overleftrightarrow{BD}$ tendrá por ecuación $y_3 = -x + 1$ y para $\overleftrightarrow{DM}$ se tiene $y_4 = -2x + 1$.

Con las ecuaciones de estas rectas se pueden determinar las coordenadas de los puntos N, O y P. Así al solucionar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_4 &= -2x + 1, \end{aligned}$$

se tiene que las coordenadas para N son $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Solucionando el sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_3 &= -x + 1, \end{aligned}$$

se tiene que las coordenadas para O son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De la misma manera para P se obtienen las coordenadas $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ al solucionar el sistema

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x - 1 \\ y_3 &= -x + 1. \end{aligned}$$

Para calcular $\boldsymbol{A}$*(MNOP)* basta calcular las áreas de ΔNOP y ΔNMP formados al trazar $\overline{NP} \parallel \overline{AB}$ (ver Figura 3.21-b). Al conocer las coordenadas de los puntos N, O y P, es posible calcular las bases y alturas de estos triángulos. Así $\overline{NP}$ corresponde a la base de los dos triángulos y tiene una longitud de $\frac{1}{3}u$, ΔNOP tiene una altura de $\frac{1}{6}u$ de longitud y ΔNMP una altura de longitud $\frac{1}{3}u$.
Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\Delta NOP) &= \frac{1}{36}u^2, \\ \boldsymbol{A}(\Delta NMP) &= \frac{1}{18}u^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{A}(MNOP) = \frac{1}{12}u^2.$$

□

En los problemas presentados se puede observar que ambos proporcionaron una figura inicial, la cual fue muy útil en las respectivas resoluciones, por tanto surge la inquietud acerca de la utilidad de esta estrategia en la solución de un problema geométrico que no proporcione ningún tipo de figura, en este caso muy probablemente se procedería primero a realizar la respectiva figura para luego ubicarla en el plano cartesiano.

3.5. Realizar una figura

En la resolución de problemas, un esquema, tabla o imagen pueden considerarse como una figura. Muchos problemas de olimpiadas vienen acompañados de figuras que en algunos casos son representaciones de condiciones geométricas y en otros pueden ser simplemente esquemas que decidieron ponerse como figuras geométricas para presentar una imagen armoniosa, es decir se colocan para presentar información del problema aún cuando esta no sea de geometría. En cualquiera de los dos casos, las figuras resultan útiles al momento de resolver el problema expuesto, pero, ¿qué ocurre cuando el problema no viene acompañado de una figura? Es entonces donde nace la estrategia de realizar una figura.

En problemas matemáticos en general, puede resultar de gran utilidad organizar los datos proporcionados en esquemas o tablas. En los problemas geométricos es algo que al parecer personalmente es indispensable.

Un problema geométrico que no viene acompañado de una figura se caracteriza por contener en su enunciado condiciones que pueden ser representadas para que a través de su interpretación quien resuelve el problema sea capaz de extraer datos y características que lo lleven a dar solución al problema.

Realizar una figura que represente las condiciones dadas por el problema es una tarea en la que se deben tener en cuenta algunas particularidades. Polya (1965), sugiere que hay tres puntos importantes a tener en cuenta. El primero es que al momento de realizar una figura es posible que no sea necesario o incluso posible realizar trazos exactos, es decir, si el enunciado sugiere trazar una circunferencia y el estudiante no posee una herramienta (compás) para trazarla, el hecho de que lo haga a mano alzada no crea mayores obstáculos en el proceso de resolución, pero se debe intentar trazar lo mejor posible la circunferencia para intentar cumplir con las condiciones requeridas. El segundo punto del que habla Polya, es el orden de construcción o trazos, muchas veces el enunciado sugiere un orden que puede cambiarse a conveniencia y comodidad del resolutor siempre y cuando no interfiera en la realización de la figura. Por último, y bajo nuestro criterio lo más importante, la figura no debe sugerir ninguna particularidad gratuita, es decir, no deben haber elementos que no estén en el enunciado a menos que se hayan incluido como elementos auxiliares que tengan alguna finalidad, pero no deben existir trazos o elementos que no cumplan una función en la figura al momento de resolver el problema.

Para ejemplificar esta estrategia se presenta la solución del siguiente problema.

Problema 3.9. ***OMM (2016), examen estatal tercera etapa.***

Sea ABC un triángulo y D, E y F los puntos sobre su circuncírculo de manera que $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son diámetros de dicho circuncírculo. Las rectas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ forman un triángulo $A'B'C'$. Demuestra que ΔABC es semejante a $\Delta A'B'C'$.

Solución

Este problema no contiene gráfica ni opciones de respuesta, es decir es una pregunta abierta, por tanto la construcción de una figura que represente las condiciones del problema se convierte en algo prácticamente indispensable para resolver el problema. Así se procede a realizar una figura que represente las condiciones dadas.

Puesto que el enunciado del problema dice “Sea ABC un triángulo”, se asume que ABC es un triángulo cualquiera, es decir, no tiene condiciones especificas como ser acutángulo, recto, equilátero, entre otras, de modo que se puede tomar el triángulo que se desee.

Continuando, se expone que “D, E y F los puntos sobre su circuncírculo”, lo que significa que se debe trazar también un circuncírculo, lo cual requiere una construcción auxiliar de las mediatrices del triángulo puesto que un circuncírculo, es un círculo con centro en el circuncentro que es el punto de intersección de las mediatrices, en este caso de ΔABC y radio la distancia entre el circuncentro y cualquiera de los tres vértices del triángulo. Esta construcción se presenta en la Figura 3.22, en donde se ha llamado al circuncentro de ΔABC, por O.

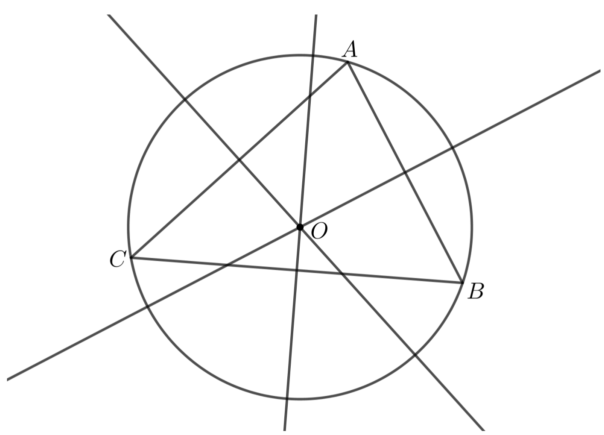


Figura 3.22: Construcción de ΔABC y su circuncírculo problema 3.9.

Puesto que las mediatrices realizadas en la anterior construcción ya no se van a utilizar, para evitar confusiones se puede proceder a borrarlas. Hecho esto, sobre el circuncírculo se deben trazar los puntos D, E y F de manera que $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ sean diámetros de dicho circuncírculo, como expone el enunciado del problema. Por tanto, para construir a $\overline{AD}$ se debe trazar $\overleftrightarrow{AO}$ y marcar la intersección entre $\overleftrightarrow{AO}$ y el circuncírculo que en este caso sería D, para posteriormente trazar $\overline{AD}$. Este proceso se repite en la construcción de los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$(ver Figura 3.23) y al igual que en la construcción de la Figura 3.22, las rectas se borran después de trazados los segmentos puesto que son construcciones auxiliares.

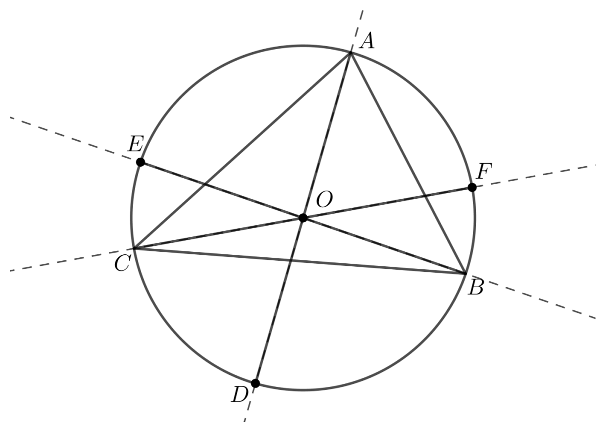


Figura 3.23: Construcción de $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ Problema 3.9.

Ahora se tiene que al trazar las rectas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, se forma $\Delta A'B'C'$, lo que completa la construcción o realización de una figura que representa las condiciones dadas por el problema (ver Figura 3.24). Esta figura nos permitirá dar respuesta o solución al problema planteado puesto que la incógnita consiste en demostrar que ΔABC es semejante a $\Delta A'B'C'$.

Entonces, como $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son diámetros de la circunferencia, por el segundo teorema de Thales se tiene que $\angle BAE$ y $\angle CBF$ son rectos. Ahora, como $\angle BAE$ y $\angle BAB'$ son ángulos suplementarios, entonces $\angle BAB'$ también es recto. Note además que la pareja de ángulos, $\angle CBA$ y $\angle ABB'$ son complementarios, al igual que $\angle ABB'$ y $\angle AB'B$, por tanto $\angle CBA \cong \angle AB'B$. De manera similar, puede demostrarse que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ y así, finalmente por el criterio de semejanza A-A, ΔABC es semejante a $\Delta A'B'C'$.

$\square$

En este problema, realizar la figura resulta ser una tarea que requiere de una gran cantidad de elementos teóricos y de ingenio, además el resolver el problema sin tener una figura que representa las condiciones del enunciado es prácticamente imposible porque son muchos los datos y propiedades que se usan para resolverlo.

Los problemas geométricos que no tienen figuras, tienen por lo general en su enunciado las condiciones necesarias para la construcción de una. En algunas ocasiones puede que trazar la figura

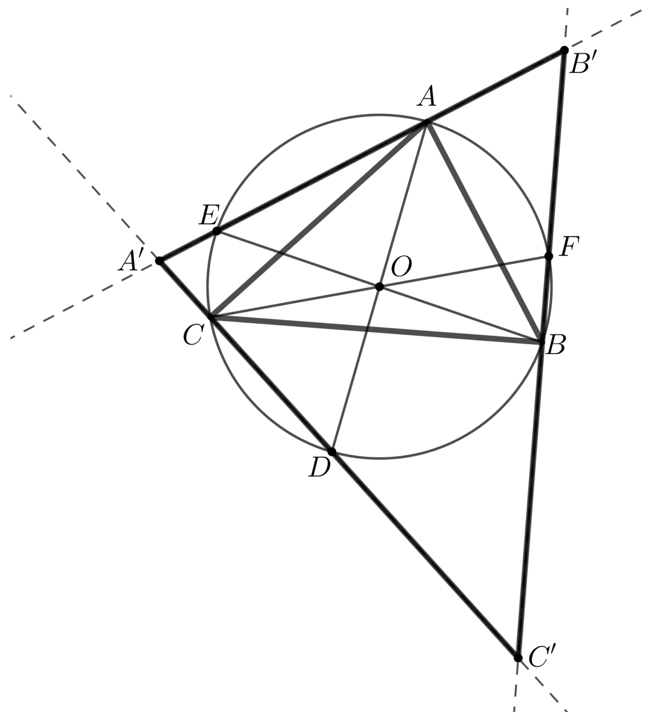


Figura 3.24: Realización de la figura que representa las condiciones del Problema 3.9.

resulte algo complejo como en el problema anterior, pero no siempre es así. El siguiente problema, ejemplifica cómo una figura que representa las condiciones de un enunciado puede ser sencilla de construir y es indispensable para resolver el problema.

Problema 3.10. ***CM (2017), nivel 4.***

Un triángulo equilátero y un hexágono regular están inscritos en la misma circunferencia. Los tres vértices del triángulo coinciden con tres vértices no consecutivos del hexágono. ¿Cuál es el cociente entre las áreas del triángulo y del hexágono?

a) $\frac{2}{3}$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{1}{3}$ *d)* $\frac{1}{4}$ *e)* $\frac{1}{5}$

Solución

Para realizar la figura que representa las condiciones de este problema, existen diferentes posibilidades con respecto al orden de construcción. Por ejemplo, para un primer caso se puede trazar en primera instancia el triángulo equilátero y proceder a inscribirlo en una circunferencia para posteriormente realizar la construcción del hexágono regular. Otro proceso igualmente válido es realizar primero la circunferencia, seguidamente inscribir el hexágono regular y tomar sus tres vértices no consecutivos para trazar el triángulo equilátero. Para este caso, el orden de construcción de los elementos no altera la figura resultante (ver Figura 3.25).

Las dos opciones de construcción requieren construcciones auxiliares para obtener la figura final.

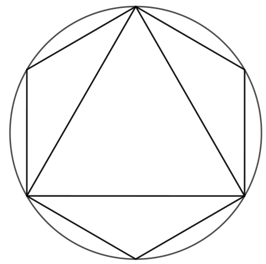


Figura 3.25: Realización de la figura para el Problema 3.10.

La primera opción de construcción, requiere inscribir el triángulo equilátero en la circunferencia lo que se hace trazando las mediatrices para obtener el circuncentro. La segunda opción, inscribe el hexágono en la circunferencia para lo cual a partir de un radio de la circunferencia se trazan radios a 60° con el fin de obtener los vértices del hexágono. En las dos construcciones, se forma un fraccionamiento que resulta clave para dar solución a este problema puesto que ofrece ayuda visual para obtener la respuesta (ver Figura 3.26).

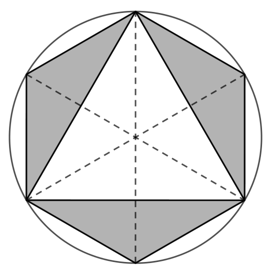


Figura 3.26: Fraccionamiento de la figura realizada para el Problema 3.10.

En este punto, ya realizada la figura y hecho el fraccionamiento, se tiene que el área del triángulo equilátero es la mitad del área del hexágono regular, por tanto la respuesta correcta es *b)*.

□

Sin importar lo sencillo o complejo que resulte trazar una figura que representa las condiciones de un problema, esta se convierte en una herramienta indispensable al momento de resolverlo.

3.6. Uso de AGD

La resolución de problemas no se reduce a que los estudiantes encuentren la solución de un conjunto de problemas, la idea es que desarrollen recursos y estrategias que les permitan representar problemas de maneras distintas, explorar varios caminos de solución y siempre buscar formas de extender y generalizar resultados.

Los recursos digitales matemáticos dinámicos prometen una transformación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas al permitir que los profesores y los alumnos experimenten y exploren ideas matemáticas difíciles de maneras más tangibles (Santos, 2015). El uso de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), por ejemplo GeoGebra, favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos o del problema. La medición de atributos (longitudes, áreas, perímetros), el arrastre de objetos, la descripción de lugares geométricos y el uso adecuado del sistema cartesiano, resultan importantes en la búsqueda de relaciones, planteamiento de conjeturas y formas de justificarlas. Esto evidencia los diferentes beneficios que brinda el AGD no solo para la resolución de problemas sino también para aprender matemáticas y desarrollar habilidades como la visualización que es de gran importancia dentro del área de geometría.

A continuación se presenta la solución de un problema haciendo uso del AGD GeoGebra.

Problema 3.11. ***OCM (2000), nivel intermedio.***

Los puntos M y N son puntos medios de los lados $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ del triángulo ΔPAB (ver Figura 3.27). Mientras P recorre una línea recta paralela al lado $\overline{AB}$ ¿Cuántas de las siguientes cantidades varían?

- *La longitud del segmento $\overline{MN}$.*
- *El perímetro del triángulo ΔPAB.*
- *El área del triángulo ΔPAB.*
- *El área del trapecio $ABNM$.*

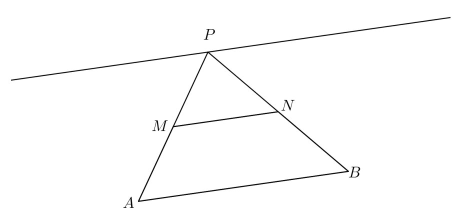


Figura 3.27: Ilustración del Problema 3.11.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solución

Para comprender el problema se deben identificar los datos que se tiene y la incógnita del problema. Los datos que el problema proporciona son:

- M es punto medio de $\overline{A}P$.
- N es punto medio de $\overline{B}P$.

- P recorre una recta paralela a $\overline{AB}$.

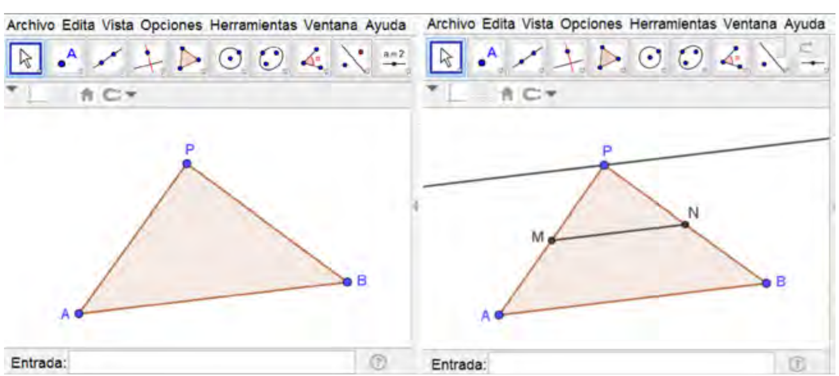
En este caso el problema pregunta por cuántas de cuatro cantidades mencionadas varían mientras el punto P recorre la recta paralela a $\overline{AB}$, por tanto se debe analizar la variación de cada una de dichas cantidades mientras P varía. De donde las incógnitas del problema son:

Si P recorre la recta paralela a $\overline{AB}$,

- ¿La longitud de $\overline{MN}$ varía?
- ¿El perímetro de ΔPAB varía?
- ¿El área de ΔPAB varía?
- ¿El área del trapecio $ABNM$ varía?

Todas las incógnitas peguntan por la variación de una cantidad a partir de la variación del punto P, por tanto la realización de una construcción dinámica en GeoGebra permite ilustrar este problema cumpliéndose todas las condiciones o datos dados por el problema. Entonces se procede a realizar la construcción dinámica.

Inicialmente se puede pensar en construir ΔPAB con la herramienta polígono proporcionada por GeoGebra (ver Figura 3.28-a), dado que se puede decir que ΔPAB es un triángulo cualquiera, puesto que el problema no proporciona datos sobre las dimensiones de ΔPAB, ni de sus ángulos. Seguidamente, se construyen los puntos medios de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, se traza $\overline{MN}$ y la recta paralela a $\overline{AB}$ por el punto P (ver Figura 3.28-b).



a)Construcción de $\triangle PAB$ *b)Construcción de* $\overline{MN}$ *y recta*$\|\overline{AB}$

Figura 3.28: Construcción que ilustra el Problema 3.11.

Una vez hecha la construcción que ilustra el problema se puede pensar en responder las incógnitas. Se mencionó anteriormente que las incógnitas dependían de la variación de P sobre la recta paralela a $\overline{AB}$, por tanto la construcción realizada debe permitir realizar dicha variación. Se procede entonces a realizar el arrastre de P sobre la recta paralela a $\overline{AB}$ (ver Figura 3.29).

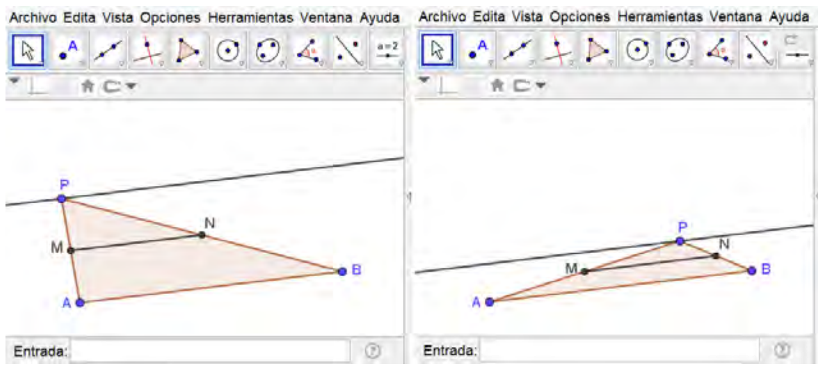
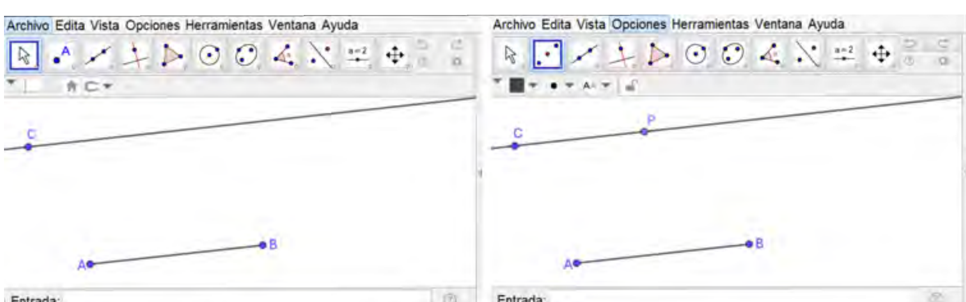


Figura 3.29: Arrastre de P en la primera construcción Problema 3.11.

