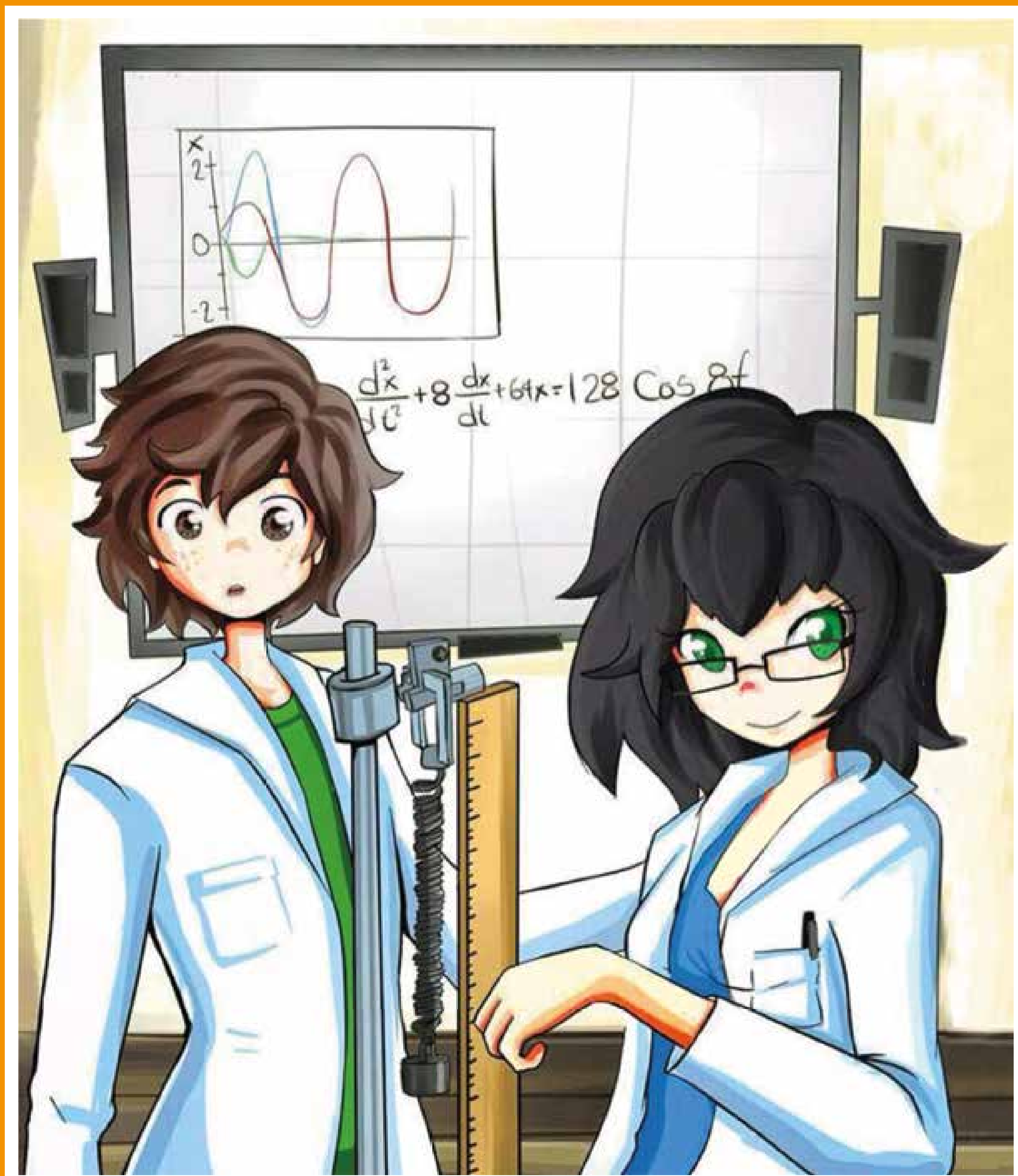
# ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES





**Mawency Vergel Ortega**
**Olga Lucy Rincón Leal**
**Eduardo Ibargüen Mondragón**



Editorial
Universidad de **Nariño**

Editorial
Universidad de Nariño

# ECUACIONES DIFERENCIALES
# Y APLICACIONES

# ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES

Mawency Vergel Ortega

Olga Lucy Rincón Leal

Eduardo Ibargüen Mondragón

Editorial
Universidad de Nariño

Vergel Ortega, Mawency

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones / Mawency Vergel Ortega, Olga Lucy Rincón Leal, Eduardo Ibargüen Mondragón. –1ª ed. – San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2022

199 p. : il. byn., col.
Incluye bibliografía p. 198

ISBN: 978-628-7509-35-1 Impreso
ISBN: 978-628-7509-36-8 Digital

1. Ecuaciones diferenciales 2. Ecuaciones diferenciales–Problemas, ejercicios, etc. 3. Ecuaciones lineales 4. Transformaciones de Laplace I. Rincón Leal, Olga Lucy II. Ibargüen Mondragón, Eduardo

515.35 V495 – SCDD-Ed. 22

Sección de Biblioteca
Alberto Quijano Guerrero

ECUACIONES DIFERENCIALES
Y APLICACIONES

© Mawency Vergel Ortega
mawency@ufps.edu.co

Olga Lucy Rincón Leal
olgarincon@ufps.edu.co

Eduardo Ibargüen Mondragón
edbargun@udenar.edu.co



ISBN: 978-628-7509-35-1 (impreso)
ISBN: 978-628-7509-36-8 (digital)
Primera edición

Impresión:
Graficolor Pasto SAS
Calle 18 No. 29-67 Tel. 7310652
graficolorpasto@hotmail.com

Febrero de 2022
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

# Índice general

# Prólogo

En la actualidad, debido a la velocidad con la cual avanzan la ciencia y la tecnología, se le dificulta a la sociedad adaptarse y acostumbrarse a los diferentes cambios que aparecen en el día a día. Uno de los factores que influyen de manera directa en esos resultados, es que las personas tienen como predilección el uso de rutinas que les impiden acceder a nuevos conocimientos y dar un paso hacia el cambio, es claro que se sienten a gusto dado que cuestionar procesos o buscar alternativas les genera ansiedad e incomodidad. Sin embargo, confrontar al cerebro genera nuevas neuronas para responder a esos cambios y eso proporciona salud física y mental. La matemática, parece ya estigmatizada como uno de los 'cocos' para el aprendizaje, es un campo de investigación que el común de las personas evita estudiar, y si lo hacen, se quedan en la descripción o reemplazo de fórmulas básicas.
Se observa cómo evaden los procesos que incluyen demostraciones, interpretaciones y soluciones de problemas; como también la búsqueda de nuevos modelos sin tener en cuenta los ya descritos en textos. No obstante, cuando la persona se enfrenta a estos retos, se motiva y alcanza logros que le generan motivación y una mejor percepción de sí mismos. Por lo general, los procesos dinámicos que se involucran en el curso de ecuaciones diferenciales, permiten que un gran porcentaje de los estudiantes alcancen cierto tipo de resultados que fortalecen su formación integral.
Tres siglos después de su invención, las ecuaciones diferenciales siguen siendo una fuente inagotable de soluciones a problemas en el área de la matemática pura y aplicada, posibilitan la formulación y análisis de modelados matemáticos. A través de parámetros, variables, relaciones, cambios o variación de variables, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, series de potencias, series de Fourier, ecuaciones integrales, teoremas de existencia, justificación rigurosa de procesos analíticos y/o cuantitativos, las ecuaciones diferenciales describen la dinámica aproximada de fenómenos en diferentes campos tales como: la ingeniería, medicina, economía, ciencias naturales, entre otros.
Sín embargo, en el ámbito escolar aún es frecuente encontrar estudiantes y profesionales de áreas afines, que cuestionan la utilidad y el uso de las ecuaciones diferenciales en la vida práctica. En este sentido, tanto los profesores como los matemáticos, tienden a dar respuesta a esta inquietud por medio de aplicaciones de las ecuaciones, olvidándose que esta no es la respuesta a la pregunta ¿para qué sirven las ecuaciones diferenciales?, lo cual deja el siguiente interrogante en el ambiente o en la mente del estudiante ¿para qué estudio ecuaciones diferenciales, si realmente no es práctico o no puedo utilizarlo? Ante este cuestionamiento, Sáenz, (2013) en su monólogo "Las matemáticas son para siempre", manifiesta que los profesores y matemáticos se dividen en dos grandes grupos: aquellos que van al ataque y aquellos que están a la defensiva.
De esa manera, si su profesor de matemáticas da una respuesta como: "esa pregunta no tiene sentido, la matemática tiene una lógica que se construye y no hace falta mirar las posibles aplicaciones, es como preguntarse y ¿para qué sirve la poesía?, ¿para qué el amor?, pero que pregunta...joven"..., este profesor está al ataque, y aquél que está a la defensiva, responderá: "aunque no te des cuenta, la matemática está detrás de todo, y nombra los puentes y las computadoras, las tarjetas de crédito y el baloto, si no sabes matemáticas el puente se te cae, estas serán las respuestas; también se encuentran aquellos los llamados pedagogos, quienes mencionan, "en el transcurso de la vida, vas haciendo una cajita de herramientas para avanzar a temas más altos, y te van a servir para que te vaya bien en exámenes de posgrado". Y aunque todos tengan razón, quienes descubren la belleza de las matemáticas encuentran su verdad, encuentran

que sirve en el diseño y construcción de edificios modernos, de puentes, es verdad que están en las computadoras, en los algoritmos y en diferentes campos, pero también es verdad que aunque lo permean todo, hay que ir más allá de lo palpable.

Es de esta verdad, que la ciencia tiene sentido porque nos hace entender el mundo y nos ayuda a sortear los hechos que ocurren en él. Hay ciencias que se pueden tocar como la ontológica y otras no, como la matemática, pero, todo lo que hace ser ciencia a la ciencia, es el rigor de la matemática, además, la ciencia funciona por la intuición y creatividad, y la matemática doma la intuición y la creatividad; y ese rigor inspirado en la intuición y la creatividad lo tienen las matemáticas porque son "para siempre", y los teoremas son para siempre, "los teoremas son verdades eternas". Los matemáticos se dedican a forjar teoremas, pero para hacer teoremas no hace falta una conjetura, hace falta una demostración, de allí, un modelo basado en ecuaciones diferenciales requiere no quedarse en conjeturas que expliquen cambios, requiere de teoremas que generen teorías para que así el modelo le permita predecir eventos futuros o dé explicaciones a fenómenos validados de manera científica.

Las ecuaciones diferenciales son consideradas el tema más significativo de estudio de la matemática, al confluir en ella, todas las temáticas vistas por los estudiantes desde su formación básica hasta los cursos previos a las ecuaciones diferenciales; así mismo, se consideran importantes por la transversalidad con otras ciencias y cursos presentes en el currículo en su formación profesional, además, porque están presentes en las cuestiones más profundas que suscitan ideas y teorías que conforman el análisis avanzado; así por ejemplo, en el control de procesos, un ingeniero desea que las cosas no cambien, no obstante, para él estar en capacidad de diseñar el controlador apropiado, debe investigar cómo varía el comportamiento de un proceso químico ante los cambios de los disturbios externos y de las variables manipuladas, de esta manera, siempre el proceso obedece a ecuaciones diferenciales que implican cambios. Es difícil apreciar del todo los capullos de las plantas en floración, sin un conocimiento razonable de las raíces, tallos y hojas que los nutren y soportan, el mismo principio es válido en matemáticas, en particular, en un curso de ecuaciones diferenciales.

El presente texto *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, es el resultado de la investigación "Influencia de temas y prácticas pedagógicas en estudiantes de ecuaciones diferenciales de las Universidades Francisco de Paula Santander y de Nariño", en el cual se determinan qué temas y prácticas tienen mejor percepción por parte de los estudiantes, y cuáles les generan mayor motivación"; incluye entonces, además de éstos, temas básicos y modelos matemáticos generados por estudiantes y profesores.

*Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, tiene como objetivo extender los conocimientos de cálculo diferencial, integral y vectorial a la descripción de procesos móviles mediante ecuaciones diferenciales, dar a conocer herramientas matemáticas para resolver ecuaciones diferenciales, aumentar la capacidad de plantearlas y analizarlas, así como dar a conocer los teoremas que soportan métodos de solución y planteamientos de ecuaciones que den lugar a modelos matemáticos aplicados en otras ciencias. Se espera que el lector logre un equilibrio entre metodología, aplicaciones y fundamentos teóricos, y cree en su mente y en la práctica, modelos matemáticos de situaciones de la vida real.

# Capítulo 1

# Generalidades de las ecuaciones diferenciales

## 1.1. Momentos históricos

Genios con una fuerte intuición, apasionados, rebeldes e inadaptados brillantes, son características de los científicos con una visión diferente de la matemática, la física, la astronomía, se atrevieron a enfrentar desafíos, con ego muy fuerte que los llevaba a decir puedo resolver esto, puedo descifrar el mundo y poner de manifiesto la belleza y singularidad del universo. El campo de las ecuaciones diferenciales, se constituye en el corazón del análisis en matemáticas, originado hace más de 300 años por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en el siglo XVII; sin embargo, realmente el campo de las ecuaciones diferenciales inicia con Galileo Galilei.

Galileo era de carácter engreído con amigos muy íntimos y muchos enemigos, tenía una mente privilegiada, seguro de sí mismo, le dio un vuelco al mundo; a sus 25 años fue profesor de matemáticas, pero insolente se mostraba frente a sus compañeros, quienes según él, pensaban en teorías científicas absurdas, manifestaba que siempre miraban en el lugar equivocado, la intuición le dice que los cuerpos se mueven no por deseo sino por leyes matemáticas que describen el movimiento; comienza entonces estudiando experimentos desde dejar caer pesos, observaciones imperfectas llevó a muchos a no ver las leyes, Galileo en cambio alteró la aceleración de la gravedad a través de un plano inclinado, introduce el concepto de aceleración, supuso un avance clave al entender el movimiento en esos términos.

Al ser el primero en realizar experimentos se le llamó el padre de la física moderna, y fue él quien indujo a Newton a buscar cómo resolver estos enigmas; en 1609 Galileo buscó cómo fabricar lentes y construye el telescopio, impresiona y se siente fascinado al utilizar el instrumento noche tras noche, hasta descubrir otras lunas y generar teorías hasta contradecir la Biblia lo cual no quiso hacer; en 1615 acude a Roma para exponer su caso pero ello fue su error, tentó la suerte y nueve años más tarde le permiten escribir un libro en el cual demuestra que es posible utilizar las matemáticas para analizar el movimiento.

De manera extraña, el año en que fallece Galileo en 1642, a 1500 Km de distancia nace Isaac Newton (1642-1727), solitario, incapaz de conversar, obsesionado y consumido por su trabajo, criado por su abuela, no superó el olvido de su madre, muy susceptible a la crítica, construyó desde niño aparatos como molinos de viento; en Cambridge obsesionado con el pecado era reservado, puritano, creen falleció virgen, veía el mundo de manera geométrica, gráfica. En la facultad se dedicó solo al estudio de la matemática, crea matemáticas nuevas para analizar el movimiento inventando el Cálculo, fascinado por la puesta del sol, elipses, espirales, trayectorias, guarda no obstante sus descubrimientos para sí mismo; a los 24 años, revoluciona la física desvelando el misterio del movimiento de los planetas, al observar una manzana y se preguntó: ¿Si una manzana cae de igual manera cae la luna? Y se la imaginó cayendo sobre la tierra, estudiando la gravedad para mover planetas y astros, demostró que las leyes que rigen los suelos son los mismos de los de la tierra, la caída libre la resuelve suponiendo la existencia de una relación entre la aceleración a cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocidas las condiciones iniciales, pero al tratar de develarlo, la matemática con problemas sin solución le impidió seguir avanzando, porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y solo aproximaba. Sigue investigando entonces en matemática, sistemas dinámicos y astronomía, en 1672 es admitido en la Asociación inglesa de científicos destacados, permitiendo que publiquen un artículo; a sus 42 años busca cómo describir la trayectoria de los planetas alrededor del sol, guiado por una fuerte intuición continúa su tarea, dos años después incomunicado, sin dormir, solo escribe y revoluciona con su obra "Los principios", devela cómo la masa interactúa con la inercia, la masa y la aceleración, define la gravedad como fuerza a distancia y consiguiendo avances establece las leyes que determinan el movimiento.

Pero tenía una personalidad frágil o mandaba o se enfadaba, su susceptibilidad a la crítica fue cuestionada. Al observar los Principia escritos en 18 meses, completa la búsqueda de Galileo y aunque Newton trabajó relativamente poco con ecuaciones diferenciales en sí, su desarrollo del cálculo y la dilucidación de los principios básicos de la mecánica constituyeron la base para sus aplicaciones en el siglo XVIII, más notablemente por Euler. Newton clasificó las ecuaciones diferenciales de primer orden en las formas

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \frac{dy}{dx} &= f(y) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x,y). \end{aligned}$$

Para la última ecuación desarrolló un método de solución mediante series infinitas cuando $f(x,y)$ es un polinomio en $x$ y $y$. La activa investigación de Newton en la matemática cesó a principios de 1690, excepto por la solución de "problemas desafiantes" ocasionales y la revisión y publicación de resultados obtenidos mucho tiempo antes.

El término aequatio differentialis, por primera vez fue utilizado en 1676, pero es en una memoria de seis páginas de Leibniz, en el Acta Eruditorium de 1684, que aparece el cálculo con una definición de la diferencial y donde dio reglas sencillas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces. Leibniz incluyó también pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos; este matemático y filósofo nació en Leipzig y concluyó su doctorado en filosofía a los 20 años de edad en la Universidad de Altdorf, llegó a los resultados fundamentales del cálculo de manera independiente; Leibniz estaba muy consciente de la conveniencia de una buena notación matemática y la notación actual para la derivada $(dy/dx)$ y el símbolo de la integral se deben a él. Descubrió el método de separación de variables en 1691, la reducción de ecuaciones homogéneas a ecuaciones separables en el mismo año, y el procedimiento para resolver ecuaciones lineales de primer orden en 1694.

Es importante destacar que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) surgen prácticamente con la aparición del Cálculo. En la célebre polémica Newton-Leibniz se tiene un gran hito cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:

$$6\ a\ cc\ ae\ 13e\ ff\ 7i\ el\ 9n\ 4o\ 4q\ rr\ 4s\ 9t\ 12\ v\ x.$$

El cual en latín quiere decir "Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et veceversa", o bien: "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". Este fue, como señala Arnold (1994), el descubrimiento fundamental de Newton, que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa: "Es útil resolver ecuaciones diferenciales". Curiosamente, Ince afirma que la fecha de aparición de estas es el 11 de Noviembre de 1675, cuando Leibniz escribió la ecuación $ydy = \frac{y^2}{2}$. La primera clasificación de las EDO de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxiales) fue propuesta por Newton. El primer tipo estaba compuesto de aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones $x'$, $y'$, $y$ un fluente $x$ o $y$ están relacionados, como por ejemplo $\frac{x'}{y'} = f(x)$ ó $\frac{x'}{y'} = f(y)$, o bien $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$; el segundo tipo abarcaba aquellas ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes $\frac{x'}{y'} = f(x)^2$, y finalmente, el tercer tipo abarcaba a ecuaciones que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la Teoría de Fluxiones, Newton resuelve dos problemas principales, formulados tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. Determinación de la velocidad del movimiento en un momento de tiempo dado. De otro modo: determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes.

2. Dada la velocidad del movimiento, determinación del espacio recorrido en un tiempo dado. En términos matemáticos: determinación de la relación entre los fluentes dada la relación entre fluxiones.

El primer problema, llamado problema directo, representa el problema de la diferenciaciń implícita de funciones, en el caso general, y obtención de la ecuación diferencial que expresa las leyes del fenómeno. El segundo, el problema inverso, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este problema se trata de la búsqueda de las funciones primitivas. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimientos de su resolución se construyeron paulatinamente. Ante todo, la simple inversión de los resultados de la búsqueda de fluxiones le proporcionó una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo, advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operacón de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas como $Mx' + Ny' = 0$, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no se obtenía la función original. Newton advirtió esto, en el caso en que $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$ fueran funciones racionales enteras. Cuando la inversión inmediata del método directo no conducía al éxito, Newton acudió al desarrollo de funciones en series de potencias como medio universal de la teoría de las fluxiones. Resolvió ecuaciones dadas, por ejemplo, respecto a $\frac{y'}{x'}$ o (poniendo $x = 1$) respecto a $y$, desarrolló la función del miembro derecho en series de potencias, integrando a continuación la serie término a término. Este método lo comunicó mediante otro anagrama, el cual dice lo siguiente: “El primer método consiste en la extracción de una cantidad fluente de la ecuación que contiene su fluxión; el segundo en cambio consiste en la sustitución de una serie en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de la cual pueden deducirse las otras, y en comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante para obtener los términos de la serie supuesta”. Los hermanos Bernoulli, contribuyeron también al desarrollo de métodos para resolver ecuaciones diferenciales y a la expansión de su gama de aplicaciones; Jackob (1654-1705), teólogo, profesor en Basilea y, Johann (1667-1748) Bernoulli, médico, profesor en Groningen. Johann fue quien instruyó a L'H'opital, quién a su vez, preparó a Huygens. El mismo Johann, entre 1691-1692, preparó dos libros, uno de cálculo integral publicado en 1742, y otro de cálculo diferencial, casi doscientos años después. Los matemáticos de la época buscaban resolver ecuaciones de primer orden en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, reducían el problema a la búsqueda de funciones primitivas, tendiendo a separar variables. Los Bernoulli introducen el término “integrar una ecuación diferencial” y “separación de variables”; el uso de factores integrantes fue utilizado también por Cauchy, Leibniz y después por Johann Bernoulli, quien utiliza sustituciones de la forma $y = ux$ para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas; partiendo de allí Leibniz en 1693 continúa su obra. Jackob resolvió la ecuación diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ en 1690 y es en 1694, que Johann pudo resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$, determina además el factor $x^x$ para la ecuación lineal. Jackob también hace aportes a la mecánica, geometría, astronomía, probabilidad, cálculo de variaciones y problemas de la braquistócrona y Johann en 1697 plantea otras sustituciones como $v = y^{1-n}$ para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + aP(x)y = bQ(x)y^n.$$

El teorema de Bernoulli fue propuesto por Jackob, en 1695, pero resuelto de modo independiente por Leibniz y su hermano Johann; éste resuelve también problemas de cadena colgante (catenaria) trayectorias ortogonales en 1698, mecánica, el problema tautócrono; propuso y resolvió el problema de la baquistrócona (también resuelto por su hermano Jackob). En 1692 Johann encontró la multiplicación por factor integrante para ecuaciones como $axdy - ydx = 0$. Daniel Bernoulli (1700-1782), hijo de Johann, emigró en su juventud a San Petersburgo. Utiliza el factor integrante para resolver ecuaciones de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Se interesaba principalmente en las ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones. Por ejemplo, es su nombre el que se asocia con el principio de Bernoulli en mecánica de fluidos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. También fue el primero en encontrar las funciones que, un siglo más tarde, se conocerían como las funciones de Bessel. Otros matemáticos destacados en este siglo (fines del XVII y comienzos del XVIII) son el inglés Brook Taylor (1685-1731) quien hace aportes al análisis matemático; el método de series de Taylor, soluciones singulares, vibraciones de resortes, movimiento de proyectiles, óptica. Por su parte, Hoene Wronski, matemático polaco, (1778-1853) estudia las determinantes, e introduce el wronskiano. Y Jacobi Riccati (1676-1754), matemático italiano que consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$ o la ecuación no lineal que lleva su nombre, soluciones a través de series de potencias, como $xy' = y^2$, descubre el método Hamilton-Jacobi, que permite integrar un sistema de ecuaciones canónicas de Hamilton por medio de una integral completa de una ecuación en derivadas parciales de primer orden; Ricatti extendió el método de Charpit-Lagrange a dimensiones superiores a dos, resolviendo ecuaciones donde aparecen jacobianos.

La segunda etapa (1728) de la historia de las ecuaciones diferenciales estuvo dominada por el matemático Leonhard Euler (1707-1783), quien identificó la condición para la exactitud de las ecuaciones diferenciales de primer orden entre 1734-1735, desarrolló la teoría de los factores de integración, dio la solución general de las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes y, entre 1750-1751 extendió estos resultados a las ecuaciones no homogéneas. Euler hizo uso frecuente de series de potencias y métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. En este siglo, un italiano, físico, matemático y astrónomo, nervioso y tímido, preferido por el Rey en Berlín, evitaba la controversia y dio crédito a otros, de sus obras. Este matemático fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), quien demostró en 1762-1765 que la solucń general de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden es una combinación lineal de soluciones independientes. Más tarde, en 1774-1775, realizó un desarrollo completo del método de variación de parámetros. Lagrange transforma la ecuación en derivadas parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, obtiene los multiplicadores de Lagrange, y en el cálculo de variaciones, encuentra la relación funcional $y = f(x)$ para que una integral $\int_a^b g(x, y, y')dx$ tome un valor máximo o mínimo; por ejemplo en isoperimetrías o problemas de descenso más rápido, estudia la teoría de propagación del sonido, descubre un error de Newton y obtiene la ecuación diferencial general del movimiento, resolviéndola para el movimiento en línea recta, hace entonces aportes a la mecánica analítica con ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, realiza publicaciones sobre mecánica de sólidos y fluidos, serie infinita, puntos de Lagrange donde se han encontrado asteroides troyanos y satélites troyanos de Saturno. Para Lagrange la matemática era un arte que justificaba su existencia. En la misma época, Pierre-Simón de Laplace (1749-1827) obtiene la ecuación de Laplace, fundamental en muchas ramas de la física matemática como hidrodinámica, elasticidad y electromagnetismo, y Laplace la estudió de manera extensa con relación a la atracción gravitacional. La transformada de Laplace también se llama así en su honor, aunque su utilidad para resolver ecuaciones diferenciales no fue reconocida sino hasta mucho tiempo después. Para Laplace la naturaleza era esencial y la matemática solo una herramienta. Monge (1746- 1818), inventor de la geometría descriptiva, contribuye con la visión geométrica que da a las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden mediante el método de la ecuación característica; introdujo transformaciones de contacto para reducir ecuaciones a otras cuya solución sea conocida, observó además que ecuaciones de la forma $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ pueden resolverse si se obtiene como soluciones de variedades de orden inferior (como curvas), estas se generalizaron después por Pfaff y se aplican en termodinámica o mecánica clásica, por lo cual fueron estudiadas después por Grassmann, Frobenius (establece cuándo un sistema general de ecuaciones de Pfaff admite factores integrantes), Lie, Darboux, y Caran. Hacia finales del siglo XVIII, siglo de integración elemental, se habían desarrollado muchos métodos elementales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En el siglo XIX, el interés se volvió más hacia la investigación de cuestiones teóricas de existencia y unicidad y el desarrollo de métodos menos elementales, como los basados en desarrollos en series de potencias. De esta manera, Friedrich

Wilhelm Bessel (1784-1846), alemán, hace aportes en astronomía, calculó la órbita del cometa Halley; introdujo las funciones de Bessel y en 1817 estudió el trabajo de Kepler. De otra parte, el ruso Pafnuti Liwovich Chebyshev (1821-1894) trabaja en teoría de números (números primos), probabilidad, funciones ortogonales, polinomios de Chebyshev. El francés Alexis Claude Clairaut (1713-1765) hace aportes a la geometría, establece la ecuación de Clairaut y soluciones singulares (1734); Clairaut también trabajó en astronomía, en el problema de los tres cuerpos (imposibilidad de encontrar ecuaciones de las trayectorias, inestabilidad del sistema), calculó con precisión (1759) el perihelio del cometa Halley. Así mismo, el francés, Jean D'Alembert (1717-1783) hace aportes a la mecánica incluyendo el problema de la cuerda vibrante aplicado a la música, dinámica de fluidos, y ecuaciones diferenciales parciales, publicó tratados de dinámica, equilibrio y movimiento de los fluidos, trabajó en el teorema fundamental del álgebra o principio de D'Alembert. Fourier con su trabajo de difusión del calor (1768-1830), obtiene la ecuación del calor con distintas condiciones de contorno, desarrollando el método de variables separables y representa soluciones en series trigonométricas, prueba la convergencia de sus series correspondientes a funciones periódicas, hoy día formuladas por teoría de distribuciones. El primer resultado en estas series fue obtenido por Dirichlet en 1829, $t = k\left(\frac{\partial 2y}{\partial 2x} + \frac{\partial y}{\partial y^2} + \frac{\partial y}{\partial z2}\right)$ , Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), alemán, hace aportes además en teoría de números, mecánica de fluidos, análisis matemático; estableció las condiciones para la convergencia de las series de Fourier. El príncipe de las matemáticas, nace también en esta época, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), y su influencia en ecuaciones diferenciales es mínima e indirecta, estudió ecuaciones hipergeométricas y funciones elípticas e hizo estudios en geometría diferencial o variable compleja, su teorema de la divergencia es fundamental para la teoría del potencial y la física.

La etapa siguiente (1820) fue una etapa de formalización o edad del rigor, y en ella, hay dos personajes importantes Niels Henrik Abel (1802-1829), quien hizo aportes en ecuaciones integrales, funciones elípticas, y al álgebra (probó que las ecuaciones polinómicas de quinto grado no tienen soluciones exactas) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés pionero en el análisis matemático, hace aportes en cálculo de probabilidades, cálculo de variaciones, óptica, astronomía, mecánica, elasticidad, ecuaciones diferenciales, series infinitas, determinantes, probabilidad y física matemática Para Cauchy no todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que una serie converge o sea hacia la función deseada. Estudió los métodos que permiten probar la existencia de soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$;$y(x_0) = y_0$ que se denomina problema de Cauchy, adaptando el método del polígono de Euler. Creó la teoría de la variable compleja (1820) y aplicó su teoría a las ecuaciones diferenciales. Durante los años 1839 y 1842 el método más utilizado es la analítica, aplicado en campo complejo. En 1842 Cauchy aplica el método de la mayorante en ecuaciones diferenciales parciales, denominándose teorema de Cauchy-Kovaleskaya, extiende el teorema de existencia a ecuaciones de orden superior, ecuaciones ordinarias y ecuaciones de primer orden en el plano complejo, trabajo que realiza junto a la matemática rusa Sofia Kovaleskaya (1850-1891), obtiene resultados en ecuaciones con datos en forma normal sobre una superficie no característica, presentó un ejemplo de una ecuación que no cumple hipótesis del teorema y no posee solución analítica alguna; los métodos utilizados proporcionaron algoritmos para obtener aproximaciones de la solución con el grado de exactitud para servir de fundamento en procesos de integración numérica. A Cauchy se debe la memoria sobre la propagación de ondas ópticas en 1815, relaciona la variable compleja y las ecuaciones diferenciales, manifiestos en estudios llevados a cabo por Fuchs, Kummer, Riemann, Painlevé, Klein, Poincaré, Hilbert, sobre puntos singulares de soluciones de ecuaciones diferenciales. Los hallazgos de Cauchy permitieron en 1854 que Briot y Bouquet simplificaran la demostración de Cauchy y analizaran el caso en $f(x, y)$ singular en un punto del plano complejo, comprobando que el radio de convergencia es el máximo posible hasta que se alcanza la singularidad. El que la solución no sea única contradijo la idea de Laplace y se utiliza la aleatoriedad en el contexto de las ecuaciones diferenciales.

Importantes matemáticos franceses hacen aportes a las ecuaciones diferenciales en este siglo (XIX), por ejemplo, Charles Émile Picard (1856-1941) generó el método de Picard y teoremas de existencia-unicidad para ecuaciones diferenciales, trató las aproximaciones sucesivas e impulsó las condiciones de Lipschitz, hace además aportes a la geometría algebráica, topología, variable compleja. Vallé Poussin asoció a la ecuación diferencial la suma superior y la suma inferior, método que admite alguna discontinuidad de la función $f$ importante en control. Jules Henri Poincaré (1858-1912) hace aportes a las ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad; topología, mecánica celeste incluyendo el problema de los 3 cuerpos, geometría no euclideana, filosofía de la ciencia. Simeón Denis Poisson (1781-1840) fue un físico matemático que hace aportes a la electricidad y el magnetismo, su ecuación de Poisson, fórmula de Poisson, probabilidad, cálculo de variaciones y astronomía. El alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, Jacobi y Dirichlet, obtuvo la solución general de la ecuación hiperbólica no lineal de segundo orden de dos variables, reduciéndola a una ecuación lineal de segundo orden, resultado utilizado en dinámica de gases, estudió soluciones discontinuas para estas ecuaciones y trató de resolver problemas de onda de choque pero no llegó a la solución correcta porque supuso que la entropía era constante a lo largo de la discontinuidad. Variable compleja, geometría no euclidiana, funciones elípticas, ecuaciones diferenciales parciales. Olinde Rodrigues, matemático francés, (1794-1851) hace aportes al análisis matemático, en su tesis sobre atracción de los esferoides expone la fórmula de Rodrigues y el movimiento de rotación de un cuerpo de revolución pesada. El alemán Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) estudia el cálculo de variaciones, teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales parciales, desigualdad del suizo Jacques Charles; François Sturm hace aportes al álgebra (número de raíces reales de ecuaciones algebraicas), geometría, mecánica de fluídos, acústica, problemas de Sturm-Liouville, trabaja problemas de contorno de geometría diferencial. Dos siglos después de Galileo, otro arrogante probaría que las leyes de Newton no se cumplen. Einstein nace en 1879, judío de clase media, callado, introvertido, perseverante, tardó en empezar a hablar, le gustaban los rompecabezas; a los 9 años construye una torre de cartas de 14 pisos, se burlaban de él, vivía aislado en el mundo de las ideas, era capaz de ver en una imagen físicamente lo que los demás no podían ver, era distraído, egoísta, confesado como desastre en la esfera emocional, a los 16 años se pregunta qué pasaría si la velocidad corriera a la velocidad de una onda de luz, la luz parecería estar quieta?, imaginaba mundos que no existían, veía lo que los demás no podían ver. A sus 17 años le admiten en la Eidgenössische Technische Hochschule (ETH), perspicaz, rebelde con sentido del humor, físico teórico, aprueba exámenes y se gradúa con notas normales; le negaban el ingreso como docente de la universidad, dado que Heinrich Weber, su profesor, profesaba antipatía por él, le escribía recomendaciones que no le permitían ingresar como catedrático. Emite una tesis sobre teoría cinética de los gases a Zurich para obtener su título de Doctor, pero no obtiene respuesta. Dos años después logró ingresar como empleado en una oficina de patentes en Berna; casado con la física Mileva, dado su trabajo sin esfuerzo, se dedica a analizar la naturaleza de la vida, investiga sobre cómo usar el movimiento browniano para medir el tamaño de los átomos; para Newton, la velocidad de un rayo de luz debería ser más lenta que alguien corriendo. Einstein sostenía que un rayo de luz se aparta de ti a la velocidad de la luz, y para él no es posible que se alcance un rayo de luz, por mucho que aceleres, el rayo de luz seguirá apartándose de ti a la misma velocidad; cuestiona supuestos, si la velocidad de la luz nunca cambia entonces debe haber algo más, entonces deduce que el tiempo es relativo, depende de la velocidad a la cual te mueves, descubre que cuando los cuerpos viajan a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, el sentido común no funciona, las distancias se alargan y el reloj avanza lentamente. “Newton perdóname”, escribe a los 26 años, nace la teoría de la relatividad con preguntas e imágenes sencillas, cambiando la visión del mundo. En 1907 aborda nuevos retos pero se encierra en sí mismo, no le afectaban las normas y en 1914 separado se casa con su prima Elsa, y a sus 35 años persigue como objetivo comprobar aquello que su intuición le dice, piensa que debe haber una teoría de la relatividad que explique la fuerza de la gravedad; se sumerge en la matemática, sufre depresión nerviosa, no comía perdiendo demasiado peso; en 1915 demuestra matemáticamente que la masa y la energía curvan el espacio-tiempo, un cuerpo inmenso como el sol deforma el espacio-tiempo, que un planeta cercano deforma una trayectoria curva, para Newton se atraen pero un planeta cercano se mueve alrededor a través de una trayectoria curva, fue ilusión la atracción por una misma fuerza., los cuerpos que parecen atraídos por una fuerza gravitatoria están realmente viajando por un espacio deformado, cambia entonces la idea del espacio-tiempo. Llega a ecuaciones que rigen la curvatura espacio-tiempo, unas simples líneas describen el movimiento de las galaxias; el movimiento de los cuerpos celestes se resume en una ecuación de cinco centímetros, siendo impresionante. A los 40 años completa su obra. En 1918 Constantin Carathéodory (1873–1950), utilizó la integral de Lebesgue; Lipschitz fue el primero en abordar los criterios de unicidad, Jordan los simplificó y Perón con su método en 1926 unificó y mejoró los métodos anteriores. Carathéodory realizó importantes contribuciones a la teoría de funciones de una variable real, al cálculo de variaciones y a la teoría de la medida, el teorema de existencia que lleva su nombre trata sobre la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, en teoría de la medida, el teorema de extensión de Carathéodory es fundamental en teoría moderna de conjuntos. En teoría de funciones de variable compleja, demostró un teorema sobre la extensión de una aplicación conforme a la frontera de un dominio de Jordan: este estudio motivó el inició de la teoría de compactificaciones por finales primos. Se le atribuye la autoría de la conjetura de Carathéodory, que afirma que una superficie cerrada y convexa admite al menos dos puntos umbilicales. La formulación del concepto de independencia lineal de un sistema de funciones, en términos del determinante llamado wronskiano fue introducido por Wronski (1775-1853), y utilizado como herramienta dentro de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales. Galileo aplicó las matemáticas al movimiento, Newton las perfeccionó en la cotidianidad, pero Einstein descubrió las leyes que rigen el espacio-tiempo. Al lado de estos genios se tiene que mencionar a Stephen Hawking (fallecido el 14 de marzo de 2018 en Cambridge –RU-), quien ocupó el puesto en esta ciudad que tuvo Newton y trabajó en la teoría de la relatividad de Einstein; admirador de Galileo, nace en 1942 en Oxford (Inglaterra), fascinado por cómo funcionan las cosas, Hawking no estudia, confía en la facilidad que tiene en las matemáticas, sale con amigos, no era aplicado, pero si aburrido y apático, para él no valía la pena esforzarse por nada; pero en 1962 inicia estudios de Cosmología en Cambridge, pero los síntomas de su enfermedad empiezan a aparecer, padece esclerosis lateral amiotrófica, se le atrofian las neuronas que controlan el movimiento, se deprime, soñó que le ejecutarían y se propone hacer cosas si no muere; trabaja gustoso en 1970 como Cosmólogo; obstinado tiene hijos (tres) e intenta desarrollar la teoría de la relatividad de Einstein, predice el movimiento de cuerpos muy grandes como galaxias, pero no explica el comportamiento de las partículas subatómicas desde el campo de la teoría cuántica. Hawking se pregunta, ¿qué pasaría si observamos un agujero negro, una predicción extraña de Einstein y observamos las partículas diminutas? Una bola en el espacio a su alrededor se deforma tanto que la gravedad impide que se escape la luz, es como una membrana donde las cosas entran pero no pueden salir, intenta utilizar las ecuaciones de la teoría cuántica para analizar las partículas en los márgenes de los agujeros negros, descubre que éstos emiten pequeñas partículas llamadas radiación de Hopkins, los agujeros se desvanecen poco a poco como el agua en ebullición evaporándose lentamente; la relatividad y la teoría cuántica se combinan con éxito, los agujeros brillan como cuerpos incandescentes; su teoría explicaría el origen del universo. En los últimos años se ha desarrollado la mecánica no lineal a través de los estudios de Euler, Lagrange y otros geómetras, se amplía la gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en todas las ciencias y artes. Otra característica de las ecuaciones diferenciales en el siglo XX fue la creación de métodos geométricos o topológicos, en especial para ecuaciones no lineales. El objetivo es comprender al menos el comportamiento cualitativo de las soluciones desde un punto de vista geométrico y analítico. Entre los matemáticos del siglo XX se encuentra Edward Moore quien en 1908 estudia las ecuaciones con un número infinito de variables; la matemática Olga Arsenievna Oleinik (1925-2001) activa y entusiasta docente e investigadora, supervisó más de 50 tesis doctorales y lleva a cabo un trabajo pionero en teoría de ecuaciones en derivadas parciales, teoría de la elasticidad y teoría matemática de capas límite, estudia para analizar la variación de velocidades en la zona de contacto entre un fluido y un obstáculo que se encuentra en su seno o por el que se desplaza, donde la presencia de esta capa es debida principalmente a la existencia de la viscosidad, propiedad inherente de cualquier fluido. Mujtarbay Otelbáyev afirma haber encontrado una solución “satisfactoria y única”para la ecuación Navier-Stokes,

$$\frac{Dv_x}{Dt}i = \frac{\partial v_x}{\partial t}i + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}i + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}i + v_{\approx}\frac{\partial v_x}{\partial z}i.$$

$$\frac{Dv_y}{Dt}j = \frac{\partial v_y}{\partial t}j + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}j + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}j + v_{\approx}\frac{\partial v_y}{\partial z}j.$$

uno de los siete problemas 'del milenio'. El trabajo del kazajo queda a expensas de la comunidad científica que ahora debe determinar si ha encontrado correctamente la solución para el enigma. En caso de confirmarse, el estudio permitiría avanzar en muchos ámbitos de la física y de la ingeniería, como es el caso de la aeronáutica. Aunque constituyen un tema antiguo del que se sabe mucho, en el siglo XXI las ecuaciones diferenciales siguen siendo una fuente inagotable de problemas fascinantes y decisivos por resolver.

## 1.2. Una sencilla ecuación diferencial

*Tomado de: Acta de Mathematica. Bartolomé López Jiménez* "Va un coche por la carretera y encuentra una señal: "REDUZCA A 40 $km/h$ ". El conductor reduce a esa velocidad y continúa. Cuando lleva recorrido cierto trayecto, una nueva señal apunta: "REDUZCA A 30 $km/h$". El conductor reduce y continúa; al cabo de un rato otra señal anuncia: "REDUZCA A 10 $km/h$ ". El conductor reduce y continúa, y cuando ha recorrido un trayecto encuentra un cartel que informa: "BIENVENIDO A REDUZCA".

Bartolomé ya tenía suficiente formación como para plantearse un pequeño problema basado en este chiste. Supongamos que el coche va por la carretera a 100 kilómetros por hora y en un momento dado que está a 100 kilómetros de su destino. A partir de ese momento el conductor va reduciendo la velocidad de modo que sea igual (en kilómetros por hora) a la distancia (en kilómetros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: ¿cuánto tiempo tarda en llegar?. Aun conociendo la noción de derivada (o al menos conociendo la existencia de esta noción), yo tendía a resolver este tipo de problemas utilizando un concepto más primitivo: el de límite de una sucesión. Y de este modo usé la siguiente estrategia para resolver el problema. Se representa en un segmento la distancia de los 100 kilómetros y se divide el segmento en $n$ partes iguales; designo los puntos que dividen el segmento por $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ donde $a_1$ representa el punto que está a 100 kilómetros del destino $a_2$ el punto que está a $\dfrac{100(n-1)}{n}$ kilómetros, $a_3$ el punto que está a $\dfrac{100(n-2)}{n}$ kilómetros, y así sucesivamente hasta $a_{n+1}$, que es el punto de destino. Ahora se calcula el tiempo que tarda el coche en recorrer cada tramo, determinado por dos puntos consecutivos, $a_i$ y $a_{i+1}$, si lo recorre a una velocidad igual (en kilómetros por hora) a la distancia (en kilómetros) entre el punto $a_i$ y el destino (representado por el punto $a_{n+1}$); después se suman los tiempos recorridos en los $n$ tramos. Por ejemplo, si divido la distancia en 2 partes iguales, tengo 3 puntos, $a_1$, a 100 kilómetros del destino, $a_2$, a 50 kilómetros del destino, y $a_3$, que es el destino. El coche recorre el primer tramo a 100 kilómetros por hora, y el segundo a 50 por hora; el tiempo pues que tarda es 50/100=1/2 de hora para el primer tramo y $50/50 = 1$ hora para el segundo tramo; en total $(1/2) + 1$ horas.

Si divido la distancia en 3 partes iguales, tengo 4 puntos, $a_1$, a 100 kilómetros del destino, $a_2$ a $(2/3) \cdot 100$ kilómetros del destino, $a_3$, a $(1/3) \cdot 100$ kilómetros del destino, y $a_4$, que es el destino (Figura 1). El coche recorre el primer tramo a 100 kilómetros por hora, el segundo a $(2/3)\cdot$ 100 kilómetros por hora y el tercero a $(1/3) \cdot 100$ kilómetros por hora. El tiempo que tarda es $\frac{\frac{1}{3}*100}{100} = \frac{1}{3}$ de hora para recorrer el primer tramo, $\frac{\frac{1}{3}*100}{\frac{2}{3}*100} = \frac{1}{2}$ de hora para recorrer el segundo tramo, y $\frac{\frac{1}{3}*100}{\frac{1}{3}*100} = 1$ hora para el tercer tramo. El tiempo total es pues $(1/3) + (1/2) + 1$ horas. Si divido la distancia en $n$ partes iguales, como en los dos casos anteriores, puedo calcular el tiempo que tarda el coche en recorrer los 100 kilómetros; compruebo que este tiempo es

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{2} + 1$$

horas. En resumen, si se calcula el límite de esta expresión cuando $n$ tiende a infinito, tendrémos la respuesta al problema planteado. Pero...poco después de todas estas reflexiones empezaron a explicarme en la carrera las ecuaciones diferenciales. No fue inmediatamente cuando me di cuenta de que podía aplicar esta noción nueva para mí al problema anterior, pero no tardé mucho tiempo. No tenía muy presente la Física del bachillerato, pero recordaba al menos que la velocidad era la derivada del espacio con respecto al tiempo. El problema se reducía entonces a resolver la sencilla ecuación diferencial $x'(t) = 100 - x(t)$

donde $t$ es el tiempo y $x(t)$ el espacio recorrido por el coche en el instante $t$. Dado que suponemos que $x(0) = 0$, la solución de esta ecuación diferencial es $x(t) = 100(1 - e^{-t})$. Como se puede ver, una de las ventajas del cálculo diferencial es que da respuesta completa al problema, es decir, permite calcular el espacio que ha recorrido el coche en el instante $t$. Se observa además lo siguiente en la expresión de $x(t)$: para $t = 0$, $e^{-t} = 1$, y cuando $t$ crece, $e^{-t}$ decrece y se aproxima a 0. Por tanto el espacio que recorre el coche, a medida que el tiempo pasa, se aproxima a 100 kilómetros, es decir, el coche está cada vez más cerca del destino; sin embargo no llega nunca, porque $e^{-t} > 0$, aunque $t$ sea muy grande.

La frustración que quizá produzca el hecho de estar tan cerca del destino y no llegar nunca puede ser superada si se resuelve el siguiente problema. Supongamos que una persona va caminando por un sendero a una velocidad de 3 kilómetros por hora y en un momento dado está 9 kilómetros de su destino; a partir de ese momento el caminante va reduciendo su marcha de modo que su velocidad sea igual (en kilómetros por hora) a la raíz cuadrada de la distancia (en kilómetros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: ¿cuánto tiempo tarda en llegar?

## 1.3. Definición y clasificación de las ecuaciones diferenciales

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Las ecuaciones son un pilar clave y fundamental de la ciencia y la ingeniería que han permitido entender mejor el mundo que nos rodea. Algunas ecuaciones relevantes son, por ejemplo:

El teorema de Pitágoras, desarrollado por Pitágoras de Samos en el 530 a.C., su archiconocido teorema establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

La ley de gravitación universal es una ley física clásica que describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Ésta fue presentada por Isaac Newton en su libro Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, publicado en 1687, donde establece por primera vez una relación cuantitativa (deducida empíricamente de la observación) de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa. La ley de la Gravitación Universal predice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ separados una distancia $r$, es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

La segunda ley de la termodinámica, es una de las leyes más importantes de la física que, aun pudiéndose formular de muchas maneras, todas llevan a la explicación del concepto de irreversibilidad y al de entropía. Este último concepto, cuando es tratado por otras ramas de la física, sobre todo por la mecánica estadística y la teoría de la información, queda ligado al grado de desorden de la materia y la energía de un sistema. La segunda ley de la termodinámica dictamina que, si bien la materia y la energía no se pueden crear ni destruir, sí que se transforman, y establece el sentido en el que se produce dicha transformación. Sin embargo, el punto capital del segundo principio es que, como ocurre con toda la teoría termodinámica, se refiere única y exclusivamente a estados de equilibrio

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

La ecuación de onda es una importante ecuación lineal de segundo orden que describe la propagación de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua. Es importante en varios campos como la acústica, el electromagnetismo y la dinámica de fluidos. Históricamente, el problema de una cuerda vibrante como las que están en los instrumentos musicales fue estudiado por

Jean le Rond d'Alembert en 1746 por primera vez, seguido de Leonhard Euler en 1748, Daniel Bernoulli en 1753 y Joseph-Louis Lagrangeen 1759

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Como puede observarse, las dos últimas ecuaciones además de variables, muestran que existe variación de una variable respecto a la otra u otras, contienen entonces derivadas, razón por la cual se les denomina ecuaciones diferenciales.

**Definición 1.3.1.** ***(Ecuación diferencial)***
*Una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas de una función, de una o más variables. La ecuación se denomina ordinaria cuando las derivadas que aparecen en ella, corresponden a una función en una variable independiente $y(x)$.*

**Ejemplos 1.3.1.** *Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias*

1. $\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 5.$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 10.$
3. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - x\dfrac{dy}{dx} + 5y = n.$
4. $\frac{d^2x}{df^2} m = F.$
5. $\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \frac{d^2w}{dt} = 10.$

Son ecuaciones diferenciales ordinarias. En el ejemplo 1 aparece la primera derivada y la función $y(x)$; en el ejemplo 2 aparecen la primera y la segunda derivada de la función $y(x)$, además la función $y(x)$. El ejemplo 3 es similar al 2, sólo que la segunda derivada de $y(x)$ aparece elevada al cuadrado. En el ejemplo 4 aparece la segunda derivada de la funcón $x(t)$ con respecto a $t$. y finalmente en el ejemplo 5 se muestra la primera y segunda derivada de la función $w(t)$. De otra parte, la ecuación diferencial se denomina parcial, cuando las derivadas que aparecen, corresponden a una función de dos o más variables independientes.

**Ejemplos 1.3.2.** *Así por ejemplo, las ecuaciones:*

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xz\frac{\partial z}{\partial y} = 5y.$
2. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = ux.$
3. $\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)^3 + \dfrac{\partial^3 x}{\partial v^3} + 2 = \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial v \partial t}\right)^3,$

*son ecuaciones diferenciales parciales.*

En la primera ecuación de los Ejemplos 1.3.2 aparecen las primeras derivadas parciales en $x$ $y$ de la función $z(x, y)$ y en la segunda ecuación, aparecen la segunda derivada parcial cruzada de la función $u(x, y)$ con respecto a $x$ e $y$, elevada al cuadrado; y la primera derivada parcial de la ecuación $u(x, y)$ con respecto a $y$ elevado al cubo. En la tercera ecuación aparecen la primera, segunda y tercera derivada parcial de $X(t, v)$, con respecto a $t$ y $v$ respectivamente. El orden de una ecuación diferencial es determinado por el número de la derivada más alta que aparece en la ecuación y el grado es el exponente de la derivada que determina el orden.

**Ejemplos 1.3.3.** *Ecuaciones diferenciales.*

- $\frac{\partial y}{\partial x} + 4xy = 5$. *La ecuación diferencial es ordinaria de primer orden y primer grado* $EDO(1,1)$.
- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 10$. *La ecuación diferencial es ordinaria de segundo orden y primer grado* $EDO(2,1)$.
- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$. *La ecuación diferencial es ordinaria de segundo orden y segundo grado* $EDO(2,2)$.
- $\frac{\partial u}{\partial y} + 2xy\frac{\partial x}{\partial y} = 5y$. *La ecuación diferencial es parcial de primer orden y primer grado* $EDO(1,1)$.
- $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = ux$. *La ecuación diferencial es ordinaria de segundo orden y segundo grado* $EDO(2,2)$.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$. *La ecuación diferencial es ordinaria de primer orden y primer grado* $EDO(1,1)$.
- $u_t = 4u_{xx} - 3(u-1)$. *La ecuación diferencial es parcial de primer orden y primer grado* $EDO(1,1)$.

La Figura 1.1 muestra la diferentes formas de representación de una ecuación diferencial de orden $n$.

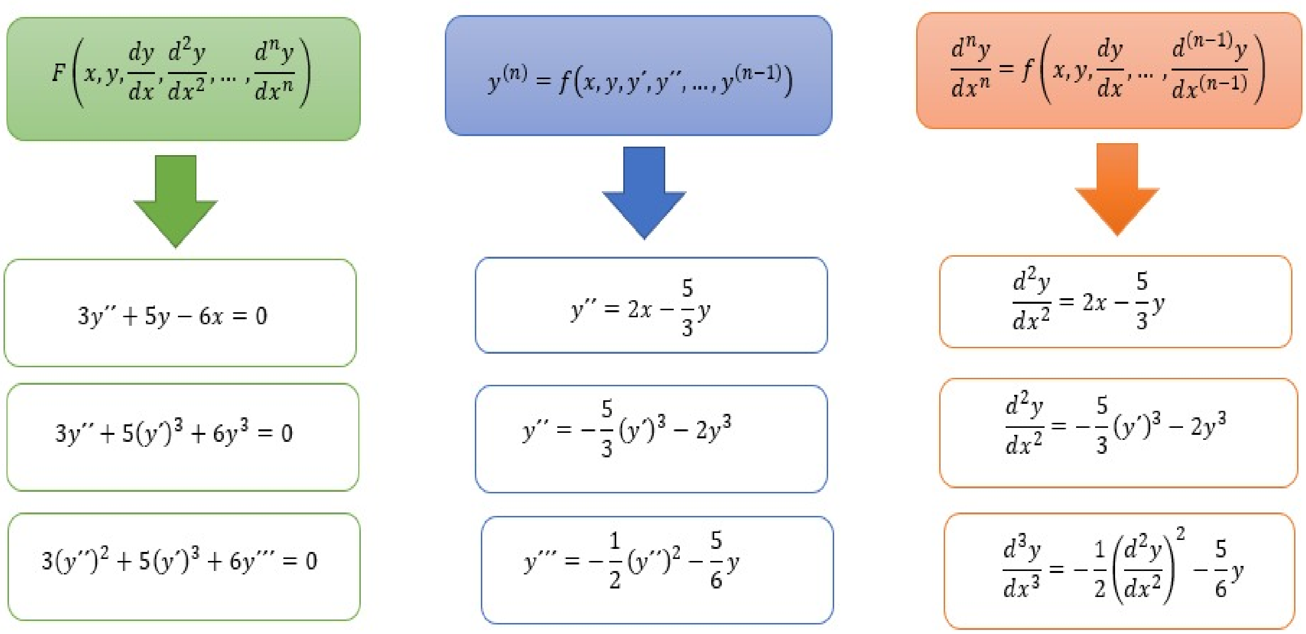



Figura 1.1: Ejemplo de formas de representar una ecuación diferencial.

## 1.4. Ecuaciones diferenciales según su linealidad

La ecuación diferencial $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ es una ecuación lineal de orden $n$ si $y, y', \dots, y^n$ son linealmente independientes. Cualquier ecuación diferencial que no sea de la siguiente forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \text{ con } a_n(x) \neq 0,$$

recibe el nombre de ecuación diferencial no lineal.

**Ejemplos 1.4.1.** *Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.*

1. $3x^2y^{'''} - 5xy^{''} + 6y^{'} - 7y = 0$, *ecuación diferencial lineal de orden 3.*
2. $4y^{''} - 5y^{'} + 6y = 0$, *ecuación diferencial lineal de orden 2.*
3. $(\cos x)y^{'} - 3y = 0$, *ecuación diferencial lineal de orden 1*
4. $-2y^{''} + 4y^{'} - 7y^2 = 0$, *no es una ecuación diferencial lineal*
5. $y^{'} + 3y^{'} + 5e^{x+y} = 0$, *no es una ecuación diferencial lineal*
6. $y^{'} + 3y^{'} + 5e^{x+\ln y} = 0$, *ecuación diferencial lineal de orden 1*
7. $y^{'} = \operatorname{sen}(x+y)$, *no es una ecuación diferencial lineal.*

## 1.5. Solución de una ecuación diferencial

Se dice que la función $\phi$ definida en el intervalo $I$ es solución de la ecuación $F\left(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, si al reemplazar $\phi, \phi^{'}, \ldots, \phi^{(n)}$ en la ecuación diferencial, esta se reduce a la identidad, es decir que:

$$F\left(x, \phi, \phi^{'}, \ldots, \phi^{(n)}\right) = 0$$

Obsérvese que

a) La función $\phi$ está definida en un intervalo $I$.

b) La función $\phi$ es $n$ veces diferenciable.

La función $y = xe^x$ es solución de la ecuación diferencial $y^{''} - 2y + y = 0$ en el intervalo I= $(-\infty, \infty)$. ¿Cómo se comprueba si es solución? Dado que la ecuación es de orden 2, se deriva dos veces y se reemplaza la solución en la ecuación, es decir, para $y = xe^x$ se tiene que $y^{'} = e^x + xe^x = e^x(1+x)$, $y^{''} = e^x + 1e^x + xe^x$ y $y^{''} = e^x(2+x)$. Reemplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned}
y'' - 2y' + y &= e^x(x+2) - 2e^x(x+1) + xe^x \\
&= e^x((x+2) - 2(x+1) + x) \\
&= e^x(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Ejemplos 1.5.1.** *Verificación de solución de ecuación diferencial*

1. *Demostrar que*

$$y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}, \tag{1.1}$$

*es la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0, \tag{1.2}$$

*en donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias. Para llevar a cabo la demostración, se deriva dos veces la función $y$ se reemplaza en la ecuación diferencial para verificar una igualdad. Entonces, si $y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$, se sigue que:*

$$\frac{dy}{dx} = c_1ke^{kx} - c_2ke^{-kx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2} = c_1k^2e^{kx} + c_2k^2e^{-kx}. \tag{1.3}$$

*Reemplazando $y(x)$ definido en (1.1) y $d^2y/dx^2$ definido en (1.3) en la equación (1.2) se verifica*

$$c_1k^2e^{kx} + c_2k^2e^{-kx} - k^2\left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right) = 0.$$

2. *La función* $y = \dfrac{c_1e^x}{1+c_1e^x}$ *es solución de la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ *ya que si derivamos la solución con respecto a* $x$*, Que reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene:*
$$c_1k^2e^{kx} + c_2k^2e^{-kx} - k^2(c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}) = 0,$$
*se tiene*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1e^x(1+c_1e^x) - c_1e^x(c_1e^x)}{[1+c_1e^x]^2},$$
*es decir,*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1e^x + c_1^2e^{2x} - c_1^2e^{2x}}{[1+c_1e^x]^2} = \frac{c_1e^x}{(1+c_1e^x)^2}.$$
*Remplazando el valor de la función* $y$ *y su primera derivada en la ecuación diferencial se tiene*
$$\frac{c_1e^x}{(1+c_1e^x)^2} = \frac{c_1e^x}{1+c_1e^x}\left[1 + \frac{c_1e^x}{1+c_1e^x}\right].$$
*Efectuando operaciones dentro del paréntesis se tiene*
$$\frac{c_1e^x}{(1+c_1e^x)^2} = \frac{c_1e^x[1+c_1e^x - c_1e^x]}{(1+c_1e^x)^2},$$
*simplificando llegamos a la igualdad*
$$\frac{c_1e^x}{(1+c_1e^x)^2} = \frac{c_1e^x}{(1+c_1e^x)^2}.$$
*Así* $y = \dfrac{c_1e^x}{1+c_1e^x}$ *es la solución de la ecuación diferencial dada en* $(-\infty, \infty)$.