Si se analiza la variación de P al arrastrarlo en la construcción realizada se puede observar que dicha variación no corresponde a la planteada por el problema, puesto que P no recorre la recta paralela a $\overline{AB}$, por el contrario, es la recta quien depende del movimiento del punto P. Esto sucede porque la recta paralela se construyó a partir de P. Así, dicha construcción no cumple completamente las condiciones del problema.

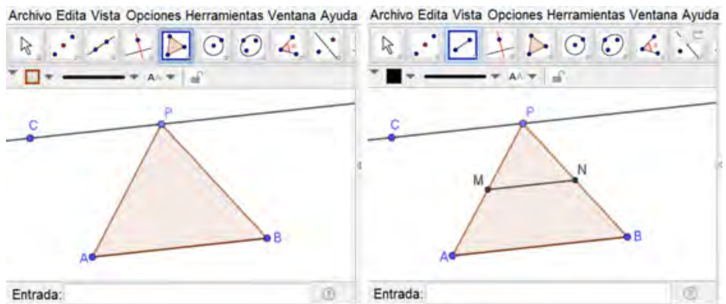
Para realizar una construcción que permita arrastrar a P de modo que este recorra la recta paralela a $\overline{AB}$, se debe construir en primer lugar la recta paralela mencionada y sobre ella el punto. Así se procede a hacer una nueva construcción.

Se construye primero $\overline{AB}$ puesto que la recta debe ser paralela a este segmento y después se traza la recta por un punto cualquiera en el plano, en este caso dicho punto es C (ver Figura 3.30-a). Hecho esto se construye el punto P sobre la recta paralela como se muestra en la Figura 3.30-b y se procede a construir ΔPAB, los puntos medios M y N y $\overline{MN}$ (ver figuras 3.31-a y 3.31-b).



$a)Recta\|\overline{AB}$ $b)Punto\ \ P$

Figura 3.30: Construcción con GeoGebra de $\overline{AB}$ y recta paralela Problema 3.11.



a)Construcción de ΔPAB *b)Construcción de* $\overline{MN}$

Figura 3.31: Construcción con GeoGebra de condiciones del Problema 3.11.

Se procede nuevamente a hacer el arrastre de P y se comprueba efectivamente que dicho punto recorre la recta paralela a $\overline{AB}$ (ver Figura 3.32). Por tanto, esta nueva construcción permite analizar de diferentes maneras las medidas que varían en el problema. Una opción es utilizar las herramientas de medición de GeoGebra para realizar estas comprobaciones, la Figura 3.33 presenta diferentes posiciones de P cuando recorre la recta paralela a $\overline{AB}$ y las mediciones de las cantidades requeridas en las incógnitas.

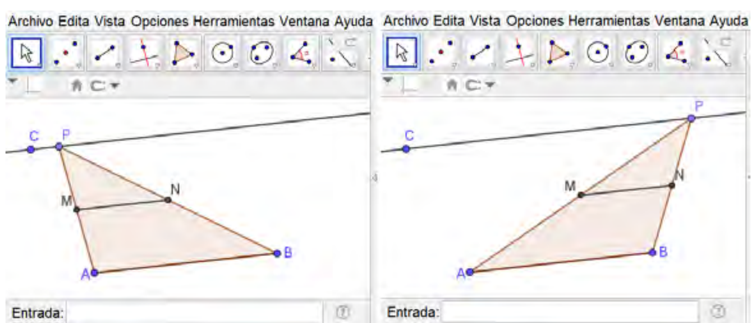


Figura 3.32: Arrastre de P en la construcción con las condiciones del Problema 3.11.

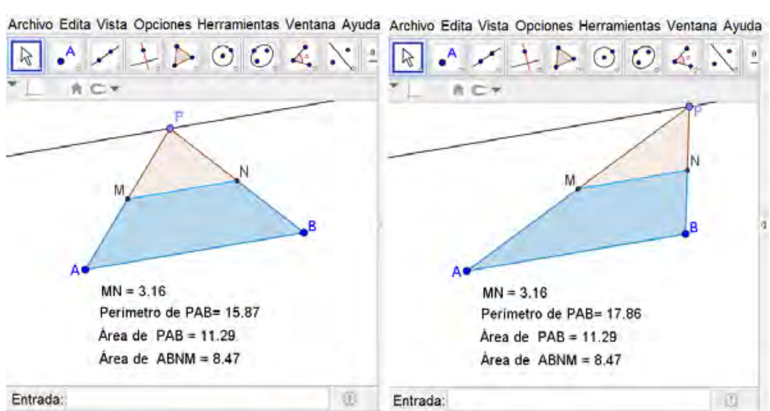


Figura 3.33: Comprobación de la variación de las cantidades requeridas por el Problema 3.11.

Así la respuesta obtenida es *b)*, puesto que solo varia una cantidad, el perímetro de ΔPAB.

□

Al leer detenidamente el enunciado del problema, se puede observar que la naturaleza del problema es la variación, por tanto en la resolución de este problema el uso de GeoGebra es de gran utilidad, ya que si se realiza la solución como se hace generalmente en un ambiente estático (lápiz y papel) sería en cierta medida un tanto más complejo.

En la solución del siguiente problema, se destaca el uso de los AGD para determinar soluciones que no parecen evidentes al intentar resolver el problema inicialmente. Muchos problemas al ser ilustrados en un AGD adquieren ciertas propiedades que antes no hubiesen podido ser percibidas por el estudiante, como por ejemplo la variación de uno o varios elementos como se evidencia a continuación.

Problema 3.12. ***CM (2007), nivel 2.***

En la Figura 3.34, $ABCD$ y $EFGH$ son dos cuadrados iguales. El área de la región sombreada es 1*. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$?*

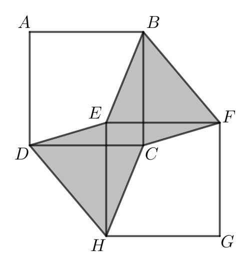


Figura 3.34: Ilustración del Problema 3.12.

a) 1/2 *b)* 2/3 *c)* 3/4 *d)* 1 *e) Depende de la figura*

Solución

Del problema se sabe que $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados congruentes y además que $\boldsymbol{A}(BEDHCF) = 1$. Lo que se debe encontrar es el área de alguno de los dos cuadrados. Para empezar, se pueden prolongar $\overline{EH}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, $\overline{DC}$, obteniendo la Figura 3.35.

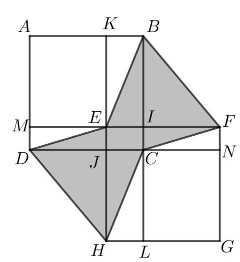


Figura 3.35: Fraccionamiento Problema 3.12.

En la Figura 3.35, $\Delta DEM \cong \Delta CFI$ y $\Delta EBK \cong \Delta HCJ$, por lo tanto se pueden intercambiar estas regiones como se muestra en la Figura 3.36. Luego se traza el elemento auxiliar $\overline{AE}$, de donde $\Delta HJD \cong \Delta EKA$ y $\Delta AME \cong \Delta BIF$, por lo tanto se pueden intercambiar las regiones y obtener la Figura 3.37; donde es sencillo concluir que el área del cuadrado $ABCD$ es 1, puesto que corresponde al área de la región sombreada. Así la respuesta para la solución de este problema es d).

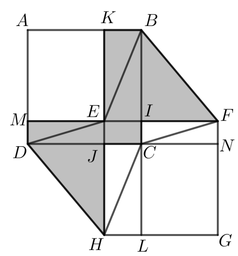


Figura 3.36: Simetría en el Problema 3.12.

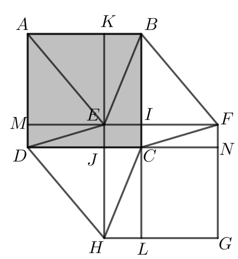


Figura 3.37: Inclusión de elemento auxiliar y simetría Problema 3.12.

El problema ya se resolvió, ahora se realiza la construcción dinámica que satisfaga las condiciones del problema en GeoGebra (ver Figura 3.38), donde P, Q, D y H son puntos móviles (no fijos).

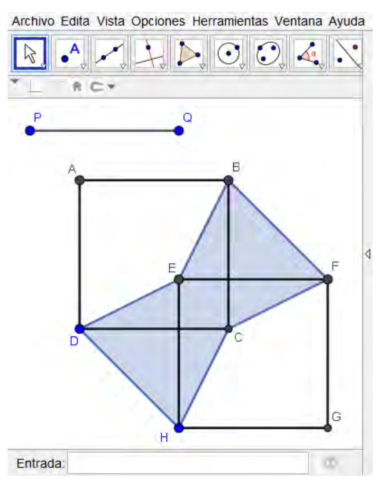
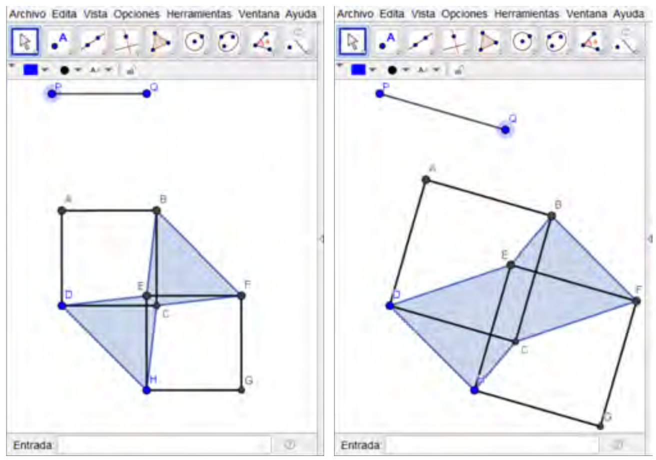


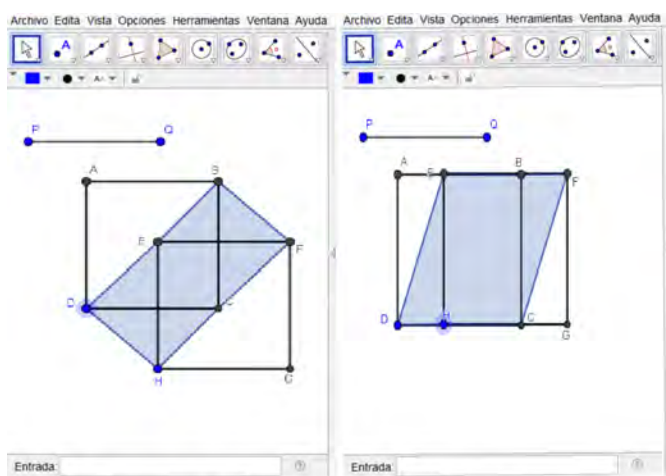
Figura 3.38: Construcción con GeoGebra de condiciones del Problema 3.12.

Dado que P, Q, D y H son puntos móviles, se puede pensar en lo que sucedería con la variación de estos puntos. Así, se tiene que al arrastrar cualquiera de estos puntos la Figura 3.38 mantiene las condiciones del problema aún cuando visualmente la figura original cambie (ver figuras 3.39 y 3.40).



a)*Arrastre de P*. *b*)*Arrastre de Q*.

Figura 3.39: Arrastre de los puntos P y Q Problema 3.12.



a)*Arrastre de D*. *b*)*Arrastre de H*.

Figura 3.40: Arrastre de los puntos D y H Problema 3.12.

Finalmente se arrastra el punto D haciendo coincidir los vértices de los cuadrados $ABCD$ y $EFGH$, obteniendo así la respuesta que ya se conocía, es decir el área del cuadrados $ABCD$ equivale al área sombreada de valor 1, como se puede observar en la Figura 3.41.

□

Inicialmente se resolvió el problema mediante estrategias de geometría presentadas en sesiones

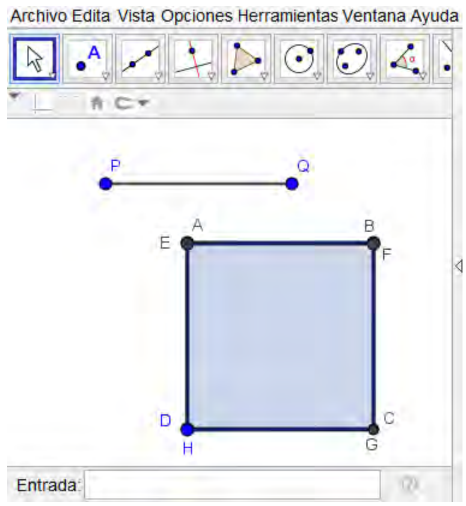


Figura 3.41: Solución dinámica del Problema 3.12.

anteriores, posteriormente se resolvió el mismo problema mediante el uso de GeoGebra, esto se hizo con el único propósito de evidenciar la eficacia del la estrategia denominada ***Uso de AGD***, aunque se deben tener en cuenta otros factores que pueden influir en la eficacia o no del uso de una u otra estrategia puesto que esta dependerá en gran medida de las habilidades desarrolladas por el estudiante. Así por ejemplo, la segunda solución proporcionada será eficaz siempre y cuando el estudiante conozca y manipule el ambiente de geometría usado en la solución. Por tanto, se puede decir que es necesaria la implementación del uso de AGD's en el aula de clase, esto permitirá al estudiante conocer este tipo de ambientes donde la geometría no es estática y por ende tendrá mas herramientas para resolver problemas.

Aunque el uso de AGD no es muy frecuente en olimpiadas matemáticas, puede resultar muy útil si se presenta al estudiante como una herramienta de entrenamiento en la resolución de problemas, así en el momento de la competencia el estudiante de una u otra manera será capaz de hacer este tipo de visualizaciones aún cuando no disponga de un AGD.

Con el fin de que el estudiante adquiera y fortalezca habilidades en la resolución de problemas, en el siguiente capítulo se exponen las soluciones de varios problemas tomados de diferentes olimpiadas matemáticas, en los cuales será necesario que se tengan en cuenta tanto estrategias de resolución de problemas matemáticos como también estrategias propias de geometría, incluso se pueden emplear estrategias que no se presentaron en este trabajo.

Capítulo 4

Problemas resueltos

El éxito o fracaso en la resolución de un problema depende de varios factores entre los que se encuentran la actitud que el estudiante asume frente al problema, los conocimientos previos, habilidades y destrezas que posee el estudiante, como por ejemplo la habilidad de lectura que juega un papel muy importante en el momento de comprender el problema, habilidades de cálculo mental y también otros factores como el año escolar o la edad del estudiante entre otros. Además de estos factores también es importante mencionar el conocimiento de métodos heurísticos adquiridos por los estudiantes a través del entrenamiento y la práctica en procesos propios de la resolución de problemas matemáticos.

En este capítulo se presenta la solución de varios problemas en los cuales se hace uso de las diferentes estrategias presentadas en el capítulo anterior, esperando que esto sirva como material de estudio para quienes estén interesados en aprender matemáticas y en particular geometría. Cabe aclarar que aunque los problemas presentados a continuación están clasificados en sus olimpiadas bajo los criterios propios de sus metodologías, en esta sección con el fin de agrupar por grados de escolaridad, se clasifican teniendo en cuenta dicho orden como sigue: ***nivel básico*** para problemas de grados 3 a 5 de primaria, ***nivel medio*** para problemas de 6 a 9 de bachillerato y ***nivel avanzado*** para problemas de 10 y 11 de bachillerato, para esto se tuvieron en cuenta los Estándares Básicos de Educación.

4.1. Nivel básico

Problema 4.1. ***OMM (2010), nivel 1.***

El dibujo que se muestra está construido con semicírculos de radios $2cm$, $4cm$ *y* $8cm$ *(ver Figura 4.1). ¿Qué fracción del dibujo está sombreada?*

a) $\frac{3}{8}$ *b)* $\frac{3}{7}$ *c)* $\frac{2}{5}$ *d)* $\frac{1}{3}$ *e)* $\frac{1}{4}$

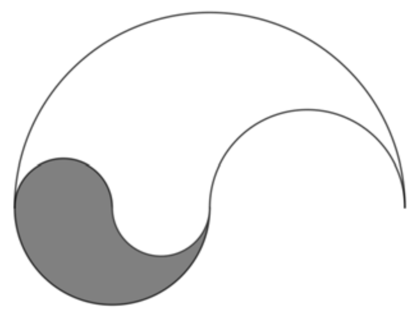


Figura 4.1: Ilustración del Problema 4.1.

Solución

Para resolver este problema se recurre a la estrategia de simetría. En primer lugar se denotan los puntos de intersección entre las 5 semicircunferencias y luego se traza el segmento $\overline{AD}$ (ver Figura 4.2), al trazar este segmento las regiones que se van a intercambiar son más evidentes.

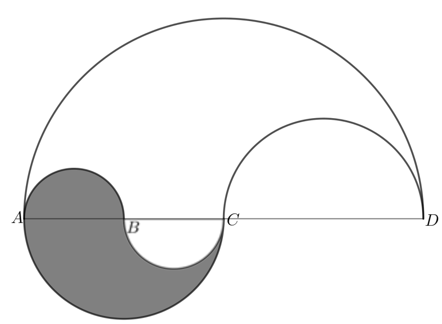


Figura 4.2: Inclusión del segundo elemento auxiliar Problema 4.1.

El semicírculo menor de extremos A y B puede moverse como se muestra en la Figura 4.3 para completar un semicírculo de radio $4cm$.

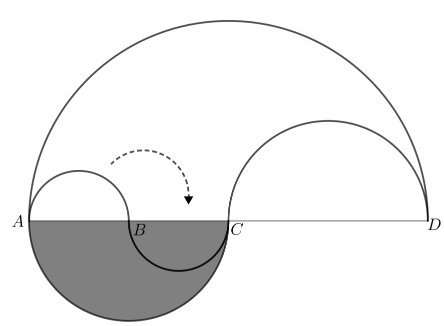


Figura 4.3: Primera simetría Problema 4.1.

De forma similar, el semicírculo de extremos A y C puede moverse como se muestra en la Figura 4.4 sobre el semicírculo de radio $8cm$.

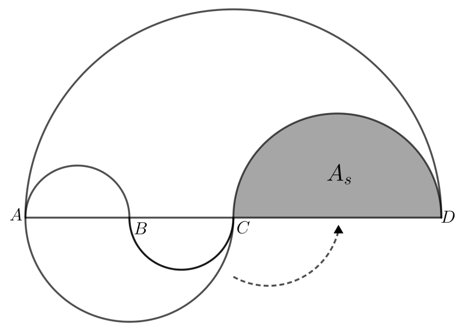


Figura 4.4: Segunda simetría Problema 4.1.

El área sombreada A_s corresponde a la mitad del área de una circunferencia de radio $4cm$, es decir

$$A_s = \frac{\pi(4cm)^2}{2} = \frac{16\pi cm^2}{2} = 8\pi cm^2.$$

La fracción F del dibujo que está sombreada corresponde a la proporción entre el área sombreada y el área total que equivale a la mitad del área de una circunferencia de radio $8cm$. Por lo tanto, se tiene que

$$F = \frac{A_s}{A_{total}} = \frac{8\pi cm^2}{\pi(8cm)^2/2} = \frac{8\pi cm^2}{32\pi cm^2} = \frac{1}{4}.$$

□

Los datos proporcionados por el problema llevaron al uso de la estrategia de ***simetría*** ya que en la figura hay regiones que son congruentes con otras, lo que las hace intercambiables entre sí. El área sombreada puede también determinarse con cálculos netamente aritméticos dado que se conocen los radios de las semicircunferencias que componen la figura, el estudiante tiene así varias opciones para buscar la solución.

Problema 4.2. *ORM-UIS (2013), nivel medio.*

Sea $ABCD$ un rectángulo de área $48cm^2$. Si F es un punto cualquiera sobre $\overline{AD}$ y E es la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, halle el área del polígono $FCEB$.

Solución

Este problema no tiene figura, pero su enunciado contiene datos que permiten realizar una, de modo que se hace uso de la estrategia *realizar una figura*.