3. *Si* $y = e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}dx + c_1e^{-t}$ *es solución de la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dt} + 2ty = 1$*, entonces reemplazando la función* $y(t)$ *y su primera derivada* $y^{'}(t) = \frac{dy}{dt}$ *en la ecuación diferencial debemos llegar a una identidad. En efecto, derivemos* $y(t)$*, es decir* $y = e^{-t^2}\left[\int_0^t e^{x^2}dx + c_1\right]$ *derivando respecto a* $t$ *se tiene,*
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[e^{-t^2}\left(\int_0^t e^{x^2}dx + c_1\right)\right].$$
*Aplicando la regla del producto se tiene*
$$\frac{dy}{dt} = -2te^{-t^2}\left(\int_0^t e^{x^2}dx + c\right) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{x^2}dx + c_1\right)e^{-t^2},$$
*es decir*
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= e^{-t^2}\left[-2t\int_0^t e^{x^2}dx + 2tc_1 + e^{t^2}\right]\\ &= e^{-t^2}\left[-2t\int_0^t e^{x^2}dx + e^{t^2} - 2tc_1\right].\end{aligned}$$
*Remplazando en la ecuación diferencial se tiene*
$$\begin{aligned}&e^{-t^2}\left[-2t\int_0^t e^{x^2}dx + e^{t^2} - 2tc_1\right] + 2t\left[e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}dx + c_1e^{-t^2}\right] =\\ &\quad -2te^{-t^2}\int_0^t x^2dx + e^{t^2}e^{-t^2} - 2tc_1e^{-t^2} + 2te^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}dx + c_1e^{-t^2}2t =\\ &\quad e^0 - 2tc_1e^{-t^2} + e^0 - 2tc_1e^{-t^2} = 1.\end{aligned}$$
*Lo cual da por hecho que la función* $y = e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}dx + c_1e^{-t}$ *es solución de la ecuación diferencial dada.*

**Teorema 1.5.1.** *Si $b$ es un número real dado, existe una y solo una función $f(x)$ que satisface la ecuación diferencial $y'(x) - y(x) = 0$, para todo $x$ real, y, además satisface la condición $y(0) = b$. Esta función viene por $f(x) = be^x$ para todo $x$ real.*

*Demostración.* Comprobaremos que la función $f$ así definida satisface las condiciones del teorema, es decir, $y'(x) - y(x) = 0$, y, $y(0) = b$. En efecto, como $f(x) = be^x$, luego $f'(x) = be^x$, entonces $f'(x) - f(x) = be^x - be^x = 0$ para todo $x$ real, además $f(0) = be^0 = b{,}1 = b$. Entonces $f(x) = be^x$ satisface la ecuación diferencial y la condición dada, probemos que esta función es única, sea $g$ una función que verifica $g'(x) - g(x) = 0$, y; $g(0) = b$; definimos: $h(x) = g(x)e^{-x}$ para todo $x$ real, luego $h$ es diferenciable en R. Entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} \\ &= e^{-x}[g'(x) - g(x)] \\ &= e^{-x}{,}0 = 0, \text{ para todo } \ x \in R. \end{aligned}$$

Luego $h$ es una función constante, y, $h(x) = h(0) = g(0)e^{-0} = b$ para todo $x$ real, luego, $h(x) = g(x)e^{-x} = b$, o sea $g(x) = be^x$ para todo $x$ real, a donde deseábamos llegar. □

**Teorema 1.5.2** (Teorema de existencia y unicidad)**.** *Sea $R$ una región rectangular del plano $xy$ definida por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ que contiene al punto $(x_0, y_0)$ en su interior. Si $f(x, y)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\mathbb{R}$, entonces existe un intervalo $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$ contenido en $a \leq x \leq b$ y una función única $y(x)$ definida en $I_0$ que es una solución del problema de valor inicial*

$$y' = f(x.y), \quad y(x_0) = y_0.$$

*Un problema de valor inicial tiene más de una solución. Si la ecuación diferencial satisface algunas condiciones donde $x = x_0$ y $y = y_0$, la solución es única.*

**Ejemplos 1.5.2.** *Determine si el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la unicidad de la solución en los siguientes problemas de valores iniciales*

1.
$$y' = y, \ \ y(0) = 0.$$
*En este caso $f(x, y) = y$, lo cual implica que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ y $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Observemos que tanto $f(x, y)$ como $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, dado que $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$,* ***el teorema de existencia y unicidad*** *garantiza la existencia de una única solución del problema de valor inicial $y' = y, y(0) = 0$ en el intervalo $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

2.
$$y' = y^{\frac{1}{2}}, \ \ y(0) = 0.$$
*En este caso $f(x, y) = y^{\dfrac{1}{2}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ y $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Observemos que tanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y > 0\right\}$ como $(0, 0) \notin \mathbb{R}$ dado que el* ***Teorema de existencia y Unicidad*** *no garantiza la existencia de una única solución del problema.*

3.
$$y' = y^{\frac{1}{2}}, \ y(1) = 0. \tag{1.4}$$
*En este caso $f(x, y) = y^{\frac{1}{2}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ y $(x_0, y_0) = (1, 0)$ Observemos que tanto $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ como $(1, 0) \notin \mathbb{R}$ dado que el* ***Teorema de Existencia y Unicidad*** *no garantiza la existencia de una única solución del problema.*

### 1.5.1. Solución de ecuaciones diferenciales por anti-derivada

Se quiere encontrar una función en una variable independiente $y(x)$ tal que su segunda derivada sea la constante 10. En otras palabras hallar la solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$. Es claro que el estudiante puede resolver este ejercicio, buscando qué función al derivarla dos veces su resultado es 10, luego la primer derivada será $10x + A$ y al buscar que función da esta derivada llega a $5x^2 + Ax + B$ ó integra dos veces. Es decir, la ecuación anterior se puede reescribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = 10dx.$$

Para obtener el diferencial del lado izquierdo integramos miembro a miembro, así

$$\int \frac{dy}{dx} = \int 10dx,$$

cuya solución es

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 10x + c,$$

la constante de integración $c$, se añade por aquello de la integración indefinida. La última ecuación es otra ecuación diferencial, que se puede reescribir como

$$dy = (10x + c_1)dx.$$

Integrando de nuevo, miembro a miembro se obtiene

$$\int dy = \int (10x + c_1)dx,$$

de donde $y = 5x^2 + c_1x + c_2$ es solución general de la ecuación dada. La solución general se dice que es una familia de curvas solución de la ecuación, ya que al darle valores a las constantes, se obtienen distintas curvas. ¿Cuántas soluciones se obtienen si se dan condiciones iniciales?

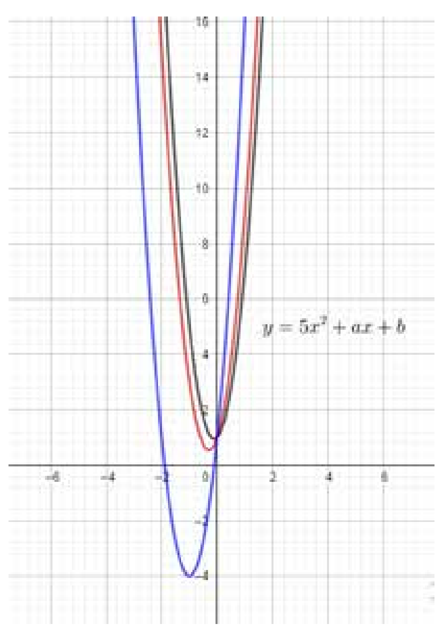



Figura 1.2: Gráfica de la función $y(x) = 5x^2 + c_1x + c_2$ para diferentes valores de $c_1$ y $c_2$.

**Ejemplos 1.5.3.** *Calcular la anti-derivada, es decir, solucione la ecuación diferencial.*

1. *Dada*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$
*se procede a encontrar la solución aplicando las técnicas para encontrar integrales, es decir*
$$dy = \frac{dx}{1+x^2},$$
*luego*
$$y(x9 = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctang(x) + c,$$
*donde $c$ es una constante de integración arbitraria.*

2. *Dada*
$$\frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} x\, dx,$$
*multiplicando esta expresión por $dx$, se tiene $dy = x^2 \sin x dx$ resulta ser, $\int x^2 \sin x dx$, así aplicando la integración por partes se tiene*
$$u = x^2,\, dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad du = 2x\, dx,\, v = -\cos x,$$
*es decir*
$$y = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx,$$
*nuevamente aplicando la integración por partes se tiene:*
$$u = x,\, dv = dx \quad dv = \cos x\, dx,$$
*es decir*
$$v = \operatorname{sen} x.$$
*Así*
$$y = -x^2 \cos x + 2 \left( x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x,\, dx \right) + c.$$
*Finalmente, la solución de la ecuación diferencial dada es*
$$y = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c.$$

### 1.5.2. Solución particular de una ecuación diferencial

Para la ecuación diferencial de la Sección 1.5.1, halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$. Las condiciones iniciales indican que de la familia de curvas solución, interesa aquella función que pasa por el punto (0,1) y cuya derivada en $x = 0$, vale 1. Entonces, se reemplazan los valores $y = 1$ y $x = 0$ en la ecuación $y = 5x^2 + c_1 x + c_2$, obteniendo: $1 = 5(0)^2 + c_1(0) + c_2$. Lo anterior implica que $c_2 = 1$. Como $y(0) = 1$, entonces en la ecuación $\frac{dy}{dx} = 10x + c_1$, hacemos $x = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 1$, para obtener $1 = 10(0) + c_1$, y así $c_1 = 1$. Luego la solución particular es $y = 5x^2 + x + 1$.

Como se vio en el ejemplo anterior, la solución general de una ecuación diferencial es una función que contiene tantas constantes arbitrarias independientes como el orden de la ecuación, es decir, que si la ecuación diferencial es de segundo orden, su solución general debe tener dos constantes de integración independientes, como en el ejemplo $c_1$ y $c_2$.

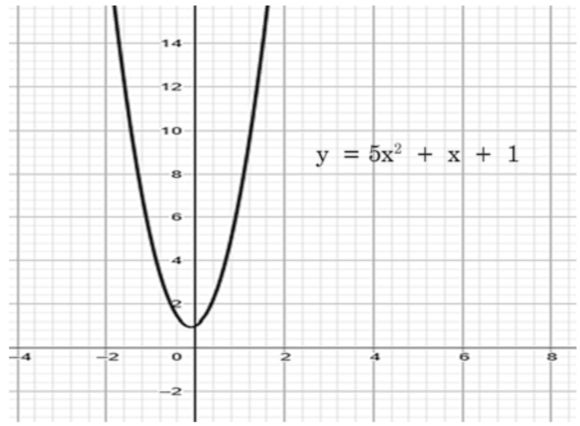



Figura 1.3: Gráfica de la función $y(x) = 5x^2 + x + 1$.

**Ejemplos 1.5.4.** *Solución general y solución particular*

1. *Encontremos la solución general y la solución particular de la ecuación diferencial*

$$3\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 1.$$

*Si se cumple que* $y(0) = 10$*, en efecto* $3\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 1$ *entonces* $3dy = (1 + 8x^2)dx$*. Integrando ambos miembros se llega* $3y = x + \frac{8x^3}{3} + c_1, c_1 = cte$*. Despejando* $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{9}x^3 + c$*, con* $c = \frac{c_1}{3} \in \mathbb{R}$ *que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial dada. Ahora bien, si* $y(0) = 10 = c$ *así se tiene una solución particular a saber* $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{9}x^3 + 10$ *de la ecuación diferencial* $3\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 1$.

2. *La solución general de* $\frac{dr}{d\theta} = \theta r^{1/2}$ *se obtendrá mediante el siguiente procedimiento:* $\frac{dr}{d\theta} = \theta r^{1/2}$ *tenemos que* $r^{-1/2}dr = \theta d\theta$*. Integrando ambos miembros se tiene* $2r^{1/2} = \frac{\theta^2}{2} + k$ *donde* $k$ *es la constante de integración; así* $r^{1/2} = \frac{\theta^2}{4} + c$ *con* $c = \frac{k}{2} \in \mathbb{R}$ *que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial* $\frac{dr}{d\theta} = \theta^{1/2}$ *Una solución particular de la ecuación diferencial esta dada por la expresión:*

$$r = \left(\frac{\theta^2}{4}\right)^2 = \frac{\theta^4}{16} \qquad \textit{para } c = 0.$$

## 1.6. Estrategia de solución

Como se muestra en el diagrama de bloques 1.4, se define una de las curvas, solución que se conoce como la solución particular de la ecuación y es aquella que cumple condiciones iniciales o de frontera. Las condiciones iniciales son aquellas que se dan para la curva y sus derivadas en un mismo valor de la variable independiente y las condiciones de frontera en cualquier otro valor de la variable independiente por donde pasa la curva solución.

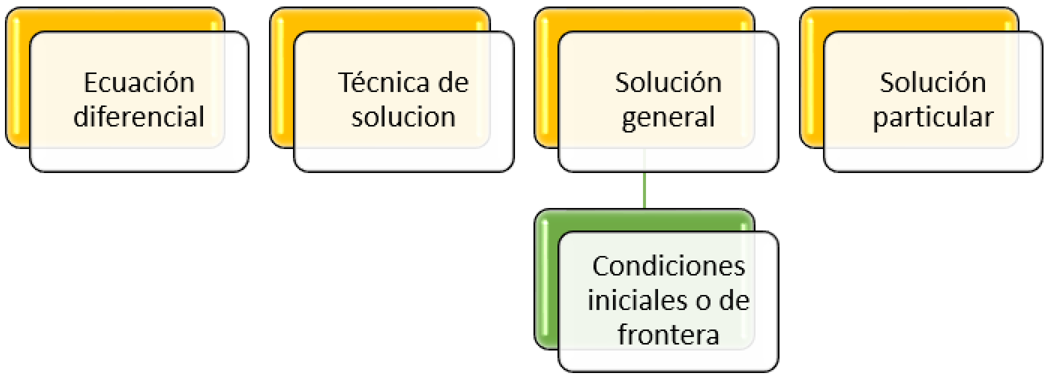



Figura 1.4: Este diagrama de bloques muestra las estrategias a seguir para solucionar una ecuación diferencial.

## 1.7. Ejercicios

1. Determine si las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales, y las que corresponden a este tipo de ecuaciones, clasifíquelas en lineales o no lineales.

   *a)* $3x^2y''' - 5xy''' + 6y' - 7y = 0$.
   *b)* $4y" - 5y' + 6y = 0$.
   *c)* $(\cos x)y'' - 3y = 0$.
   *d)* $-2y" + 4y' - 7y^2 = 0$.
   *e)* $y" + 3y' + 5e^{x+y} = 0$.
   *f)* $y" + 3y' + 5e^{x+\ln y} = 0$.

2. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales según el tipo, orden, linealidad e indique cuál o cuáles son las variables dependientes o independientes.

   *a)* $\dfrac{3d^2y}{dx^2} + \sqrt{2\dfrac{dy}{dx}} + \sqrt{\pi ey} = \operatorname{sen} x$.
   *b)* $8\pi\dfrac{\partial^2 x}{\partial t\partial y} + 3\sqrt{2}x\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = t^2 + y^2$.
   *c)* $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$.
   *d)* $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6 = y^5$.
   *e)* $\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$.
   *f)* $\frac{dx}{dt} = xt + 3$.
   *g)* $\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = xy^2$.

3. Determine si la función dada es o no solución de la ecuación diferencial asociada.

   *a)* $y = e^x + e^{-x}$, $y" - y = 0$.
   *b)* $y = \dfrac{1}{x}$, $xy' + y = 0$.
   *c)* $x = 3t^2$, $\dfrac{dx}{dy} = t^{1/2}x$.
   *d)* $x^2 + y^2 = 25$, $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$.
   *e)* $y = -(\cos x)\ln|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}|$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{1}{\coth x} + y = 0$.
   *f)* $y = e^{-x/2}$, $2y' + y = 0$.
   *g)* $y(x) = \frac{5}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-4x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$.
   *h)* $y = \begin{cases} -r, & \text{si } r < 0 \\ r^2, & \text{otherwise.} \end{cases}$, $r\frac{dy}{dr} - 2y = 0$
   *i)* $r = e^{-t^2}\int_0^t e^{t^2}dt + c_1e^{-t^2}$, $\frac{dr}{dt} + 2rt = t$.

4. Encontrar la solución de la ecuación diferencial dada y grafique la familia solución.

   *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh} x$.
   *b)* $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 3$.
   *c)* $\dfrac{dy}{dx} = \frac{(2\pi\sqrt{e})}{x^2+\sqrt{2}x+e)}$.
   *d)* $\dfrac{dr}{d\theta} = \frac{\phi}{(\theta-n)^3}$.
   *e)* $\dfrac{dj}{dk} = k^2\operatorname{sen}^2 k$.
   *f)* $\dfrac{du}{dy} = 0$.

5. Determine si el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la unicidad de la solución en los siguientes Problemas de valores iniciales

   *a)* $y' = y, \quad y(0) = 1, \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1$ donde $(x_0, y_0) = (0, 1)$.
   *b)* $y' = y^{1/2}$, $y(0) = 1$.
   *c)* $y' = sen(x + y),\ y(\pi) = 0$.
   *d)* $y' = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $y(1) = 1$.

6. Encontrar la solución de los siguientes problemas de valores iniciales.

   *a)* $\dfrac{dy}{dx} - 2x^3 = 1$, $y(0) = 0$.
   *b)* $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - \sin^2 x = 0$, $y(\pi/2) = 10$.
   *c)* $\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 = 1 - v^2$, $v(1) = 0$.
   *d)* $\dfrac{dy}{dx} = 0$, $y(10) = 4$.

# Capítulo 2

# Ecuaciones diferenciales de primer orden

Analice la siguiente situación de la Figura 2.1.

Figura 2.1: Situación problema.

La policía descubre el cuerpo de una profesora de ecuaciones diferenciales. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuándo se cometió el homicidio. El forense llegó al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30° grados Celsius. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29° grados Celsius. Así mismo, observa que la temperatura de la habitación es constante a 27° grados Celsius; suponiendo que la temperatura de la víctima era normal en el momento de su fallecimiento (37° grados Celsius). Responde

a) A qué hora se cometió el crimen?

b) Qué planteamiento realizó para determinar la hora de muerte de la profesora?

## 2.1. Teoremas

Dado el operador diferencial lineal $L$, de $C^1(I)$ en $I$, definido por $L(y) = y' + P(x)y$ , donde $y$, pertenece a $C^1(I)$ , y, $P$ es una función continua en $I$. Se está interesado en hallar la solución de $L(y) = Q(x)$, donde $Q$ es una función continua en I. Para ello, se presentarán dos teoremas, en el primero se solucionará la ecuación $y' + P(x)y = 0$, y, finalmente se buscará la solución de $y' + P(x)y = Q(x)$.

**Teorema 2.1.1.** *Sea $P$ una función continua en un intervalo $I$. Sea $a$ un punto de $I$ y $b$ un numéro real dado. Existe una y solo una función $y = f(x)$ que satisface la ecuación $y'(x) + P(x)y = 0$, para todo $x \in I$, además $y(a) = b$. Esta función viene dada por $f(x) = be^{-A(x)}$ donde $A(x) = \int_0^x P(x)dx$.*

*Demostración.* Sea $f(x) = be^{-A(x)}$ donde $A(x) = \int_a^x P(t)dt$, se verifica que $f'(x) + P(x)f(x) = 0$ para todo $x$ en $I$, y, $f(a) = b$. En efecto, como

$$f(x) = be^{-A(x)},$$

y

$$f'(x) = -bA'(x) = -bP(x)e^{-A(x)}.$$

Entonces

$$f'(x) + P(x)f(x) = -bP(x)e^{-A(x)} + P(x)be^{-A(x)} = 0 \text{ para todo} x \in I.$$

Como $A(a) = \int_{-a}^a P(t)dt = 0$, entonces $f(a) = be^{-A(a)} = b$. Se prueba ahora que esta función es única, para ello, sea $g$ una función que satisface las condiciones dadas, entonces $g'(x) + P(x)g(x) = 0$ para $x$ en I y $g(a) = b$; definiendo

$$h(x) = g(x)e^{A(x)} \text{ para } x \text{ en } I.$$

Derivando $h$ se obtiene

$$h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + A'(x)g(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}\left[g'(x) + P(x)g(x)\right] = 0,$$

para $x$ en el intervalo $I$. Luego $h$ es una función constante en $I$, $h(x) = h(a) = g(a)e^{A(a)} = b$; es decir,$g(x)e^{A(x)} = b$ para todo $x$ en $I$, entonces $g(x) = be^{-A(x)}$, para todo $x$ en $I$, lo cual verifica que la solución es única. □

**Teorema 2.1.2.** *Sean $P$ y $Q$ funciones continuas en un intervalo $I$. Sea $a$ un punto en $I$, y $b$ un número real dado, entonces existe una y solo una función $f$ que satisface la ecuación diferencial $y'(x)+P(x)y(x) = Q(x)$, y, la condición $y(a) = b$. Esta función es*

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}dt,$$

*donde $A(x) = \int_a^x P(t)dt$.*

*Demostración.* Es fácil verificar que $f$, así definida, satisface las condiciones del teorema, se prueba que esta función es única, para ello suponga una función $g$ que satisface las condiciones dadas. Definimos $h(x) = g(x)e^{A(x)}$ para $x$ en $I$, derivando $h$ se tiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{A(x)} + A'(x)g(x)e^{A(x)} \\ &= e^{A(x)}\left[g'(x) + A'(x)g(x)e^{A(x)}\right] \\ &= \left[g'(x) + P(x)g(x)\right] \\ &= e^{A(x)}Q(x). \end{aligned}$$

Por el primer teorema fundamental del Cálculo se tiene $h(x) - h(a) = \int_a^x e^{A(t)}Q(t)dt$ para $x$ en $I$. Luego

$$\begin{aligned} h(x) &= h(a) + \int_a^x e^{A(t)}Q(t)dt \\ g(x)e^{A(x)} &= g(a)e^{A(a)} + \int_a^x e^{A(t)}Q(t)dt \\ g(x) &= be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}dt, \end{aligned}$$

para $x$ en $I$. □

**Ejemplo 2.1.1.** *Hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales*

$$xy' - 2y = x^5,\ y(1) = 1, \tag{2.1}$$

*para* $x > 0$. *Como* $x$ *es diferente de cero, entonces la ecuación se puede escribir como*

$$y' - \frac{2y}{x} = x^4,$$

*luego* $P(x) = \dfrac{-2}{x}$ *y* $Q(x) = x^4$. *Aplicando el Teorema 2.1.2, se obtiene la siguiente solución*

$$y(x) = y(1)e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_1^x t^4 e^{A(t)} dt,$$

*donde*

$$A(x) = -\int_1^x \frac{2}{t} dt = -2\ln x.$$

*Luego*

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 \cdot e^{2\ln x} + e^{2\ln x} \int_1^x e^{-\ln t^2} dt \\ &= x^2 + x^2 \int_1^x t^4 \cdot t^{-2} dt \\ &= x^2 + x^2 \int_1^x t^2 dt \\ &= x^2 + x^2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{2x^2}{3} + \frac{x^5}{3} \ \textit{para todo } x > 0. \end{aligned}$$

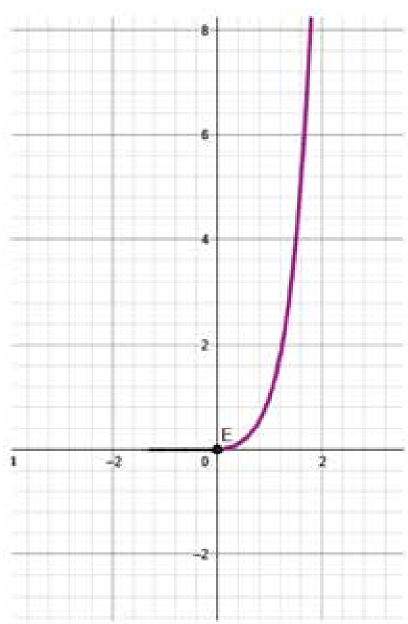



Figura 2.2: Gráfica de la curva solución del problema de valores iniciales (2.1).

En el punto anterior, se vio que si se tiene el operador lineal de primer orden $L$ definido por $L(y) = y' + P(x)y$, donde $P \in C(I)$. Entonces la ecuación $L(y) = Q(x)$ donde $Q \in C(I)$, tiene una única solución $f$, que verifica la condición $f(a) = b$, para a un elemento de $I$, y, $b$ un real dado, esta función viene dada por

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}dt,$$

donde $A(x) = \int_a^x P(t)dt$. Gráficamente esto significa que para la ecuación $L(y) = Q(x)$, y para cada punto $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, existe $f$ que es solución de la ecuación y satisface la condición $f(x_0) = y_0$ , es decir, se llena la franja dada por $I \times \mathbb{R}$.

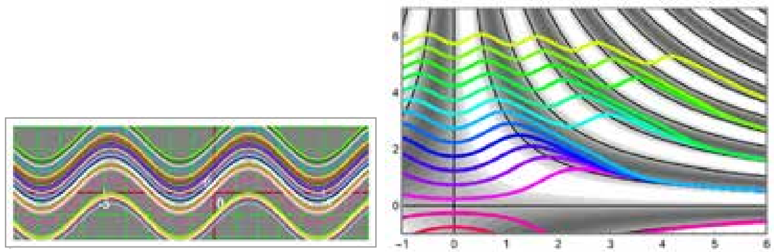


Figura 2.3: Isóclinas de $y = \operatorname{sen} x$ con $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Apps Graphmática- VisualDSolve $[x'[t] == Sin[tx[t]], \{t, -1, 6\}, \{x, -1, 7\}]$

## 2.2. Métodos de solución para ecuaciones de variables separables de primer orden

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ se denomina de variables separables si $y'(x) = f(x, y) = Q(x)R(y)$, donde $Q$ y $R$ son funciones dadas, es decir, se puede expresar como un producto de dos factores, uno dependiente de $x$ únicamente y el otro solamente de $y$, luego la ecuación se puede escribir así: $P(y)y' = Q(x)$, si $R(y) \neq 0$, y, $P(y) = [R(y)]^{-1}$; la solución a dicha ecuación viene caracterizada por la siguiente proposición.

**Teorema 2.2.1.** *Sea $y = Y(x)$ una solución cualquiera de la ecuación diferencial*

$$P(y)y' = Q(x), \tag{2.2}$$

*tal que $Y$ es un elemento de $C^1(I)$. Sean $P$ y $Y$ elementos de $C(I)$, se define*

$$h'(x) = P(x),$$

*para todo $x \in I$, donde $y$ verifica*

$$h(y) = \int Q(x)dx + c, \tag{2.3}$$

*para un valor c. Además, si y satisface (2.3) entonces y es solución de (2.2).*

*Demostración.* Supongamos que $y = y(x)$ para $x$ en $I$ es solución de $P(y)y' = Q(x)$. Luego $P[Y(x)]Y'(x) = Q(x)$ para $x$ en $I$. Como $h'(x) = P(x)$, entonces $h'[Y(x)]Y'(x) = Q(x)$. Utilizando la regla de la cadena, se tiene que $[(hoY)(x)]' = Q(x)$, luego

$$h[Y(x)] = \int Q(x)dx + c.$$

Para un cierto valor de c, como $y = Y(x)$ entonces

$$h(Y) = \int Q(x)dx + c,$$

derivando $[h'(y)]y' = Q(x)$, o sea $P(y)y' = Q(x)$ para $x \in I$. Lo cual prueba: y satisface (2.3), entonces $y$ es solución de (2.2). Es importante notar que como $y = Y(x)$ para $x \in I$, luego $dy = Y'(x)dx$, entonces

$$P(y)y' = P[Y(x)]Y'(x)dx = Q(x),$$

e integrando con respecto a $x$ se tiene:

$$\int P(y)y' = \int P(y)dy = \int Q(x)dx + c.$$

Dado $y' = \dfrac{dy}{dx}$, cociente, se tiene la relación $P(y)dy = Q(x)dx$, integrando a ambos miembros de esa ecuación y sumamos una constante obtenemos (2.3), lo cual muestra la eficacia de la notación de Leibniz. $\square$

**Ejemplos 2.2.1.** *Ejemplos ecuaciones de variables separables.*

1. *Halle la solución general de la ecuación diferencial*

$$(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0.$$

***Solución:*** *Factorizando se tiene*

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0.$$

*Dividiendo todos los términos por el factor $(y^2 - 1)(x^2 + 1)$, siempre que $y \neq \pm 1$; se llega a la ecuación*

$$\frac{x}{x^2 + 1}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0,$$

*la cual es, una ecuación de variables separables. Integrando término a término*

$$\int \frac{x}{x^2 + 1}dx = -\int \frac{y}{y^2 - 1}dy.$$

*Integrando por sustitución, se reemplaza $z = x^2 + 1$, en la primer integral, $dz = 2xdx$. Sustituyendo*

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z|.$$

*La misma técnica se aplica a la segunda integral y se llega a la solución de la ecuación diferencial,*

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(y^2 + 1\right) = c.$$

*Multiplicando por 2 se obtiene*

$$\ln\left(x^2 + 1\right) + \ln\left(y^2 - 1\right) = 2c.$$

*Aplicando propiedad de los logaritmos $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ se obtiene*

$$\ln(x^2 + 1)(y^2 - 1) = 2c.$$

*Para obtener el argumento de la función logaritmo, se aplica antilogaritmo a la ecuación*

$$e^{Ln(x^2-1)(y^2-1)} = e^{2c},$$

*luego por propiedad* $e^{\ln u} = u$ *se tiene*

$$(x^2+1)(y^2-1) = K,$$

*siendo* $e^{2c} = K$*. De la última ecuación se despeja* $y$*, para obtener la solución general*

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{K}{x^2+1} + 1}.$$

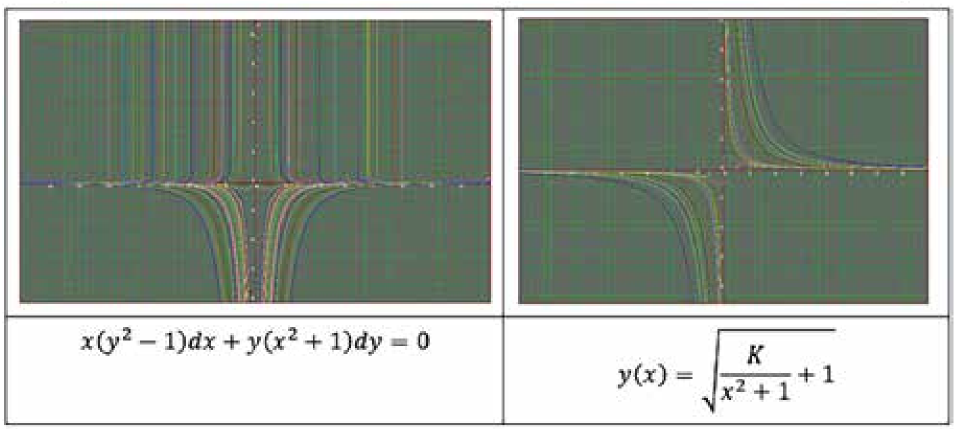



Figura 2.4: Ecuación diferencial y su solución gráfica obtenida de apps Graphmática.

2. *Halle la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = x + xy.$$

***Solución:*** *Observe que* $\dfrac{dy}{dx} = x + xy$*, entonces*

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\,dx + c.$$

*Luego*

$$\ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + c,$$

*en consecuencia* $y(x) = Ae^{x^2/2}$*, con* $c$ *y* $A$ *constantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales.*

3. *Halle la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = xe^x. \tag{2.4}$$

***Solución:*** *A partir de (2.4) se obtiene* $dy = xe^x dx$*, luego* $\int dy = \int xe^x dx$*. Por el método de integrando por partes se obtiene* $u = x$*,* $du = dx$*,* $dv = e^x dx, v = e^x$*. En consecuencia*

$$y(x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

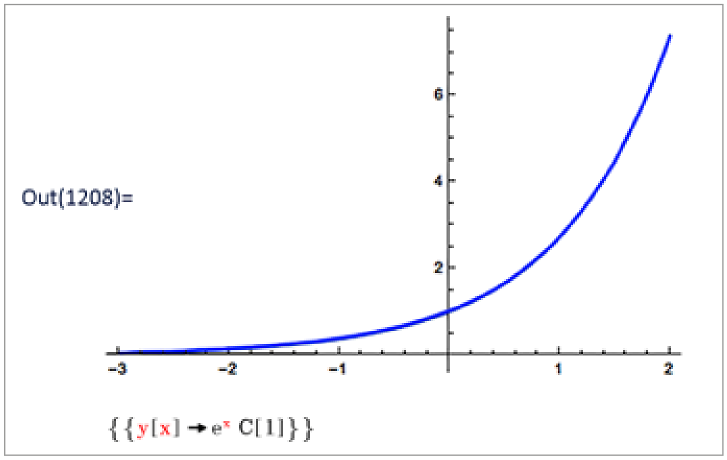



Figura 2.5: Gráfica de la función $y = e^x$, Mathematica 10.

**Nota 2.2.1.** *Recuerde que una ecuación diferencial de primer orden y primer grado se puede escribir en una de las siguientes formas*

1. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y).$

*Observe que si en la forma* 2) $f$ *solo depende de* $x$ *o es una constante, entonces la ecuación diferencial se puede resolver aplicando las técnicas de integración directas ya vistas.*

### 2.2.1. Solución de ecuación diferencial utilizando software Mathematica

Código Mathematica 10

$$In[1] \qquad s = DSolve[\{y'[x] == y[x], y[0] == 1\}, y[x], x]$$

Salida Mathematica 10

$$\begin{aligned} Out[1] &\qquad \{\{[x] \to e^x\}\} \\ In[2] &\qquad Plot[y[x]/.s, \{x, -3, 2\}] \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales se han resuelto aplicando técnicas de integración directas. Sin embargo, no siempre es posible encontrar la solución aplicando anti-derivadas. En lo que sigue se analizan métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado cuyas soluciones no pueden obtenerse aplicando anti-derivadas (Ver Figura 2.5).

## 2.3. Métodos de sustitución

### 2.3.1. Ecuación diferencial homogénea

Una ecuación diferencial homogénea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ puede resolverse a través de métodos de sustitución, si cumple la propiedad de homogeneidad. ¿Qué dice esta propiedad?

**Propiedad 2.3.1.** *La función* $f(x, y)$ *es homogénea de orden* $n$ *si*

$$f(tx, ty) = t^b f(x, y).$$

La Propiedad 2.3.1 se llama propiedad de *homogeneidad*.

**Ejemplos 2.3.1.** *Ejemplos de funciones homogéneas*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ *es una función homogénea de segundo orden. En efecto,*

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty^2) = t^2(x^2+y^2) = t^2 f(x,y).$$

2. $f(x,y) = \sqrt{xy} + \dfrac{y^2}{x}$ *es una función homogénea de orden 1 ya que*

$$f(tx,ty) = \sqrt{tx.ty} + \frac{(ty)^2}{tx} = \sqrt{t^2xy} + \frac{t^2y^2}{tx} = t\left(\sqrt{xy} + \frac{y^2}{x}\right).$$

**Ejercicios 2.3.1.** *Determine si las siguientes funciones son homogéneas*

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.
2. $f(x,y) = x^2y + y^4$.
3. $f(x,y) = xy + \dfrac{x^3}{x+y}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\cos x}$.
5. $f(x,y) = 8(\ln y - \ln x)$.
6. $f(x,y) = 3$.

**Teorema 2.3.1.** *La ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

*es una ecuación diferencial homogénea si*

$$M(x,y) \text{ y } N(x,y),$$

*son funciones homogéneas del mismo orden; es decir, si se verifica la propiedad de homogeneidad en M y N.*

*Demostración.* Consideramos la ecuación de primer orden

$$y' = f(x,y). \tag{2.5}$$

La cual verifica la propiedad de homogeneidad; es decir, $f(tx,ty) = f(x,y)$, para todo $x,y$ con $t \neq 0$. Aplicando esta condición para $x = \frac{1}{t}$ a 4.1 se obtiene

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{2.6}$$

Sea $u = \dfrac{y}{x}$, luego $y = ux$ derivando con respecto a $x$ y sustituyendo en (4.5), se tiene

$$u'x + u = f(1,u), \tag{2.7}$$

de donde

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u,$$

la cual es una ecuación de variables separables de primer orden. Sean $M$ y $N$ funciones homogéneas del mismo orden $n$. Es decir:

$$M(tx,ty)=t^nM(x,y) \ \text{ y } N(tx,ty)=t^nN(x,y).$$

Aplicando esta condición para $t=\frac{1}{x}$ entonces $M$ y $N$ se tiene:

$$M\left(1,\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^n M(x,y).$$

Es decir

$$\begin{aligned} M\left(1,\frac{y}{x}\right) &= x^{-n}M(x,y)\\ N\left(1,\frac{y}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x}\right)^n N(x,y)\\ &= x^{-n}N(x,y). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$M(x,y)=x^nM\left(1,\frac{y}{x}\right)$$
$$N(x,y)=x^nN\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Reemplazando en la Ecuación Diferencial homogénea

$$x^nM\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+x^nN\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0.$$

Factorizando $x^n$ se obtiene

$$x^n\left[M\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+N\left(1,\frac{y}{x}\right)dy\right]=0.$$

Como $x^n\neq 0$, entonces

$$M\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+N\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0. \tag{2.8}$$

Se realiza cambio de variables, siendo $u=\frac{y}{x}$; es decir, $y=ux$ , $y'=u'x+u$ Observe que $dy=xdu+udx$. Reemplazando en (2.8) se tiene

$$\begin{aligned} M(1,u)dx+N(1,u)[xdu+udx] &= 0\\ M(1,u)dx+xN(1,u)du+uN(1,u)dx &= 0\\ M(1,u)dx+uN(1,u)dx+xN(1,u)dy &= 0\\ xN(1,u)du &= -[M(1,y)+uN(1,u)]dx\\ \frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)} &= \frac{-dx}{x}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{M(1,u)+uN(1,u)}{N(1,u)}.\frac{-1}{x}\\ &= g(u).h(x), \end{aligned}$$

donde

$$g(u)=\frac{[M(1,u)+N(1,u)u]}{N(1,u)} \ \text{ y } h(x)=-\frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial (4.1) es separable. □

**Ejercicios 2.3.2.** *Repita el proceso definiendo* $t=\dfrac{1}{y}$, *y reduzca la ecuación diferencial homogénea a una ecuación diferencial de variables separables.*

**Teorema 2.3.2.** *La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea si y solo si $M$ y $N$ son funciones homogéneas del mismo orden.*

*Demostración.* Suponga que $M$ y $N$ son funciones homogéneas del mismo orden. Entonces

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^n N(x,y).$$

Sea $t = \dfrac{1}{y}$ entonces $M$ y $N$ se escriben como

$$M\left(\frac{x}{y},1\right) = \left(\frac{1}{y}\right)^n M(x,y)$$

$$N\left(\frac{x}{y},1\right) = \left(\frac{1}{y}\right)^n N(x,y).$$

En consecuencia

$$M(x,y) = y^n M\left(\frac{x}{y},1\right)$$

$$N(x,y) = y^n N\left(\frac{x}{y},1\right).$$

Reemplazando en la ecuación diferencial homogénea

$$y^n M\left(\frac{x}{y},1\right)dx + y^n N\left(\frac{x}{y},1\right)dy = 0$$

$$y^n \left[M\left(\frac{x}{y},1\right)dx + N\left(\frac{x}{y},1\right)dy\right] = 0.$$

Puesto que $y^n \neq 0$ entonces

$$M\left(\frac{x}{y},1\right)dx + N\left(\frac{x}{y},1\right)dy = 0, \tag{2.9}$$

realizando cambio de variable. Sea $u = \frac{x}{y}$, $x = u * y$, entonces $dx = udy + ydu$, sustituyendo en (4.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
M(u,1)[udy + ydu] + N(u,1)dy &= 0 \\
uM(u,1)dy + yM(u,1)du + N(u,1)dy &= 0 \\
[uM(u,1) + N(u,1)]\,dy &= -yM(u,1)du \\
\frac{-1}{y}\left[\frac{uM(u,1) + N(u,1)}{M(u,1)}\right] &= \frac{du}{dy},
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{du}{dy} = h(y)g(u),$$

esta Ecuación Diferencial es separable. Con

$$g(u) = \frac{uM(u,1) + N(u,1)}{M(u,1)} \;\; h(y) = -\frac{1}{y}.$$

$\square$

**Ejemplo 2.3.1.** *Determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea, en caso positivo resolverla*

$$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0.$$

*En este caso $M$ y $N$ están dados por*

$$M(x,y)=x^2+y^2,\ N(x,y)=x^2-xy.$$

*Luego*

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= (tx)^2+(ty)^2 \\ &= t^2(x^2+y^2) \\ &= t^2M(x,y) \\ N(tx,ty) &= (xt)^2-(xt)(ty) \\ &= (xt)^2-t^2xy \\ &= t^2(x^2-xy) \\ &= t^2N(x,y), \end{aligned}$$

*por lo cual, la ecuación diferencial es homogénea. Sea $y=ux$ entonces*

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{dy}{dx},$$

*o equivalentemente*

$$dy=udx+xdu.$$

*Reemplazando $y$, $dy$, en la ecuación diferencial se obtiene*

$$\begin{aligned} (x^2+(ux)^2)dx+(x^2-x(ux))\left[udx+xdu\right] &= 0 \\ (x^2+u^2x^2)dx+(x^2-ux^2)udx+(x^2-ux^2)xdu &= 0, \end{aligned}$$

*multiplicando y asociando $dx$ se obtiene*

$$(x^2+u^2x^2+x^2u-u^2x^2)dx+(x^2-ux^2)xdu=0,$$

*simplificando*

$$(x^2+x^2u)dx=-xx^2(1-u)du,$$

*o equivalentemente*

$$x^2(1+u)dx=-x^3(1-u)du.$$

*Separando variables*

$$\frac{x^2}{x^3}dx=\frac{-(1-u)}{u+1}du,$$

*como $x\neq 0$ y $u\neq -1$, entonces*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{-(1-u)}{u+1}du \\ \frac{dx}{x} &= \left(\frac{u-1}{u+1}.\right)du. \end{aligned}$$

*Integrando*

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{u-1}{u+1}\right)du,$$

*luego*

$$\ln x + C = \int \left(1 - \frac{2}{1+u}\right) du = u - 2\ln|1+u|.$$

*Dado que* $u = \frac{y}{x}$, *entonces*

$$\frac{y}{x} - 2\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \ln(cx),$$

*con* $c = \ln(c_1)$. *En consecuencia*

$$\frac{y}{x} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 + \ln(cx) = \ln\left[cx\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2\right],$$

*con* $c \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 2.3.2.** *Determine si la siguiente ecuación diferencial es homogénea, en caso positivo resolverla*

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dx}{dy} = xy,$$

*con condición inicial* $y(-1) = 1$. *A partir de la ecuación se obtiene*

$$\begin{aligned}(x^2 - 2y^2)dx &= xydy \\ (x^2 - 2y^2)dx - xydy &= 0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

*luego*

$$M(x,y) = x^2 - 2y^2, \; N(x,y) = -xy.$$

*En consecuencia*

$$\begin{aligned}M(tx,ty) &= (tx)^2 + 2(ty)^2 \\ &= t^2(x^2 + 2y^2) \\ &= t^2 M(x,y) \\ N(tx,ty) &= -txty \\ &= -t^2xy \\ &= t^2 N(x,y),\end{aligned}$$

*así la ecuación diferencial dada es homogénea. Sea* $u = \dfrac{y}{x}$ *entonces* $y = ux$, *derivando se obtiene* $dy = udx + xdu$. *Reemplazando en la ecuación (2.10) se obtiene*

$$\begin{aligned}(x^2 - 2y^2)dx - xydy &= 0 \\ (x^2 - 2u^2x^2)dx - xux\left[udx + xdu\right] &= 0 \\ x^2\left[(1 - 2u^2)dx - u\left[udx + xdu\right]\right] &= 0,\end{aligned}$$

*como* $x^2 \neq 0$, *entonces*

$$\begin{aligned}(1 - 2u^2)dx - u^2dx - uxdu &= 0 \\ (1 - 2u^2 - u^2)dx - uxdu &= 0 \\ (1 - 3u^2)dx - uxdu &= 0 \\ (1 - 3u^2)dx &= uxdu,\end{aligned}$$

*luego*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \frac{udu}{1 - 3u^2} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{udu}{1 - 3u^2},\end{aligned}$$

*sea* $p = 1 - 3u^2$*, entonces* $dp = -6udu$*, lo anterior implica* $-\frac{1}{6}dp = udu$*. En consecuencia*

$$\begin{aligned} \ln x &= -\frac{1}{6}\int \frac{dp}{p} \\ &= -\frac{1}{6}\ln|1-3u^2| + \ln c, \end{aligned}$$

*o equivalentemente*

$$\begin{aligned} \ln x + \frac{1}{6}\ln|1-3u^2| &= lnc \\ \ln|x(1-3u^2)^{1/6}| &= lnc \\ |x(1-3u^2)^{1/6}| &= c \\ |x^6(1-3u^2)| &= c^6 \\ |(1-3u^2)| &= x^{-6}c^6, \end{aligned}$$

*A partir de la ecuación anterior se obtiene*

$$\begin{aligned} -3u^2 &= x^{-6}c^6 - 1 \\ 3u^2 &= -x^{-6}c^6 + 1 \\ u^2 &= \frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3} \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3} \\ y^2 &= x^2\left(\frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ y(x) &= \pm\sqrt{x^2\left(\frac{-x^6c^6}{3} + \frac{1}{3}\right)}. \end{aligned}$$

### 2.3.2. Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$

**Teorema 2.3.3.** *Una ecuación diferencial de la forma* $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$ *donde* $A$*,* $B$ *y* $C$ *son constantes, se puede reducir a una ecuación diferencial separable.*

*Demostración.* En efecto, haciendo el cambio de variable $u = Ax + By + C$ se obtiene

$$\frac{du}{dx} = A + B\frac{dy}{dx},$$

despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right).$$

Reemplazando la ecuación diferencial

$$\frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right) = f(u),$$

luego

$$\frac{du}{dx} = Bf(u) + A,$$

sea $g(u) = Bf(u) + A$, entonces
$$\frac{du}{dx} = g(u),$$
es una ecuación diferencial separable. $\square$

**Ejemplo 2.3.3.** *Resolver la ecuación*
$$\frac{dy}{dz} = (-2x + y)^2 - 7.$$
*En este caso* $u = -2x + y$, *en consecuencia*
$$\frac{du}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx},$$
*luego*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 2.$$
*Reemplazando en la ecuación diferencial inicial*
$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7,$$
*o equivalentemente*
$$\frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$
*Integrando la ecuación anterior se obtiene*
$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2 - 9} &= \int dx \\ \frac{1}{6} \ln \left[ \frac{u-3}{u+3} \right] &= x + c \\ \frac{1}{6} \ln \left[ \frac{-2x + y - 3}{-2x + y + 3} \right] &= x + c. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.4.** *Resolver la ecuación diferencial*
$$dy = (2x + 3y + 1)^2 dx.$$
*Sea* $u = 2x + 3y + 1$, *entonces* $\dfrac{du}{dx} = 2 + 3\dfrac{dy}{dx}$. *Despejando* $\frac{dy}{dx}$ *se tiene*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3}.$$
*Sustituyendo* $u$ *y* $\frac{dy}{dx}$ *en la ecuación diferencial dada se tiene*
$$\frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3} = (u)^2,$$
*es decir,*
$$\frac{du}{dx} = 3u^2 + 2,$$
*que corresponde a una ecuación diferencial en variables separables, de este modo*
$$\frac{du}{3u^2 + 2} = dx,$$

*integrando la ecuación anterior se obtiene*

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+2/3} = x + c;\ c \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

*Sea* $u = \sqrt{2/3}\tan t$, *entonces* $du = \sqrt{2/3}\sec^2 t\, dt$. *Sustituyendo en la ecuación (2.11) se obtiene*

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sec^2(t)dt}{\frac{2}{3}tan^2(t)+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} * \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int dt = \frac{1}{6}t.$$

*Como* $u = \sqrt{\frac{2}{3}}\tan(t)$, *entonces* $t = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right)$, *así*

$$x + c = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u,\right)$$

*pero* $u = 2x + 3y + 1$. *Finalmente la solución general de la Ecuación diferencial dada es;*

$$x + c = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+3x+1)\right].$$

**Ejemplo 2.3.5.** *Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial*

$$-\varphi\mu + \frac{d\theta}{d\Gamma} = \sin\left(\frac{3\pi}{5i}\varphi\right)\theta + \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}\Gamma, \tag{2.12}$$

*con* $\varphi$ *y* $\mu$ *constantes. La ecuación (2.12) se reescribe como*

$$\frac{d\theta}{d\Gamma} = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)\theta + \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}\Gamma + \varphi\mu. \tag{2.13}$$

*Sea* $h = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)\theta + \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}\Gamma + \varphi\mu$, *derivando respecto a* $\Gamma$ *se tiene*

$$\frac{dh}{d\Gamma} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)\frac{d\theta}{d\Gamma} + \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}.$$

*Despejando* $\frac{d\theta}{d\Gamma}$ *se obtiene*

$$\frac{d\theta}{d\Gamma} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)}\frac{dh}{dr} - \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{e}}.$$

*Remplazando* $h$ *y* $\frac{d\theta}{d\Gamma}$ *en (2.13) se tiene;*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)}\frac{dh}{d\Gamma} - \frac{\sqrt{\pi}}{e\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)} = h,$$

*que corresponde a una Ecuación diferencial en variables separables*

$$\frac{dh}{d\Gamma} = sin\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)h + \frac{\sqrt{\pi}}{e}.$$

*Separando variables se obtiene*

$$\frac{dh}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)h+\frac{\sqrt{\pi}}{e}}=d\Gamma,$$

*luego*

$$\int\frac{dh}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)h+\frac{\sqrt{\pi}}{e}}=\Gamma+c_1,$$

*donde* $c_1\in\mathbb{R}$. *Sea*

$$v=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)h+\frac{\sqrt{\pi}}{e},$$

*entonces*

$$\frac{dv}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)}=dh,$$

*luego*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)}\int\frac{dv}{v}=\Gamma+c_1.$$

*En consecuencia*

$$\ln v=\Gamma\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)+c_2,$$

*con* $c_2=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)c_1$ *como*

$$v=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)h+\frac{\sqrt{\pi}}{e},$$

*y*

$$h=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\varphi\right)\theta+\frac{\sqrt{\pi}}{e}\Gamma+\varphi\mu,$$

*luego*

$$v=\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)\theta+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{e}\Gamma.$$

*De este modo la solución general es*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)\Gamma=\ln\left|\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)\theta+\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)\sqrt{\pi}}{e}+\varphi\mu\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi\varphi}{5}\right)\right|+c.$$

## 2.4. Ecuación diferencial exacta

Sea $z=f(x,y)$ entonces el diferencial de $z$ es

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

**Definición 2.4.1.** *Una expresión diferencial* $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ *es una diferencial exacta en una región* $R$ *del plano* $xy$, *si corresponde a la diferencial exacta de alguna función* $f(x,y)$.

**Ejemplo 2.4.1.** *Sea $3x^2y^2dx+2x^3ydy$, una expresión diferencial, verificar si es exacta. En este caso, si $M(x,y)=3x^2y^2$ y $N(x,y)=2x^3y$, comparando al determinar la función $z$ tal que sus derivadas parciales corresponden a*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3y,\end{aligned} \tag{2.14}$$

*se tiene que, para la función $z=f(x,y)=x^3y^2$ el diferencial está dado por $dz=3x^2y^2dx+(2x)^3ydy$. En consecuencia es una expresión diferencial exacta. Ahora bien, si esta expresión se iguala a cero entonces la ecuación diferencial es una ecuación diferencial exacta.*

A partir del cálculo de varias variables se tiene que las derivadas cruzadas satisfacen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

De otra parte, sea $z(t)=f(x,y)=c$ solución de la ecuación diferencial, donde $x=x(t)$ y $y=y(t)$, funciones con parámetro $t$, $f(x,y)=f(x(t),y(t))$, por regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Comparando esta ecuación con la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

se verifica que $M(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$ lo cual implica que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(N(x,y))=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

**Propiedad 2.4.1** (Criterio para una ecuación diferencial exacta)**.** *Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones en $x$ y $y$ con derivadas parciales continuas en una región $R$ rectangular definida por $a<xb$ y $c<y<d$, entonces una condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ sea una ecuación diferencial exacta es*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

**Ejemplos 2.4.1.** *Ecuaciones diferenciales exactas*

1. *Determinar si la siguiente ecuación diferencial $3x^2y^2dx+(2x)^3\ y\ dy=0$ es exacta? Si, en efecto, sean $M(x,y)=3x^2y^2$ y $N(x,y)=2x^3y$, entonces*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2y \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x}=6x^2y,$$

*lo cual implica que*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

*Así la ecuación $3x^2y^2dx+2x^3ydy=0$ es una ecuación diferencial exacta.*

2. *Determinar si la siguiente ecuación diferencial*

$$(xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x)dx - y(1-x^2)dy = 0,$$

*es exacta? Sean* $M(x,y) = xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x$ *y* $N(x,y) = -y(1-x^2)$, *entonces* $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy$ *y* $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2yx = 2xy$ *por lo tanto la ecuación diferencial es exacta.*

3. *Determinar si la siguiente ecuación diferencial*

$$\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)dy = 0,$$

*es exacta? En este caso* $M(x,y) = e^{2y} - y\cos(xy)$ *y* $N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$, *sus derivadas satisfacen*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + xy\operatorname{sen}(xy) = \frac{\partial N}{\partial x},$$

*por tanto la ecuación diferencial es exacta.*

### 2.4.1. Solución de una ecuación diferencial exacta

Una vez determinada la exactitud de la ecuación diferencial, dado que se tiene la derivada parcial de la solución $f$ respecto a cada derivada, donde $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Se toma una de las dos derivadas, en busca de la función tal que al derivarla parcialmente se obtuvo la expresión $M$ o $N$. Por ejemplo, sea

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y).$$

Integrando respecto a $x$ se obtiene

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int M(x,y)dx + K,$$

donde $K$ es una función respecto a la variable contraria a la cual se integra. Por el Teorema Fundamental del cálculo

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y).$$

Por otro lado, al derivar parcialmente respecto a $y$ se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + g(y)\right).$$

Es decir que

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y).$$

Despejando $g'(y)$ se obtiene

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right).$$

Por lo tanto

$$g(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy.$$

Una vez encontrado $g(y)$ se reemplaza en la expresión que define $f$, obteniendo la solución o primer integral $f(x,y) = c$, donde $c$ es una constante. La solución o primera integral $f(x,y) = c$ donde $c$ es una constante.

### 2.4.2. Otra forma de resolver las ecuaciones diferenciales exactas

Al repetir el método de solución anterior pero determinando $f$ a través de $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, se tiene

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Integrando respecto a $y$ se tiene

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int N(x,y)dy,$$

luego

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x).$$

De otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy + h(x)\right),$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right) + h'(x).$$

Despejando $h^{'}(x)$ se tiene

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right).$$

Por lo tanto

$$h(x) = \int \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right)\right] dx.$$

Finalmente reemplazando $h(x)$ en $f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$ y recordando que $f(x,y) = c$ se tiene la siguiente solución

$$f(x,y) = \int N dy + \int \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dy\right)\right] dx$$

**Ejemplos 2.4.2.** *Ecuaciones diferenciales exactas*

1. *Resolver la ecuación diferencial*

$$(xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x)dx - y(1-x^2)dy = 0,$$

*al ser ecuación diferencial exacta, entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x.$$

*Siguiendo el método se obtiene*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx \\ &= \int (xy^2 - cosx\ senx)dx + g(y) \\ &= \frac{x^2y^2}{2} - \frac{sen^2 x}{2} + g(y). \end{aligned}$$

*Derivando con respecto a y, se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2y^2}{2} + g'(y) = N(x,y),$$

*puesto que* $N(x,y) = -y(1-x^2)$, *entonces* $x^2y + g'(y) = -y + x^2y$. *Por la propiedad conmutativa* $g'(y) = -y$ *lo cual implica* $g(y) = -\int y dy = dfracy^2 2$. *En consecuencia*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

*Lo anterior implica que la familia de curvas solución está dada por*

$$f(x,y) = \frac{y^2(x^2-1) - sen^2x}{2} = c$$

2. *Resolver el PVI*

$$\big(e^{2y} - y\cos(xy)\big)\,dx + \big(2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\big) = 0,\ y(0) = 2.$$

*Observe que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos(xy).$$

*Ahora, integrando tenemos*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (e^{2y} - y\cos(xy)dx + g(y) \\ &= \int e^{2y}dx - \int y\cos(xy)dx + g(y) \\ &= \int e^{2y}x - \frac{y}{y}\operatorname{sen}(xy) + g(y) \\ &= e^{2y}x - \operatorname{sen}(xy) + g(y). \end{aligned}$$

*Derivando* $f$ *con respecto a* $y$ *se obtiene*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xe^{2y} - x\cos(xy) + g'(y) \\ &= 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y \end{aligned}$$

*Despejando* $g'$ *se obtiene*

$$g'(y) = 2y,$$

*luego*

$$g(y) = \int 2y\,dy = y^2.$$

*En consecuencia* $f(x,y) = e^{2y}x - \operatorname{sen}(xy) + y^2$, *lo cual implica que la familia de curvas solución está dada por*

$$f(x,y) = e^{2y}x - \operatorname{sen}(xy) + y^2 = c.$$

*Dado que* $y(0) = 2$, *entonces* $c = 2^2 = 4$. *Luego*

$$f(x,y) = e^{2y}x - \operatorname{sen}(xy) + y^2 = 4,$$

*es la solución del PVI.*

### 2.4.3. Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas

En algunas ocasiones ciertas ecuaciones diferenciales se pueden reducir a ecuaciones diferenciales exactas (al multiplicar por un factor integrante). Por ejemplo, en la ecuación diferencial

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0. \tag{2.15}$$

En este caso $M(x,y) = xy$ y $N(x,y) = 2x^2+3y^2-20$ luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = x$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 4x$. Por lo tanto $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Por lo tanto no es exacta, sin embargo, al multiplicar la ecuación diferencial por $y^3$ se obtiene

$$y^3[xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy] = 0,$$

o equivalentemente

$$xy^4dx + y^3(2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0.$$

En consecuencia, para la nueva ecuación diferencial se obtiene $\overline{M}(x,y) = xy^4$ y $\overline{N}(x,y) = y^3(2x^2 + 3y^2 - 20)$, las cuales satisfacen

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 4xy^3 = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x},$$

que la trasnforma en una ecuación diferencial exacta. Suponga que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, como la ecuación (2.15), algunas veces se idea un factor, $\mu(x,y)$, con el cual al multiplicar la ecuación diferencial, esta se convierte en una ecuación diferencial exacta. Observe el PVI

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - ay,\ y(0) = 2,$$

donde $a$ es una constante. La ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{dy}{dx} + ay = e^{-x}. \tag{2.16}$$

Multiplicando (2.16) por la función $\mu(x)$ se obtiene

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = \mu(x)e^{-x}. \tag{2.17}$$

La pregunta es si existe un factor $\mu(x)$ tal que el lado izquierdo de la ecuación (2.17) satisfaga

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = \frac{d[\mu(x)y(x)]}{dx}.$$

Para este caso, por inspección, se podría pensar en una función exponencial $\mu(x) = e^{ax}$, es decir

$$\begin{aligned} e^{ax}\frac{dy}{dx} + aye^{ax} &= e^{-x}e^{ax} \\ \frac{d(e^{ax}y)}{dx} &= e^{(a-1)x}. \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la ecuación con respecto a $x$, se obtiene

$$e^{ax}y = \int (e^{(a-1)x}dx + c = \frac{e^{(a-1)x}}{a-1} + c,$$

donde $c$ es una constante. Utilizando la condición inicial $y(0) = 2$ en la ecuación anteror se obtiene

$$\begin{aligned} e^{a\cdot 0}y(0) &= \frac{e^{(a-1)\cdot 0}}{a-1} + c \\ 2 &= \frac{1}{a-1} + c. \end{aligned}$$

Despejando $c$ a partir de la ecuación anterior se obtiene $c = \dfrac{2a-3}{a-1}$.

**Nota 2.4.1.** *Un par de comentarios son pertinentes:*

- *El factor $\mu$ puede depender tanto de $x$ como de $y$; es decir, $\mu(x, y)$.*
- *Se llama al término $\mu(x, y)$ factor integrante de la ecuación diferencial, el cual, está relacionado con propiedades de simetría de la ecuación*
- *La solución general de esa ecuación diferencial toma la forma de $y_g(x) = e^{-x} + ce^{-ax}$ donde el segundo de los términos $y_{gh}(x) = ce^{-ax}$ corresponde a la solución general para la ecuación homogénea asociada a esa ecuación diferencial $dy/dx + ay = 0$. El otro término $y_{noh}(x) = e^{-x}$ corresponde a la solución particular de la no homogénea $dy/dx + ay = e^{-x}$. Esta será una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden, donde se resuelve la ecuación homogénea y luego la solución de la no homogénea o particular, y la solución general será la suma de ambas soluciones.*
- *Para ecuaciones homogéneas con coeficiente constante se tienen soluciones de la forma $y = ce^{mx}$.*

Generalizando, entonces existe en algunos casos un factor integrante $u(x, y)$ que convierte o transforma la ecuación anterior en una ecuación diferencial exacta

$$\begin{aligned} u[M(x,y)dx + N(x,y)dy] &= 0 \\ uM(x,y)dx + uN(x,y)dy &= 0. \end{aligned}$$

Dicha ecuación diferencial es exacta si y sólo sí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(uM) &= \frac{\partial}{\partial x}(uN) \\ \frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x}. \end{aligned}$$

A partir de la anterior ecuación se obtiene

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}N - \frac{\partial u}{\partial y}M. \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) es una ecuación diferencial parcial que no siempre tiene solución analítica por tal razón nos conscentraremos en casos particulares.

$\mu$ **depende solo de** $x$**:** En este caso $\mu(x, y) = \mu(x)$ lo cual implica que $\partial\mu/\partial y = 0$. Por lo tanto la ecuación (2.18) se reduce a

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x}N,$$

luego

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\mu(x), \tag{2.19}$$

Dado que $\mu$ depende unicamente de $x$, entonces su derivada también depende unicamente de $x$. Lo anterior implica que $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ solo depende de $x$. Sea $\Phi(x) = \dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ entonces la ecuación (2.19) se reescribe como

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x) = \Phi(x)\mu(x). \tag{2.20}$$

*entonces*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int xy^4 dx + g(y) \\ &= \frac{x^2y^4}{2} + g(y). \end{aligned} \tag{2.24}$$

*Derivando $f$ definido en (2.24) con respecto a $y$, se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^4}{2} + g(y)\right) = 2x^2y^3 + g'(y). \tag{2.25}$$

*Dado que*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^4, \tag{2.26}$$

*entonces igualando (2.24) y (2.26) se obtiene*

$$2x^2y^3 + g'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^4. \tag{2.27}$$

*Despejando $g'(x)$ de (2.27) se obtiene*

$$g'(y) = 3y^5 - 20y^4. \tag{2.28}$$

*Integrando con respecto a $y$ en ambos lados de (2.28) se obtiene*

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - 4y^5 + c. \tag{2.29}$$

*Reemplazando (2.29) en (2.24) se obtiene*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^2}{2} - 4y^5 + c.$$

*Por lo tanto la familia mono paramétrica de soluciones está dada por*

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 4y^5 = C,$$

*donde $C = -c$.*

**Ejemplo 2.4.3** (Factor integrante de la forma $\mu(x)$)**.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0. \tag{2.30}$$

*En este caso $M(x,y) = x^2 + y^2 + x$ y $N(x,y) = xy$, por lo tanto*

$$\Phi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x},\ y \neq 0.$$

*De esta forma el factor integrante será*

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = e^{\ln x} = x, \tag{2.31}$$

*multiplicando el factor integrante $\mu(x)$ definido en (2.31) por la ecuación diferencial (2.30) se obtiene*

$$\begin{aligned} x((x^2 + y^2 + x)dx + xydy) &= 0 \\ (x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy &= 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

*entonces*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int xy^4 dx + g(y) \\ &= \frac{x^2y^4}{2} + g(y). \end{aligned} \tag{2.24}$$

*Derivando $f$ definido en (2.24) con respecto a $y$, se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^4}{2} + g(y)\right) = 2x^2y^3 + g'(y). \tag{2.25}$$

*Dado que*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^4, \tag{2.26}$$

*entonces igualando (2.24) y (2.26) se obtiene*

$$2x^2y^3 + g'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^4. \tag{2.27}$$

*Despejando $g'(x)$ de (2.27) se obtiene*

$$g'(y) = 3y^5 - 20y^4. \tag{2.28}$$

*Integrando con respecto a $y$ en ambos lados de (2.28) se obtiene*

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - 4y^5 + c. \tag{2.29}$$

*Reemplazando (2.29) en (2.24) se obtiene*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^2}{2} - 4y^5 + c.$$

*Por lo tanto la familia mono paramétrica de soluciones está dada por*

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 4y^5 = C,$$

*donde $C = -c$.*

**Ejemplo 2.4.3** (Factor integrante de la forma $\mu(x)$)**.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0. \tag{2.30}$$

*En este caso $M(x,y) = x^2 + y^2 + x$ y $N(x,y) = xy$, por lo tanto*

$$\Phi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x},\ y \neq 0.$$

*De esta forma el factor integrante será*

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = e^{\ln x} = x, \tag{2.31}$$

*multiplicando el factor integrante $\mu(x)$ definido en (2.31) por la ecuación diferencial (2.30) se obtiene*

$$\begin{aligned} x((x^2 + y^2 + x)dx + xydy) &= 0 \\ (x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy &= 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

*las funciones $M$ y $N$ para la ecuación (2.32) están dadas por*

$$M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 \quad y \quad N(x,y) = x^2y.$$

*En consecuencia*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy.$$

*Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces (2.32) corresponde a una ecuación diferencial exacta. Observe que*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = x^2y,$$

*entonces*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int x^2ydy + g(x) \\ &= \frac{x^2y^2}{2} + g(x). \end{aligned} \tag{2.33}$$

*Derivando $f$ definido en (2.33) con respecto a $x$, se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{2} + g(x)\right) = xy^2 + g'(x). \tag{2.34}$$

*Dado que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2, \tag{2.35}$$

*entonces igualando (2.33) y (2.35) se obtiene*

$$xy^2 + g'(x) = x^3 + xy^2 + x^2. \tag{2.36}$$

*Despejando $g'(x)$ de (2.36) se obtiene*

$$g'(x) = x^3 + x^2. \tag{2.37}$$

*Integrando con respecto a $x$ en ambos lados de (2.37) se obtiene*

$$g(x) = \frac{y^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c. \tag{2.38}$$

*Reemplazando (2.38) en (2.33) se obtiene*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c.$$

*Por lo tanto la familia mono paramétrica de soluciones está dada por*

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = C,$$

*donde $C = -c$.*

### 2.4.4. Ecuaciones diferenciales de la forma $yf(x,y)dx + xg(x,y)dy = 0$

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se puede escribir en la forma

$$yf(x,y)dx + xg(x,y)dy = 0, \tag{2.39}$$

donde $f(x,y) \neq g(x,y)$, entonces

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(f(xy) - g(xy))}, \tag{2.40}$$

es un factor integrante.