Lo primero es construir el rectángulo $ABCD$ tal que $\boldsymbol{A}(ABCD) = a.b = 48cm^2$, donde a y b son las dimensiones de los lados de $ABCD$. Para hallar a y b, el estudiante puede optar por realizar el rectángulo por casos particulares con números enteros como por ejemplo 6 y 8 o 4 y 12. Seguidamente, se nombran sus vértices y se traza un punto F cualquiera sobre $\overline{AD}$, luego se traza las diagonales del rectángulo correspondientes a $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y su intersección se denota como E. Finalmente se unen puntos para formar el polígono $FCEB$. Cabe aclarar que la posición de F sobre $\overline{AD}$ no tiene condición, por tanto la Figura 4.5 presenta algunas de las posibles posiciones que F puede tomar y el respectivo polígono que se forma. El uso de algún AGD puede ayudar a visualizar estos deslizamientos del punto F e incluso, puede ayudar a intuir que sucede con el área.

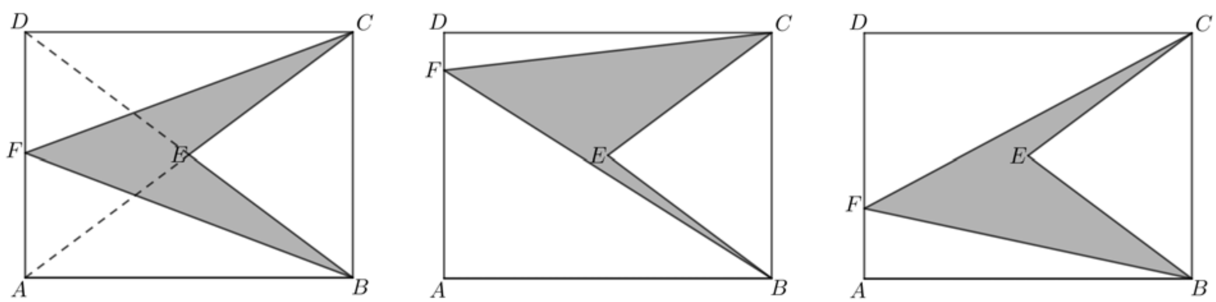


Figura 4.5: Gráfica realizada para el Problema 4.2 con distintas posiciones de F.

En este caso, el estudiante puede valerse de la variación de F para buscar una figura que resulte más sencilla para calcular su área. Así por ejemplo, si se toma a F sobre uno de los extremos de $\overline{AD}$, el polígono $FCEB$ se reduce a un triángulo cuya área corresponde a un cuarto de $\boldsymbol{A}(ABCD)$, es decir $12cm^2$ (ver Figura 4.6).

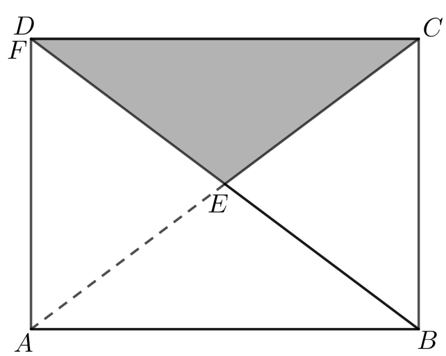


Figura 4.6: Posición de F y fraccionamiento del Problema 4.2.

□

El estudiante puede quedar con dudas de porqué la respuesta es válida si la posición de F elegida no es la única posible e incluso si nota que se particularizó también las dimensiones del rectángulo $ABCD$ para que su área fuera $48cm^2$ como lo sugería el problema. Particularizar en problemas generales y resolver un caso específico sencillo es una estrategia de resolución de problemas. En este caso el problema pregunta por un valor específico del área, no por una variación en el área, lo cual puede llevar al estudiante a intuir que sin importar la posición de F el área será la misma. Sin embargo, entender el motivo matemático por el cual esto sucede y llevar al estudiante a indagar sobre este, mejorará sus conocimientos geométricos y generará una curiosidad por el rigor matemático sin exigir una demostración formal.

Para responder a las posibles dudas, GeoGebra puede ser una herramienta eficaz puesto que proporciona un ambiente donde se puede realizar una construcción dinámica de las condiciones del problema y así desplazando F, se puede observar con diferentes figuras que representan las condiciones dadas que el área del polígono $FCEB$ siempre corresponde a un cuarto de $\boldsymbol{A}(ABCD)$. Que se cumpla la propiedad con GeoGebra no es garantía formal, ni da la razón para que siempre se cumpla, pero puede ayudar a generar ideas que lleven a concluir el motivo matemático por el cual se presenta este hecho.

Para realizar la construcción en GeoGebra se debe tener en cuenta que $\boldsymbol{A}(ABCD) = 48cm^2$, pero dichas dimensiones no se dan en el problema lo que sugiere que estas son variables. Entonces si se traza en GeoGebra a $\overline{AB}$ con una dimensión cualquiera, se debe condicionar a este la dimensión de $\overline{BC}$ dividiendo $48cm^2$ entre la dimensión de $\overline{AB}$. Una vez hecho esto, se puede trazar el rectángulo $ABCD$ como se puede ver en la Figura 4.7.

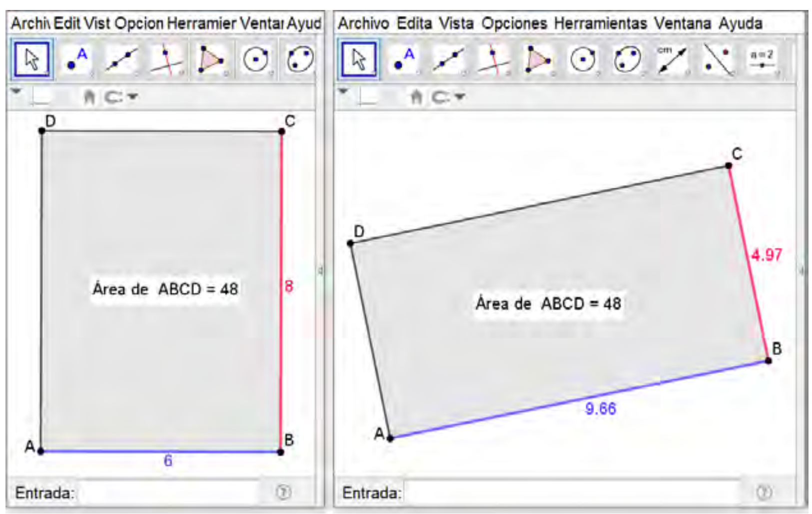


Figura 4.7: Construcción del rectángulo $ABCD$ con GeoGebra, Problema 4.2.

Luego de tener el rectángulo se trazan sus diagonales y el punto de intersección es E. Ahora solo resta trazar a F sobre $\overline{AD}$ y unir puntos para formar el polígono $FCEB$. Así se obtiene una construcción dinámica de las infinitas figuras que representan las condiciones del problema y mediante las herramientas de medición de área se puede incluso comprobar que al mover a F o variar las dimensiones del rectángulo $ABCD$, el área del polígono $FCEB$ sigue siendo $12cm^2$ (ver Figura 4.8).

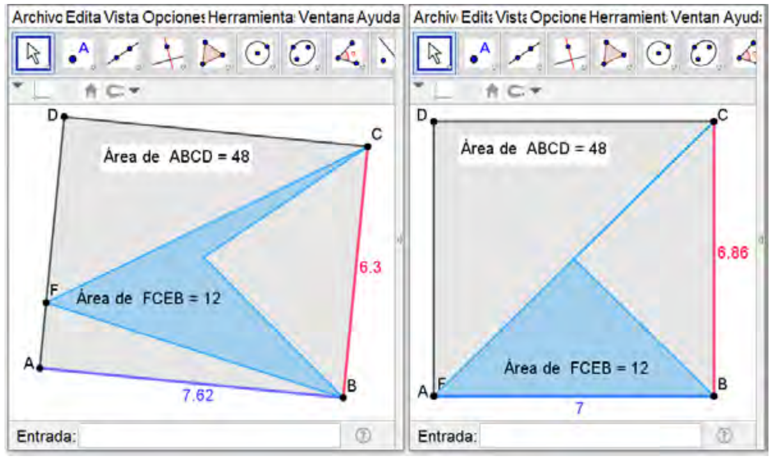


Figura 4.8: Construcción dinámica en GeoGebra de la figura del Problema 4.2.

4.2. Nivel medio

Problema 4.3. ***CM (2010), nivel 3.***

En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $\overline{AD} = \overline{BC}$, y $\angle DAC$, $\angle DCA$ y $\angle ACB$ miden lo que se indica en la Figura 4.9. ¿Cuánto mide $\angle ABC$?

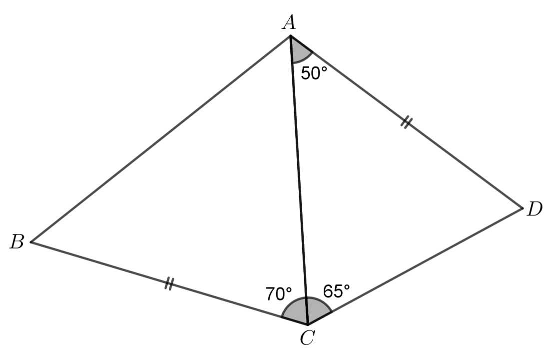


Figura 4.9: Ilustración del Problema 4.3.

a) 55° *b)* 60° *c)* 65° *d)* 70° *e)* 75°

Solución

Se empieza por calcular la medida de $\angle ADC$, esto en realidad resulta sencillo si se tiene en cuenta el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Así, se tiene que

$$\angle ADC = 180° - 50° - 65° = 65°. \tag{4.2.1}$$

Como $\angle ADC = \angle ACD$ se concluye que ΔACD es isósceles y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. De donde dado que por hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, por transitividad se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Por lo tanto ΔABC es isósceles y para hallar la medida de $\angle ABC$ se plantea la relación

$$\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle CAB. \tag{4.2.2}$$

Luego como los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes, se tiene que las medidas de $\angle ABC$ y $\angle CAB$ son iguales, por lo tanto de (4.2.2) se tiene que

$$2\angle ABC = 180° - \angle ACB.$$

Es decir que

$$\angle ABC = \frac{180° - \angle ACB}{2} = \frac{180° - 70°}{2} = \frac{110°}{2} = 55°.$$

□

Este problema evidencia que el estudiante debe recordar conceptos y propiedades geométricas, particularmente propiedades relacionadas con triángulos y ángulos para encontrar la respuesta, es decir que a pesar de que la creatividad es importante, en algunos casos no es suficiente para dar solución al problema. Se debe encontrar un equilibrio entre ingenio y conocimientos matemáticos, la resolución de problemas fomenta el desarrollo de un pensamiento integral del estudiante.

Problema 4.4. ***OCM (2013), nivel intermedio.***

En la Figura 4.10, $ABCE$ es un cuadrado y ΔBCF y ΔCDE son equiláteros. Si $\overline{AB}$ mide 1, ¿cuál es la longitud de $\overline{FD}$?

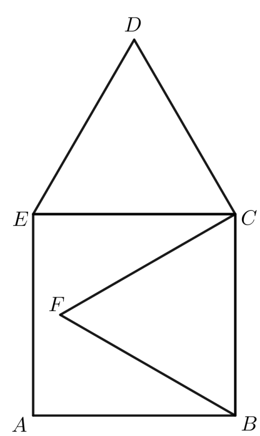


Figura 4.10: Ilustración del Problema 4.4.

a) $\sqrt{2}$ *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *c)* $\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt{5}-1$ *e)* $\sqrt{6}-1$

Solución

Se traza en primera instancia $\overline{FD}$ (ver Figura 4.11), al trazar este segmento se obtiene ΔFCD que al parecer es rectángulo, así para calcular la longitud de $\overline{FD}$ basta con usar el teorema de Pitágoras. Sin embargo si se hace de esta manera se estaría dejando llevar por la figura, entonces lo que se debe hacer es probar que ΔFCD es rectángulo y para esto basta con probar que en dicho triángulo uno de sus ángulos es recto.

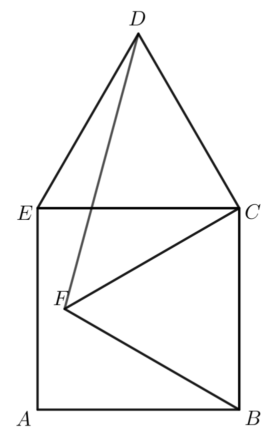


Figura 4.11: Inclusión del primer elemento auxiliar Problema 4.4.

Observe entonces que por hipótesis los ángulos en $ABCE$ son rectos por ser este un cuadrado y los ángulos en ΔBCF y ΔCDE tienen una medida de $60°$ por ser equiláteros. De esta forma $\angle ECF = 90° - 60° = 30°$, y por ende $\angle FCD = \angle DCE + \angle ECF = 60° + 30° = 90°$, de donde efectivamente $\angle FCD$ es recto. Así $\overline{FD}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales de medida 1. Entonces por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$\overline{FD} = \sqrt{(1cm)^2 + (1cm)^2} = \sqrt{2}cm.$$

□

La inclusión de $\overline{FD}$ en la figura proporcionada por el problema induce al estudiante el camino que debe seguir para dar solución al problema, aunque sin incluir este elemento auxiliar teniendo en cuenta los datos proporcionados en el enunciado de forma directa es posible determinar la solución. Cada persona tiene diferentes planes para buscar una solución, con la práctica se generan más ideas y los procesos de solución se vuelven cada vez más eficientes.

Problema 4.5. ***OMM (2011), nivel 1.***

El diagrama (ver Figura 4.12) muestra tres cuadrados. El cuadrado mediano tiene como vértices los puntos medios del cuadrado grande. El cuadrado pequeño tiene como vértices los puntos medios *del cuadrado mediano. El área del cuadrado pequeño es* $6cm^2$*. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas del cuadrado pequeño y del cuadrado grande?*

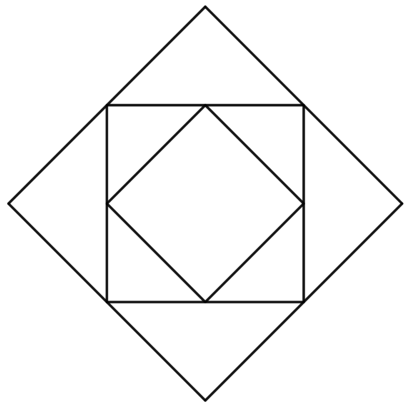


Figura 4.12: Ilustración del Problema 4.5.

a) $6cm^2$ *b)* $9cm^2$ *c)* $12cm^2$ *d)* $15cm^2$ *e)* $18cm^2$

Solución

Se denotan los puntos en la figura dada (ver Figura 4.13).

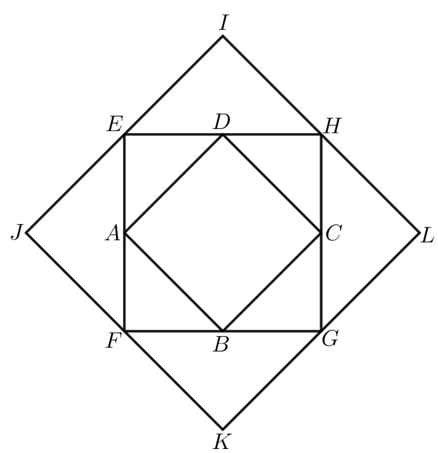


Figura 4.13: Ilustración del Problema 4.5 con notación.

Trazamos los elementos auxiliares $\overline{JL}$ y $\overline{KI}$, obteniendo así 16 triángulos rectángulos congruentes dado que los segmentos trazados corresponden a las diagonales de los cuadrados $ABCD$ e $IJKL$ y además por hipótesis se tiene que $EFGH$ tiene como vértices los puntos medios de los lados de $IJKL$ y $ABCD$ tiene como vértices los puntos medios de los lados de $EFGH$ (ver Figura 4.14) . Por otro lado $\boldsymbol{A}(ABCD) = 6cm^2$ entonces el área de cada uno de los cuatro triángulos en el interior de $ABCD$ será $\frac{6cm^2}{4} = \frac{3}{2}cm^2$.

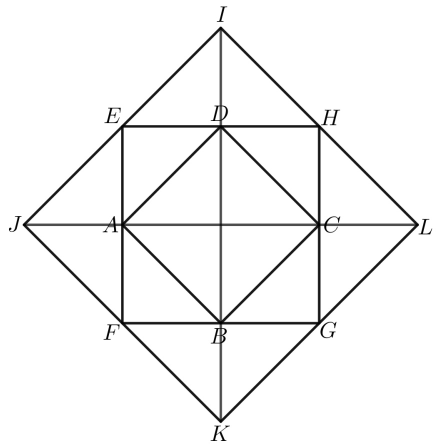


Figura 4.14: Inclusión de elementos auxiliares en el Problema 4.5.

Por lo tanto se tiene que

$$\boldsymbol{A}(IJKL) = \frac{3}{2}cm^2 \times 16 = 24cm^2.$$

Finalmente para encontrar la relación pedida en el problema basta realizar la diferencia de las dos áreas, es decir

$$\boldsymbol{A}(IJKL) - \boldsymbol{A}(ABCD) = 24cm^2 - 6cm^2 = 18cm^2.$$

Así la respuesta correcta para este problema es la indicada en e).

$\square$

Como se puede observar en la resolución de este problema se hizo uso de dos estrategias. La inclusión de segmentos en la figura dada por el problema, permitió fraccionar dicha figura en partes congruentes de las cuales era sencillo calcular el área dado que se conocía por hipótesis el área del cuadrado pequeño. Por lo tanto el conocimiento y práctica de distintas estrategias, métodos y heurísticas juega un papel determinante para conseguir el éxito en la resolución de problemas, pues es claro que en este proceso no existe un solo camino de solución.

Problema 4.6. ***ORM-UDENAR (2016), nivel 1.***

El polígono $ABCDEF$ es un hexágono regular, cada uno de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FA}$ son un lado del hexágono y también de un triángulo equilátero como se muestra en la Figura 4.15. El polígono $GHIJKL$ se construye uniendo los puntos G, H, I, J, K y L. Si el área del hexágono $ABCDEF$ es de $18cm^2$, ¿cuál es el área del polígono $GHIJKL$?

Solución

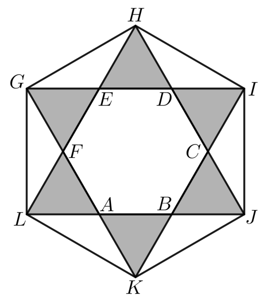


Figura 4.15: Ilustración del Problema 4.6.

Para empezar se fracciona la figura trazando $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ como se puede ver en la Figura 4.16, obteniendo 6 triángulos equiláteros congruentes de área $3cm^2$ dado que $\boldsymbol{A}(ABCDEF) = 18cm^2$.

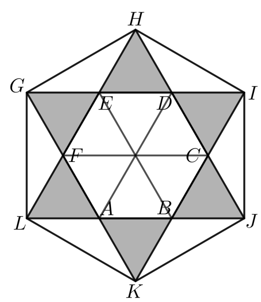


Figura 4.16: Fraccionamiento de la Figura 4.15 del Problema 4.6.

Note que los triángulos equiláteros que forman el hexágono $ABCDEF$ son congruentes con los triángulos equiláteros sombreados. Así, se tiene ya 12 triángulos equiláteros de área $3cm^2$. Ahora, los triángulos que faltan por calcular el área son también equivalentes a estos 12 triángulos puesto que pueden reconfigurarse como se muestra en la Figura 4.17, es decir que estas partes de la figura son simétricas entre sí. Finalmente, haciendo el conteo, en total se tienen 18 triángulos de área $3cm^2$, lo que significa que $\boldsymbol{A}(GHIJKL) = 18(3cm^2) = 54cm^2$.

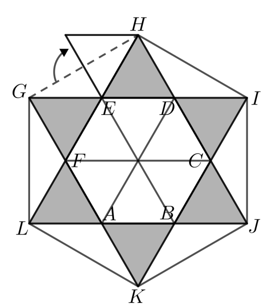


Figura 4.17: Simetría Problema 4.6.

□

Para resolver este problema se realizó un fraccionamiento de una parte de la figura dada y se optó también por aplicar simetrías, pero esta no es la única solución. La figura dada permite diferentes tipos de fraccionamientos como se puede ver en la Figura 4.18, la escogencia que se realice depende de las habilidades de visualización del resolutor.

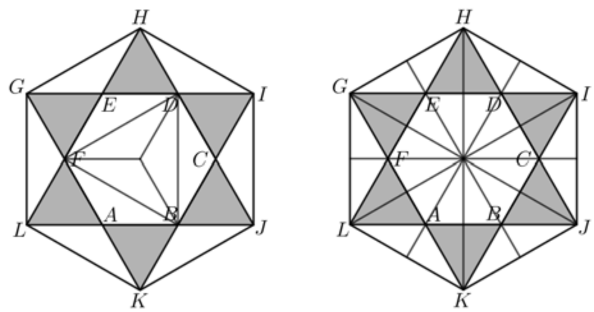


Figura 4.18: Posibles fraccionamientos para el Problema 4.6.

4.3. Nivel avanzado

Problema 4.7. ***OCM (2012), nivel superior.***

Si la longitud del lado de cada cuadrito es 1cm *(ver Figura 4.19).¿Cuál es el área de la letra N?*

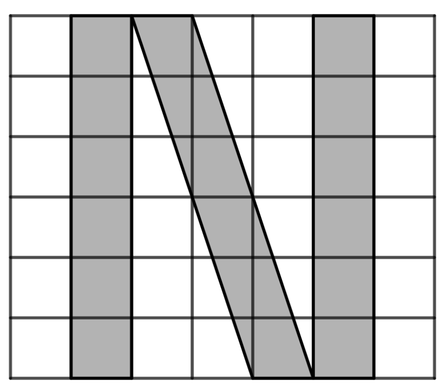


Figura 4.19: Ilustración del Problema 4.7.

a) 18 *b)* 17 *c)* *d)* 16 *e)* 15 *e)* 14

Solución

Al enfrentar este problema el estudiante por percepción visual, quizá por intuición, puede hacer uso de la estrategia de *simetría* encontrando fácilmente la respuesta. Sin embargo es importante tener en cuenta que antes de hacer esta simetría se deben demostrar algunas proposiciones que se toman como verdaderas al observar la figura proporcionada por el problema, la cual es una tendencia muy común dentro de la resolución de problemas de tipo geométrico. Muchas veces el estudiante sacará conclusiones de la figura proporcionada por el problema aún cuando el enunciado no lo esté afirmando.

Dado que el lado de cada cuadrito en la figura es $1cm$, se tiene que los 35 cuadritos son congruentes, así la cuadricula que se forma en la figura está formada por segmentos horizontales y verticales perpendiculares entre si, de ahí que todos los ángulos en la rejilla son rectos. Para continuar resolviendo el problema es necesario denotar algunos puntos en la figura (ver Figura 4.20).

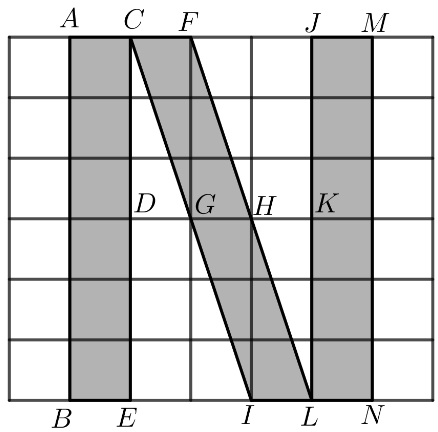


Figura 4.20: Problema 4.7 con notación.

En la Figura 4.21, ΔCDG, ΔFGH, ΔGHI y ΔHKL son congruentes; esto se justifica por el hecho de que cada par de triángulos tiene congruentes dos lados y el ángulo recto comprendido entre ellos (criterio L-A-L).

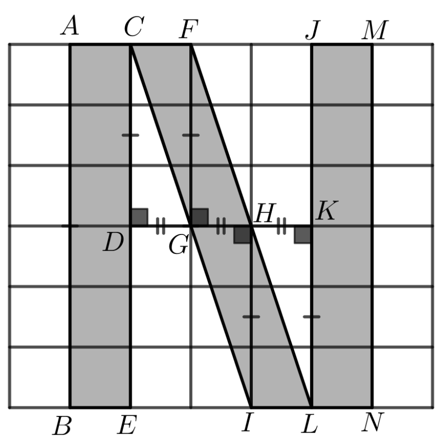


Figura 4.21: Congruencia en el Problema 4.7.

Así es posible intercambiar los triángulos entre si, obteniendo la Figura 4.22.

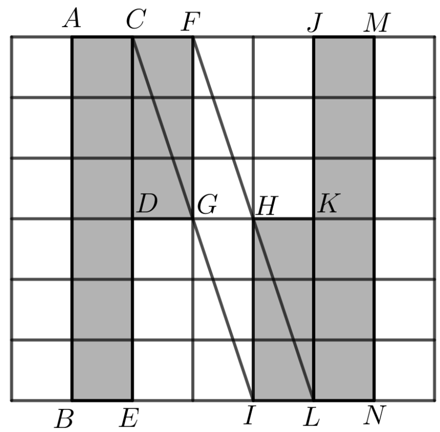


Figura 4.22: Simetría Problema 4.7.

Lo que sigue ahora es hallar el área pedida, para esto se cuentan los cuadritos sombreados y se obtiene que el área sombreada es de $18cm^2$.

$\square$

Para resolver este problema el estudiante puede pensar también en calcular las áreas de los rectángulos $ABEC$ y $JLNM$ puestos que conoce sus bases y alturas, y para hallar el área del paralelogramo $CILF$ se calcula el área de ΔCDG, ΔFGH, ΔGHI o ΔHKL y luego se multiplica por 4. Como se puede observar hay distintas formas de proceder en la resolución de este problema, pero se destaca que es necesario demostrar la congruencia de los triángulos y no deducirlo de la figura como se hizo inicialmente.

Problema 4.8. ***CM (2003), nivel 6.***

Dos cuadrados del mismo tamaño cubren a un círculo de radio $3cm$ *(ver Figura 4.23) ¿Cuanto vale el área sombreada?*

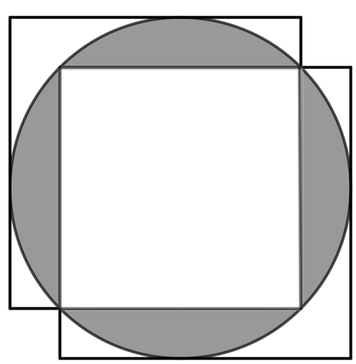
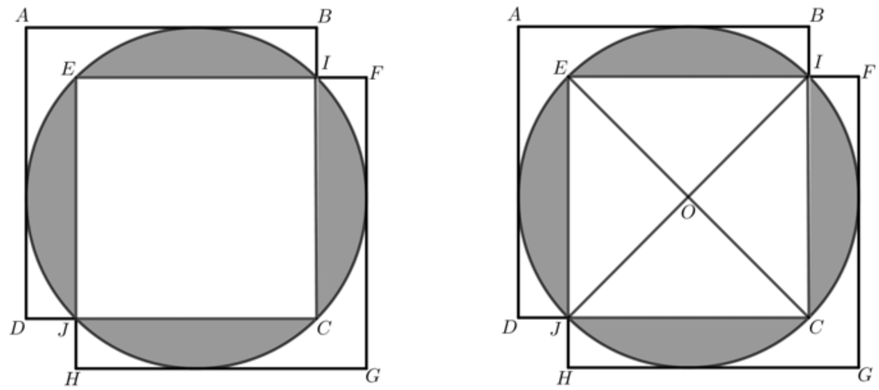


Figura 4.23: Ilustración del Problema 4.8.

a) $8\pi - 8cm^2$ *b)* $12\pi - 6cm^2$ *c)* $9\pi - 25cm^2$ *d)* $9\pi - 18cm^2$ *e)* $\frac{6\pi}{5}cm^2$

Solución

Dado que se conoce el radio de la circunferencia, su área es $9\pi cm^2$; pero ¿cómo se calcula el área sombreada? Para esto se necesita calcular el área del cuadrado inscrito en la circunferencia. Para continuar *denotamos* los puntos como se puede ver en la Figura 4.24-a.



$a)Notación$ $b)Trazo\ de\ diagonales$

Figura 4.24: Notación y trazo de diagonales Problema 4.8.

Ahora se trazan las diagonales del cuadrado $EICJ$, la inclusión de estos *elementos auxiliares* permite hallar el centro de la circunferencia al cual se denota como O y corresponde a la intersección de las diagonales (ver Figura 4.24-b).

El radio de la circunferencia también permite calcular el área del cuadrado $EICJ$, luego haciendo uso de la estrategia de *fraccionamiento* dado que las diagonales dividen a dicho cuadrado en cuatro triángulos congruentes bastará con calcular una de estas áreas y multiplicarla por 4.

Se calcula el área de ΔEOI sabiendo que tanto la base como la altura en este triángulo corresponden al radio de la circunferencia, entonces se tiene que

$$A\Delta EOI = \frac{3cm \times 3cm}{2} = \frac{9cm^2}{2}. \tag{4.3.1}$$

Así el área del cuadrado $EICJ$ es igual a

$$A\Delta EOI \times 4 = \frac{9cm^2}{2} \times 4 = 18cm^2. \tag{4.3.2}$$

El área sombreada se obtiene al hacer la diferencia entre el área de la circunferencia y el área del cuadrado $EICJ$, es decir $(9\pi - 18)cm^2$.

□

El enunciado de este problema nos arrojó dos datos, la circunferencia tiene por radio $3cm$ y los cuadrados que la cubren son congruentes; con estos datos fácilmente se pudo calcular el área de la circunferencia, pero no fueron suficientes para resolver el problema por tanto se trazaron dos elementos auxiliares, los cuales permitieron conocer nuevos datos del problema tales como el centro de la circunferencia y la existencia de cuatro triángulos congruentes cuya área correspondía con el área del cuadrado inscrito dentro de la circunferencia, ya con esto el problema finalmente pudo ser resuelto.

Problema 4.9. *ORM-UDENAR (2017), nivel 2.*

El área del cuadrado de la figura de la izquierda es a y el área del círculo es b. ¿Cuánto vale el área encerrada por la línea gruesa en la figura de la derecha (ver Figura 4.25)?

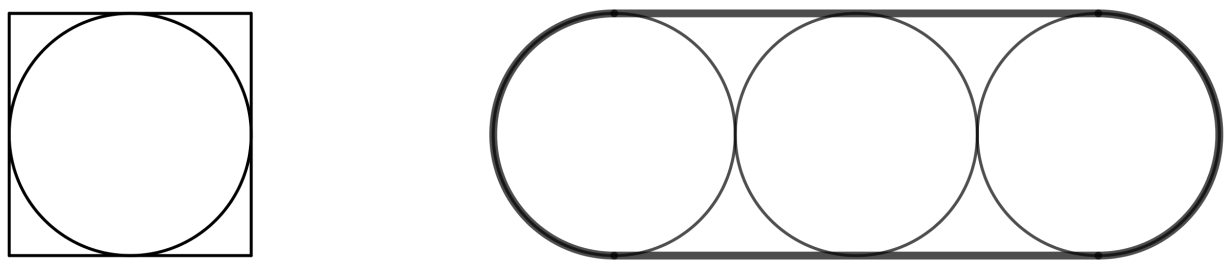


Figura 4.25: Ilustración del Problema 4.9.

a) $3b$ *b)* $a+b$ *c)* $a+2b$ *d)* $3a$ *e)* $2a+b$

Solución

Para empezar se hallan los puntos de intersección A y B entre las circunferencias asumiendo que estas son congruentes, luego se traza la recta que pasa por estos puntos y se marcan también los puntos de intersección C y D entre $\overleftrightarrow{AB}$ con las circunferencias (ver Figura 4.26).

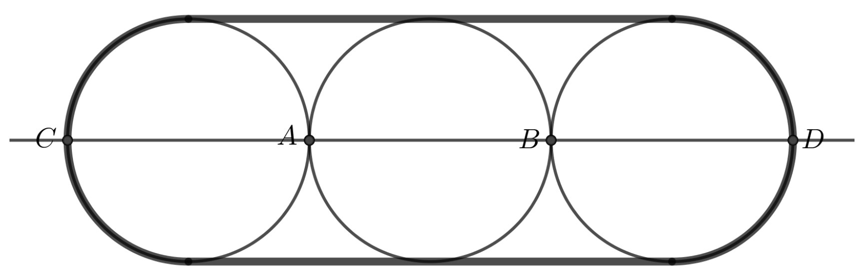


Figura 4.26: Inclusión del primer elemento auxiliar Problema 4.9.

Lo que sigue es hallar los centros de las tres circunferencias, para esto se hallan los puntos medios E, F y G de los segmentos $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Seguidamente trazamos rectas perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasen por los puntos E, A, F, B y G, al trazar estas rectas aparecerán nuevos puntos de intersección a los cuales denotamos como se observa en la Figura 4.27.

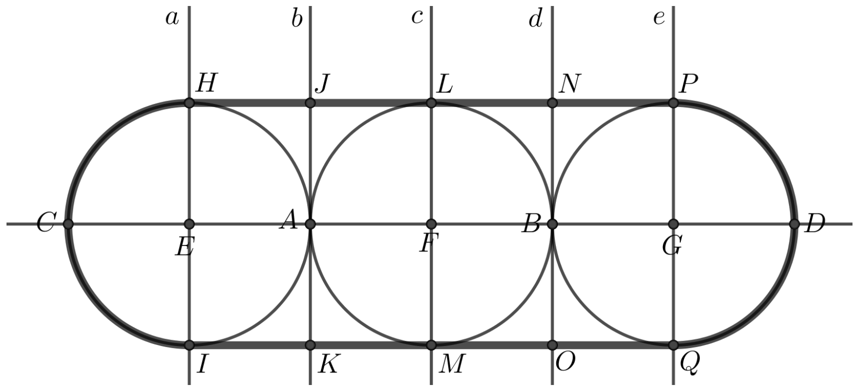


Figura 4.27: Inclusión del segundo elemento auxiliar Problema 4.9.

Los vértices en el cuadrado de la primera figura dada en el problema (ver Figura 4.25) se denotan como R, S, T y U, y luego se marcan los puntos medios (V, W, X e Y) de los segmentos $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ y $\overline{UV}$. Posteriormente se trazan en esta figura los segmentos $\overline{VX}$ y $\overline{YW}$, estos dividen al cuadrado $RSTU$ en 4 cuadrados congruentes, los cuales tendrán por área $\frac{a}{4}u^2$ dado que por hipótesis el área del cuadrado $RSTU$ es a (ver Figura 4.28).

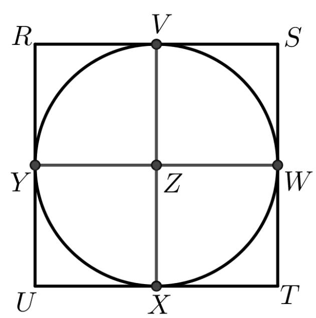


Figura 4.28: Inclusión del tercer elemento auxiliar Problema 4.9.

En la resolución de este problema el estudiante asumirá que la Figura 4.25 del lado derecho proporcionada por el problema fue construida a partir del cuadrado a su izquierda, por tanto y dado la forma en que se ha dado el proceso de resolución, se tienen 8 cuadrados congruentes a los 4 obtenidos en la Figura 4.28, aún cuando esto no se aclare en el enunciado. Así el área buscada será igual a $8 \times \frac{a}{4}u^2 = 2au^2$, la cual se suma a el área de una circunferencia que por hipótesis es b, dado que al unir las semicircunferencias HCI y PDQ obtenemos una circunferencia completa.

Por tanto la respuesta en el problema es e).

$\square$

A lo largo de la resolución de este problema, se usó repetidamente la estrategia de ***elementos auxiliares***, así se incluyeron puntos, segmentos y rectas que permitieron llegar a la solución mediante el fraccionamiento de las figuras. Aunque también se puede usar la estrategia de simetría para obtener la Figura 4.29, donde la respuesta es aún más evidente.

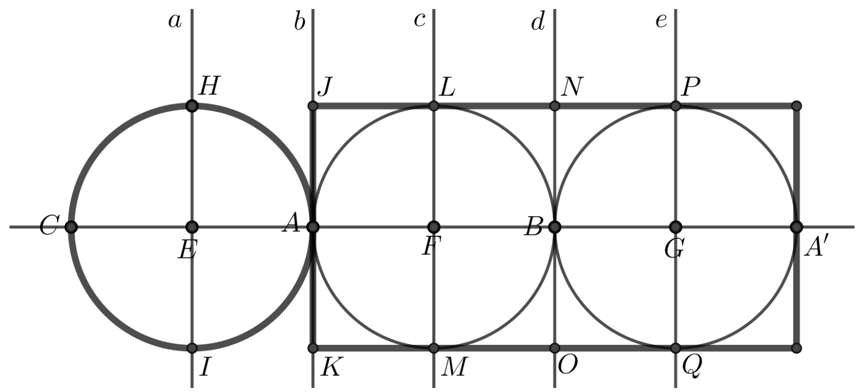


Figura 4.29: Solución del Problema 4.9 obtenida por Simetría.

Es importante resaltar además que el estudiante en la resolución de este problema se verá llevado a asumir proposiciones que no se dan en el enunciado como ciertas, pero sin las cuales no sería posible dar una solución.

Los problemas presentados son una muestra de la utilidad y posible aplicación de las estrategias para resolver problemas geométricos presentadas en el Capítulo 3. Se espera que estos problemas sirvan de ejemplo o base para la resolución de muchos otros problemas. En el capítulo a seguir, se propone un compendio de problemas tomados de las diferentes olimpiadas mencionadas en el Capítulo 2, con el fin de que se haga uso de las estrategias presentadas para resolverlos.

Capítulo 5

Problemas propuestos

En este capítulo se propone una serie de problemas con el fin de que el estudiante ponga en práctica las estrategias de resolución de problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas matemáticas estudiadas durante este texto. Los problemas presentados en este capítulo, fueron tomados de diferentes olimpiadas matemáticas mencionadas en el Capítulo 2 y al igual que en el Capítulo 4, se clasificaron en los niveles básico para tercero a quinto de primaria, nivel medio para grados de sexto a noveno y nivel avanzado para grados superior a noveno, además se presentan problemas de autoría propia y otros problemas en general tomados de textos y otras referencias.

5.1. Nivel básico

Problema 5.1. ***CM (2011), nivel 4.***

Observando el polígono de la Figura 5.1 ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?.

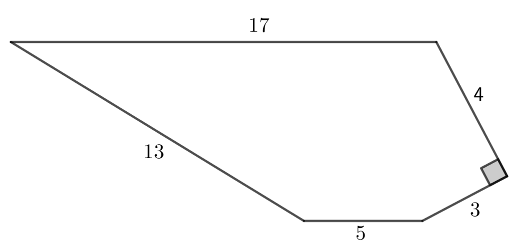


Figura 5.1: Ilustración del Problema 5.1.

a)Es un pentágono *b)Tiene un ángulo agudo* *c)Dos lados son perpendiculares* *d)Tiene dos lados de la misma longitud* *e)El perímetro es* 42

Problema 5.2. ***CM (2015), nivel 2.***

El suelo de una habitación rectangular mide 7*m por* 8*m. Se van a usar baldosas rectangulares* *de* 25*cm por* 50*cm para embaldosarla. ¿Cuántas baldosas se necesitan? (Se supone que no se rompe ninguna baldosa).*

a) 56 *b)* 112 *c)* 224 *d)*448 *e)* 560

Problema 5.3. ***CRM (1997), primer nivel.***

En el diagrama x es igual a (ver Figura 5.2):

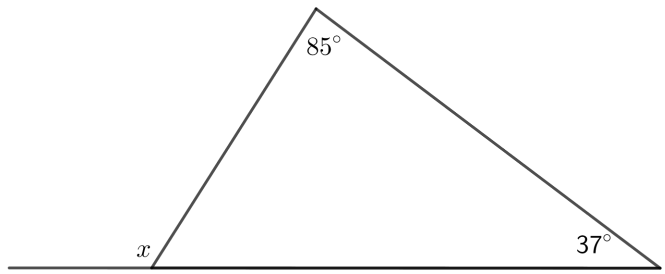


Figura 5.2: Ilustración del Problema 5.3.

a) 112 *b)* 48 *c)* 58 *d)*122 *e)* 132

Problema 5.4. ***CRM (1998), primer nivel.***

Se construye un rompecabezas llamado tangram recortando un cuadrado en 5 *triángulos, un cuadrado y un paralelogramo tal como se muestra en la Figura 5.3. El área del cuadrado original es de* 1 *unidad cuadrada. El área, en unidades cuadradas, del paralelogramo es:*

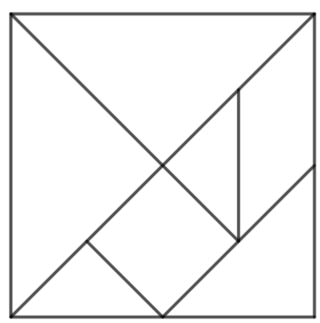


Figura 5.3: Ilustración del Problema 5.4.

a) $\frac{1}{8}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{3}{10}$ *d)* $\frac{1}{16}$ *e)* $\frac{1}{7}$

Problema 5.5. ***OCM (1999), primer nivel.***

Sea $PQRS$ una hoja cuadrada de papel. Se dobla la hoja hasta que P coincida con R y luego, sin desdoblar, se dobla nuevamente hasta que Q coincida con S. El área de la figura que resulta es de 9*cm*^{2}*. Hallar el perímetro del cuadrado $PQRS$.(ver Figura 5.4):*

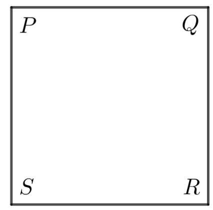


Figura 5.4: Ilustración del Problema 5.5.

a) 9 *b)* 16 *c)* 18 *d)* 24 *e)* 3621

Problema 5.6. ***OCM (1999), primer nivel.***

Los puntos del diagrama están espaciados con distancia de un centímetro entre sí tanto horizontal como verticalmente. El área, en centímetros cuadrados, de la región encerrada por el polígono es (ver Figura 5.5):

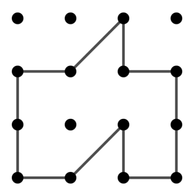


Figura 5.5: Ilustración del Problema 5.6.

a) 5 *b)* 6 *c)* 7 *d)* 8 *e)* 9

Problema 5.7. ***OLCOMA (2014), nivel 1.***

En la siguiente Figura 5.6, ABCD es un cuadrado, y los triángulos son equiláteros, si el área de ABCD es 25, determine el perímetro de la figura.