**Ejemplo 2.4.4.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0. \tag{2.41}$$

*Observemos que la ecuación (2.41) tiene la forma de la ecuación diferencial (2.39) con* $f(x,y) = (xy)^2 + 2$ *y* $g(x,y) = 2 - 2(xy)^2$*, lo anterior implica que*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy((xy)^2 + 2 - (2 - 2(xy)^2))} = \frac{1}{3x^3y^3}, \tag{2.42}$$

*es un factor integrante de la ecuación diferencial (2.41). En este sentido, multiplicando* $\mu(x,y)$ *definido en (2.42) por la ecuación diferencial definida en (2.41) se obtiene*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3x^3y^3}\left[y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy\right] &= 0\\
\frac{y(x^2y^2 + 2)}{3x^3y^3}dx + \frac{x(2 - 2x^2y^2)}{3x^3y^3}dy &= 0\\
\frac{x^2y^2 + 2}{3x^3y^2}dx + \frac{2 - 2x^2y^2}{3x^2y^3}dy &= 0. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

*En este caso* $M$ *y* $N$ *están dados por*

$$M(x,y) = \frac{x^2y^2 + 2}{3x^3y^2} \quad y \quad N(x,y) = \frac{2 - 2x^2y^2}{3x^2y^3}. \tag{2.44}$$

*A partir de (2.44) se verifica que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{4}{3x^3y^3} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

*Por lo tanto, la ecuación diferencial (2.43) es exacta. En consecuencia*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int \frac{x^2y^2 + 2}{3x^3y^2}dx + g(y)\\
&= \int \frac{1}{3x}dx + \int \frac{2}{3x^3y^2}dx + g(y)\\
&= \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3x^2y^2} + g(y).. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

*Derivando* $f$ *definido en (2.45) con respecto a* $y$ *se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3x^2y^3} + g'(y),$$

*igualando la ecuación anterior a* $N(x,y)$*, se obtiene*

$$\frac{2}{3x^2y^3} + g'(y) = \frac{2 - 2x^2y^2}{3x^2y^3},$$

*luego*

$$g'(y) = -\frac{2}{3y},$$

*lo cual implica que* $g(y) = -2/3 \ln y$. *En consecuencia la primitiva de la ecuación diferencial (2.41) es*

$$\frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3}\ln y = \ln c.$$

### 2.4.5. Factor integrante por inspección

Existen algunos casos donde después de agruparse los términos convenientemente en la ecuación, se reconocen cierto grupo de términos formando parte de una ecuación diferencial que permite reconocer el factor integrante. En la Tabla 2.1 se presentan algunos casos.

| Grupo de término | Factor integrante | Diferencial Exacta |
|---|---|---|
| $xdy - ydx$ | $\frac{1}{x^2}$ | $\frac{xdy - yx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| $xdy - ydx$ | $\frac{1}{y^2}$ | $\frac{xdy - yx}{y^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| $xdy - ydx$ | $\frac{1}{xy}$ | $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$ |
| $xdy - ydx$ | $\frac{1}{x^2+y^2}$ | $\frac{xdy - yx}{x^2+y^2} = d\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]$ |

Cuadro 2.1: Factores integrantes.

**Ejemplo 2.4.5.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$xdx + ydy + 4y^3(x^2+y^2)dy = 0. \tag{2.46}$$

*El último término de la ecuación sugiere que* $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ *es factor integrante. Multiplicando la ecuación (2.46) por* $\mu(x,y)$ *se tiene*

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} + 4y^3dy = 0. \tag{2.47}$$

*A partir de (2.47) se verifica*

$$M(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad y \quad N(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + 4y^3. \tag{2.48}$$

*Derivando* $M$ *con respecto a* $y$ *y* $N$ *con respecto a* $x$ *se obtiene*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial y}.$$

*Dado que la ecuación diferencial (2.47) es exacta, entonces*

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y). \tag{2.49}$$

*Derivando* $f$ *definida en (2.49) con respecto a* $y$ *y utilizando la igualdad* $\partial f/\partial y = M$ *se obtiene*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + 4y^3. \tag{2.50}$$

*Despejando $g'(y)$ de la ecuación (2.50) se obtiene*

$$g'(y) = 4y^3. \tag{2.51}$$

*Integrando (2.52) con respecto a $y$, se obtiene*

$$g(y) = y^4 + c. \tag{2.52}$$

*Reemplazando (2.52) en (2.49) se obtiene*

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) + y^4 + c.$$

*Por lo tanto la familia mono paramétrica de soluciones está dada por*

$$\frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) + y^4 = C,$$

*donde $C = -c$.*

## 2.5. Ecuación diferencial lineal

**Definición 2.5.1.** *Una ecuación diferencial de la forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2.53}$$

*donde $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $g(x)$ funciones que dependen de $x$ y $a_1(x) \neq 0$, recibe el nombre de ecuación diferencial lineal.*

**Nota 2.5.1.** *Cuando $g(x) = 0$ se dice que la ecuación lineal es homogénea. Si $g(x) \neq 0$ entonces la ecuación diferencial es no homogénea.*

**Ejemplo 2.5.1.** *En la ecuación diferencial lineal no homogénea*

$$3x^2\frac{dy}{dx} - \operatorname{sen}(x)y = x^2 \ln x,$$

*se verifica que $a_1(x) = 3x^2$, $a_0(x) = -\operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2 \ln x$.*

**Definición 2.5.2.** *La forma estándar de la ecuación diferencial lineal es*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.54}$$

A partir de (2.53) se verifica que

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad y \quad P(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}.$$

### 2.5.1. Método de variación de parámetros

Esta ecuación tiene solución por diferentes métodos, uno de ellos es el método de variación de parámetros. En este método la solución general de la ecuación lineal (2.54) está dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \tag{2.55}$$

donde $y_h$ es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a (2.54); es decir, es la solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{2.56}$$

y $p_p$ es una solución particular de (2.54). Observe que (2.56) es una ecuación diferencial separable, en consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

luego

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx.$$

Por lo tanto

$$y_h(x) = e^{-\int P(x)dx+\ln c} = ce^{-\int P(x)dx}. \tag{2.57}$$

Para encontrar una solución particular $y_p$ que sea linealmente independiente de $y_h$, es decir, $y_p$ no es múltiplo de $y_h$, entonces se busca

$$y_p(x) = u(x)y_h(x), \tag{2.58}$$

para lo cual se debe determinar $u(x)$. Como $y_P$ es solución entonces, $y_p$ satisface la ecuación no homogénea (2.54); es decir

$$y_P' + P(x)y_p = Q(x).$$

A partir de (2.58) se verifica que la derivada de $y_p$ está dada por

$$y_p'(x) = u'(x)y_hx + u(x)y_h'(x). \tag{2.59}$$

Reemplazando (2.59) en (2.54) se obtiene

$$u'(x)y_hx + u(x)y_h'(x) + P(x)u(x)y_h(x) = Q(x). \tag{2.60}$$

Factorizando $u(x)$ en (2.60) se obtiene

$$u^{'}(x)y_h(x) + u(x)[y_h^{'}(x) + P(x)y_h(x)] = Q(x). \tag{2.61}$$

Recuerde que $y_h$ es solución de la ecuación diferencial homogénea (2.56) lo cual implica que

$$y_h'(x) + P(x)y_h(x) = 0,$$

reemplazando la ecuación anterior en (2.61) se tiene

$$u'(x)y_h(x) = Q(x), \tag{2.62}$$

a partir de (2.62) se obtiene

$$u'(x) = \frac{Q(x)}{y_h(x)}.$$

A partir del Teorema Fundamental del cálculo se concluye

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{y_h(x)}dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u(x)y_h(x) \\ &= ce^{-\int P(x)dx} \int \frac{Q(x)}{ce^{-\int P(x)dx}} dx \\ &= e^{-\int P(x)dx} \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Reemplazando (2.57) y (2.63) en (2.55) se obtiene

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \\ &= e^{-\int p(x)dx} \left[ c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right]. \end{aligned} \tag{2.64}$$

**Ejemplo 2.5.2.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$3x^2 \frac{dy}{dx} - x^3(\operatorname{sen} x)y = x^2 \ln |x|. \tag{2.65}$$

*La forma estándar de la ecuación diferencial (2.65) es*

$$\frac{dy}{dx} - \left( \frac{1}{3} x \operatorname{sen} x \right) y = \frac{1}{3} \ln |x|. \tag{2.66}$$

*Se inicia resolviendo la ecuación lineal homogénea asociada a (2.66)*

$$\frac{dy}{dx} - (\frac{1}{3} x \operatorname{sen} x) y = 0. \tag{2.67}$$

*Dado que la ecuación diferencial (2.67) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

$$\frac{1}{y} dy = \left( \frac{1}{3} x \operatorname{sen} x \right) dx,$$

*luego*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \frac{1}{3} \int (x \operatorname{sen} x)\, dx \\ \ln |y| &= \frac{1}{3}(-x \cos x + \operatorname{sen} x) + \ln |c|. \end{aligned}$$

*Por lo tanto*

$$y_h(x) = ce^{(-x \cos x + \operatorname{sen} x)/3}. \tag{2.68}$$

*Ahora se determinará una solución particular de la forma*

$$y_p(x) = u(x)e^{(-x \cos x + \operatorname{sen} x)/3}. \tag{2.69}$$

*Sustituyendo $y_p(x)$ definido en (2.69) en la ecuación diferencial (2.66) se obtiene*

$$\frac{d}{dx} \left( u(x)e^{(-x \cos x + \operatorname{sen} x)/3} \right) - \left( \frac{1}{3} x \operatorname{sen} x \right) u(x)e^{(-x \cos x + \operatorname{sen} x)/3} = \frac{1}{3} \ln |x|. \tag{2.70}$$

*A partir de la ecuación (2.70) se obtiene*

$$u'(x)e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3} + u(x)e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3}(-\cos x + x\operatorname{sen} x + \cos x) \\ - \left(\frac{1}{3}x\operatorname{sen} x\right)u(x)e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3} = \frac{1}{3}\ln|x|. \quad (2.71)$$

*Simplificando la ecuación (2.71) se obtiene*

$$u'(x)e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3} = \frac{1}{3}\ln|x|. \quad (2.72)$$

*Separando variables e integrando en (2.72) se obtiene*

$$u(x) = \int du = \frac{1}{3}\int \frac{\ln|x|}{e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3}}dx. \quad (2.73)$$

*Por lo tanto*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3}\left(c + \int \frac{\ln|x|}{e^{(-x\cos x+\operatorname{sen} x)/3}}dx\right). \end{aligned}$$

**Nota 2.5.2.** *Cabe resaltar que la integral que aparece en (2.73) no tiene solución explícita.*

**Ejemplo 2.5.3.** *Resolver la ecuación*

$$x^2y' + 6xy + 4x^2 = -4xy + x^7. \quad (2.74)$$

*Para $x \neq 0$, la forma estándar de la ecuación diferencial (2.74) está dada por*

$$y' + \frac{10}{x}y = x^5 - 4. \quad (2.75)$$

*Se inicia resolviendo la ecuación lineal homogénea asociada a (2.75)*

$$y' + \frac{10}{x}y = 0. \quad (2.76)$$

*Dado que la ecuación diferencial (2.76) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{10}{x}dx. \quad (2.77)$$

*Por lo tanto la solución de (2.77) es*

$$y_h(x) = cx^{-10}. \quad (2.78)$$

*Ahora se detrminará una solución particular de la forma*

$$y_p(x) = u(x)x^{-10}. \quad (2.79)$$

*Sustituyendo $y_p(x)$ definido en (2.79) en la ecuación diferencial (2.75) se obtiene*

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)x^{-10}\right) + \frac{10}{x}u(x)x^{-10} = x^5 - 4. \quad (2.80)$$

*A partir de la ecuación (2.80) se obtiene*

$$u'(x)x^{-10} - 10u(x)x^{-11} + \frac{10}{x}u(x)x^{-10} = x^5 - 4. \quad (2.81)$$

*Simplificando la ecuación (2.81) se obtiene*

$$u'(x)x^{-10} = x^5 - 4. \tag{2.82}$$

*La solución de (2.82) es*

$$u(x) = \frac{x^{16}}{16} - \frac{4}{11}x^{11}. \tag{2.83}$$

*Reemplazando (2.82) en (2.79) se obtiene*

$$y_p(x) = \left(\frac{x^{16}}{16} - \frac{4}{11}x^{11}\right)x^{-10} = \frac{x^6}{16} - \frac{4x}{11}. \tag{2.84}$$

*Finalmente la solución general de (2.74) es*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = cx^{-10} + \frac{x^6}{16} - \frac{4x}{11}.$$

**Ejemplo 2.5.4.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y' + (\tan x)y = 2x\cos x + \sec x, \tag{2.85}$$

*donde* $0 < x < \pi/2$. *Se inicia resolviendo la ecuación lineal homogénea asociada a (2.85)*

$$y' + (\tan x)y = 0, \tag{2.86}$$

*Dado que la ecuación diferencial (2.86) es separable, entonces siguiendo el procedimiento se obtiene*

$$\frac{1}{y}dy = -(\tan x)dx, \tag{2.87}$$

*luego*

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int(\tan x)dx.$$

*Por lo tanto*

$$y_h(x) = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x| = \cos x,\ 0 < x < \pi/2. \tag{2.88}$$

*Considere una solución particular de la forma* $y_p(x) = u(x)\cos x$, *entonces*

$$y_p'(x) = u'(x)\cos x - u(x)\operatorname{sen} x. \tag{2.89}$$

*Sustituyendo* $y_p'(x)$ *definido en (2.89) en la ecuación diferencial (2.85) se obtiene*

$$u'(x)\cos x - u(x)\operatorname{sen} x + (\tan x)u(x)\cos x = 2x\cos x + \sec x, \tag{2.90}$$

*Simplificando la ecuación (2.90) se obtiene*

$$u'(x)\cos x = 2x\cos x + \sec x. \tag{2.91}$$

*La ecuación (2.91) es equivalente a*

$$u'(x) = 2x + \sec^2 x. \tag{2.92}$$

*La solución de (2.92) es*

$$u(x) = x^2 + \tan x,$$

*luego*

$$y_p(x) = (x^2 + \tan x)\cos x = x^2\cos x + \operatorname{sen} x.$$

*Finalmente la solución general de (2.85) es*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\cos x + x^2\cos x + \operatorname{sen} x.$$

### 2.5.2. Método de factor integrante para resolver ecuaciones diferenciales lineales

Sea la ecuación diferencial lineal

$$y'(x) + P(x)y = Q(x).$$

Como se vio en el método de factor integrante, las ecuaciones lineales tienen soluciones de la forma $y = ce^{ax}$, luego se puede considerar por factor integrante a $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, multiplicando entonces la ecuación diferencial por este factor, se tiene

$$\begin{aligned}
e^{\int P(x)dx}y'(x) + e^{\int P(x)dx}P(x)y &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \\
\frac{dy}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right) + P(x)\left(e^{\int P(x)dx}\right)y &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \\
\left(e^{\int P(x)dx}\right)dy + P(x)\left(e^{\int P(x)dx}\right)ydx &= e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \\
\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) &= e^{\int P(x)dx}Q(x)dx. \qquad (2.93)
\end{aligned}$$

Integrando la ecuación (2.93) con respecto a $x$ se obtiene.

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + K.$$

Por lo tanto

$$y(x) = \frac{\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + K}{e^{\int P(x)dx}}.$$

**Nota 2.5.3.** $e^{\int P(x)dx}$ *es factor integrante para las ecuaciones lineales de primer orden.*

**Ejemplo 2.5.5.** *Resolver por medio del método del factor integrante la ecuación del siguiente PVI*

$$\frac{dy}{dx} + y = x, \;\; y(0) = 4. \qquad (2.94)$$

*Como la ecuación (2.94) está en su forma estándar con $P(x) = 1$, entonces el factor integrante es*

$$e^{\int dx} = e^{x}.$$

*Ahora multiplicamos la ecuación diferencial por $e^x$ se obtiene*

$$e^x\frac{dy}{dx} + e^x y = xe^x,$$

*o equivalentemente*

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = xe^x. \qquad (2.95)$$

*Integrando (2.95) con respecto a $x$ se obtiene*

$$e^x y = xe^x - e^x + C. \qquad (2.96)$$

*Depejando $y$ en la ecuación (2.96) se obtiene*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{xe^x - e^x}{e^x} + \frac{C}{e^x} \\
&= x - 1 + Ce^{-x}. \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

*Reemplazando la condicion inicial $y(0) = 4$ en la ecuación (2.97) se obtiene $y(0) = 0 - 1 + Ce^{-0} = 4$ lo cual implica que $C = 5$. Por lo tanto la solución de PVI (2.94) es*

$$y(x) = x - 1 + 5e^{-x}.$$

**Nota 2.5.4.** *En general, el factor integrante para la ecuación diferencial*

$$y' + ay = g(x),$$

*es* $\mu(x) = e^{ax}$, *y la solución general está dada por*

$$y_g(x) = Ce^{-ax} + e^{-ax}\int_{x_0}^{x} g(t)e^{at}dt, \tag{2.98}$$

*donde el primer término de (2.98) corresponde a la solución general de la ecuación homogénea y el segundo término corresponde a la solución particular de la ecuación no homogénea.*

Para finalizar, el siguiente esquema muestra el mapa de ruta para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

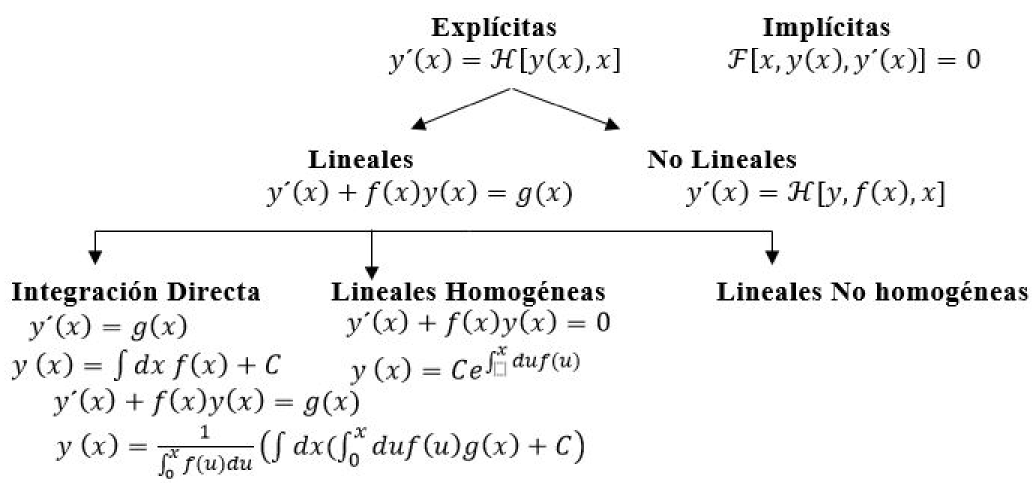



Figura 2.6: Mapa de ecuaciones diferenciales de primer orden.

## 2.6. Ecuación diferencial de Bernoulli

**Definición 2.6.1.** *La ecuación de la forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.99}$$

*donde* $n$ *es una constante, con* $n \neq 0$ *o* $n \neq 1$, *se denomina ecuación diferencial de Bernoulli de orden* $n$.

Para resolver la ecuación diferencial de Bernoulli se busca un operador que la reduzca a una ecuación diferencial lineal, es decir, inicialmente se busca eliminar el término $y^n$. Esto podría lograrse multiplicando la ecuación por $y^{-n}$, para ello, se busca una función tal que su integral sea $y^{-n}$. La función que cumple esta condición es $y^{1-n}$. De esta manera, se realiza el cambio de variable $z = y^{1-n}$, en efecto. Dividiendo entre $y^n$ la ecuación de Bernoulli se obtiene

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{2.100}$$

Sea $z = y^{1-n}$, derivando $z$ respecto a $x$ se obtiene

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.101}$$

Reemplazando (2.101) en la ecuación diferencial (2.100), se tiene

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x),$$

o de manera equivalente

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

la cual es una ecuación diferencial lineal.

**Ejemplo 2.6.1.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2. \tag{2.102}$$

*Dividiendo la ecuación entre $x$ se obtiene la ecuación de Bernoulli de segundo orden*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2. \tag{2.103}$$

*En este caso $n = 2$, por lo tanto $z = y^{1-2} = y^{-1}$, luego*

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

*Ahora multiplicando la ecuación diferencial (2.103) por $-y^{-2}$ se obtiene*

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -x. \tag{2.104}$$

*Reemplazando $z$ y $dz/dx$ en (2.104) se tiene*

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -x \tag{2.105}$$

*El factor integrante de (2.105) es*

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}. \tag{2.106}$$

*Multiplicando (2.106) por (2.105) se obtiene*

$$\begin{aligned} x^{-1}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}z &= -1 \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-1}z\right) &= -1. \end{aligned} \tag{2.107}$$

*Integrando (2.107) se obtiene*

$$x^{-1}z = -x + c,$$

*luego*

$$z(x) = (-x + c)x.$$

*Dado que $z = y^{-1}$, entonces*

$$y(x) = [z(x)]^{-1} = \frac{1}{x(-x+c)}.$$

**Ejemplo 2.6.2.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x. \tag{2.108}$$

*Dividiendo la ecuación entre $x$ se obtiene la ecuación de Bernoulli de segundo orden*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2. \tag{2.109}$$

*En este caso $n = 2$, por lo tanto $z = y^{1-2} = y^{-1}$, luego*

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

*Ahora multiplicando la ecuación diferencial (2.109) por $-y^{-2}$ se obtiene*

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}. \tag{2.110}$$

*Reemplazando $z$ y $dz/dx$ en (2.110) se tiene*

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}. \tag{2.111}$$

*La ecuación (2.111) es lineal con $P(x) = -1/x$ y $Q(x) = -\ln x/x$, en consecuencia su solución está dada por*

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{K + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}{e^{\int P(x)dx}} \\ &= \frac{K + \int \left(-\frac{\ln x}{x}\right)\frac{1}{x}dx}{\frac{1}{x}} \\ &= x\left(K - \int \frac{\ln x}{x^2}dx\right) \\ &= x\left(K + \frac{\ln x + 1}{x}\right). \end{aligned}$$

*Dado que $z = y^{-1}$, entonces*

$$y(x) = [z(x)]^{-1} = \frac{1}{x\left(K + \frac{\ln x + 1}{x}\right)}.$$

**Ejemplo 2.6.3.** *Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dy} + 1 = x \operatorname{sen} y. \tag{2.112}$$

*Multiplicando (2.112) por $x^{-1}$ se obtiene*

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + x^{-1} = \operatorname{sen} y. \tag{2.113}$$

*Sea $t = x^{-1}$, entonces $\frac{dt}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$ o equivalentemente*

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} = -\frac{dt}{dy}. \tag{2.114}$$

*Reemplazando (2.114) en (2.113) se obtiene*

$$-\frac{dt}{dy}+t=\operatorname{sen} y. \tag{2.115}$$

*La solución de (2.115) es*

$$\begin{aligned} t(y) &= e^{y}\left(K-\int e^{-y}\operatorname{sen} y\right) \\ &= e^{y}\left(K+e^{-y}(\cos y+\operatorname{sen} y)\right) \\ &= Ke^{y}+\cos y+\operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

*Dado que* $t=x^{-1}$, *entonces*

$$x(y)=[t(y)]^{-1}=\frac{1}{Ke^{y}+\cos y+\operatorname{sen} y}.$$

## 2.7. Ecuación de Ricatti

**Definición 2.7.1.** *Una ecuación de la forma*

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^{2}, \tag{2.116}$$

*se llama ecuación de Ricatti.*

El siguiente teorema establece el método de solución para la ecuación de Ricatti.

**Teorema 2.7.1.** *Si* $y_1$ *es una solución particular de la ecuación de Ricatti (2.116), entonces* $y=y_1+u$ *es una familia de soluciones de (2.116), en donde* $u$ *es la solución de la ecuación asociada*

$$\frac{du}{dx}-[Q(x)+2R(x)y_1]u=R(x)u^{2}. \tag{2.117}$$

*Demostración.* Sea $y=y_1+u$ es la solución general de la ecuación de Ricatti (2.116), entonces $y'=y_1'+u'$ también satisface (2.116). Reemplazando $y$ y $y'$ en (2.116) se obtiene

$$\begin{aligned} y_1'+u' &= P(x)+Q(x)(y_1+u)+R(x)(y_1+u)^{2} \\ &= P(x)+Q(x)(y_1+u)+R(x)(y_1^{2}+2y_1u+u^{2}) \\ &= P(x)+Q(x)(y_1+u)+R(x)y_1^{2}+2R(x)y_1u+R(x)u^{2} \\ &= y_1'+Q(x)u+2R(x)y_1u+R(x)u^{2}. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Simplificando (2.118) se obtiene la ecuación de Bernoulli de orden 2 (2.117). Por medio del cambio de variable $Z=u^{-1}$ la ecuación (2.117) se reduce a la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx}+[Q(x)+2R(x)y_1]z=-R(x). \tag{2.119}$$

Una vez obtenida la solución de (2.119) entonces $u=z^{-1}$ y por lo tanto la solución de la ecuación de Ricatti será $y=y_1+w$. □

**Ejemplo 2.7.1.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}+(1+2e^{x})y+y^{2}, \tag{2.120}$$

*si* $y_1(x)=e^{-x}$ *es una solución particular de (2.120).*

*En este caso*

$$P(x) = e^{2x},\ Q(x) = 1 + 2e^{x}) \quad y \quad R(x) = 1. \tag{2.121}$$

*Sustituyendo (2.121) en la ecuación (2.119) se obtiene*

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} + (1 + 2e^{x} + 2(-e^{x})(1))z &= -1 \\ \frac{dz}{dx} + z &= -1. \end{aligned} \tag{2.122}$$

*La solución de (2.122) es*

$$z(x) = -1 + ce^{-x}. \tag{2.123}$$

*Dado que* $u = z^{-1}$, *entonces*

$$u(x) = \frac{1}{ce^{-x} - 1}.$$

*Por lo tanto la solución de (2.120) es*

$$y(x) = y_1(x) + u(x) = -e^{x} + \frac{1}{ce^{-x} - 1}.$$

## 2.8. Método de las Isoclinas

Una función $y = f(x)$ es diferenciable en un punto $x_0$, si localmente se puede aproximar por una recta tangente $L(x)$ en $x_0$, y las soluciones a las ecuaciones diferenciales son diferenciables. La Figura 2.7 muestra las líneas tangentes en cada punto de la función $f(x) = \text{sen}\left(0{,}2x^2\right)$.

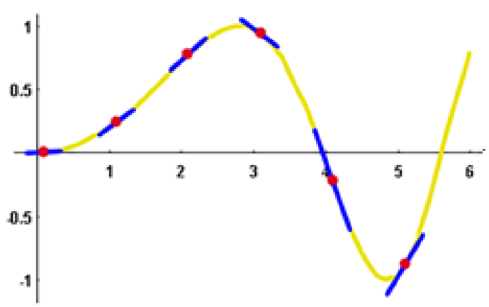



Figura 2.7: Líneas tangentes en puntos de la función.

Este método se basa en la idea de campo y curvas integrales que se estudia en campos vectoriales. La idea es bien simple, los campos de vectores (también llamados los campos de dirección) son una herramienta para obtener gráficamente las soluciones a una ecuación diferencial de primer orden. En general una ecuación diferencial de primer orden (explícita respecto a la derivada) se podrá representar como $y' = f(x, y)$. Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad representa una función de dos variables, la cual tendrá un valor en cada punto $(x, y)$. Ese valor (por la igualdad que representa la ecuación diferencial) será el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a ese punto. Con eso, al construir una gráfica se recuerdan las curvas integrales de los campos vectoriales y se reconstruyen las curvas solución a partir de sus tangentes.

**Ejemplo 2.8.1.** *Considere la ecuación diferencial*

$$y' = -2xy. \tag{2.124}$$

*Se determina la pendiente,* $y'(x)$, *de las soluciones* $y(x)$ *de (2.124). Una vez se conozcan los valores para* $x$ *y* $y$, *por ejemplo, si* $x = 1$ *y* $y = -1$, *la pendiente de la solución* $y$ *que pasa a través del punto* $(1, -1)$ *es* $-2(1)(-1) = 2$. *Lo cual se representa gráficamente, insertando un segmento de línea en el punto* $(1, -1)$ *de pendiente* $2$.

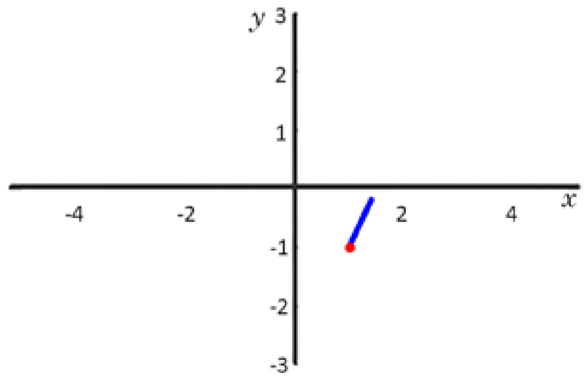



Figura 2.8: Segmento de línea en el punto $(1,-1)$ de pendiente 2.