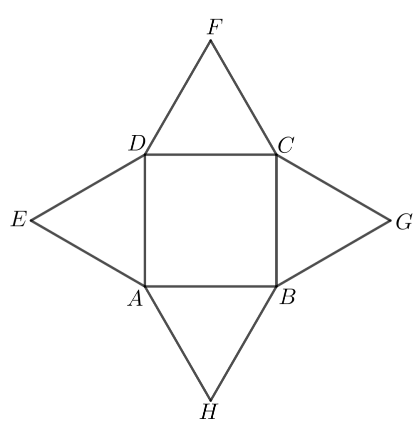


Figura 5.6: Ilustración del Problema 5.7.

a) 40 *b)* 50 *c)* 60 *d)* 80

Problema 5.8. ***OLCOMA (2014), nivel 1.***

Determine el área sombreada en la Figura 5.7.

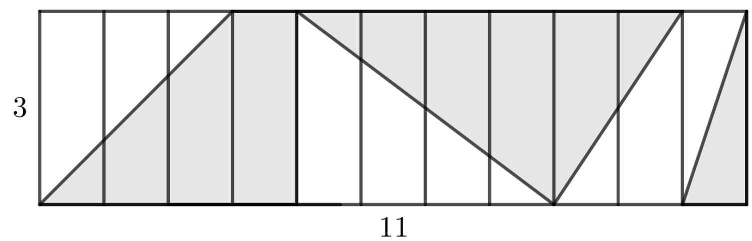


Figura 5.7: Ilustración del Problema 5.8.

a) 15 *b)* 16 *c)* 17 *d)* 18

Problema 5.9. ***OMAR (1998), primer nivel.***

Cada cuadradito tiene 8cm de perímetro. Con 6 cuadraditos iguales se formó la Figura 5.8. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

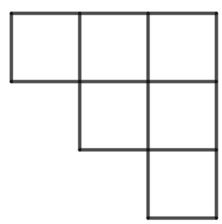


Figura 5.8: Ilustración del Problema 5.9.

Problema 5.10. ***OMAR (2000), primer nivel.***

La Figura 5.9 se obtiene al cortar en una de las esquinas de un cuadrado de 24cm de perímetro, un cuadradito de 8cm de perímetro.

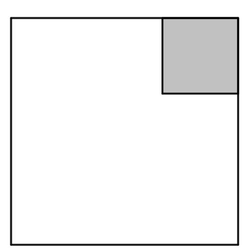


Figura 5.9: Ilustración del Problema 5.10.

Con dos figuras iguales a la Figura 5.9 se arma la Figura 5.10. ¿Cuál es el perímetro de la Figura 5.10.?

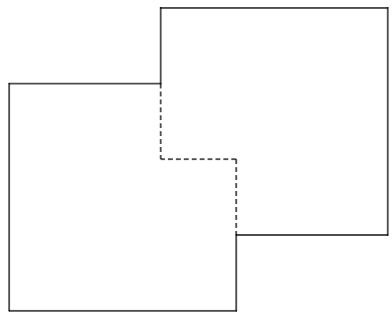


Figura 5.10: Segunda ilustración para el Problema 5.10.

Problema 5.11. ***OMM (2014), nivel 1.***

El área del pentágono (ver Figura 5.11)es $40cm^2$*. ¿Cuánto vale el área de la parte sombreada?*

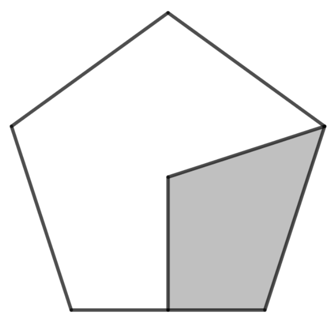


Figura 5.11: Ilustración del Problema 5.11.

a) $16cm^2$ *b)* $10cm^2$ *c)* $5cm^2$ *d)* $12cm^2$ *e)* $20cm^2$

Problema 5.12. ***OMM (2017), nivel 1.***

Sea $ABCD$ *un cuadrado cuyos lados miden* $16cm$*. Obtén el radio de la circunferencia que pasa por los puntos* A *y* D*, que es tangente al lado* $\overline{BC}$*.*

a) 10 *b)* 9 *c)* 8 *d)* 7 *e)* 6

Problema 5.13. ***OMPR (2003-2004), nivel 1.***

Se ha dibujado un rectángulo con centro O *(ver Figura 5.12). Se sabe que el área de* ΔOPQ *vale* $7cm^2$*. Calcular el área de la figura rayada.*

a) $7cm^2$ *b)* $14cm^2$ *c)* $21cm^2$ *d)*$28cm^2$ *e)* $35cm^2$

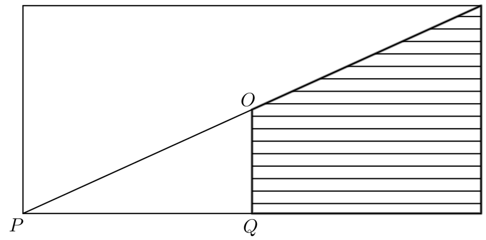


Figura 5.12: Ilustración del Problema 5.13.

Problema 5.14. ***OMPR (2016-2017), nivel 1.***

Cata dibuja un cuadrado con longitud 10*cm (ver Figura 5.13). Ella une los puntos medios de los lados para construir un cuadrado más pequeño. ¿Cuánto mide el área del cuadrado más pequeño?*

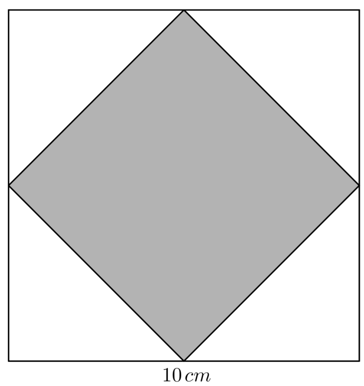


Figura 5.13: Ilustración del Problema 5.14.

Problema 5.15. ***ORM-UDEA (2016), nivel 1.***

Se dobla la esquina de un cuadrado hasta superponerla con su centro, formándose el pentágono irregular de la Figura 5.14. Las áreas del pentágono y del cuadrado original son enteros consecutivos. ¿Cuánto vale el área del cuadrado?

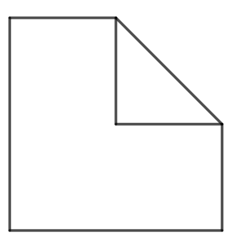


Figura 5.14: Ilustración del Problema 5.15.

Problema 5.16. ***ORM-UDEA (2017), nivel 1.***

En una pared rectangular de 12 *metros de largo se coloca un portón cuadrado, dejando* 3 *metros a la izquierda y el doble a la derecha. La superficie de pared que queda alrededor del portón es* $39m^2$*. ¿Cuál es la altura de la pared? (ver Figura 5.15)*

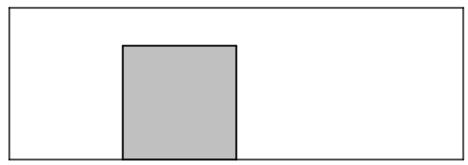


Figura 5.15: Ilustración del Problema 5.16.

a) 2 *b)* 3 *c)* 4 *d)*5 *e)* 6

Problema 5.17. ***ORM-UDENAR (2016), nivel 1.***

Un cuadrado de perímetro $48cm$ *se corta en dos rectángulos iguales, que al sobreponerlos forman una cruz, como se ve en la Figura 5.16. ¿Cuál es el perímetro de la cruz?*

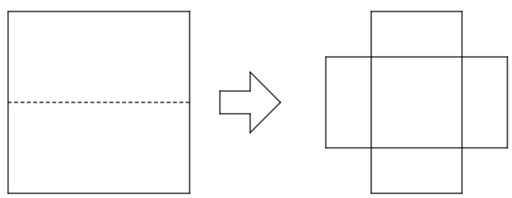


Figura 5.16: Ilustración del Problema 5.17.

a) $24cm$ *b)* $30cm$ *c)* $48cm$ *d)*$60cm$ *e)* $72cm$

Problema 5.18. ***ORM-UDENAR (2017), nivel 1.***

En la figura 5.17, los cinco cuadrados son iguales y los vértices del polígono sombreado son puntos medios de los lados de los cuadrados. Si el área de cada cuadrado es $1cm^2$*, ¿cuál es el área en* cm^2 *del polígono sombreado?*

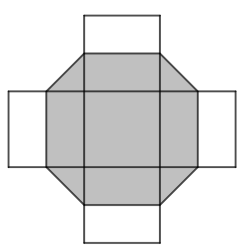


Figura 5.17: Ilustración del Problema 5.18.

a) 2 *b)* 2,5 *c)* 3 *d)*3,5 *e)* 4

Problema 5.19. ***ORM-UIS (2012), nivel medio.***

Si el paralelogramo ABCD tiene área $50m^2$ *y los puntos E y F son los puntos medios de los lados* $\overline{AD}$ *y* $\overline{BC}$ *respectivamente (ver Figura 5.18), ¿Cuál es el área de la región sombreada?*

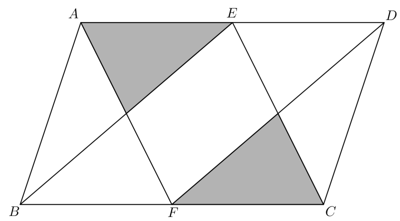


Figura 5.18: Ilustración del Problema 5.19.

a) $\frac{25}{4}m^2$ *b)* $\frac{25}{2}m^2$ *c)* $25m^2$ *d)* $\frac{\sqrt{50}}{2}m^2$ *e)* $\frac{50}{3}m^2$

Problema 5.20. ***ORM-UIS (2013), nivel básico.***

El área del cuadrado ABCD es 1, ¿Cuánto mide el área sombreada? (ver Figura 5.19)

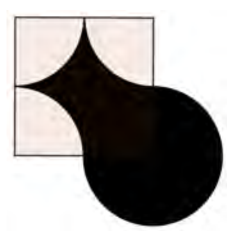


Figura 5.19: Ilustración del Problema 5.20.

a) 1 *b)* 2 *c)* 4 *d)* $\frac{1}{2}$ *e)* $\frac{1}{4}$

Problema 5.21. ***ORM-UNIVALLE (2008), nivel básico.***

Cuál es el perímetro del rectángulo (ver Figura 5.20) si las circunferencias tienen un diámetro de 4cm cada una?

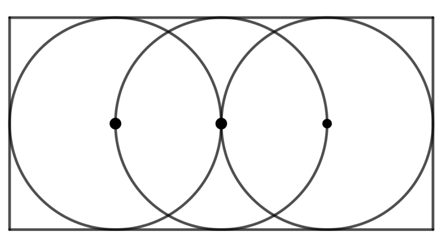


Figura 5.20: Ilustración del Problema 5.21.

a) 12 *b)* 12π *c)* 24 *d)* 24π *e)* 48

Problema 5.22. ***ORM-UNIVALLE (2009), nivel básico.***

Los triángulos I, II y III (ver Figura 5.21) son triángulos rectángulos e isósceles. El área de I es $2cm^2$ *y el área de II es* $8cm^2$*. Cuál es el área de III?*

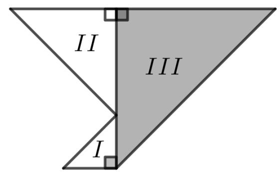


Figura 5.21: Ilustración del Problema 5.22.

a) $9cm^2$ *b)* $10cm^2$ *c)* $18cm^2$ *d)* $24cm^2$ *e)* $36cm^2$

5.2. Nivel medio

Problema 5.23. ***CM (2014), nivel 4.***

En ΔABC*, la medida de* $\angle A$ *es* $45°$*. Se eligen los puntos* P *en el lado* $\overline{BC}$*,* Q *en el lado* $\overline{AB}$ *y* R *en el lado* $\overline{AC}$ *de manera que* $\overline{BP} = \overline{QP}$ *y* $\overline{CP} = \overline{RP}$*. Entonces* $\angle QPR$ *mide:*

a) $90°$ *b)* $95°$ *c)* $100°$ *d)* $105°$ *e) depende de la elección de* P

Problema 5.24. ***CM (2015), nivel 2.***

En la carretera de circunvalación que tiene forma circular, hay 4 *estaciones de servicio,* A*,* B*,* C *y* D*. La distancia entre dos gasolineras es la longitud del arco más corto que las une. Sabemos que la distancia entre* A *y* B *es* $15km$*; entre* B *y* C*,* $10km$*, entre* C *y* D*,* $20km$ *entre* D *y* A*,* $20kkm$*. ¿Cuál es la longitud de la carretera?*

a) $40km$ *b)* $45km$ *c)* $50km$ *d)* $60km$ *e)* $65km$

Problema 5.25. ***CRM (1998), nivel intermedio.***

En la Figura 5.22, $\overline{PS} = \overline{PQ}$ *y* $\overline{QS} = \overline{QR}$*. Si* $\angle SPQ = 80°$ *entonces* $\angle QRS$ *es igual a:*

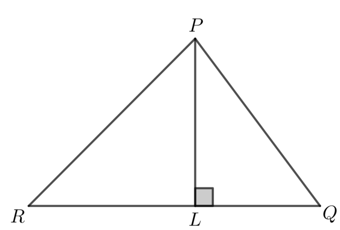


Figura 5.22: Ilustración del Problema 5.25.

a) $10°$ *b)* $15°$ *c)* $20°$ *d)* $25°$ *e)* $30°$

Problema 5.26. ***CRM (2001), nivel intermedio.***

En el triángulo (ver Figura 5.23), $\overline{LP} = 9cm$ *y el área de* PQR *es* $36cm^2$*. La longitud, en centímetros, de* $\overline{RQ}$ *es:*

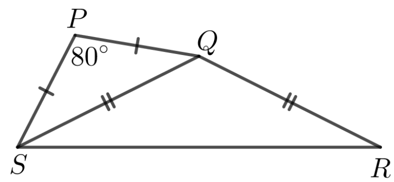


Figura 5.23: Ilustración del Problema 5.26.

a) 16 *b)* 9 *c)* 2 *d)* 4 *e)* 8

Problema 5.27. ***OCM (1999), primer nivel.***

Si sigue el patrón que se aprecia en la Figura 5.24, ¿qué fracción del interior del octavo triángulo estará sombreada?

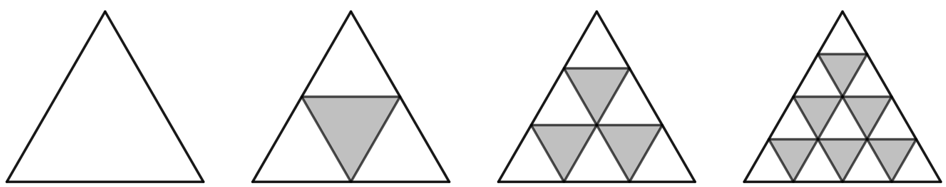


Figura 5.24: Ilustración del Problema 5.27.

a) $\frac{3}{8}$ *b)* $\frac{5}{27}$ *c)* $\frac{7}{16}$ *d)* $\frac{9}{16}$ *e)* $\frac{11}{45}$

Problema 5.28. ***OCM (2000), nivel intermedio.***

Carolina camina completamente alrededor de la frontera de un cuadrado cada uno de cuyos lados tiene longitud $5km$*. Desde cualquier punto de su trayectoria, ella puede ver exactamente* $1km$ *horizontalmente en cualquier dirección. ¿Cuál es el área, expresada en kilómetros cuadrados y redondeada al número entero más próximo, de la región que consta de todos los puntos que Carolina puede ver durante su caminata?*

a) 24 *b)* 27 *c)* 39 *d)* 40 *e)* 42

Problema 5.29. ***OLCOMA (2015), nivel 2.***

Sea ΔABC *isósceles, tal que* $\overline{AC} = \overline{BC} = 20cm$ *y sea* D *un punto cualquiera de* $\overline{AB}$ *(distinto de* A *y distinto de* B*). Por* D *se trazan una recta paralela a* $\overline{AC}$ *que corta a* $\overline{BC}$ *en* E *y una recta paralela a* $\overline{BC}$ *que corta a* $\overline{AC}$ *en* F*. El perímetro, en centímetros de* $CEDF$ *es:*

a) 20 *b)* 30 *c)* 40 *d)* 50

Problema 5.30. ***OLCOMA (2016), nivel 2.***

Considere un ΔABC *isósceles con* $\overline{AB} = \overline{AC}$. *Sea* D *en* $\overleftrightarrow{AC}$ *tal que* $\overline{BD} \perp \overline{AB}$ *y sea* E *el pie de la altura sobre* $\overline{AB}$ *trazada desde* C. *Si* $m\angle BAC = 45°$ *y* $\overline{CE} = 1$, *entonces* $\overline{CD}$ *es:*

a) $\sqrt{2}$ *b)* $2\sqrt{2}$ *c)* $2 - \sqrt{2}$ *d)* $4 - \sqrt{2}$

Problema 5.31. ***OM (2013), nivel 1.***

Sea $ABCD$ *un cuadrado de papel de lado* 10 *y* P *un punto en el lado* $\overline{BC}$. *Al doblar el papel a lo largo de* $\overleftrightarrow{AP}$, *el punto* B *determina el punto* Q, *como se ve en la Figura 5.25.* $\overleftrightarrow{PQ}$ *corta al lado* $\overline{CD}$ *en* R. *Calcular el perímetro de* ΔPCR.

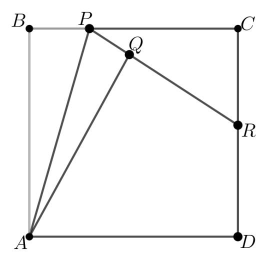


Figura 5.25: Ilustración del Problema 5.31.

Problema 5.32. ***OM (2016), nivel 1.***

En ΔABC *se marcaron el punto* D *en el lado* $\overline{BC}$ *y el punto* E *en el lado* $\overline{AC}$ *de manera que* $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EB} = \overline{BA}$. $\angle ACB$ *mide* $20°$. *Calcular la medida de* $\angle ADE$.

Problema 5.33. ***OMAR (2009), nivel 1.***

Sea ABC *un triángulo escaleno,* D *un punto del interior del lado* $\overline{BC}$, E *un punto del interior del lado* $\overline{CA}$ *y* F *un punto del interior del lado* $\overline{AB}$.

- *Si* $\angle FDE = \angle A$, $\angle DEF = \angle B$, $\angle EFD = \angle C$ *determinar si es necesariamente cierto que* D, E *y* F *son los puntos medios de los lados de* ΔABC.
- *Si* $\angle CED = \angle BFD$, $\angle AFE = \angle CDE$, $\angle BDF = \angle AEF$ *determinar si es necesariamente cierto que* D, E *y* F *son los puntos medios de los lados de* ΔABC.

Problema 5.34. ***OMAR (2012), nivel 1.***

- *¿Es posible dividir un cuadrado de lado* 1 *en* 30 *rectángulos de perímetro* 2*?*
- *Supongamos que un cuadrado de lado* 1 *está dividido en* 25 *rectángulos de perímetro* p. *Hallar el mínimo y el máximo valor de* p.

ACLARACIÓN: Los rectángulos de la división no son necesariamente iguales.

Problema 5.35. ***OMM (2010), nivel 1.***

En la Figura 5.26, $ABCD$ y $EFGH$ son rectángulos sobrepuestos con lados enteros, $\overline{AB}$ mide 10, $\overline{BC}$ mide 4, y x, y y z denotan las áreas de las regiones sombreadas, como se muestra. Si $x+y=z$ sólo una de los siguientes no puede ser el valor de z, ¿cuál es?

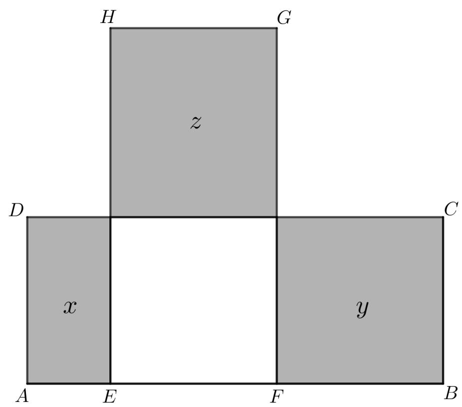


Figura 5.26: Ilustración del Problema 5.35.

*a)*36 *b)* 32 *c)* 24 *d)* 20 *e)* 16

Problema 5.36. ***OMM (2010), nivel 1.***

En la Figura 5.27, $\angle\alpha$ mide 7° y $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... son todos de la misma longitud. En un primer paso se dibuja $\overline{A_1A_2}$, en un segundo paso se dibuja $\overline{A_2A_3}$, y así sucesivamente. ¿Cuál es el mayor número de segmentos que pueden dibujarse de esta manera?

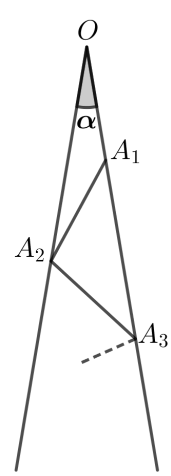


Figura 5.27: Ilustración del Problema 5.36.

*a)*10 *b)* 11 *c)* 12 *d)* 13 *e) infinidad*

Problema 5.37. ***OMPR (2003-2004), nivel 2.***

Sea ΔABC equilátero. Considere el círculo inscrito en ΔABC. Sea ΔEFG un triángulo equilátero inscrito en el círculo. ¿Cuál es la razón de las áreas de ΔABC y ΔEFG?

a) 1/3 *b)* 1/2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* 5

Problema 5.38. ***OMPR (2010), nivel intermedio.***

Los dos vértices ΔABC son los puntos medios de los lados de un rectángulo (ver Figura 5.28). Si el área del rectángulo es $1cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo?

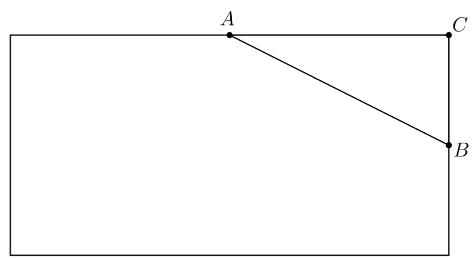


Figura 5.28: Ilustración del Problema 5.38.

a) $\frac{1}{3}cm^2$ *b)* $\frac{1}{4}cm^2$ *c)* $\frac{1}{8}cm^2$ *d)* $\frac{3}{8}cm^2$ *e) No se puede determinar*

Problema 5.39. ***ORM-UDEA (2016), nivel 2.***

Los valores en la Figura 5.29 corresponden a las medidas de los ángulos en grados. El valor del ángulo en x, en grados, es:

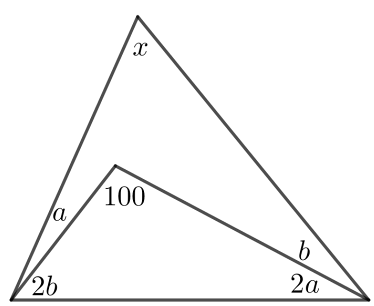


Figura 5.29: Ilustración del Problema 5.39.

a) 50 *b)* 45 *c)* 55 *d)* 65 *e)* 60

Problema 5.40. ***ORM-UDEA (2017), nivel 2.***

Tres círculos son tangentes. Uno de radio 1 y centro en A, otro de radio 4 y centro en B y el tercero con centro en C. Sea $\overline{AC}$ tangente al círculo con centro en B y el ángulo $\angle ABC$ recto. Encuentre el radio del círculo con centro en C, ver Figura 5.30.

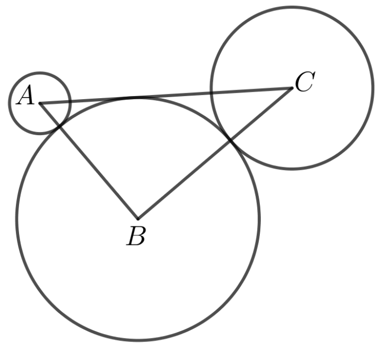


Figura 5.30: Ilustración del Problema 5.40.

Problema 5.41. ***ORM-UDENAR (2016), nivel 2.***

El rectángulo sombreado (ver Figura 5.31) tiene área $13cm^2$ *; A y B son los puntos medios de dos de los lados del trapezoide. ¿Cuál es el área del trapezoide?*

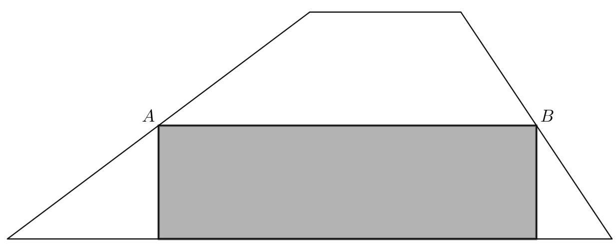


Figura 5.31: Ilustración del Problema 5.41.

a) $22cm^2$ *b)* $23cm^2$ *c)* $24cm^2$ *d)* $25cm^2$ *e)* $26cm^2$

Problema 5.42. ***ORM-UDENAR (2016), nivel 2.***

El segmento $\overline{AB}$ *mide* $8cm$ *y se divide en cuatro partes iguales (ver Figura 5.32). ¿Cuál es el área de la región sombreada?*

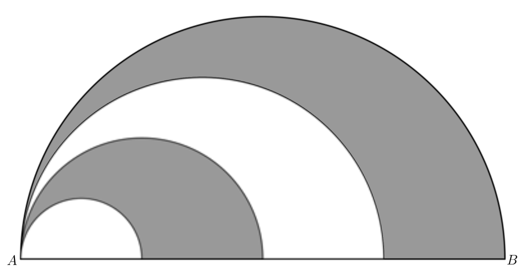


Figura 5.32: Ilustración del Problema 5.42.

a) 20π *b)* 4π *c)* 8π *d)* 5π *e)* $\frac{18\pi}{5}$

Problema 5.43. ***ORM-UIS (2012), nivel medio.***

Si el paralelogramo $ABCD$ tiene área $50m^2$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente (ver Figura 5.33), ¿Cuál es el área de la región sombreada?

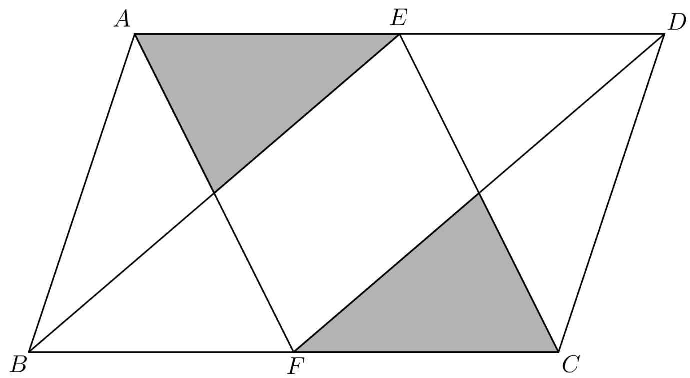


Figura 5.33: Ilustración del Problema 5.43.

a) $\frac{25}{4}m^2$ *b)* $\frac{25}{2}m^2$ *c)* $25m^2$ *d)* $\frac{\sqrt{50}}{2}m^2$ *e)* $\frac{50}{3}m^2$

Problema 5.44. ***ORM-UIS (2014), nivel medio.***

En el cuadrado $ABCD$ (ver Figura 5.34), M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Una línea perpendicular al segmento $\overline{MC}$ en M corta a $\overline{A}D$ en K. Probar que $\angle BCM$ es congruente a $\angle KCM$.

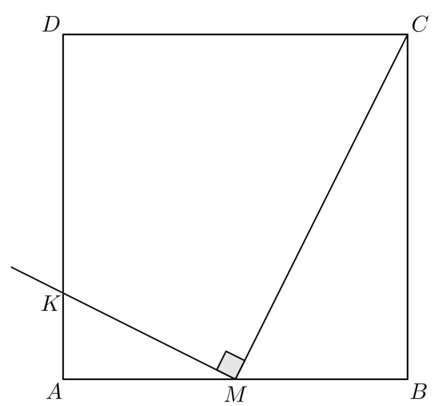


Figura 5.34: Ilustración del Problema 5.44.

Problema 5.45. ***ORM-UNIVALLE (2012), nivel medio.***

En un triángulo equilátero de lado $6cm$ se han dividido los lados en tres partes iguales para construir un cuadrilátero en su interior, tal como lo muestra la Figura 5.35 ¿Cuál es el área de este cuadrilátero?

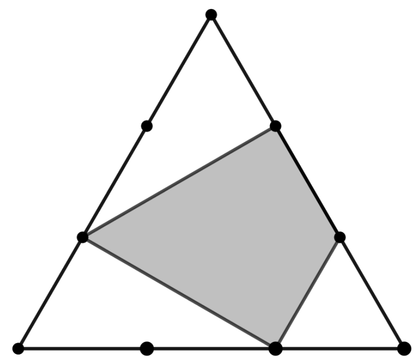


Figura 5.35: Ilustración del Problema 5.45.

Problema 5.46. ***ORM-UNIVALLE (2013), nivel medio.***

En la Figura 5.36, $\overline{AB}$ mide 21cm de longitud. El punto P se ubica de tal forma que el cuadrado de lado $\overline{AP}$ y el triángulo equilátero de base $\overline{PB}$ tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es el área, en cm^2, del cuadrado?

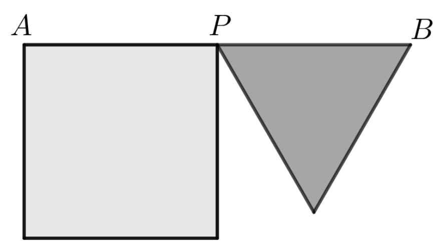


Figura 5.36: Ilustración del Problema 5.46.

5.3. Nivel avanzado

Problema 5.47. ***APMO (2004)***

Sea O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que el área de uno de los triángulos AOH, BOH y COH es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos.

Problema 5.48. ***APMO (2012)***

Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D el pie de la perpendicular trazada desde el punto A al lado $\overline{BC}$, M el punto medio de $\overline{BC}$, y H el ortocentro de ΔABC. Sea E la intersección de la circunferencia circunscrita Γ de ΔABC y la semirrecta $\overrightarrow{MH}$, y F la intersección (diferente de E) de la recta $\overleftrightarrow{ED}$ y la circunferencia Γ. Demostrar que $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Problema 5.49. ***CM (2003), nivel 5.***

ABCD es un rectángulo, P, Q, R y S son los puntos medios de sus lados y T es el punto medio del segmento $\overline{RS}$ *(ver Figura 5.37). Si el área de ABCD es* 1*, ¿Cuál es el área del triángulo* ΔPQT*?*

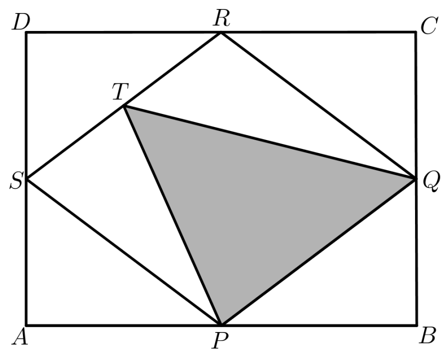


Figura 5.37: Ilustración del Problema 5.49.

a) $\frac{5}{16}$ *b)* $\frac{3}{8}$ *c)* $\frac{1}{5}$ *d)* $\frac{1}{6}$ *e)* $\frac{1}{4}$

Problema 5.50. ***CM (2005), nivel 1.***

En la Figura 5.38 cada triángulo pequeño tiene área 1*, ¿Cuál es el área de la región sombreada?*

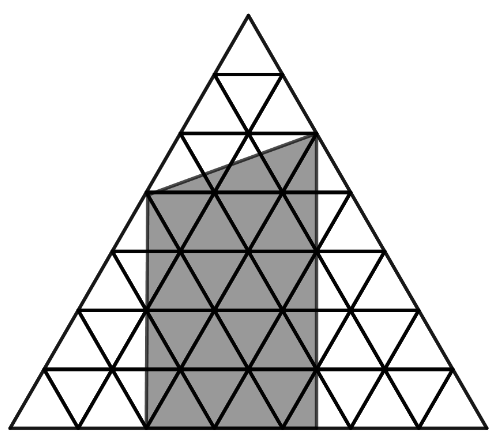


Figura 5.38: Ilustración del Problema 5.50.

a) 20 *b)* 22, 5 *c)* $\sqrt{450}$ *d)* 25 *e)* 32

Problema 5.51. ***CRM (1998), nivel superior.***

El área de la región delimitada por $x + y = 6$*,* $y = 4$*,* $x = 0$ *y* $y = 0$ *es:*

a) 8 *b)* 16 *c)* 17 *d)* 18 *e)* 36

Problema 5.52. ***CRM (2000), nivel superior.***

En la Figura 5.39, y-x es igual a:

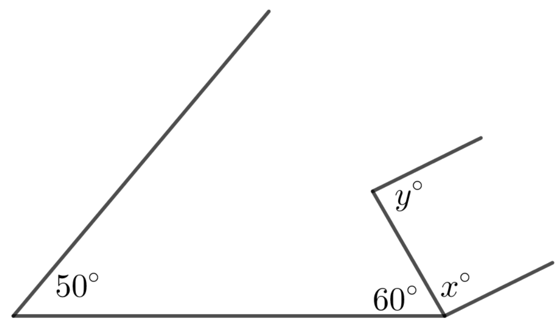


Figura 5.39: Ilustración del Problema 5.52.

a) 60 *b)* 40 *c)* 30 *d)* 70 *e)* 110

Problema 5.53. ***EGMO (2014)***

Sean D y E puntos en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de ΔABC, respectivamente, y tales que $\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CE}$. Sean F el punto de intersección $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$, I el incentro de ΔABC, H el ortocentro de ΔDEF y M el punto medio del arco $\overset{\frown}{BAC}$ del circuncírculo de ΔABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 5.54. ***EGMO (2017)***

Sea ΔABC acutángulo que no tiene dos lados con la misma longitud. Las reflexiones del baricentro G y el circuncentro O de ΔABC con respecto a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ se denotan como $G1$, $G2$, $G3$, y $O1$, $O2$, $O3$, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de $\Delta G1G2C$, $\Delta G1G3B$, $\Delta G2G3A$, $\Delta O1O2C$, $\Delta O1O3B$, $\Delta O2O3A$ y ΔABC tienen un punto en común.

Problema 5.55. ***IMO (1959)***

Se selecciona un punto arbitrario M en el interior del $\overline{AB}$. Los cuadrados $AMCD$ y $MBEF$ se construyen en el mismo lado de $\overline{AB}$; con $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ como sus respectivas bases. Los círculos circunscritos sobre estos cuadrados, con los centros P y Q; se cruzan en M y también en otro punto N. Sea N' el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{BC}$:

- *Demuestre que los puntos N y N' coinciden.*
- *Demostrar que $\overleftrightarrow{MN}$ pasan a través de un punto fijo S independiente de la elección de M.*
- *Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de $\overline{PQ}$ ya que M varía entre A y B.*

Problema 5.56. ***IMO (2003)***

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos vértices están sobre una circunferencia. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde D a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente. Demostrar que $\overline{PQ} = \overline{QR}$ si y sólo si las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se cortan sobre $\overleftrightarrow{AC}$.

Problema 5.57. ***OCM (2003)***

Se refleja el punto $P = (1, 2, 3)$ en el plano-xy. Luego su imagen Q se rota por un ángulo de $180°$ alrededor del eje-x para obtener el punto R. Finalmente se traslada R cinco unidades en la dirección positiva del eje-y para obtener el punto S. ¿Cuáles son las coordenadas de S?

a) $(1, 7, -3)$ *b)* $(-1, 7, -3)$ *c)* $(-1, -2, 8)$ *d)* $(-1, 3, 3)$ *e)* $(1, 3, 3)$

Problema 5.58. ***OCM(2000), nivel superior.***

Si los arcos de circunferencia $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BC}$ tienen centros en B y A (ver Figura 5.40), respectivamente, entonces existe una circunferencia que es tangente tanto a $\overset{\frown}{AC}$ como a $\overset{\frown}{BC}$ y a $\overline{AB}$. Si la longitud de $\overset{\frown}{BC}$ es 12, entonces la longitud de la circunferencia tangente es

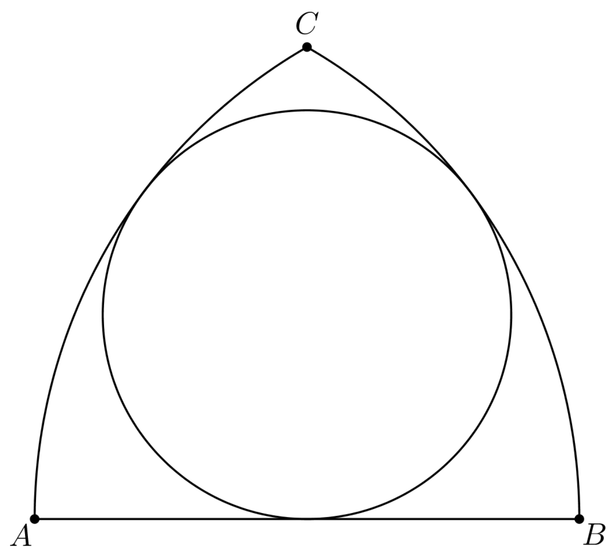


Figura 5.40: Ilustración del Problema 5.58.

a) 24 *b) 25* *c) 26* *d) 27* *e) 28*

Problema 5.59. ***OIM (2003).***

En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, distintos de los extremos, tales que $\overline{BP} = \overline{CQ}$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de $\overline{BX}$, $\overline{XY}$ y $\overline{DY}$.

Problema 5.60. ***OIM (2004).***

Dado un triángulo escaleno ΔABC*, se llaman* A'*,* B' *y* C' *a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de* $\angle A$*,* $\angle B$ *y* $\angle C$ *con los lados opuestos, respectivamente. Sean:*

- A'' *la intersección de* $\overline{BC}$ *con la mediatriz de* $\overline{AA'}$*,*
- B'' *la intersección de* $\overline{AC}$ *con la mediatriz de* $\overline{BB'}$ *y*
- C'' *la intersección de* $\overline{AB}$ *con la mediatriz de* $\overline{CC'}$*.*

Probar que A''*,* B'' *y* C'' *son colineales.*

Problema 5.61. ***OLCOMA (2014), nivel 3.***

Una persona empieza un recorrido desde un punto A *desplazándose inicialmente* $100km$ *hacia el oeste llegando a un punto* B*, luego se mueve* $14km$ *hacia el norte llegando al punto* C *y finalmente se desplaza* xkm *en línea recta hasta un punto* D *que se ubica a* $6km$ *al sur del punto* A*. Entonces la distancia total recorrida por dicha persona en kilómetros corresponde a:*

a) $114 + 20\sqrt{26}$ *b)* $120 + 20\sqrt{26}$ *c)* $114 + 26\sqrt{26}$ *d)* $114 + 15\sqrt{3}$

Problema 5.62. ***OLCOMA (2017), nivel 3.***

En ΔABC*,* $m\angle BAC = 60°$*,* $m\angle ABC = 45°$ *y* $\overline{AC} = 30$*. Si* h *es la longitud de la altura desde* A *y* $h^2 = m + n\sqrt{3}$*, con* m *y* n *números naturales, entonces el valor de* m *es*

a) 225 *b)* 450 *c)* 675 *d)* 900

Problema 5.63. ***OM (2014), nivel 2.***

En un cuadrilátero convexo $ABCD$*, sean* M*,* N*,* P *y* Q *los puntos medios de los lados* $\overline{AB}$*,* $\overline{BC}$*,* $\overline{CD}$ *y* $\overline{DA}$ *respectivamente. Si* $\overline{MP}$ *y* $\overline{NQ}$ *dividen a* $ABCD$ *en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que* $ABCD$ *es un paralelogramo.*

Problema 5.64. ***OM (2016), nivel 2.***

En ΔABC*, sean* D *y* E *puntos de los lados* $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$*, respectivamente.* $\overline{AD}$ *y* $\overline{BE}$ *se cortan en* O*. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a* $\overline{AB}$*, divide a* $\overline{DE}$ *por la mitad. Demostrar que* ΔABO *y el cuadrilátero* $ODCE$ *tienen áreas iguales.*

Problema 5.65. ***OMAR (2004), nivel 3.***

El pentágono $ABCDE$ *tiene* $\overline{AB} = \overline{BC}$*,* $\overline{CD} = \overline{DE}$*;* $\angle ABC = 120°$*,* $\angle CDE = 60°$ *y* $\overline{BD} = 2$*. Calcular el área del pentágono.*

Problema 5.66. ***OMAR (2015), nivel 2.***

Sea ΔABC equilátero y P un punto en su interior tal que $\angle CAP = 30°$. Además, hay un punto D en $\overrightarrow{BP}$ (con D exterior a ΔABC) tal que $\angle CAD = \angle CDA = 50°$. Sea Q el punto de intersección de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$. Calcular $\frac{\overline{CQ}}{\overline{PQ}}$.