*Así, la solución de la ecuación diferencial con la condición inicial* $y(1)=-1$ *se asimila a este segmento de línea mientras se está cerca de* $x=1$. *Por supuesto, hacer esto en apenas un punto no da suficiente información sobre las soluciones. No obstante, al realizar este procedimiento simultáneamente en muchos puntos en el plano, se obtienen trazos de líneas tangentes a las soluciones de la ecuación diferencial conectando los puntos, en la Figura 2.9 se muestra una idea cercana a la solución de la ecuación diferencial* $y'=-2xy$. *La Figura 2.10 contiene cuatro ejemplos de estas construcciones. Específicamente, muestra*

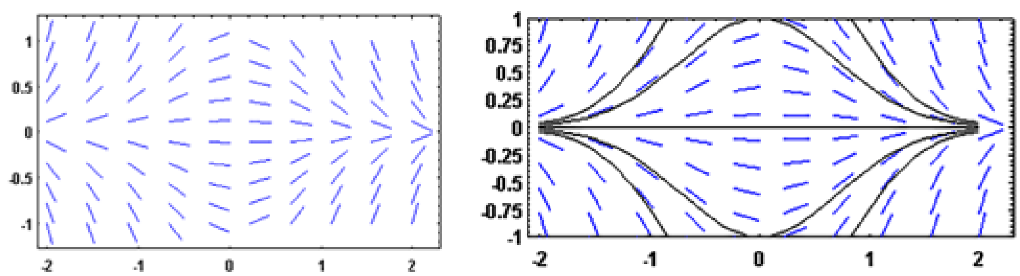


Figura 2.9: Campos de vectores tangentes a la solución de $y'=-2xy$.

*las isoclinas de las siguientes ecuaciones diferenciales*

1. $\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}-\dfrac{y}{3}$.
2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$.
3. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.
4. $\dfrac{dy}{dx}=1+xy$.

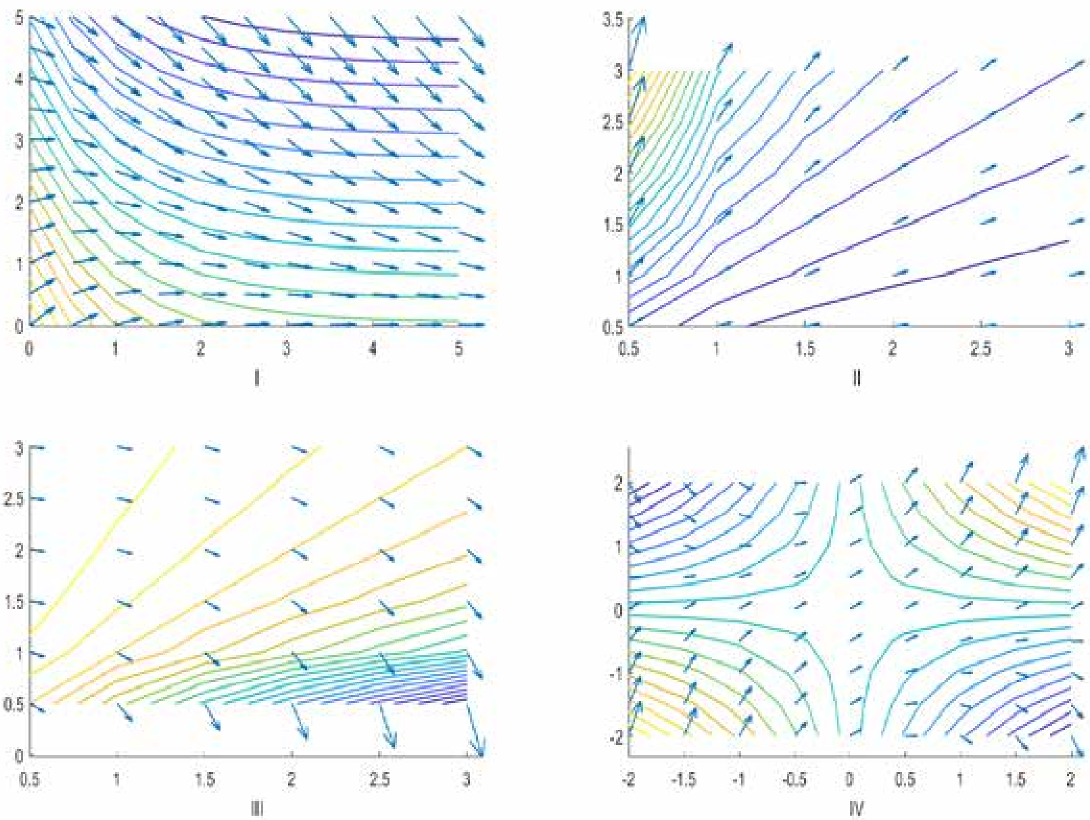



Figura 2.10: Isoclinas para cuatro ecuaciones diferenciales.

*La Figura 2.10 muestra la representación gráfica para las tangentes de las ecuaciones diferenciales definidas anteriormente. Es importante señalar que este método permite obtener las posibles soluciones de una ecuación diferencial no importa lo complicada que sea. En la región I se muestran las gráficas de las soluciones particulares para diferentes condiciones iniciales de la ecuación* $\frac{dy}{dx} = e^{-x} - \frac{y}{3}$*. La región II corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuación* $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$*. Nótese que son curvas integrales radiales, para el punto* $x = 0$ *no está definida la curva integral. La región III representa las tangentes de la ecuación* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$*. La región IV contiene las tangentes a la ecuación* $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ *en ella se han indicado las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a diferentes condiciones iniciales.*

### 2.8.1. Puntos ordinarios y singulares

Un punto ordinario de orden $n$, es un punto $x_0$ en el cual la función y sus n-derivadas están definidas, esto es $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0), \ldots,$ $y^{(n)}(x_0)$ están definidas. En contraste a un punto ordinario llamaremos punto extraordinario o singular a un punto $x_s$ tal que la función o alguna de sus derivadas no se encuentran definidas en éste.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, los puntos ordinarios y singulares tienen que ver con la función y su primera derivada. Nótese que en las regiones I y IV de la Figura 2.10, todos los puntos son ordinarios de orden infinito. En la región II la función no está definida para $x_s = 0$ con lo cual es un punto singular, y en la región III, la función está definida para $x_s = 0$ pero no así su derivada por lo cual es un punto singular.

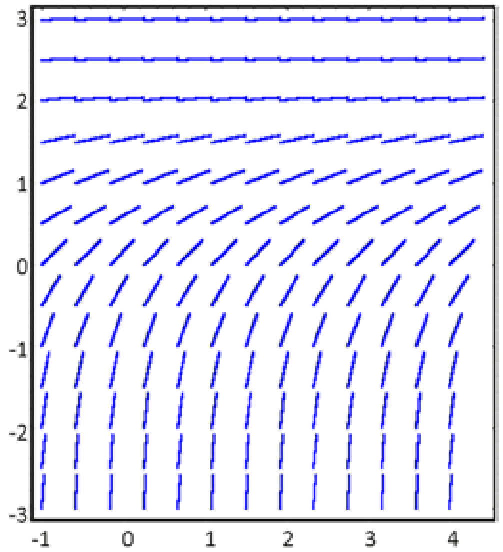



Figura 2.11: Isoclinas solución $y'(x) = e^{-y}$.

### 2.8.2. Ecuación diferencial Autónoma

**Definición 2.8.1.** *La ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{2.125}$$

*se llama autónoma porque la función $f$ no depende de la variable independiente $x$.*

Considere la ecuación diferencial $y'(x) = e^{-y}$, el lado derecho de la ecuación diferencial depende solamente de la variable dependiente $y$, no de la variable independiente $x$, es decir, es una ecuación autónoma. Las ecuaciones diferenciales autónomas son siempre separables y sus campos son horizontalmente invariantes, es decir, a lo largo de una línea horizontal la pendiente no varía (ver Figura 2.11). El hecho de que la ecuación autónoma (2.125) sea de variables separables implica que existe una única solución de la ecuación que satisface $y(x_0) = y_0$ si $f(y_0) \neq 0$. Así mismo, si $y(x)$ es la solución tal que en $x_0$ toma el valor $y_0$, entonces $y(x + X)$ es la solución que en $x_1$ toma el valor $y_0$, donde $X = x_0 - x_1$. Gráficamente esto significa que una solución se obtiene corriendo la otra $X$ unidades hacia la izquierda.

**Definición 2.8.2.** *Una solución constante $y(x) = y_0$ de $y' = f(y)$ se llama punto de equilibrio o solución estacionaria de la ecuacion diferencial.*

**Nota 2.8.1.** *Observe que si $y_0$ es un punto de equilibrio, entonces $f(y_0) = 0$.*

En este caso, la solución que en algún instante $x$ toma el valor de $y_0$, será necesariamente constante igual a $y_0$. Si se tiene un modelo poblacional, el hecho de que $y_0$ sea punto de equilibrio significa que, si la población inicial es $y_0$, entonces se mantendrá este valor en el futuro.

La Figura 2.11 muestra las isoclinas de la ecuación diferencial $y'(x) = 0{,}3(1 - y/15)$, mientras que la Figura 2.12 muestra simultáneamente tanto las isoclinas como las curvas solución de la anterior ecuación diferencial. Como se puede observar, el campo vectorial bosquejado por las isoclinas muestran la dirección o el flujo que siguen las soluciones de la ecuación diferencial.

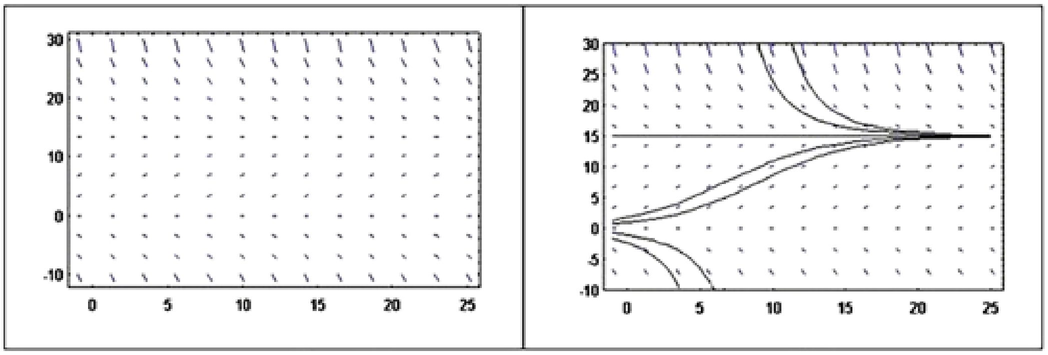


Figura 2.12: Isoclinas de la ecuación diferencial $y'(x) = 0{,}3(1 - y/15)$.

Puede suceder que el modelo considerado sufra una pequeña alteración en cierto momento (por ejemplo una guerra o una repentina inmigración), y se desee saber si después de esta perturbación la población vuelve a estabilizarse en el valor $y_0$, o si toma otro rumbo. Para ello, se considera que si la función es positiva en $y$ toda solución que en un cierto valor $x$ sea igual a $y$ tendrá que ser creciente en el instante $x$, por tanto, si $y(x_0) = 0$ y $f$ positiva es un semi-entorno izquierdo de $y_0$, entonces para cualquier $y$ en ese entorno, se tiene que la solución que pasa por $y$ crece, y por tanto se mantiene en el entorno y tenderá a $y_0$. Si en cambio es negativa en un semientorno izquierdo de $y_0$, entonces la solución que tome el valor $Y_0$ decrecerá, alejándose de $y_0$. Si en un entorno reducido de $y_0$ el signo de $f$ es constante, entonces $y_0$ es inestable.

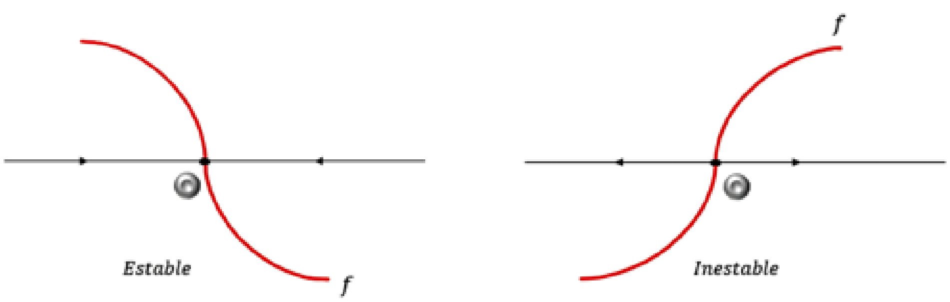



Figura 2.13: Criterio de estabilidad para $y_0$

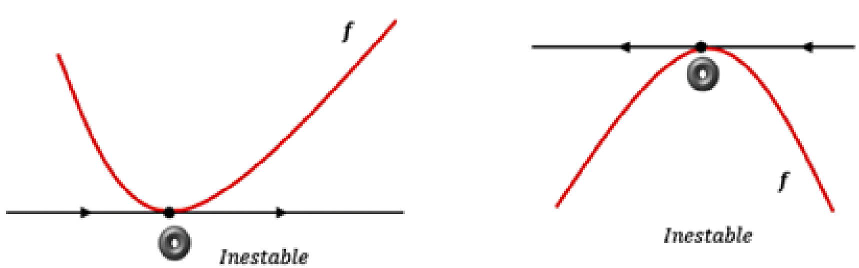



Figura 2.14: Criterio de inestabilidad para $y_0$

**Proposición 2.8.1** (Criterio de estabilidad)**.** *Un punto de equilibrio $y_0$ es estable si $f(y)$ es positiva en un semi-entorno izquierdo de $y_0$ y negativa en uno derecho.*

**Proposición 2.8.2** (Criterio de inestabilidad)**.** *Un punto de equilibrio $y_0$ es inestable si $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de $y_0$ o positiva en uno derecho.*

Si $f$ es una función derivable, la condición de la Proposición 2.8.1 es verificada siempre que $f'(y_0) < 0$, y entonces se tiene el siguiente corolario

**Corolario 2.8.1.** *Un punto de equilibrio $y_0$ es estable si $f'(y_0) < 0$.*

**Corolario 2.8.2.** *Un punto de equilibrio $y_0$ es inestable si $f'(y_0) > 0$.*

Cuando una ecuación autónoma no pueda resolverse por lo complicadas que puedan ser las integrales involucradas, de todos modos es posible calcular el límite de una solución cuando $x$ tiende a $\pm\infty$. En efecto, se tiene determinado el signo de la función $f$ y que y es una solución cuyo valor en algún instante $x$ pertenece a un intervalo $(a, b)$ donde $f$ es positiva y que $f(b) = 0$. Entonces $x$ es una función creciente, y solo dejaría de ser creciente si en algún momento $y(x)$ se pasa de $b$. Pero esto no es posible porque el punto $b$ es de equilibrio, y si $y$ alcanza alguna vez el valor $b$ quiere decir que es b para todo $x$. Se concluye que la solución es creciente para todo $x > 0$, y resta ver hasta donde llega, es decir, se desea saber el $\lim_{x\to 0} y(x)$ que existe porque la $y(x)$ es creciente. El límite es precisamente $b$: en efecto, si fuera menor, sería algún $\alpha < b$ donde la $f$ es positiva, y entonces $y'(x)$ es mayor que una constante positiva a partir de un cierto $x$, y eso es absurdo ya que implicaría que la $y(x)$ tiende a $+\infty$ (ver Figuras 2.13 y 2.14).

**Ejemplo 2.8.2.** *Para verificar esto, sea el modelo para la temperatura de un fluido está dado por*

$$y' = (y^2 - 3y + 2)e^{-y},$$

*Integrado la ecuación anterior se obtiene*

$$\int \frac{dy}{(y^2 - 3y + 2)e^{-y}} = \int dx = x + c.$$

*Si el interés es averiguar si la temperatura llegará a cero o no, y cuáles son los estados de equilibrio estables del sistema. Es factible determinarlo estudiando el signo de la función $f(y) = (y^2 - 3y + 2)e^{-y}$ (ver Figura 2.15). Los puntos equilibrio (o sea las raíces de $f$) son $x = 1$ y $x = 2$; se tiene que $f$ es*

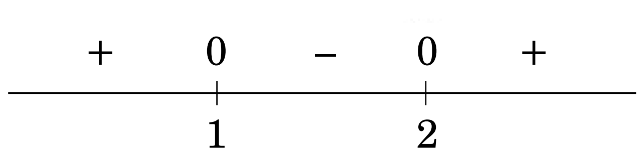



Figura 2.15: signos de $f(y)$.

*negativa entre 1 y 2 y positiva fuera del intervalo $[1, 2]$. Por tanto*

1. *Como $f$ es positiva a la izquierda de 1 y negativa a su derecha, resulta que 1 es punto de equilibrio estable.*
2. *Como $f$ es negativa a la izquierda de 2 y positiva a su derecha, resulta que 2 es punto de equilibrio inestable.*
3. *Si la condición inicial es $y_0 < 1$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio 1.*
4. *Si la condición inicial es $y_0 \in (1, 2)$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio estable 1.*
5. *Si la condición inicial es $y_0 > 2$ entonces la solución tenderá a $+\infty$.*
6. *Si la temperatura inicial es positiva, entonces se mantendrá positiva en el futuro.*

## 2.9. Ecuación de Clairaut

**Definición 2.9.1.** *La ecuación diferencial de la forma*

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{2.126}$$

*se llama de Clairaut.*

La solución de (2.126)se efectúa realizando la sustitución $p = \frac{dy}{dx}$, en la nueva variable (2.126) se reescribe como

$$y = xp + f(p). \tag{2.127}$$

Derivando (2.127) con respecto de $x$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx}. \tag{2.128}$$

Dado que $p = dy/dx$, entonces (2.128) se reduce a

$$0 = x\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{df}{dp}\right) \tag{2.129}$$

A partir de (2.129) se establece que $\dfrac{dp}{dx} = 0$ o $x + \dfrac{df}{dp} = 0.$

**Caso 1:** Si $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = c$ con $c$ constante. Reemplazando el valor de $p$ en (2.127) se obtiene $y = px + f(c)$ que corresponde a una familia de rectas.

**Caso 2:** Si $x = -\frac{df}{dp}$, entonces (2.127) se reescribe como $y = -p\dfrac{df}{dp} + f(p)$ la cual corresponde a la ecuación de la curva envolvente de la familia de rectas $y = cx + f(c)$.

**Ejemplo 2.9.1.** *Resolver la ecuación*

$$y = x\frac{dy}{dx} + 1 - \ln\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{2.130}$$

*Sea* $p = \frac{dy}{dx}$*, entonces (2.130) se reescribe como*

$$y = xp + 1 - \ln(p). \tag{2.131}$$

*Derivando (2.131) con respecto a* $x$ *se obtiene*

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}. \tag{2.132}$$

*Dado que* $p = dy/dx$*, entonces (2.132) se reduce a*

$$0 = x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p}\right). \tag{2.133}$$

*A partir de (2.133) se establece que* $\dfrac{dp}{dx} = 0$ *o* $x = \dfrac{1}{p}.$

- *Si* $\dfrac{dp}{dx} = 0$*, entonces* $p = c$ *con* $c$ *constante. Reemplazando el valor de* $p$ *en (2.127) se obtiene* $y = cx + 1 - \ln c.$

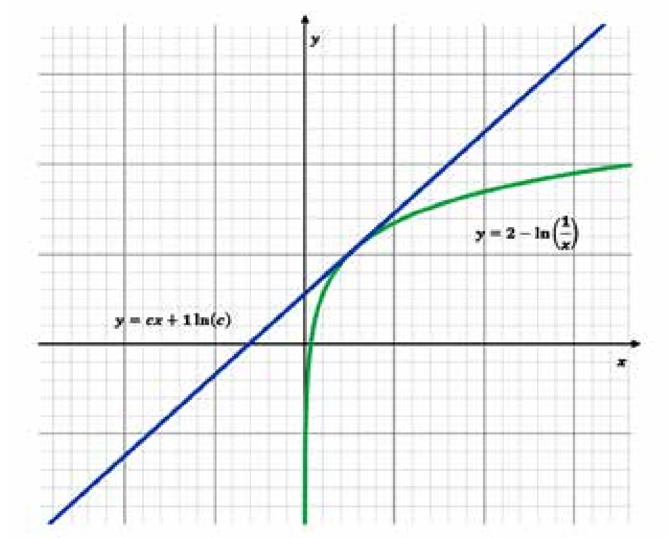



Figura 2.16: Gráfica de la solución de (2.130).

- *Si* $x = \frac{1}{p}$*, entonces (2.127) se reescribe como*

$$y = x\frac{1}{x} + 1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Ejemplo 2.9.2.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y = x\frac{dy}{dx} - \tan\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{2.134}$$

*Sea* $p = \frac{dy}{dx}$*, entonces (2.134) se reescribe como*

$$y = xp - \tan(p). \tag{2.135}$$

*Derivando (2.135) con respecto a* $x$ *se obtiene*

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - \sec^2(p)\frac{dp}{dx}. \tag{2.136}$$

*Dado que* $p = dy/dx$*, entonces (2.136) se reduce a*

$$0 = x\frac{dp}{dx} - \sec^2 p\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\left(x - \sec^2 p\right). \tag{2.137}$$

*A partir de (2.137) se establece que* $\frac{dp}{dx} = 0$ *o* $x = \sec^2 p$*.*

- *Si* $\frac{dp}{dx} = 0$*, entonces* $p = c$ *con* $c$ *constante. Reemplazando el valor de* $p$ *en (2.127) se obtiene* $y = cx - \sec c$*.*

- *Si* $x = \sec^2 p$*, entonces (2.127) se reescribe como*

$$y = p\sec^2 p - \tan p,$$

*que representa la ecuación de la envolvente de la familia de rectas* $y = cx - \tan c$*.*

**Ejemplo 2.9.3.** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y = xy' + 2\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{2.138}$$

*Sea* $p = \frac{dy}{dx}$*, entonces (2.138) se reescribe como*

$$y = xp + 2\sqrt{1 + p^2}. \tag{2.139}$$

*Derivando (2.139) con respecto a* $x$ *se obtiene*

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{2p\dfrac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{2.140}$$

*Dado que* $p = dy/dx$*, entonces (2.140) se reduce a*

$$0 = x\frac{dp}{dx} + \frac{2p\dfrac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \tag{2.141}$$

*A partir de (2.137) se establece que* $\dfrac{dp}{dx} = 0$ *o* $x = -\dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$.

- *Si* $\dfrac{dp}{dx} = 0$*, entonces* $p = c$ *con* $c$ *constante. Reemplazando el valor de* $p$ *en (2.127) se obtiene* $y = cx + 2\sqrt{1+c^2}$.
- *Si* $x = -\dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$*, entonces (2.127) se reescribe como*

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2p^2}{\sqrt{1+p^2}} + 2\sqrt{1+p^2} \\ &= \frac{-2p^2 + 2 + 2p^2}{\sqrt{1+p^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned}$$

*Lo anterior implica que*

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{\sqrt{1+p^2}} \\ x &= -\frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}, \end{aligned}$$

*son las ecuaciones paramétricas de la envolvente de la familia de rectas dada por* $y = cx + 2\sqrt{1+c^2}$.

## 2.10. Ejercicios

### 2.10.1. Ecuaciones de Variables Separables

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^3$.
3. $s \ln r \dfrac{dr}{ds} = \left(\dfrac{s+1}{r}\right)^2$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$.
5. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^{-1} x$.
6. $r\dfrac{d\theta}{dr} = -\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.
7. $(1 + y^2)dx = (y - \sqrt{1 + y^2})(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} dy$.
8. $(\sqrt{2} + \sqrt{2y})dy = (y + 1)ds$ donde $y = y(s)$.
9. $\dfrac{dy}{dx} - y \tan x = 0$.

### 2.10.2. Ecuación de la forma $\dfrac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $4\frac{dy}{dx} = (8x + 2y + 4)^{3/2} + 3$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}x + \pi y + e)^3}{10}$.
3. $dx = (t + 2x + 4)^{5/4} dt + dt$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = 5 + \sqrt[3]{2y - 3x + 7}$.
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2 - e^{x+y+1}$.

### 2.10.3. Ecuaciones diferenciales exactas

En cada problema determine si la ecuación diferencial es exacta. Si es exacta resolverla.

1. $\left(\dfrac{y}{x} - \ln y\right) dx + \left(\ln x - \dfrac{x}{y}\right) dxy = 0$.
2. $(2x - 1)dx + (3y + 5)dy = 0$.
3. $(2x + y)dx + (x + 6y)dy = 0$.
4. $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$.

5. $\left(x - y^3 - y^2 \operatorname{sen} x\right) dx = (3xy^2 + 2y\cos x)dy$.
6. $\left(3x^2y + e^y\right) dx + \left(x^3 + xe^y - 5y\right) dy = 0$.
7. $\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t^2 + y^2}\right) dt + \left(ye^y + \dfrac{t}{t^2 + y^2}\right) dy = 0$.
8. $\left(\dfrac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right) \dfrac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x)$.
9. $\dfrac{ydx + xdy}{1 - x^2y^2} + xdx = 0$.
10. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx = \sqrt{x^2 - y}dy$.

### 2.10.4. Ecuaciones reducibles a diferenciales exactas

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\left(3x^2 - y^2\right) dy - 2xydx = 0$.
2. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\, dy = 0$.
3. $(x \ln y - 2xy)dx + (x + y)dy = 0$.
4. $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$.
5. $xdy - ydx = (1 + y^2)dy$.
6. $(y + x)dy = (y - x)dx$.
7. $dy + \dfrac{y}{x}dx = \operatorname{sen} xdx$.
8. $\cos xdx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right) \operatorname{sen} xdy = 0$.

### 2.10.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y' + y = e^{4x}$.
2. $x^3y' + xy = 8$.
3. $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} - xy = x + x^2$.
4. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$.
5. $y' + 2xy = y + 4x - 2$.
6. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$.
7. $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} - xy = x + x^2$.
8. $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$.
9. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x + 1}{x + 1}y = x - 1$.

# Capítulo 3

# Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de primer orden

"Es difícil apreciar del todo los capullos de las plantas en floración sin un conocimiento razonable de las raíces, tallos y hojas que los nutren y soportan. El mismo principio es válido en matemáticas, en particular, en un curso de ecuaciones diferenciales".

Autor: Desconocido

Uno de los problemas que un científico encuentra en su investigación diariamente es resolver la pregunta "¿Cómo traduzco un fenómeno a un sistema de ecuaciones que lo describa? Es generalmente imposible describir un fenómeno totalmente, se centran los esfuerzos generalmente para un sistema de ecuaciones que describa el sistema o una situación aproximada y adecuada.

En general, una vez que se construye la ecuación o el sistema de ecuaciones, se comparan los datos generados por las ecuaciones con los datos verdaderos recopilados del sistema (por la medida). Si los dos sistemas de datos "convienen el" están cercanos, podría pensarse que el sistema describe de manera eficiente, algunas veces efectiva constituyéndose en un modelo matemático si es validado. Por ejemplo, es factible utilizar las ecuaciones para hacer predicciones sobre el comportamiento a largo plazo del sistema. Si una predicción conduce a algunas conclusiones que no están cerca del comportamiento futuro del mundo real, deben modificarse, corregirse o no tenerse en cuenta las ecuaciones subyacentes.

Los pasos básicos en la construcción de un modelo son:

**Paso 1:** Indique claramente las suposiciones en las cuales el modelo está basado. Estas suposiciones deben describir las relaciones entre las cantidades que se analizarán.

**Paso 2:** Describa totalmente los parámetros y las variables a utilizar en el modelo.

**Paso 3:** Utilice los supuestos (del paso 1) para derivar las ecuaciones matemáticas que relacionan los parámetros y las variables (del paso 2).

## 3.1. Crecimiento y decrecimiento

### 3.1.1. Ecuación de Malthus

El crecimiento poblacional o dinámica de poblaciones, fue uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano. El economista inglés Thomas Malthus en 1798 logró describir la curva de crecimiento de la población de un país. En esencia la idea del modelo malthusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país con índices constantes de nacimiento y mortalidad, crece en forma proporcional a la población (si dos cantidades $u$ y $v$ son proporcionales, se escribe $u\alpha v$, esto quiere decir que una cantidad es múltiplo de otra: $u = kv$). Para el caso de la población total $P(t)$ de ese país en cualquier momento $t$, es

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{3.1}$$

donde $K$ es la constante de proporcionalidad. Dado que (3.1) es una ecuación de variables separables, entonces

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt. \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) se obtiene

$$\ln|P| = kt + C,$$

luego

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C}.$$

En consecuencia

$$P(t) = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C}.$$

Sea $P_0$, la cantidad de población inicial, es decir, en un tiempo $t = 0$,

$$P(0) = e^{k*(0)}e^{C} = e^{C} = P_0.$$

Por lo tanto, la solución de (3.1) sujeta a la condición inicial $P(0) = P_0$ es

$$P(t) = P_0e^{kt}. \tag{3.3}$$

La función $P$ definida en (3.3) define una familia de curvas según el valor inicial $P_0$. $k$ indica la velocidad de variación de $P$ con relación a $t$. A partir de (3.1) se verifica que si la constante de proporcionalidad $k$, y, $P(t)$ son positivas, entonces $P'(t)$ es positiva y $P(t)$ es creciente, en este caso se dice que el problema es de crecimiento. Pero, si $k$ es negativa, y, $P(t)$ es positiva, entonces $P'(t)$ será negativa, lo cual implica que $P(t)$ es decreciente, y el problema es de decrecimiento.

**Ejemplo 3.1.1** (Crecimiento del cultivo de bacterias)**.** *Suponga que la población de una colonia de bacterias crece de manera proporcional a la población en el tiempo $t$, que la población inicial de bacterias fue de 1000 y después de tres horas de observación, desde el inicio del proceso, se detectan 2000 bacterias.*

Figura 3.1: Bacterias.

**Solución:** A partir de la información disponible se establece $P(0) = 1000$ y $P(3) = 2000$. Dado que es un problema de crecimiento $P(t)$ satisface la ecuación diferencial (3.1) cuya solución está dada por (3.3). Evaluando (3.3) en $t = 0$ se obtiene $P(0) = P_0e^{k_0} = P_0$, lo anterior implica que $P_0 = P(0) = 1000$. Por otro lado, reemplazando $t = 3$ en (3.3) se obtiene $P(3) = P_0e^{3k} = 1000e^{3k}$. Reemplazando $P(3) = 2000$ en la ecuación anterior se obtiene

$$2000 = 1000e^{3k}, \tag{3.4}$$

lo cual permitirá conocer el valor de $k$. En efecto, la solución de (3.4) es equivalente a $2 = e^{3k}$ luego $\ln 2 = 3k$ lo cual implica que $k = \ln 2/3 = 0{,}347$. Así entonces, la ecuación que modela el fenómeno es

$$P(t) = 1000e^{0{,}347t}.$$

Observe que $e^{kt} = e^{\ln 2(t/3)} = \left(e^{\ln 2}\right)^{t/3} = 2^{t/3}$, por consiguiente la solución de (3.1) se reescribe como

$$P(t) = 1000\left(2^{t/3}\right).$$

Con esta ecuación podemos determinar, por ejemplo, la cantidad de bacterias que habría al término de 4 horas; ella sería $P(4) = 1000\left(2^{4/3}\right) = 4000$ ; note que con la primera ecuación, el valor es $P(4) = 3999{,}999996$.