Problema 5.67. ***OMCC (2004).***

Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente, tales que $\frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio de $\overline{EF}$ y G el punto de corte de $\overleftrightarrow{CM}$ con $\overline{AB}$. Demostrar que ΔFEG es semejante a ΔABC.

Problema 5.68. ***OMCC (2006).***

Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos puntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud de $\overline{CD}$ es constante, es decir, no depende de la elección de B.

Problema 5.69. ***OMCS (2008).***

Sea P un punto en el interior de ΔABC. Sean X, Y, Z puntos en los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, tales que $\angle PXC = \angle PYA = \angle PZB$. Sean U, V y W puntos en los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente (o en sus extensiones, de ser necesario) con X entre B y U, Y entre C y V, y Z entre A y W, tales que $\overline{PU} = 2\overline{PX}$, $\overline{PV} = 2\overline{PY}$ y $\overline{PW} = 2\overline{PZ}$. Si el área de ΔXYZ es 1, determinar el área de ΔUVW.

Problema 5.70. ***OMCS (2013).***

En un triángulo ABC, sean M el punto medio del lado $\overline{BC}$ e I la intersección de sus bisectrices. Si $\overline{IM} = \overline{IA}$, determinar el menor valor posible para la medida de $\angle AIM$.

Problema 5.71. ***OMEC (2009).***

Sea ABC un triangulo acutángulo tal que la bisectriz de $\angle BAC$, la altura tomada desde B y la mediatriz del lado $\overline{AB}$, se intersectan en un punto. Determine $\angle BAC$

Problema 5.72. ***OMEC (2017).***

Un cuadrilátero convexo $ABCD$ no tiene lados paralelos. Los ángulos formados por la diagonal $\overline{AC}$ y los cuatro lados son $55°$, $55°$, $19°$ y $16°$ en algún orden. Determinar todos los valores posibles del ángulo agudo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Problema 5.73. ***OMM (2004).***

En ΔABC un punto D en $\overline{BC}$ es tal que $\overline{BD} = 2\overline{DC}$. Sea E el pie de la altura de ΔABC por B y sea L la recta que pasa por C y que es perpendicular a $\overline{AC}$. Sea O el punto sobre L tal que $\overline{OB} = \overline{OE}$. Prueba que D, E y O están alineados.

Problema 5.74. ***OMM (2009).***

En la Figura 5.41, ABC es un triángulo y un círculo corta a los dos en los puntos P, P', Q, Q', R y R'. Se tiene además que $|P'Q| = |Q'R| = |R'P|$, y que L, M y N son los puntos medios de $\overline{Q'R}$, $\overline{R'P}$ y $\overline{P'Q}$, respectivamente. Probar que $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CN}$ son concurrentes.

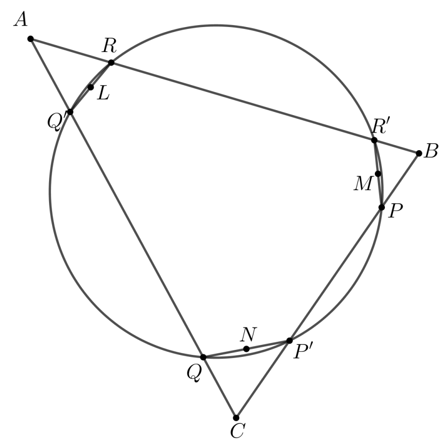


Figura 5.41: Ilustración del Problema 5.74.

Problema 5.75. ***OMPR (2014-2015), nivel superior.***

Sea $ABCD$ un rectángulo de lados $\overline{AB} = 4$ y $\overline{BC} = 3$. La perpendicular a la diagonal $\overline{BD}$ trazada por A corta a $\overline{BD}$ en el punto H. Denotamos por M al punto medio de $\overline{BH}$ y N al punto medio de $\overline{CD}$. Calcular la medida de $\overline{MN}$.

Problema 5.76. ***OMPR (2016-2017), nivel superior.***

Los rectángulos S_1 y S_2 en la Figura 5.42 tienen la misma área. Determine la razón $\frac{x}{y}$.

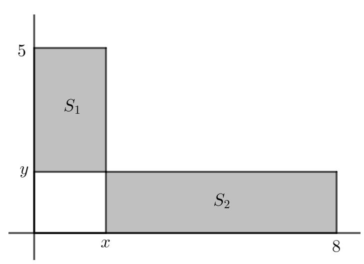


Figura 5.42: Ilustración del Problema 5.76.

a) 1 *b)* $\frac{3}{2}$ *c)* $\frac{4}{3}$ *d)* $\frac{7}{4}$ *e)* $\frac{8}{5}$

Problema 5.77. ***ORM-UDEA (2016), nivel 3.***

¿Cuál es la longitud de $\overline{EF}$ (en centímetros), si $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DC}$ son paralelos? (ver Figura 5.43)

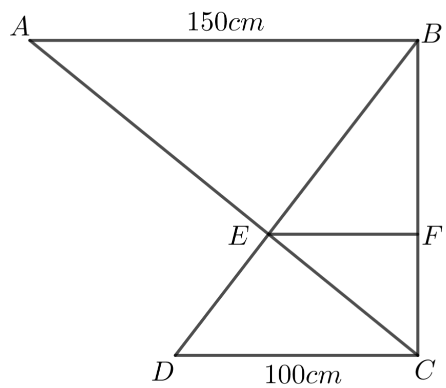


Figura 5.43: Ilustración del Problema 5.77.

a) 40 *b)* 50 *c)* 60 *d)* 70 *e)* 80

Problema 5.78. ***ORM-UDEA (2017), nivel 3.***

Dentro del triángulo rectángulo ΔABC hay tres cuadrados como se muestra en la Figura 5.44. Si $\overline{AB} = 8$ y el cuadrado más pequeño tiene lado de longitud 1, entonces el cuadrado grande tiene lado de longitud:

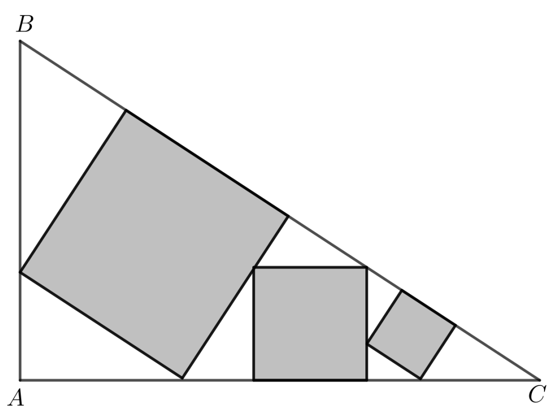


Figura 5.44: Ilustración del Problema 5.78.

a) 2 *b)* $\sqrt{8}$ *c)* 4 *d)* $2\sqrt{2}$ *e)* 3

Problema 5.79. ***ORM-UIS (2012), nivel avanzado.***

El círculo 1 pasa por el centro del círculo 2 y es tangente a él. El área del círculo 1 es de 4 centímetros cuadrados; el área del círculo 2 expresada en centímetros cuadrados es:

Problema 5.80. ***ORM-UIS (2013), nivel avanzado.***

Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro, entonces:

a) Sus áreas son iguales *b) El área del círculo es mayor* *c) El área del cuadrado es mayor* *d) El área del círculo es* Π *veces el área del cuadrado* *e) Ninguna de las anteriores.*

Problema 5.81. ***ORM-UNIVALLE (2007), nivel avanzado.***

La cruz de la Figura 5.45 está formada por cinco cuadrados iguales. Determine el área de la cruz, sabiendo que $x = 10cm$.

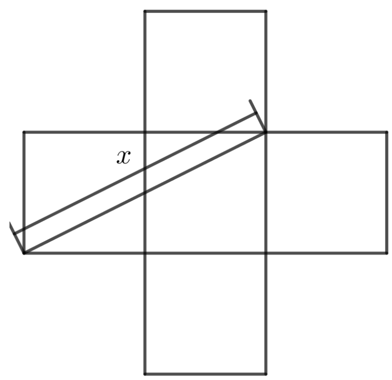


Figura 5.45: Ilustración del Problema 5.81.

a) $20cm^2$ *b)* $100cm^2$ *c)* $50cm^2$ *d)* $80cm^2$ *e)* $120cm^2$

Problema 5.82. ***ORM-UNIVALLE (2013), nivel avanzado.***

Un triángulo rectángulo isósceles se extrae de cada esquina de un cuadrado de papel de tal manera que queda un rectángulo con una diagonal de longitud $5\sqrt{6}$. *¿Cuál es el área total de las piezas removidas? (ver Figura 5.46)*

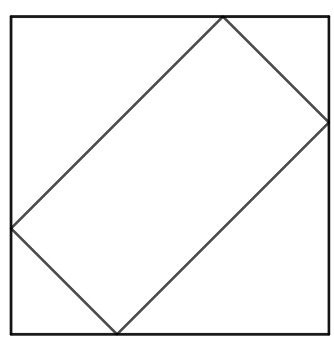


Figura 5.46: Ilustración del Problema 5.82.

A continuación se presentan algunos problemas de autoría propia, producto de la realización de esta investigación, los cuales surgieron de modificaciones realizadas a diferentes problemas resueltos durante el texto.

Problema 5.83. *Sea ABC un triángulo rectángulo en A, $BCDE$ un cuadrado y CDF un triángulo isósceles donde $\angle CDF$ mide $40°$. Hallar la medida de $\angle ACF$. (ver Figura 5.47).*

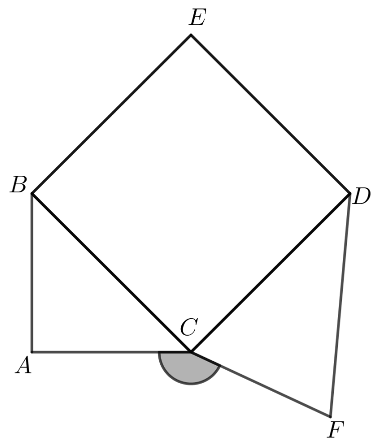


Figura 5.47: Ilustración del Problema 5.83.

*a)*100 *b)*155 *c)*90 *d)*165 *e)* 135

Problema 5.84. *Sean $ABCDEF$ y $EFGHI$ polígonos regulares, donde $\overline{BC} = 3$ (ver Figura 5.48). La distancia del punto D al punto I es más próxima a:*

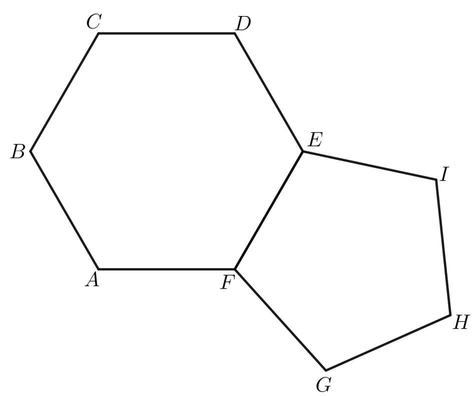


Figura 5.48: Ilustración del Problema 5.84.

a)$\frac{19}{2}$ *b)*10 *c)*$\frac{11}{2}$ *d)* $\frac{21}{2}$ *e)No es posible calcular*

Problema 5.85. *Sea $ABCD$ un cuadrado de área y perímetro iguales a 16. Calcular el área y el perímetro de la región sombreada en la figura dada, sabiendo que E, F, G y H son puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$ e I, J, K y L de los lados del cuadrado $EFGH$ (ver Figura 5.49).*

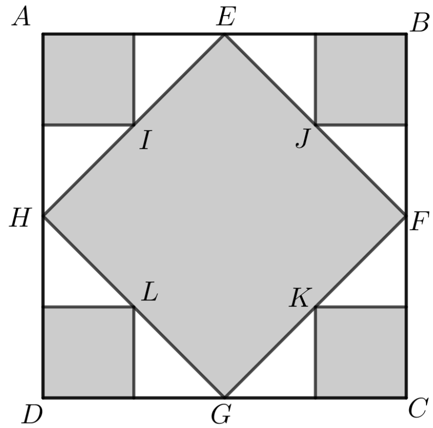


Figura 5.49: Ilustración del Problema 5.85.

Problema 5.86. *Si el área del cuadrado $ABCD$ es $10cm^2$, calcular el área no sombreada sabiendo que cada cuadrado tiene como área la cuarta parte del área del cuadrado que lo contiene inmediatamente (ver Figura 5.50).*

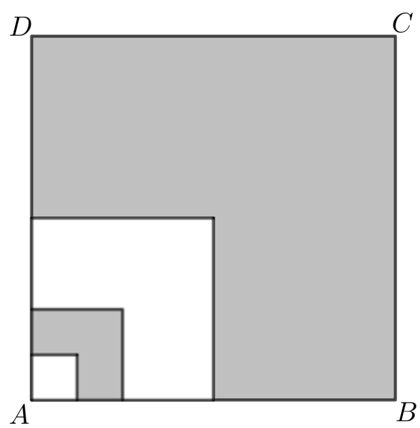


Figura 5.50: Ilustración del Problema 5.86.

Problema 5.87. *Sea $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AC} \perp \overline{DC}$ y $\angle BAD = 135°$. Demostrar que $\Delta ACD \cong \Delta BAC$.*

Problema 5.88. *La Figura 5.51 está formada por la unión de dos octágonos regulares de lado 2cm. Calcular el área de la región sombreada.*

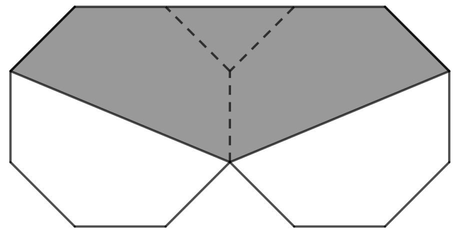


Figura 5.51: Ilustración del Problema 5.88.

Problema 5.89. *En el rectángulo de la Figura 5.52 el largo es el doble del ancho.En términos del ancho, determine el área y el perímetro de la figura en línea gruesa.*

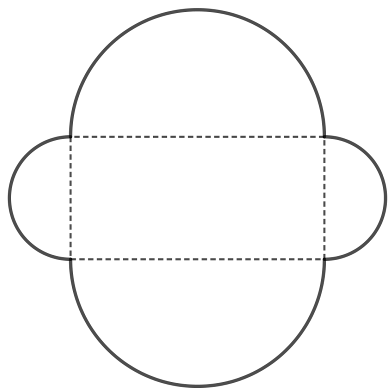


Figura 5.52: Ilustración del Problema 5.89.

Conclusiones

- La geometría describe el mundo en el que vivimos y por tanto es de gran interés para el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, en la actualidad se ha dejado de lado dentro del campo de la educación. El trabajo realizado propone cómo la resolución de problemas y las olimpiadas matemáticas, pueden ser un medio que permita generar un espacio para la reintegración a las aulas de clase de esta área de las matemáticas.
- La resolución de problemas en conjunto con las olimpiadas generan espacios donde los estudiantes pueden encontrar gusto e interés por el estudio de las matemáticas, escenario del que se pueden beneficiar tanto profesores como estudiantes dentro del aula de clase para mejorar procesos de enseãnza y aprendizaje.
- La importancia en la resolución de un problema no radica solamente en encontrar su solución, sino en la reflexión y el análisis del proceso detrás de ella, esto es a lo que Polya llama la mirada retrospectiva. Así, además de resolver problemas es necesario plantearse nuevas incógnitas que pueden derivar en la creación de nuevos problemas.
- La resolución de problemas activa el pensamiento y las acciones del estudiante, cambia su papel pasivo de solo recibir información, impulsándolo a buscar y crear su propio conocimiento, esto le permite desarrollar recursos y estrategias para resolver problemas de maneras distintas, explorar varios caminos de solución y siempre buscar formas de extender y generalizar sus resultados.
- Los conocimientos que tenga el estudiante del ambiente matemático y geométrico donde se ha planteado el problema (definiciones, fórmulas, propiedades, etc.) son de gran importancia para dar solución al problema, al igual que su entrenamiento en las diferentes estrategias y el ingenio para aplicarlas.
- La estrategia elementos auxiliares se aplica cuando los datos expuestos en el problema parecen ser insuficientes. Así, al incluir un nuevo elemento, este podría permitir deducir información con la que antes no se contaba. Para el caso de problemas geométricos la inclusión de un elemento consiste básicamente en la construcción de objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, etc.) aunque también se pueden considerar otros elementos como variables o notación.
- Problemas donde se puedan observar objetos simétricos, congruentes, partes intercambiables, partes que permiten sustituirse o cambiarse de posición de modo que no alteran el objeto mediante transformaciones geométricas, son problemas donde se puede aplicar la estrategia de simetría. Esta estrategia permite facilitar generalmente cálculos de áreas que de una u otra forma inicialmente parecían complejos.

- La representación gráfica de la fracción entendida como la relación parte-todo, permite resolver problemas geométricos donde por lo general se quiere calcular el área de una figura a razón de otra, para esto se debe tener en cuenta que siempre las partes obtenidas después del fraccionamiento deben ser simétricas o congruentes pues de no ser así dicha estrategia no puede aplicarse en el proceso de resolución y puede llevar a resultados errados.

- La resolución de problemas geométricos mediante el uso del álgebra permite al estudiante el acercamiento hacia la parte formal y abstracta de las matemáticas. Esta estrategia permite resolver problemas con figuras que al ser ubicadas en el plano cartesiano arrojan datos antes desconocidos.

- En geometría las figuras juegan un papel muy importante en la resolución de problemas puesto que permiten una mejor comprensión del problema a resolver. Para realizar una figura es necesario tener en cuenta que el problema lo permita, proporcionando los datos suficientes para la realización de la misma.

- El uso de AGD en la resolución de problemas es una herramienta que permite cambiar la forma tradicional en la enseãnza de las matemáticas, dado que estudiantes y profesores pueden experimentar y explorar la geometría en un ambiente dinámico, desarrollando habilidades matemáticas como son la visualización, el razonamiento, el pensamiento variacional, la exploración de conjeturas, la validación, entre otras. Los problemas donde se pueda deducir algún tipo de variación son útiles para la práctica de esta estrategia, permitiendo además que los estudiantes tengan un acercamiento a la generalización.

- El uso de un AGD como GeoGebra, favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos o del problema. La medición de atributos (longitudes, áreas, perímetros), el arrastre de objetos, la descripción de lugares geométricos y el uso adecuado del sistema cartesiano resultan importantes en la búsqueda de conjeturas o relaciones y en la búsqueda de formas para justificarlas.

- Este trabajo puede ser usado por profesores, estudiantes y comunidad en general quienes deseen aprender geometría mediante la resolución de problemas.

- Aunque bien en este trabajo se hizo un acercamiento para determinar el uso de estrategias en la resolución de problemas en geometría bidimensional, es necesario dejar claro que las estrategias presentadas no son las únicas formas de proceder ante la resolución de un determinado problema. Así, se puede pensar en trabajos futuros donde se estudien estas u otras estrategias en geometría bidimensional o tridimensional, o también estrategias para la resolución de problemas en otras áreas de las matemáticas.

Apéndice

Ejemplo de construcción con GeoGebra

Este apéndice tiene el propósito de describir mediante un problema de construcción algunas funciones del AGD (Ambiente de Geometría Dinámica) GeoGebra y su uso en la resolución de problemas geométricos presentes en olimpiadas matemáticas, actividad que hizo parte de la realización de este trabajo. Son numerosas las investigaciones acerca del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, la revista *International Journal of Computers for Mathematical Learning* publica contribuciones teóricas, empíricas y prácticas que exploran el potencial de las nuevas tecnologías para profundizar la comprensión del campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dentro de esta línea de investigación, se destaca el uso de AGD, especialmente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y el uso de la resolución de problemas con el uso de AGD's.

GeoGebra es un software libre de matemática dinámica, que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, posee diferentes vistas y apariencias, entre ellas la vista gráfica que es la que se utiliza para representaciones geométricas. Posee una barra de herramientas gráficas y de construcción y botones con menús desplegables que presentan opciones como: **polígono**, **mediatriz**, **circunferencia**, **área**, entre otros. Con el ratón o mouse, empleando las herramientas, pueden realizarse construcciones geométricas en la Vista Gráfica. A continuación se presentan algunos ejemplos de forma detallada en las cuales se hacen construcciones geométricas haciendo uso de las herramientas presentes en GeoGebra.

Todo objeto creado en la Vista Gráfica, tiene también su correspondiente representación en la Vista Algebraica, se puede también activar la herramienta que **Elige y Mueve** para desplazar objetos en la Vista Gráfica lo que se conoce como *modo arrastre*, puesto que está herramienta permite arrastrar y mover los objetos representados con el ratón o mouse. Simultáneamente, las representaciones algebraicas se actualizan dinámicamente en la Vista Algebraica. Otra opción útil es elegir alguna herramienta de construcción de la Barra de Herramientas y seguir las indicaciones de la Ayuda de la Barra de Herramientas.

Una vez el entorno de GeoGebra es familiar para el estudiante se puede optar por intentar dar solución a algún problema o pregunta. Por ejemplo: utilizando la herramienta de GeoGebra **Polígono regular**, construir un cuadrado de color azul. ¿Es posible inscribir dentro de él otro cuadrado (naranja)? Se recuerda que inscribir significa que el cuadrado naranja debe tener sus cuatro vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul.

Así se procede entonces a hacer uso de las herramientas de GeoGebra para resolver este problema. En primera instancia se construye el cuadrado azul con la herramienta **polígono regular**. En seguida se debe pensar en como construir otro cuadrado inscrito, que será de color naranja, en el cuadrado azul. La herramienta **polígono regular** pide dos puntos que equivalen a los extremos del segmento que corresponde al lado del polígono que se desea construir y seguidamente pregunta por el numero de lados del polígono regular, lo que lleva a pensar que es posible que estos dos puntos equivalentes a dos de los vértices del cuadrado naranja, pueden construirse directamente en los lados del cuadrado azul como se muestra en la Figura A.1.

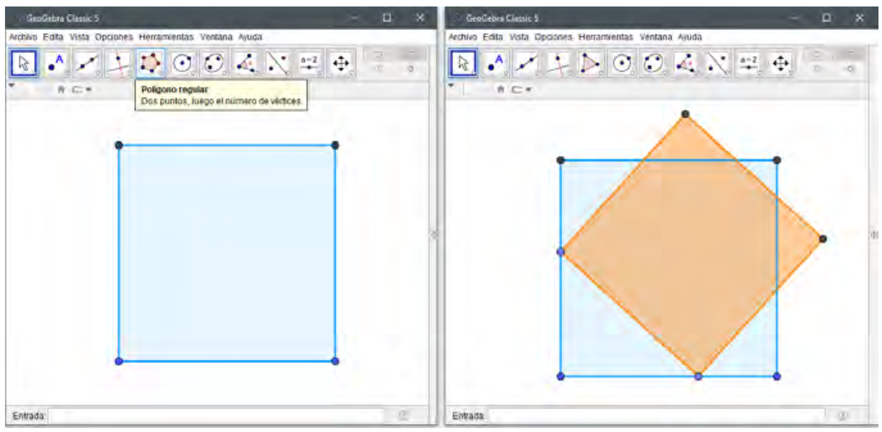


Figura A.1: Construcción de cuadrados con GeoGebra.

Hasta el momento se tiene que dos de los cuatro vértices del cuadrado naranja están inscritos en el cuadrado azul, por tanto se procede a inscribir los otros dos vértices restantes. Haciendo uso de la herramienta **Elige y Mueve** se pueden arrastrar los puntos iniciales que sirvieron para construir el cuadrado naranja, lo que permite realizar una exploración dinámica de la construcción realizada con el fin de observar propiedades o características que lleven a inscribir el cuadrado naranja en el azul. En la Figura A.2 se presentan diferentes posiciones en las que se pueden ubicar los vértices del cuadrado naranja en la construcción realizada.

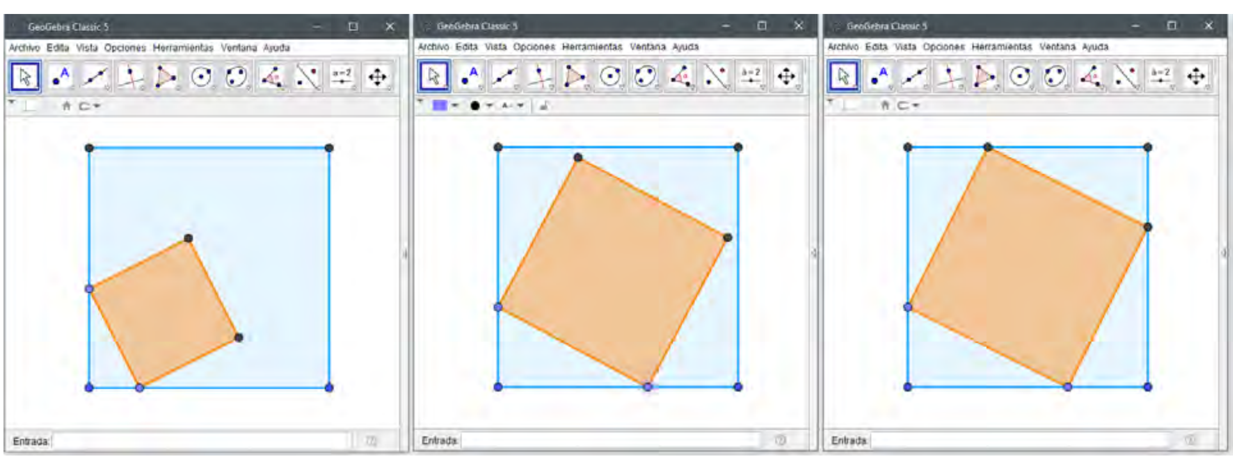


Figura A.2: Uso del modo arrastre para exploración en GeoGebra.

Aparentemente en la última imagen de la secuencia presentada en la Figura A.2 el cuadrado naranja está inscrito en el cuadrado azul, pero es claro que la construcción realizada es una construcción blanda puesto que al manipular los vértices del cuadrado naranja la construcción se modifica de modo que dicho cuadrado no se encuentra siempre inscrito en el cuadrado azul. La cuestión ahora es, ¿cómo realizar una construcción en la que incluso al arrastrar o mover los vértices del cuadrado naranja, este siempre esté inscrito en el cuadrado azul?

La construcción blanda puede llevar a observar características que pueden conducir al estudiante a las bases de una construcción robusta. En este caso, se realiza la observación de los triángulos azules formados por el cruce de los dos cuadrados. La Figura A.3 presenta una secuencia de posibles posiciones en las que el cuadrado naranja está aparentemente inscrito en el cuadrado azul. Ahora, al observar los triángulos azules aparentemente son congruentes entre sí en cada una de las posiciones, el estudiante puede hacer uso de las herramientas de medición que proporciona GeoGebra para comprobarlo, además, existen diferentes demostraciones que hacen uso de propiedades relacionadas con ángulos para probar el hecho de que dichos triángulos son congruentes entre sí.

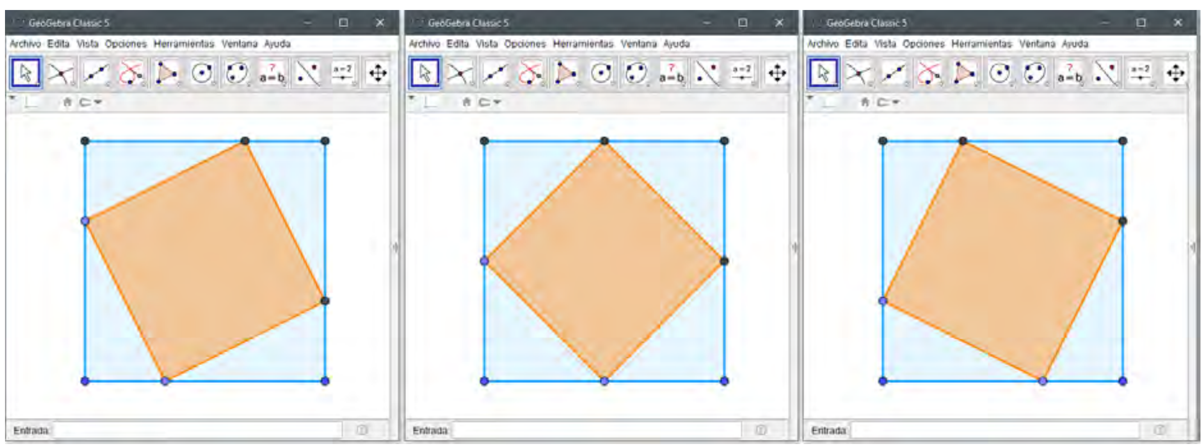


Figura A.3: Uso del modo arrastre para exploración en GeoGebra.

Basándose en la idea de que para que el cuadrado naranja se encuentre inscrito en el cuadrado azul se requiere que los triángulos azules formados por el cruce de estos cuadrados sean congruentes, se puede pensar en realizar una nueva construcción. Así pues se presenta a continuación una de las posibles construcciones robustas que llevan a inscribir un cuadrado en otro.

Se realiza la construcción del cuadrado azul con la herramienta **Polígono regular**, se llama a este cuadrado $ABCD$. Ahora en uno de los lados de $ABCD$ se traza un punto P que será uno de los vértices del cuadrado naranja, en este caso se escogió en el lado $\overline{AD}$. Luego, con la herramienta **Compás** se traslada la medida de $\overline{AP}$ al punto B con el fin de obtener el punto Q en el lado adyacente $\overline{AB}$, el cual será el segundo vértice del cuadrado naranja. Al trasladar la medida de $\overline{AP}$ se garantiza la congruencia de uno los lados de los triángulos azules. Esto permite tener dos vértices del cuadrado naranja, inscritos en el cuadrado azul pero con las condiciones necesarias para que los triángulos azules formados en el cruce de los cuadrados sean congruentes, así haciendo uso nuevamente de la herramienta **Polígono regular**, se traza el cuadrado naranja $PQRS$, ver Figura A.4.

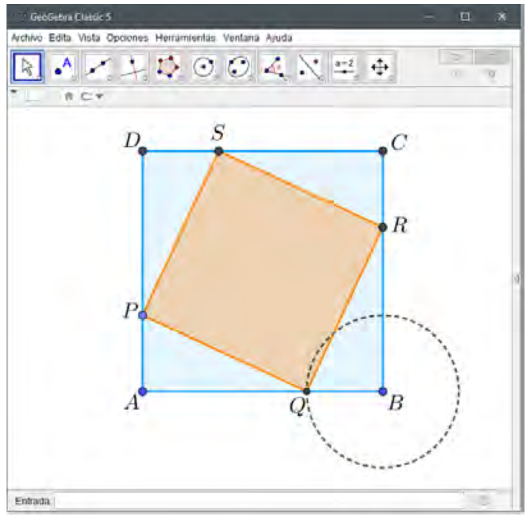


Figura A.4: Construcción robusta de un cuadrado inscrito en otro cuadrado en GeoGebra.

Ahora solo resta comprobar mediante el **modo arrastre** que la construcción realizada sea robusta, es decir, que al variar la posición P el cuadrado naranja siga estando inscrito en el cuadrado azul. La Figura A.5 expone algunas de las posiciones de los dos cuadrados al realizar el arrastre de P y efectivamente esta construcción mantiene la condición de que el cuadrado naranja debe estar inscrito en el cuadrado azul sin importar la posición de P.

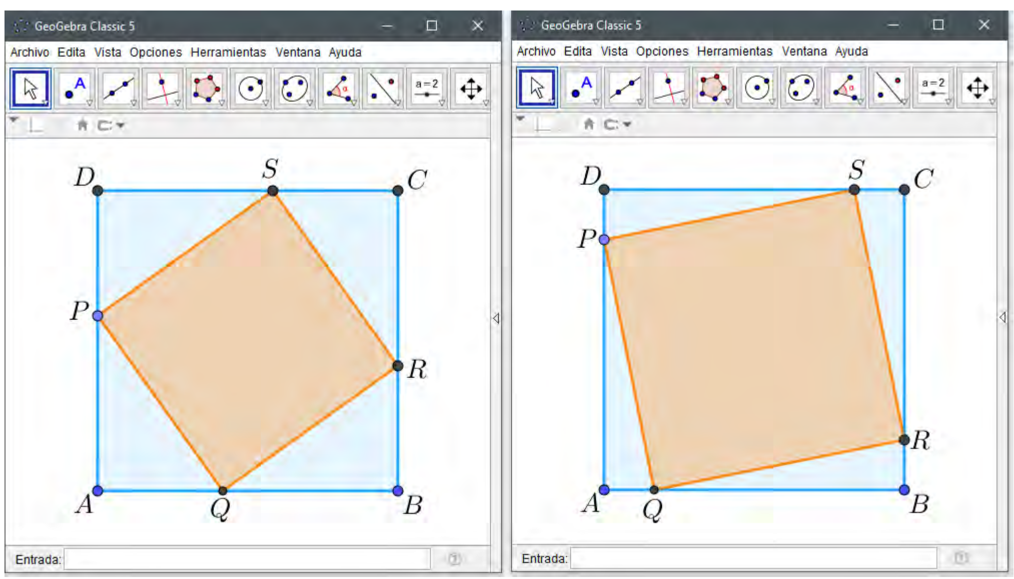


Figura A.5: Arrastre de un cuadrado inscrito en otro cuadrado en GeoGebra.

Este tipo de construcciones en AGD's pueden llevar al estudiante no solo a desarrollar su pensamiento geométrico sino también a cuestionarse por aspectos como el que no solo se puede inscribir un cuadrado dentro de otro sino que las posibilidades son infinitas, al igual que la idea de que existen diferentes construcciones o caminos para dar solución a una pregunta, además, también se ve claramente como una idea no tan exacta ni elaborada en primera instancia puede llevar a encontrar características y propiedades básicas e importantes para la realización de una construcción geométrica y una demostración formal. Estas son solo algunas de las ventajas que proporcionan los AGD's en la resolución de problemas, diferentes preguntas, llevan a diferentes construcciones y por ende a diferentes aprendizajes, lo claro es que el uso de estos Ambientes Dinámicos son algo extensamente provechoso en la resolución de problemas geométricos y en el crecimiento del desarrollo del pensamiento geométrico de quienes hacen uso de ellos.

Referencias

(2018). Olimpiadas costarricenses de matemáticas. [Online] Disponible en:http://olcoma.com/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. Memoria de la tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Almeida02.pdf. 15

APMO (2018). Asian Pacific Mathematics Olympiad. [Online] Disponible en: https://cms.math.ca/Competitions/APMO/ [Consultado 12 de agosto 2018].

Cabezas, N. (2017). Resolución de problemas mediante estrategias matemáticas. 26, 28, 34, 39

Castillo, D., Cifuentes, N., and Paz, N. & Rúa, C. (2016). Resolución de pro blemas de tipo geométrico en olimpiadas matemáticas. Disponible en: http://www.unicauca.edu.co/eventos/index.php/educoloquio/2016/paper/viewFile/396/213. 28

Chen, E. (2016). Euclidean geometry in mathematical olympiads. USA: The Mathematical Association of America. 28

CM (2018). Canguro Matemático. [Online] Disponible en: http://www.canguromat.org.es [Consultado 12 de agosto de 2018]. 18

CRM (2018). Competencia Regional de Matemáticas. [Online] Disponible en: http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas [Consultado 12 de agosto de 2018]. 21

EGMO (2018). European Girl's Mathematical Olympiad. [Online] Disponible en: https://www.egmo.org/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

Fernández, M. (2013). Principales estrategias para la resolución de problemas en matemáticas. publicaciones didácticas. Número 36. 26

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel. 25

Gamboa, R. and Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. Revista Electrónica Educare. Vol. XIV, No.2, [125-142]. Julio-Diciembre. Costa Rica. xviii, 16

Godino, J., Neto, T.and Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S., and Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. avances de investigación en educación matemática. 8, pp. 117-142. 43

Guzmán, M. (1995). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Madrid, España: Ediciones pirámide S.A. XVII, 22, 25, 26

Hemmerling, E. (1971). Geometría elemental. México, D.F. Limusa Wiley. 1, 14

Hernández, V. and Villalba, M. (2001). Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo xxi. Documento de discusión para estudio ICMI. PMMEUNISON.Traducción del documento original.Recuperado el 18 de octubre de 2007 en http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm. 16

IMO (2018). International mathematical olympiad. IMO Foundation. Australia. [Online] Disponible en: https://www.imo-official.org [Consultado 12 de agosto de 2018]. 18

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. En L. Haggarty (Ed.), Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice. London: Routledge Falmer. Pp. 121-139. 17

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Actas del VII CIBEM. Montevideo-Uruguay. 25

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. posibilidades y complejidad. Revista Sigma. 10 (2), p.p. 10-26. [Online] Disponible en:http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/8/145 [Consultado 20 de junio de 2017]. 15

Mason, J., Burton, L., and Tacey, K. (1982). Pensar matemáticamente. España: Labor S.A. 22

NCTM (2000). National council of teachers of mathematics. Princiles and standars for school mathematics. 16

OCM (2018). Olimpiadas colombianas de matemáticas. [Online] Disponible en: http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas [Consultado 12 de agosto de 2018]. 18

OIM (2018). Olimpiada iberoamericana de matemática. [Online] Disponible en: Http://www.oei.es/historico/oim/problemas.htm [Consultado 12 de agosto de 2018].

OM (2018). Olimpiada de mayo. [Online] Disponible en: http://www.oma.org.ar/internacional/may.htm [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMAR (2018). Olimpiada matemática argentina. [Online] Disponible en: http://www.oma.org.ar/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMCC (2018). Olimpiada matemática de centroamérica y el caribe. [Online] Disponible en: http://www.oei.es/historico/oim/iicentro.htm [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMCS (2018). Olimpiada matemática de países del cono sur. [Online] Disponible en: http://www.oma.org.ar/internacional/cono.htm [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMEC (2018). Olimpiada matemática ecuatoriana. [Online] Disponible en: https://omec-mat.org/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMM (2018). Olimpiada mexicana de matemáticas. [Online] Disponible en: http://www.ommenlinea.org/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

OMPR (2018). Olimpiadas matemáticas de puerto rico. [Online] Disponible en: http://www.ompr.pr [Consultado 12 de agosto de 2018]. 19

ORM-UDEA (2018). Olimpiadas matemáticas universidad de antioquia. [Online] Disponible en: http://ciencias.udea.edu.co/olimpiadas/ [Consultado 12 de agosto de 2018].

ORM-UDENAR (2016). Olimpiadas regionales de matemáticas universidad de nariño. colombia. [Online] Disponible en: http://orm.udenar.edu.co [Consultado 12 de agosto de 2018]. 19

ORM-UIS (2008). Olimpiadas regionales de matemáticas universidad industrial de santander. colombia. [Online] Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas [Consultado 12 de agosto de 2018]. 20

Polya, G. (1965). Como plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas, S.A. 22, 23, 25, 28, 29, 34, 43, 48

Puig, L. (1993). El estilo heurístico de resolución de problemas, en salar, a., alayo, f., kindt, m. y puig, l. Aspectos didácticos en matemáticas, 4, pp. 93-122. Zaragoza: ICE. 22

Santos, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos. Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. XVII

Santos, M. (2015). *Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI.* 53

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. edited by united kingdom. Published by Academic Press Inc. (London). Ltd. XVII, 22

Schoenfeld, A. (1996). *Research in collegiate mathematics education.* II. Edited by Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld and Ed Dubinsky. CBMS Issues in Mathematics Education, 6. American Mathematical Society. 22