**Ejemplo 3.1.2** (Crecimiento del cultivo de bacterias). *Un cultivo tiene una cantidad inicial $N_0$ de bacterias. Cuando $t = 1hora$, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.*

**Solución:** *Sea $N(t)$ la cantidad de bacterias en el tiempo $t$, entonces a partir de los datos se obtiene $N(0) = N_0$ y $N(1) = 3N_0/2$. Se desea establecer el tiempo $t = t^*$ para el cual la cantidad inicial de bacterias se triplica; es decir, se debe encontrar $t^*$ tal que*

$$N(t^*) = 3N_0. \tag{3.5}$$

*Dado que la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, entonces el fenómeno es modelado por la ecuación diferencial*

$$\frac{dN}{dt} = kN, \tag{3.6}$$

*donde $k$ es la tasa de crecimiento poblacional constante. La solución de (3.6) está dada por*

$$N(t) = Ce^{kt}, \tag{3.7}$$

*donde $C$ es la constante de integración. Reemplazando $N(0) = N_0$ en (3.7) se obtiene $N(0) = Ce^{k\cdot 0} = C = N_0$, lo cual implica que $C = N_0$. Por lo tanto (3.7) se reescribe como*

$$N(t) = N_0e^{kt}. \tag{3.8}$$

*Evaluando en $t = 1$ la expresión para $N$ definida en (3.8) y utilizando la condición $N(1) = 3N_0/2$ en (3.8) se obtiene la siguiente igualdad $N_0e^k = 3N_0/2$, a partir de la ecuación anterior se despeja $k$ obteniendo*

$$k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}405.$$

*Por lo tanto*

$$N(t) = N_0e^{0{,}405t}. \tag{3.9}$$

*Ahora, utilizando la ecuación (3.5) se obtiene*

$$N(t^*) = N_0e^{0{,}405t^*} = 3N_0, \tag{3.10}$$

*a partir de (3.10) se despeja $t^* = \dfrac{\ln 3}{0{,}405} = 2{,}71$. Por tanto, el tiempo necesario para triplicar la población de bacterias es de $2{,}71$ horas.*

### 3.1.2. Crecimiento Logístico

**Ejemplo 3.1.3.** *Halle la solución de la ecuación diferencial que describe el hecho de que cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su límite superior y su tamaño actual.*

Figura 3.2: Alusión al crecimiento.

**Solución:** Sea $P(t)$ el tamaño de la población en el tiempo $t$, y $L$ el límite superior impuesto a la población por el medio ambiente. Entonces, el ritmo de crecimiento de la población es $\frac{dP}{dt}$, y la diferencia entre el límite superior y la población es $= L - P$. Como "conjuntamente proporcional"significa "proporcional al producto", entonces la ecuación diferencial que modela el problema es,

$$\frac{dP}{dt} = kP(L-P), \tag{3.11}$$

siendo $k$, la constante de proporcionalidad. Ajustando las variables, la ecuación queda $\frac{dP}{P(L-P)} = kdt$ o en la forma general $kdt = \frac{dP}{P(L-P)} = 0$, integrando término a término se tiene

$$\int kdt - \int \frac{dP}{P(L-P)} = C. \tag{3.12}$$

La primera integral es inmediata, la segunda se puede resolver aplicando fracciones parciales así:

$$\frac{1}{P(L-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{L-P},$$

luego $1 = A(L-P) + BP$. la ecuación anterior implica que $1 = AL$ y $A = B$ lo cual implica que $A = B = 1/L$. De esta forma, la ecuación (3.12) se reescribe como

$$\begin{aligned} kt - \int \left[\frac{1}{(LP)} + \frac{1}{L(L-P)}\right] dp &= C \\ kt - \frac{1}{L}\ln P + \frac{1}{L}\ln(L-P) &= C. \end{aligned}$$

Multiplicando por $L$ la ecuación anterior, se obtiene $KLt - \ln P + \ln(L-P) = CL$. Ahora aplicamos las propiedades de los logaritmos y simplificando se obtiene

$$\ln\frac{L-P}{P} = L(C-kt),$$

luego

$$\frac{L-P}{P} = e^{L(C-kt)}.$$

Despejando $P$ a partir de la ecuación anterior se obtiene

$$P(t) = \frac{1}{1 + C_1 e^{-kLt}},$$

donde $C_1 = e^{CL}$.

Figura 3.3: Estudiantes.

**Ejemplo 3.1.4** (Propagación de un virus)**.** *Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga al virus no sólo a la cantidad $x$ de alumnos infectados, sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determinar la cantidad de alumnos infectados seis días después si se observa que a los cuatro días habían 50 alumnos contagiados, $x(4) = 50$.*

**Solución:** Suponiendo que nadie sale de la escuela durante la epidemia, debemos resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x). \tag{3.13}$$

donde $x(t)$ representa la cantidad de alumnos infectados en el tiempo $t$ y $k$ es la tasa constante de crecimiento de la población de infectados. Separando variables e integrando por fracciones parciales, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x(1000-x)} &= kdt \\ \left( \frac{\frac{1}{1000}}{x} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000-x} \right) dx &= kdt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Integrando en ambos lados de la ecuación (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\frac{1}{1000}}{x} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000-x} \right) dx &= \int dt \\ \frac{1}{1000} \ln \left| \frac{x}{1000-x} \right| &= kt + c_1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{x}{1000-x} = c_2 e^{1000kt}.$$

Despejando la variable $x$ como función de $t$, se tiene

$$x(t) = \frac{1000 c_2 e^{1000kt}}{1 + c_2 e^{1000kt}} = \frac{1000 c_2}{e^{-1000kt} + c_2}. \tag{3.15}$$

Dado que al inicio de la infección solo un alumno es portador del virus de la gripe entonces $x(0) = 1$, reemplazando la ecuación anterior en (3.15) se verifica que $1 = \frac{1000c_2}{1+c_2}$, por lo tanto $c_2 = 1/999$. Reemplazando el valor de $c$ en (3.15) se obtiene

$$x(t) = \frac{\frac{1000}{999}}{e^{-1000kt} + \frac{1}{999}}. \tag{3.16}$$

Reemplazando la segunda condición inicial $x(4) = 50$ en (3.16) se obtiene

$$50 = \frac{\frac{1000}{999}}{e^{-4000t} + \frac{1}{999}}, \tag{3.17}$$

luego

$$k = -\frac{\ln\left(\frac{19}{999}\right)}{4000} = 0{,}0009906.$$

Reemplazando el valor de $k$ en (3.16) se obtiene

$$x(t) = \frac{\frac{1000}{999}}{e^{-0{,}9906t} + \frac{1}{999}}. \tag{3.18}$$

Ahora, evaluando (3.18) en $t = 6$ se obtiene

$$x(6) = \frac{\frac{1000}{999}}{e^{-0{,}9906\cdot 6} + \frac{1}{999}} = 276{,}25.$$

Por lo tanto después de 6 días habrán 276 estudiantes infectados con la gripe.

**Ejemplo 3.1.5** (Uso de sistemas computarizados bajo fórmula dada)**.** *La cantidad $N(t)$ de supermercados del país que están usando sistemas de revisión computarizados se describe por el problema con valores iniciales*

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - 0{,}0005N),\ \ N(0) = 1. \tag{3.19}$$

*Se debe predecir cuántos supermercados se espera que adopten el nuevo procedimiento en un periodo de tiempo largo. Resuelva el problema con valores iniciales ¿Cuántas compañías se espera que adopten la nueva tecnología cuando t=10?*

**Solución:** *Siguiendo un procedimiento similar al realizado en el Ejemplo 3.1.4 se calcula la solución del PVI definido en (3.19), la cual está dada por*

$$N(t) = \frac{2000e^t}{1999 + e^t}.$$

*Ahora, para $t = 10$ se tiene*

$$N(10) = \frac{2000e^{10}}{1999 + e^{10}} = 1833, 59.$$

*Por tanto, se espera que 1834 empresas opten por la nueva tecnología en 10 años.*

### 3.1.3. Vida media

La vida media es una medida de estabilidad de una sustancia radioactiva, es simplemente el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute a la mitad de los átomos de una muestra inicial, $A_O$, y se conviertan en átomos de otro elemento. Por ejemplo, la vida media del Radio ($Ra - 256$), átomo muy radioactivo, es de aproximadamente 1700 años. En este lapso de tiempo la mitad de determinada cantidad de átomos $Ra - 256$ se transforma en átomos Radón, $Rn - 222$. El Uranio ($U - 238$) tiene una vida media de 4500 millones de años, tiempo que tarda para que la mitad de sus átomos se transformen en átomos de Plomo, $Pb - 206$.

**Ejemplo 3.1.6.** *Un reactor de reproducción convierte el Uranio (*U-238*) relativamente estable en Plutonio (*Pu-239*), isótopo radioactivo. Al cabo de 5 años se tiene que se ha desintegrado* $0,043\,\%$ *de la cantidad inicial de una muestra de* Pu-239. *Calcule la vida media de ese isótopo. Si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.*

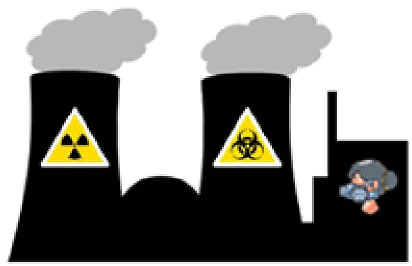


Figura 3.4: Reactor.

**Solución:** *Sea $A(t)$ la cantidad de plutonio restante en el tiempo $t$, entonces*

$$\frac{dA}{dt} = kA, \; A(0) = A_0, \tag{3.20}$$

*la dinámica del* Pu-239. *Dado que al cabo de 5 años se ha desintegrado* $0,043\,\%$ *de la cantidad inicial de una muestra de* Pu-239, *entonces*

$$A(5) = A_0 - 0,043\,\% A_0 = 0{,}99957 A_0.$$

*Sea $t^*$ la vida media del Plutonio, entonces*

$$A(t^*) = \frac{A_0}{2}.$$

*La solución del PVI (3.20) es*

$$A(t) = A_0 e^{k(t)}.$$

*Utilizando la condición inicial $A(5) = 0,99957A_0$ se obtiene*

$$A(5) = A_0 e^{5k} = 0,99957 A_0,$$

*lo cual implica que*

$$k = \frac{\ln(0{,}99957)}{5} = -8{,}60*^{-5},$$

*luego*

$$A(t) = A_0 e^{-8{,}6*10^{-5} t}. \tag{3.21}$$

*Evaluando (3.21) en la vida media $t^*$ se obtiene*

$$A(t^*) = A_0 e^{-8{,}6x10^{-5} t^*} = \frac{A_0}{2}. \tag{3.22}$$

*Despejando $t^*$ a partir de (3.22) se obtiene*

$$t^* = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{8{,}6 * 10^{-6}} = 8{,}058.$$

*Por lo tanto la vida media del* Pu-239 *es de aproximadamente 8.1 años.*

### 3.1.4. Método del carbono C-14

El método del carbono C-14 se debe al químico Willard Libby cuyo descubrimiento le valió el Premio Nobel de Química en 1960. La teoría se basa en lo siguiente; la atmósfera terrestre es continuamente bombardeada por rayos cósmicos, los cuales producen neutrones libres que se combinan con el nitrógeno de la atmósfera para producir el isótopo C-14 (carbono 14 o radiocarbono).

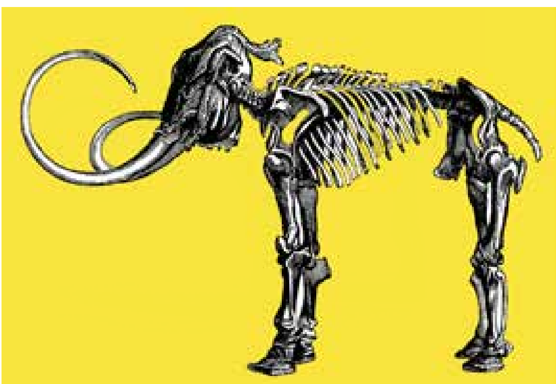


Figura 3.5: Fósil.

Este C-14 se combina con el bióxido de carbono presente en la atmósfera, el cual es absorbido por las plantas y estas a su vez son alimento para los animales. Así es como se incorpora el radiocarbono a los tejidos de los seres vivos. El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera constante, y en consecuencia la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la velocidad de incorporación de radiocarbono a él se hace nula y entonces comienza el proceso de desintegración radioactiva del C-14, que se encontraba presente en el momento de su muerte.

Así comparando la proporción de C- 14 que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. Para expresar el ritmo de descomposición de un elemento se utiliza el concepto de vida media $t^*$ tratado en la Sección 3.1.3.

**Ejemplo 3.1.7.** *Sea $y = f(t)$ la cantidad de sustancia existente de un cuerpo en un tiempo $t$, entonces la ecuación diferencial*

$$f'(t) = kf(t), \tag{3.23}$$

*la dinámica de crecimiento o decrecimiento de la sustancia química. Si el proceso es de desintegración, entonces $k$ es menor que cero. La solución de (3.23) es $f(t) = f(0)e^{kt}$, en ningún tiempo $t$ se anula, puesto que $e^{kt}$ es siempre positiva, por tanto no se puede hablar de "tiempo total de vida" de una sustancia radiactiva. Pero es posible determinar el tiempo necesario para que se desintegre una fracción parcial de la muestra. Generalmente se elige la mitad de la sustancia, es decir $f(t^*) = \frac{1}{2}f(0)$, siendo $t^*$ la vida media de la sustancia tal que:*

$$f(t) = f(0)e^{kt} = \frac{1}{2}f(0),$$

*luego $e^{kt} = \frac{1}{2}$, tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación anterior se tiene $\ln e^{kt} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, o equivalentemente $kt = \in \left(\frac{1}{2}\right)$. En consecuencia,*

$$t^* = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{k},$$

*donde $k < 0$. La Figura 3.6 muestra la gráfica de $f(t) = f(0)e^{kt}$ con $k$ menor que cero es:*

**Ejemplo 3.1.8.** *La vida media del radio es de 1700 años, qué porcentaje de radio quedará al cabo de 50 años, y al cabo de 2000 años?*

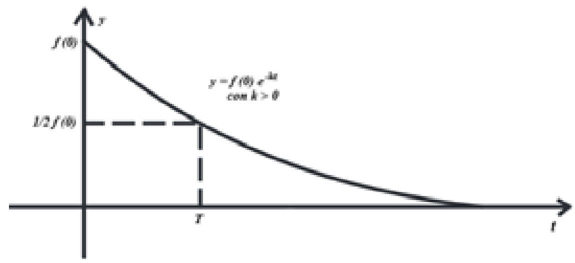



Figura 3.6: Curva solución de la ecuación $f'(t) = kf(t)$ bajo las condiciones del Ejemplo 3.1.7.

**Solución:** *Sea $y = f(t)$ la cantidad de radio existente en un tiempo $t$, como $y' = -ky$ con $k$ mayor que cero, entonces la ecuación diferencial que determina la dinámica del fenómeno es $y' + ky = 0$, cuya solución es $f(t) = f(0)e^{-kt}$. Hallemos $k$, utilizando la vida media del radio la cual es de 1.700 años. Lo anterior implica $f(1700) = f(0)e^{-1700k} = \frac{1}{2}f(0)$, luego $\frac{1}{2} = e^{-1700k}$, tomando logaritmo natural se tiene $\ln(1/2) = \ln e^{-1700} = -1700k$, por lo tanto $k = \ln(2/1700)$. La solución de la ecuación diferencial dada es $f(t) = f(0)e^{\frac{-\ln 2}{1700}t}$. La ecuación anterior implica que el porcentaje de radio que resta después del tiempo $t$ está dado por*

$$porcentaje(t) = \frac{f(t)}{f(0)} = e^{-\frac{\ln 2}{1700}t}. \tag{3.24}$$

*Evaluando (3.24) en $t = 50$ se obtiene*

$$porcentaje(50) = e^{-\frac{\ln 2}{1700}50} = 0{,}9798,$$

*lo anterior implica que despues de 50 años queda aproximadamente el $98\,\%$ de radio. Ahora evaluando (3.24) en $t = 2000$ se obtiene*

$$porcentaje(200) = e^{-\frac{\ln 2}{1700}2000} = 0{,}4424,$$

*en consecuencia después de 2000 años queda aproximadamente el $44\,\%$ de radio.*

**Ejemplo 3.1.9.** *Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la centesima parte de la cantidad original de C-14 determine la edad del fósil.*

Figura 3.7: Hueso fosilizado.

**Solución:** *Sea $A(t)$ la cantidad de C-14 en el tiempo $t$, entonces el PVI*

$$\frac{dA}{dt} = kA,\ A(0) = 0, \tag{3.25}$$

*describe la dinámica de degradación de C-14 en el tiempo. Sabemos que la solución de (3.25) es*

$$A(t) = A_0 e^{kt}.$$

*Ahora, dado que la vida media del C-14 es 5600 años, entonces*

$$A(5600) = A_0 e^{5600k} = \frac{A_0}{2}, \tag{3.26}$$

*a partir de (3.26) se obtiene* $k = \ln(1/2)/5600 = -0{,}00012378$. *Por lo tanto*

$$A(t) = A_0 e^{-0{,}00012378t}.$$

*Como el fósil contenía la centésima parte entonces su edad es la solución* $t^*$ *de la siguiente ecuación*

$$A_0 e^{-0{,}00012378t^*} = \frac{A_0}{100},$$

*la cual está dada por*

$$t^* = \frac{\frac{1}{\ln 100}}{-0{,}00012378} = \frac{\ln 100}{0{,}00012378} = 37204,$$

*es decir que el fósil tiene una edad aproximada de 37204 años.*

**Ejemplo 3.1.10.** *Los arqueólogos utilizan piezas de madera quemada o carbón vegetal, encontradas en un lugar para datar pinturas prehistóricas de paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia. Precise la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determinó que* $85{,}5\,\%$ *de su C-14 encontrado en los árboles vivos del mismo tipo se había desintegrado.*

Figura 3.8: Arquéologa.

**Solución:** *Sea* $B(t)$ *la cantidad de C-14 presente en la madera que quedó a través del tiempo. Siguiendo el mismo procedimiento del Ejemplo 3.1.9 se establece que la función que rige la dinámica es*

$$B(t) = B_0 e^{-0{,}00012378t}. \tag{3.27}$$

*Como se desintegró el* $85,5\,\%$ *del C-14, entonces resta un* $14,5\,\%$. *Sea* $t^*$ *la edad aproximada de una pieza de madera quemada, entonces*

$$B(t^*) = 0{,}145 B_0. \tag{3.28}$$

*Evaluando (3.27) en* $t^*$, *e igualando las ecuaciones (3.27) y (3.28) se obtiene*

$$B_0 e^{-0{,}00012378t} = 0{,}145 B_0,$$

*luego* $t^* = -\frac{\ln(0{,}145)}{-0{,}00012378} = 15597,91$. *Por lo tanto, la madera hallada en la caverna data de hace 15.600 años.*

## 3.2. Ley de enfriamiento de Newton

Esta propiedad establece que la variación de la temperatura en un determinado medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura presente. Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo $t$ y $T_m$ la temperatura del medio entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m). \tag{3.29}$$

**Ejemplo 3.2.1.** *Al sacar un pastel del horno su temperatura es $300°F$, después de 4 minutos su temperatura es de $100°F$ ¿En cuanto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de $70°F$?.*

Figura 3.9: Pastel a $300°F$.

**Solución:** *Al sacar un pastel del horno su temperatura es de $300°F$, lo cual es equivalente a $T(0) = 300°F$. Después de 3 minutos su temperatura es de $200°F$; es decir, $T(4) = 100°F$. En este caso, la temperatura ambiente o del medio es $T_m = 70°F$. Lo anterior inplica*

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \tag{3.30}$$
$$T(0) = 300 \tag{3.31}$$
$$T(4) = 100. \tag{3.32}$$

*Observe que la ecuacón (3.30) es separable y también lineal, su solución está dada por*

$$T(t) = 70 + c_1 e^{kt}. \tag{3.33}$$

*Reemplazando (3.31) en (3.33) se obtiene,*

$$T(0) = 70 + c_1 e^{k\cdot 0} = 300,$$

*luego*

$$70 + c_1 = 300,$$

*lo cual implica que $c_1 = 230$. Reemplazando el valor de $c_1$ en (3.33) se obtiene*

$$T(t) = 70 + 230e^{kt}. \tag{3.34}$$

*Ahora, reemplazando (3.32) en (3.34) se obtiene*

$$T(4) = 70 + 230e^{4k} = 100,$$

*luego* $k = \dfrac{\ln(3/23)}{4} = -0{,}51$. *Por lo tanto*

$$T(t) = 70 + 230e^{-0{,}51t}. \tag{3.35}$$

| Tiempo | Temperatura |
|---|---|
| 10 | 71.4 |
| 11 | 70.8 |
| 12 | 70.5 |
| 13 | 70.3 |
| 14 | 70.2 |
| 15 | 70.1 |

Cuadro 3.1: Ley de enfriamiento.

*Observe que*

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = 70,$$

*lo cual implica que la temperatura alcanza los* $70°F$ *en* $\infty$. *Sin embargo, en la Tabla 3.1 se verifica que después de 15 minutos la temperatura es muy cercana a los* $70°F$.

**Ejemplo 3.2.2.** *Se calienta agua hasta su punto de ebullición* $100°C$, *se retira del fuego y se mantiene en un recinto que se encuentra a una temperatura constante de* $60°C$. *Al final de 3 minutos la temperatura del agua es de* $90°C$. *Calcular la temperatura del agua al final de 6 minutos y el tiempo en la cual la temperatura del agua será de* $75°C$.

Figura 3.10: Agua a $100°C$.

**Solución:** *Sea* $y = f(t)$ *la temperatura de un cuerpo en un tiempo* $t$; *la velocidad de variación de* $y$ *con respecto al tiempo* $t$ *es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente (Ley de Enfriamiento de Newton). Sea* $M$ *la temperatura del medio ambiente. Luego la ecuación diferencial que sirve de modelo a este problema es* $y' = -k(y - M)$ *o equivalentemente*

$$y' + ky = kM, \tag{3.36}$$

*donde* $k$ *es una constante positiva, esta ecuación es diferencial lineal de primer orden, luego su solución viene dada por*

$$f(t) = f(a)e^{-kt} + e^{-kt}\int_a^t kMe^{kt}dt, \tag{3.37}$$

*donde* $f(a)$ *es la temperatura del cuerpo en un tiempo* $t = a$. *Para nuestro problema se tiene* $f(0) = 100$, *la cual es la condición inicial dada, además* $M = 60$. *Reemplazando estas condiciones* *en (3.37) se tiene*

$$\begin{aligned} f(t) &= 100e^{-kt} + e^{-kt}\int_a^t k60e^{kx}dx \\ &= 100e^{-kt} + e^{-kt}[60e^{kt} - 60] \\ &= 100e^{-kt} - 60e^{-kt} + 60 \\ &= 40e^{-kt} + 60. \end{aligned} \tag{3.38}$$

*Hallamos* $k$ *utilizando la condición de* $f(3) = 90$. *En efecto, evaluando* $f$ *definido en (3.38) en* $t = 3$ *se obtiene*

$$f(3) = 40e^{-3k} + 60 = 90,$$

*lo anterior implica que* $k = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$. *Entonces la solución a la ecuación diferencial (3.36) es*

$$f(t) = 40e^{-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)t} + 60.$$

*Hallemos la temperatura al final de 6 minutos, calculamos*

$$\begin{aligned} f(6) &= 40e^{-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)(6)} + 60 \\ &= 40e^{-2\ln\left(\frac{4}{3}\right)} + 60 \\ &= 40e^{-\ln\left(\frac{16}{9}\right)} + 60 \\ &= \frac{45}{2} + 60 = 82{,}5 \end{aligned}$$

*Por lo tanto, después de 6 minutos la temperatura será de* $83°C$ *aproximadaente. El instante en el cual la temperatura es de* $75°C$, *lo podemos calcular así:*

$$75 = f(t) = 40e^{-(1/3)\ln(4/3)t} + 60,$$

*luego*

$$\begin{aligned} 75 &= 40e^{-(t/3)\ln(4/3)} + 60 \\ 15 &= 40e^{(t/3)\ln(4/3)}, \end{aligned}$$

*la solución de la ecuación anterior es* $t = 10$ *minutos.*

**Ejemplo 3.2.3.** *La policía descubre el cuerpo de una profesora de ecuaciones diferenciales. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuando se cometió el homicidio. El forense llegó al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30 grados Celcius. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29 grados Celcius. Así mismo, observa que la temperatura de la habitación es constante a 27 grados Celcius. Suponiendo que la temperatura de la víctima era normal en el momento de su fallecimiento (37 grados Celcius), determinar la hora en que se cometió el crimen.*

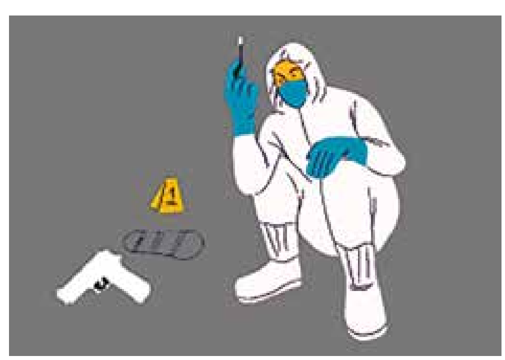


Figura 3.11: Lugar del crimen.

**Solución:** Para determinar la hora del crimen, hacemos uso de la ley de enfriamiento de Newton que establece que la tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo $t$ es proporcional a la diferencia entre $T$ y la temperatura $A$ del ambiente. La ecuación que rige esta ley se formula

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A),$$

con $k$ constante real. En nuestro caso tenemos que la ecuación diferencial viene dada por

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 27),$$

y puesto que se trata de una ecuación de variables separables, es fácil calcular su solución general, la cual viene dada por

$$T(t) = 27 + Ce^{kt}.$$

Ahora bien, observando las condiciones del problema, y considerando el medio día como $t = 0$, se tiene que $T(0) = 30$ y $T(1) = 29$. De aquí se obtiene que $C = 3$ y $k = \ln(2/3)/3 = -0{,}4056$. Por tanto,

$$T(t) = 27 + Ce^{-0{,}4055t}.$$

Teniendo ahora en cuenta que en el instante de su muerte, la temperatura de la víctima era de 37 grados Celsius, entonces

$$37 = 27 + 3e^{-0{,}4055t},$$

luego

$$t = -\frac{1}{0{,}4055}\ln(10/3) \approx -3.$$

Lo que traduce que la víctima murió tres horas antes del medio día, esto es, a las 9:00 horas.

## 3.3. Mezclas

Estos modelos se caracterizan por entradas y salidas de volúmenes de fluidos por lo general cuando se mezclan dos compuestos, estos generan un nuevo compuesto. Por ejemplo, cuando describimos la mezcla de dos salmueras la razón con que cambia la cantidad de sal, $A'(t)$ en el tiempo de mezcla está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \text{Rapidez con que entra la sal-Rapidez con que sale la sal} \\ &= R_0 - R_S. \end{aligned} \tag{3.39}$$

$R_0$ y $R_S$ también son llamados razón de entrada y razón de salida, respectivamente, y se definen como

$$R_0 = c_e v_e \tag{3.40}$$
$$R_S = c_s v_s, \tag{3.41}$$

donde $c_e$ es la concentración de entrada y, $v_e$ es la velocidad de salida, $c_s$ es la concentración de salida y $v_s$ es la velocidad de salida.

**Ejemplo 3.3.1.** *Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de salmueras, otra solución de salmuera se bombea al tanque a razón de 3 galones por minuto, la concentración de sal en este efluente es de 2 litros por galón, la solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿cuánta sal habrá en el tanque pasado mucho tiempo?*

**Solución:** *A partir de la información del ejemplo se establece que* $v_e = 3\,gal/min$, $c_e = 2\,L/g$, $v_s = 3\,gal/min$ *y* $c_s = \frac{A(t)}{V} = \frac{A}{300}$. *Sea* $A(t)$ *la cantidad de sal en el tiempo* $t$ *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= c_e v_e - c_s v_s \\ &= (2)(3) - 3\frac{A}{300} \\ &= 6 - \frac{A}{100}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

*La solución de (3.42) está dado por*

$$A(t) = 600 + ke^{-\frac{1}{100}t}. \tag{3.43}$$

*Evaluando (3.43) en* $t = 0$ *se obtiene* $A(0) = 600 + ke^{-\frac{1}{100}\cdot 0} = 6000 + k$. *Por otro lado, utilizando la condición inicial* $A(0) = 50$ *se obtiene* $600 + k = 50$, *luego* $k = -550$. *Reemplazando el valor de* $k$ *en (3.43) se obtiene*

$$A(t) = 600 - 550e^{-\frac{1}{100}t}. \tag{3.44}$$

*Dado que*

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(600 - 550e^{-\frac{1}{100}t}\right) = 600,$$

*entonces pasado mucho tiempo habrán* 600 *libras de sal.*

## 3.4. Aplicaciones a la mecánica

**Ejemplo 3.4.1.** *Una gota de aceite, cuya masa es de* $0{,}2\,g$ *cae partiendo del reposo. Cuando su velocidad es de* $40\,cm/s$, *la fuerza debida a la resistencia del aire es de 160 dinas. Suponiendo que dicha fuerza es proporcional a la velocidad instantánea:*

*a) Hállense la velocidad y la distancia recorrida en función del tiempo.*

*b) Determinar la velocidad límite.*


Figura 3.12: Gota de aceite de masa $0,2g$.

**Solución:** *La gota está afectada por dos fuerzas una debida a su peso* $w$, *la cual obliga a la gota a ir hacia abajo y otra que se opone a esta y es la resistencia del aire* $r$, *la cual es proporcional a la velocidad instantánea. Consideraremos positivo hacia abajo y negativo hacia arriba. Entonces según la segunda ley de Newton tenemos* $F = w - kv$, *donde* $k$ *es la constante de proporcionalidad y es positiva, luego la ecuación diferencial correspondiente es* $mv' = mg - kv$, *siendo* $m$ *la masa,* $v$ *la velocidad,* $g$ *la gravedad, esta ecuación se puede transformar en* $v' + \frac{kv}{m} = g$. *La cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, su solución es*

$$v(t) = v(0)e^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int_0^t ge^{A(x)}dx, \tag{3.45}$$

*donde*

$$A(t) = \int_0^t \frac{k}{m} dx = \frac{k}{m} t,$$

*luego*

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0)e^{-\frac{kt}{m}} + e^{-\frac{kt}{m}} \int_0^t g e^{\frac{kx}{m}} dx \\ &= v(0)e^{-\frac{kt}{m}} + e^{-\frac{kt}{m}} \left[ \frac{gm}{k} e^{\frac{kt}{m}} - \frac{gm}{k} \right] \\ &= v(0)e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{gm}{k} \left[ 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

*Si* $v(0) = 0$*, como en nuestro caso entonces:*

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left[ 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right].$$

*De acuerdo a la condición dada que la resistencia al movimiento es de 160 dinas cuando la velocidad es de 40 centímetros por segundo y dicha fuerza es proporcional a la velocidad instantánea, entonces podemos hallar el valor de* $k$*, ya que* $160 = 40k$*, luego* $k = 4$*. Reemplazando este valor en la solución final tenemos que* $v(t) = 49[1 - e^{-20t}]$*. Para hallar la distancia recorrida en función del tiempo podemos emplear la condición que* $v(t) = \frac{ds}{dt}$ *luego:*

$$\frac{ds}{dt} = 49 - 49e^{-20t}.$$

*Esta es una ecuación de variables separables, entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^s ds &= \int_0^t 49 dt - \int_0^t 49 e^{-20s} ds \\ s(t) &= 49t + \frac{49}{20}[e^{-20t} - 1]. \end{aligned}$$

*La velocidad límite se tiene cuando* $t$ *se hace tan grande que podemos decir que* $t \to \infty$*, entonces en este caso* $e^{-20t}$ *tiende a cero, luego la velocidad límite es 49 centímetros por segundo.*

**Ejemplo 3.4.2.** *Un día comenzó a nevar a una tasa pesada y constante. Una máquina quitanieves comenzó a trabajar a medio día, avanzando a 2 millas la primera hora y a una milla la segunda hora. ¿A qué hora comenzó a nevar?*

Figura 3.13: Día nevado.

**Solución:** En primer lugar, los datos del problema están de acuerdo con la idea de que el quitanieves se moverá más lentamente a medida que la capa de nieve aumenta. Sin pretender determinar cuáles asunciones pueden ser buenas o malas, asumimos que el quitanieves quita la nieve a una tasa constante de $K$ metros cúbicos por hora. Luego $t$ será el tiempo medido en horas a partir del medio día, y $x$ denotará la profundidad en mm de nieve en un tiempo $t$. Además $y$ denotará la distancia que se mueve el quitanieves con respecto al tiempo. Luego $\frac{d}{dt}$ es la velocidad de quitanieves y nuestra asunción será $wx\frac{dy}{dt} = K$, donde $w$ es la anchura que da el quitanieves. Para encontrar cómo $x$

depende del tiempo, $t_0$ será el número de horas antes del medio día cuando comenzó a nevar, y S será la tasa constante en mm en la cual la profundidad de la nieve se incrementa. Luego usando $t > -t_o$

$$x = S(t + t_o),$$

y obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{ws(t + t_o)}.$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma $\frac{dy}{dt} = f(t)$, y vemos que $y = \dfrac{k}{ws}[\ln(t + t_0) + C]$ donde $C$ es una constante. Se puede sospechar o especular que el conocimiento de muchos pares de valores de $y$ y $t$ deben permitirnos determinar $t_0$ y así obtener una solución para el problema. En $y = 0$ cuando $t = 0$ encontramos que en la ecuación anterior $C = -\ln t_0$. Entonces:

$$y = \frac{k}{ws} \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right).$$

Luego usamos el hecho de que $y = 2$ cuando $t = 1$, y $y = 3$ cuando $t = 2$ para obtener:

$$\left(1 + \frac{2}{t_o}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{t_o}\right)^3.$$

Expandiendo los exponentes y simplificando la ecuación $t_o^2 + t_o - 1 = 0$, donde $t_o > 0$, obtenemos

$$t_o = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = 0,618\, horas = 37\, min.$$

Por lo tanto, la hora en que empezó a nevar fue a las 11:23 a.m.

**Ejemplo 3.4.3.** *Una partícula se mueve en línea recta hacia un punto fijo 0, bajo la acción de una fuerza atractiva en 0 que varía directamente con su distancia a 0. Cuando t = 0 la partícula dista 4 cms de 0 y se mueve hacia 0 con una velocidad de 6 centímetros por segundo, y una aceleración de 16 centímetros por segundo cuadrado.*

*a) Hállense su posición y velocidad de partícula en función del tiempo.*

*b) Obténgase la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.*

*c) Determínese la velocidad y aceleración máxima.*

**Solución:** *Tomemos un punto fijo 0 como origen de un sistema de coordenadas, supongamos que la partícula inicia su movimiento en un punto A, tomemos $0A$ como sentido positivo. Sea $P$ la posición de la partícula en un instante $t$. Como la magnitud de la fuerza de atracción $F$ hacia $0$ es proporcional a su distancia a este punto tendremos $F = kx$, con $k > 0$. Supongamos $x \geq 0$, luego la magnitud de la fuerza es $kx$. Como la fuerza $F$ está dirigida hacia $0$ (en sentido negativo) tendremos que $F = -kx$ con $x$ mayor o igual a cero. Si $x < 0$, luego la magnitud de la fuerza es $-kx$, como la fuerza $F$ está dirigida hacia la derecha (en sentido positivo) luego $F = -kx$ con $x$ menor que cero; luego la ecuación diferencial que describe este fenómeno físico es $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Para nuestro caso la velocidad y la aceleración está dirigida hacia $O$, cuando la partícula dista $4\,cm$ o sea para $t = 0$ tendremos $x(0) = 4$, $v(0) = -6$, $a(0) = -16$, cada una con sus respectivas unidades del sistema CGS, ahora podemos calcular el cociente $\frac{k}{m}$ ya que $-16 = -\frac{k}{m}4$, luego $\frac{k}{m} = 4$. La ecuación diferencial original se transforma en $\frac{d^2x}{dt^2} = -4x$. Para resolver esta ecuación de segundo orden la* *transformamos en una de primer orden, mediante el siguiente cambio de variable, como* $v(t) = \frac{dx}{dt}$*, de modo que*

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \quad v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

*Luego la ecuación diferencial de segundo orden se convierte en:*

$$v \cdot \frac{dv}{dx} = -4x.$$

*La cual es una ecuación diferencial de variables separables, su solución está dada por*

$$\int_{-6}^{v} v\,dv = -\int_{4}^{x} 4x\,dx.$$

*Entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{v^2(t)}{2} - \frac{36}{2} &= -2x^2 + 32 \\ v^2(t) &= 4(25 - x^2) \\ v(t) &= \pm 2\sqrt{25 - x^2}. \end{aligned}$$

*Como* $v(t) = \frac{dx}{dt}$*, reemplazando en la última ecuación tenemos una ecuación de variables separables.*

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{25 - x^2} \tag{3.47}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{25 - x^2}. \tag{3.48}$$

*La solución de la ecuación diferencial (3.47) es*

$$\int_{4}^{x} \frac{dx}{\sqrt{25 - x}} = \int_{0}^{t} 2dt \tag{3.49}$$

$$\arcsin\frac{x}{5} - \arcsin\frac{4}{5} = 2t. \tag{3.50}$$

*Definimos* $u = \arcsin\frac{2}{5}$*, luego* $\sin u = \frac{4}{5}$ *, y,* $\cos u = \frac{3}{5}$*, luego la ecuación (3.50) se transforma en*

$$\arcsin\frac{x}{5} = 2t + u.$$

*Aplicando la función seno tenemos:*

$$\begin{aligned} x(t) &= 5\sin(u + 2t) \\ &= 5\cos 2t \sin u + \sin 2t \cos u. \end{aligned}$$

*Luego*

$$\begin{aligned} x &= 4\cos 2t + 3\sin 2t \\ v &= -8\sin 2t + 6\cos 2t. \end{aligned}$$

*Podemos definir el signo, tanto para* $x$ *como para* $v$*, usando la condición dada de que* $v(0) = -6$*, lo cual implica que:*

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\cos 2t - 3\sin 2t \\ v(t) &= -8\sin 2t - 6\cos 2t \\ a(t) &= -16\cos 2t + 12\sin 2t. \end{aligned}$$

*Para calcular la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento recurrimos a la fórmula* $x(t) = 5\sin(u - 2t)$. *Luego* $v(t) = -10\cos(u - 2t)$ *y* $a(t) = -20\sin(u - 2t)$. *Es fácil ver que la amplitud es 5, el periodo es* $\pi$ *y la frecuencia es* $\frac{1}{\pi}$, *cada uno con sus respectivas unidades. La velocidad máxima es de 10 centímetros por segundo y la aceleración máxima es de 20 centímetros por segundo cuadrado.*

**Ejemplo 3.4.4.** *Para movimientos de gran rapidez en el aire, como el que realiza un paracaidista, que está cayendo antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire es cercano a una potencia de la velocidad instantánea* $v(t)$. *Determinar una ecuación diferencial para la velocidad* $v(t)$ *de un cuerpo de masa* $m$ *que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea (ver Figura 3.14).*


Figura 3.14: El paracaidista.

**Solución:** *En la dinámica del movimiento actúan dos fuerzas* $f_1$ *el peso y* $f_2$ *la resistencia del aire. A partir de las leyes de la física se establece que la fuerza total es*

$$\sum f = f_1 + f_2.$$

*El peso actúa sobre el cuerpo hacia abajo (dirección positiva). La resistencia* $(kv^2)$ *con* $k > 0$ *actúa para impedir el movimiento, va hacia arriba (dirección negativa).*

$$\sum f = mg - kv^2.$$

*Utilizando la segunda ley de Newton*

$$\sum f = ma.$$

*Igualando las sumatorias de fuerzas*

$$mg - kv^2 = ma,$$

*donde*

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

*Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene*

$$mg - mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}.$$

**Ejemplo 3.4.5.** *Un paracaidista cuya masa es de 75kg se deja caer desde un helicóptero, que está a 4000 m de altura. La fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea de caída, siendo* $k = 15kg/s$ *la constante de cuando el paracaídas está cerrado y* $k = 105\,kg/s$ *cuando está abierto. Si el paracaídas se abre un minuto después de saltar. Calcular la velocidad* $v(t)$ *y la correspondiente posición* $s(t)$ *en cada instante. ¿Cuánto tarda en llegar a la superficie?*

**Solución:** *Podemos observar que tenemos dos situaciones diferentes una* $(P_1)$ *antes de abrir el paracaídas y otra* $(P_2)$ *después de abrir el paracaídas, al cabo de 60 s. Esto da lugar a dos problemas de valor inicial diferentes:*

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 15v \quad , \qquad v(0) = 0 \tag{3.51}$$
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 105v \quad , \qquad v(60) = v_1. \tag{3.52}$$

*El PVI (3.51) corresponde a* $P_1$ *y el PVI (3.52) corresponde a* $P_2$*. La solución del problema* $P_1$*, que es válida para* $0 \le t \le 60$*, viene dada por:*

$$v(t) = \frac{mg}{15} - \frac{mg}{15}e^{\frac{-15t}{m}} = 5g(1 - e^{\frac{-t}{5}}).$$

*Haciendo uso de esta expresión, obtenemos que* $v(60) \approx 49m/s = v_1$*. Podemos ahora resolver el problema* $P_2$*, obteniendo que*

$$v(t) = \frac{5g}{7}(1 + 6e^{84-\frac{7t}{5}}),$$

*para* $t > 60$*. Si calculamos el desplazamiento* $s(t) = \int v(t)dt$*, tenemos que, para* $0 \le t \le 60$*, y teniendo en cuenta que* $s(0) = 0$ *(se mide a partir de la posición del helicóptero), se obtiene que*

$$s(t) = 5g(t + 5e^{\frac{-t}{5}} - 5),$$

*para* $0 \le t \le 60$*. Cuando* $t = 60$*, al abrir el paracaídas, se tiene que el espacio recorrido es* $s(t) = 5g(55 + 5e^{-12}) \approx 2695m$*. Para* $t > 60$ *la solución es* $s(t) = \frac{5g}{7}(t - \frac{5}{7}6e^{84-\frac{7t}{5}}) + 2305$*. Por último, cuando llega al suelo debe ser* $s(t) = 4000$*. Por tanto, resolvemos la ecuación en* $t$*,*

$$\begin{aligned} \frac{5g}{7}\left(t - \frac{5}{7}6e^{84-\frac{7t}{5}}\right) + 2305 &= 4000 \\ t - \frac{5}{7}6e^{84-\frac{7t}{5}} &= 242, \end{aligned}$$

*y cuando* $t > 60$ *se verifica que* $t - \frac{5}{7}6e^{84-\frac{7t}{5}} \approx t$*, luego el paracaidista tarda en llegar a la superficie* $t \approx 242\,s$

**Ejemplo 3.4.6.** *Un cuerpo de 8 lb de peso cae partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, actúa sobre él la resistencia del aire a la que supondremos (en libras) numéricamente igual a* $2v$*, siendo* $v$ *la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de* $t$ *segundos.*

**Solución** *Elegimos el eje* $x$ *positivo como vertical y hacia abajo, a lo largo de la trayectoria del cuerpo* $B$*, el origen en el punto en que el cuerpo inicia su caída. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:*

1. $F_1$*, su peso, 8lb, actuando hacia abajo y, por tanto positiva.*
2. $F_2$*, la resistencia del aire numéricamente igual a* $2v$*, actuando hacia arriba y por lo tanto negativa y con valor de* $-2v$*.*

*La segunda ley de Newton* $F = ma$ *se transforma en* $m = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F1 + F2$*. Tomando* $g = 32$ *y utilizando* $m = \frac{w}{g} = 8,32 = \frac{1}{4}$*, y puesto que el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo se obtiene*

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8 - 2v \tag{3.53}$$
$$v(0) = 0. \tag{3.54}$$

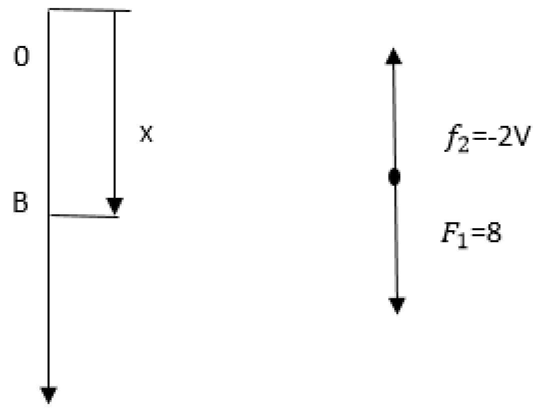



Figura 3.15: Geometría.

*La ecuación (3.53) es separable. Separando variable tenemos*

$$\frac{dv}{8-2v} = 4dt.$$

*Integrando hallamos que*

$$-\frac{1}{2}ln\lfloor 8-2v\rfloor = 4t + c_0.$$

*Que se reduce a*

$$8-2v = c_1e^{-8t}.$$

*Aplicando la condición de (3.54) encontramos que* $c_1 = 8$ *por lo que la velocidad en el instante* $t$ *viene dada por*

$$v = 4(1-e^{-8t}). \tag{3.55}$$

*Para determinar ahora la distancia recorrida hasta el instante* $t$ *escribimos la ecuación (3.55) en la forma*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = 4(1-e^{-8t})$$

*Observe que* $x(0) = 0$*. Integrando la ecuación anterior tenemos*

$$x = 4\left(t + \frac{1}{8}e^{-8t}\right) + c_2$$

*Puesto que* $x = 0$ *cuando* $t = 0$ *encontramos que* $c_2 = \frac{1}{2}$ *por lo que en definitiva, la distancia recorrida viene dada por*

$$x = 4\left(t + \frac{1}{8}e^{-8t} - \frac{1}{2}\right). \tag{3.56}$$

Interpretación de Resultados*: La ecuación (3.54) demuestra que cuando* $t \to \infty$*, la velocidad* $v$ *se aproxima a la velocidad límite* $4(pies/s)$*. Observamos también que esta velocidad límite se alcanza aproximadamente en un tiempo muy corto. La ecuación (3.56) demuestra que cuando* $t \to \infty$*,* $x \to \infty$*. ¿Implica esto que el cuerpo penetrará en la tierra y continuará eternamente? Por supuesto que no, ya que cuando el cuerpo alcance la superficie de la tierra detendrá su movimiento. ¿Cómo reconciliar este final evidente del movimiento con lo que enuncia la ecuación (3.56)? Es bien sencillo, cuando el cuerpo alcanza la superficie terrestre la ecuación diferencial (3.53) y, por lo tanto, la ecuación (3.56), dejan de ser aplicables.*

**Ejemplo 3.4.7.** *Una persona $P$, a partir del origen, se mueve en dirección del eje $x$ positivo tirando un peso a lo largo de la curva $C$, llamada 'tractriz", como se muestra en la Figura 3.16. El peso, se encuentra inicialmente ubicado en el eje $y$ en $(0, s)$, se aleja mediante una cuerda de longitud constante $s$, que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuación diferencial para definir la trayectoria del movimiento. Asumir que la cuerda siempre es y tangente a $C$.*

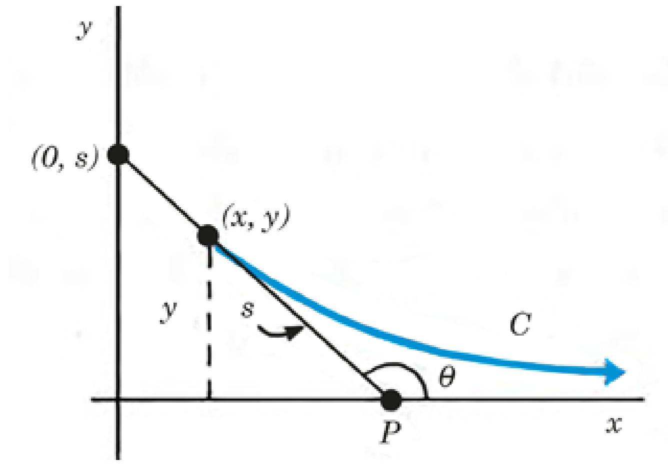



Figura 3.16: Gráfica del problema.

**Solución:** *De acuerdo con la gráfica tenemos que:*

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\tan\pi - \tan\theta}{1 + \tan\pi\tan\theta} = -\tan\theta.$$

*También se tiene que:*

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}}.$$

*Pero, $tan\theta = \frac{dy}{dx}$, puesto que $\tan\theta$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(X, Y)$, reemplazando obtenemos finalmente:*

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{s^2 - y^2}}.$$

### 3.4.1. Soluciones químicas

**Ejemplo 3.4.8.** *A un tanque que contiene 400 litros de agua fresca, se le incorpora salmuera que contiene $\frac{1}{8}$ de kilogramo por litro de sal a razón de 8 litros por minuto y la mezcla se mantiene uniforme por agitación, abandona el tanque por un orifico a razón de 4 litros por minuto. Encontrar:*

*a) La cantidad de sal presente en el tanque cuando este contenga 500 litros de salmuera.*

*b) La concentración de sal en el tanque al final de una hora.*


Figura 3.17: Gráfica alusión al planteamiento.

**Solución:** *Sea $y = f(t)$ la cantidad de sal existente en el tanque en un tiempo $t$, luego la rapidez de cambio de la cantidad de sal con respecto al tiempo depende de la sal que entra menos la cantidad de sal que sale. Como entran 8 litros por minuto y cada litro contiene $\frac{1}{8}$ de kilogramo de sal, entonces la sal que entra en el tanque en 1 minuto es 1 kilogramo; como entran 12 litros de salmuera por minuto y de la mezcla salen 8 litros por minuto, luego el número de litros del tanque aumenta 4 litros por minuto de manera que en un tiempo t el volumen de salmuera en el tanque es de $400+4t$, la cual contiene $\frac{y}{400+4t}$ kilogramos de sal por litro, y de esta mezcla salen 8 litros por minuto. Luego en cada minuto la cantidad de sal que sale del tanque es $(\frac{y}{400+4t})8$ kilogramos. Entonces el fenómeno está definido por la ecuación diferencial*

$$y' = 1 - \frac{2y}{100+t},$$

*luego*

$$y' = 1 - \frac{2y}{100+t}, \; f(0) = 0.$$

*La cual es una ecuación homogénea lineal de primer orden y su solución está dada*

$$f(t) = f(0)e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^T Q(x)e^{A(x)}dx,$$

*donde,*

$$A(t) = \int_0^T \frac{2dx}{100+x} = 2\ln(100+t) - \ln 100 = 2\ln\left(\frac{100+t}{100}\right).$$

*Luego,*

$$\begin{aligned} f(t) &= exp\left[-\ln\left(\frac{100+t}{100}\right)^2\right] . \int_0^t exp\left[ln\left(\frac{100+x}{100}\right)^2\right]dx \\ &= \left(\frac{100}{100+t}\right)^2 \int_0^t \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{100+t}\right)^2 \int_0^t (100+x)^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{100+t}\right)^2 \left[10^4 t + 10^2 t^2 + \frac{t^3}{3}\right]. \end{aligned}$$

*Deseamos hallar la cantidad de sal existente cuando el tanque contenga 500 litros, como el volumen del tanque está dado por $400+4t$, para un tiempo $t$, luego los 500 litros se tendrán para $t = 25$ minutos, ahora $f(25) = \frac{65}{3}$. Para hallar la concentración de sal al cabo de una hora, hallamos el valor del cociente $\frac{f(60)}{v(60)} = \frac{45}{625} = 0,072$ kilogramos de sal por litro.*

**Ejemplo 3.4.9.** *Suponga que en principio un gran depósito de mezclado contiene 300 galones de agua en la que se han disuelto 50 libras de sal. Otra solución de salmuera se bombea hacia el depósito a razón de 3 galones por minuto, y cuando la solución está bien agitada, se bombea hacia afuera sólo 2 galones por minuto. Si la concentración de la solución entrante es 2 libras por galón, determine una ecuación diferencial para la cantidad de sal $A(t)$ que se encuentra en el tanque en el instante $t$.*

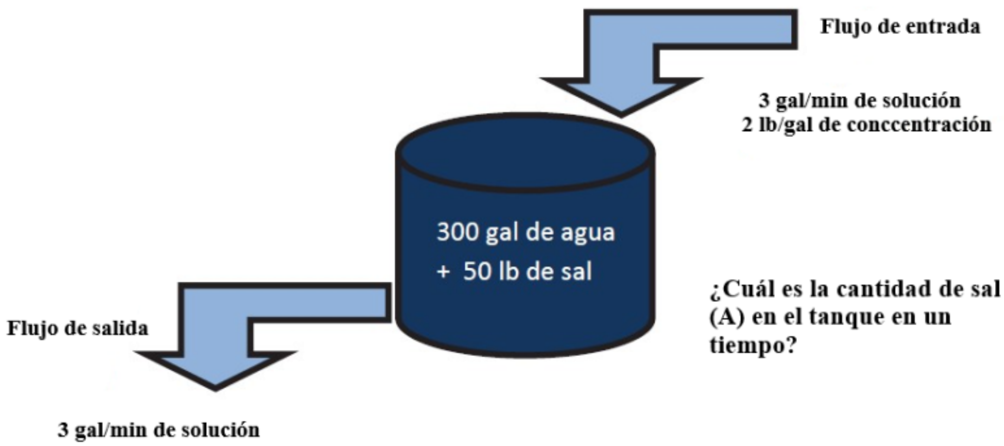



Figura 3.18: Gráfica del problema.

**Solución:** *Sabemos que la cantidad de sal $(A)$ que se encuentra en el tanque en un tiempo $t$, está dado por la cantidad de sal que entra al recipiente y la cantidad de sal que sale de este; matemáticamente esto es expresado como*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = R_{entrada} - R_{salida},$$

*donde la cantidad de sal que entra $(R_{entrada})$ está dada por*

$$R_{entrada} = 3\frac{gal}{min} * 2\frac{lib}{gal} = 6\frac{lib}{min},$$

*donde el primer término de esta expresión es la velocidad de entrada de la solución, y el segundo es la concentración de este flujo. Y la cantidad de sal que sale es*

$$R_{salida} = \left(\frac{A}{300+t}\frac{lib}{gal}\right)(2\frac{gal}{min}) = \frac{2A}{300+t}\frac{lib}{min}.$$

*En esta expresión el primer término es la concentración de sal en el flujo de salida, la concentración de esta, está dada por la cantidad de soluto (sal) sobre la cantidad de solvente (agua), y está última varía con el tiempo porque el flujo de salida es menor que el de entrada. Retomando tenemos que*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= R_{entrada} - R_{salida}\\ &= 6\frac{lb}{min} - \frac{2A}{300+t}\frac{lb}{min}.\end{aligned}$$

*Para resolver esta ecuación diferencial, entonces tenemos que:*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 6 - \frac{2A}{300+t}.$$

*Llevando la ecuación a la forma estándar se obtiene*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{2A}{300+t} = 6,$$

*entonces,*

$$P(x) = \frac{2}{300+t}, f(x) = 6.$$

*Factor Integrante*

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{200+t}dt} = e^{2ln|300+t|} = (300+t)^2.$$

*Extrapolando con la solución estándar encontramos que*

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{c}{(300+t)^2} + \frac{1}{(300+t)^2}\int 6(300+t)^2 dt \\ &= \frac{c}{(300+t)^2} + \frac{2(300+t)^3}{(300+t)^2}. \end{aligned}$$

*Simplificando*

$$A(t) = \frac{c}{(300+t)^2} + 2(300+t).$$

### 3.4.2. Modelamiento matemático de procesos industriales

Para investigar como varía el comportamiento de un proceso químico ante cambios en los disturbios externos y las variables manipuladas y estar en la capacidad de diseñar el controlador apropiado, puede usarse dos enfoques:

a) Enfoque experimental: este enfoque se aplica cuando el equipo físico del proceso industrial está disponible. El método consiste en cambiar deliberadamente las variables de entrada del proceso (disturbios externos y variables manipuladas) y medir cuidadosamente las variables de salida (temperatura, presión, flujo, etc.) para observar como varían estas con el tiempo.

b) Enfoque teórico: se aplica generalmente cuando se requiere diseñar un controlador para un proceso industrial cuya planta aún no ha sido construida. La representación del proceso se hace mediante ecuaciones matemáticas (algebraicas y o diferenciales), cuya solución permite conocer el comportamiento dinámico del proceso.

**Necesidad del modelamiento matemático para el control de procesos:**

- Para diseñar un sistema de control es necesario conocer la dinámica de la planta ante cambios en las variables de entrada y perturbaciones externas. Si la planta no está construida entonces para conocer su dinámica es necesario tener el modelo matemático de la planta y en el caso de que la planta física exista la aplicación del método experimental es muy costosa por lo que también es útil tener el modelo matemático de la planta.

- Generalmente lo que el diseñador necesita es una descripción sencilla de cómo reacciona el proceso ante cambios en la variable de entrada y esto es lo que el modelo matemático provee al diseñador del sistema de control.

**Ejemplo 3.4.10.** *Diseño de un controlador de acción pre-calculada para un proceso.*

*Con el objetivo de mantener la salida en un nivel deseado, es necesario cambiar el valor de la variable manipulada de tal forma que elimine el impacto que el disturbio podría ocasionar en la salida. ¿En qué cantidad habrá que variar la variable manipulada para eliminar el efecto del disturbio?*

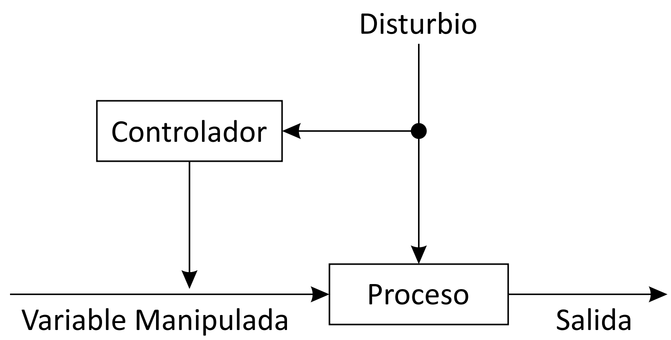



Figura 3.19: Configuración de un control de Acción Precalculada.

*Salida* $= f_1$ *(disturbio)*
*Salida* $= f_2$ *(variable manipulada).*

*Las relaciones matemáticas* $f_1$ *y* $f_2$ *, son previstas por el modelo matemático del proceso. Si queremos que la salida permanezca sin variación, la variable manipulada debe cumplir la siguiente relación*

$$f_1(disturbio) - f_2(variable\ manipulada) = 0. \tag{3.57}$$

*Aquí puede verse la importancia del modelo matemático en el diseño de sistemas de control de acción pre-calculada (feedforward). Por otro lado tan importante como tener el modelo matemático es que el modelo sea preciso, pues de lo contrario será imposible obtener diseños eficientes de los sistemas de control de acción pre-calculada.*

*Variables y ecuaciones de estado de un proceso.*

*Con el objetivo de caracterizar un proceso (tanque de calor, reactor, columna de destilación etc.) se requiere lo siguiente:*

*a) Un conjunto de variables, las cuales describen el estado natural del sistema.*

*b) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las variables mencionadas y que describan como el estado natural del sistema cambia con el tiempo.*

*Las ecuaciones que relacionan las variables de estado (variables dependientes) a las variables independientes, se derivan aplicando el principio de conservación y se denominan ecuaciones de estado. El principio de conservación de una cantidad de estado S, establece que:*

$$\begin{aligned}\frac{Acumulado\ de\ S\ en\ el\ sistema}{Periodo\ de\ Tiempo} &= \frac{Flujo\ de\ S\ que\ entra\ al\ sistema}{Periodo\ de\ tiempo}\\ &\quad -\frac{Flujo\ de\ S\ que\ sale\ del\ sistema}{Periodo\ de\ tiempo}\\ &\quad +\frac{Cantidad\ de\ S\ generada\ por\ el\ sistema}{Periodo\ de\ tiempo}\\ &\quad -\frac{Cantidad\ de\ S\ consumida\ por\ el\ sistema}{Periodo\ de\ tiempo}.\end{aligned}$$

*La cantidad S puede ser cualquiera de las siguientes cantidades fundamentales:*

- *Masa total.*
- *Masa de los componentes individuales.*
- *Energía total.*

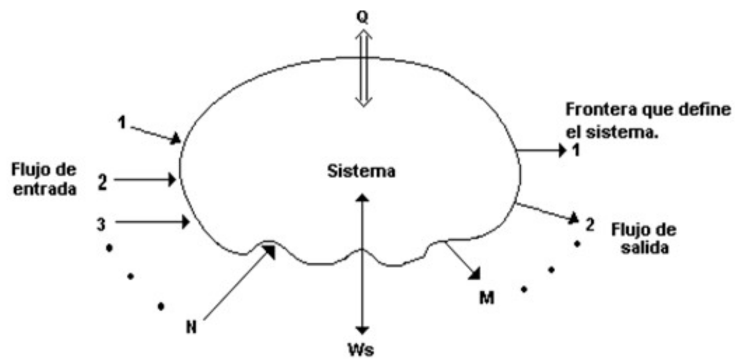



Figura 3.20: Un sistema general y su interacción con el externo.

*Las ecuaciones son:*

- *Balance total de masa*
$$\frac{\mathrm{d}(pV)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=ent} p_i F_i - \sum_{j=ent} p_j F_j. \tag{3.58}$$

- *Balance de masa en el componente A:*
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(n_A)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(c_A V)}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=ent} c_{Ai} F_i - \sum_{j=ent} c_{Aj} F_j \pm rV. \end{aligned} \tag{3.59}$$

- *Balance total de energía*
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{d(U+K+P)}{dt} \\ &= \sum_{i=ent} P_i F_i h_i - \sum_{j=ent} P_j F_j h_j \pm Q \pm Ws. \end{aligned} \tag{3.60}$$

*Por convención se toma como positiva la cantidad si fluye entrando al sistema y negativa si sale del sistema. Las ecuaciones de estado con las variables de estado asociadas, constituyen el modelo matemático del proceso, el cual representa el comportamiento estático o dinámico del proceso.*

**Ejemplo 3.4.11** (Ecuaciones y variables de estado para el tanque con calentador y agitador)**.** *Consideremos un tanque con calentador y agitador, las cantidades fundamentales dadas como datos son*

1. *La masa total del líquido en el tanque.*
2. *La energía total del material en el tanque.*

*Las variables de estado para el tanque calentador son*

- *La masa total en el tanque:*
$$Masa\ total = pV = pAh, \tag{3.61}$$
*donde $\rho$ es la densidad del líquido, $V$ el volumen del líquido, $A$ la sección horizontal del área del tanque, y $h$ la altura del nivel del líquido.*

- *La energía total del tanque es:*
$$E = U + K + P. \tag{3.62}$$

*Como el tanque no se mueve, la energía cinética $K$ y la potencial $p$ permanecen constantes, entonces, derivando la ecuación encontramos*

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}. \tag{3.63}$$

*Para el sistema del líquido*

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}, \tag{3.64}$$

*donde $H$ es la entalpía total del líquido del tanque. Además,*

$$H = pVc_p(T - T_{ref}) = pAhc_p(T - T_{ref}), \tag{3.65}$$

*donde $c_\rho$ es el calor específico del líquido del tanque, $T_{ref}$ es la temperatura de referencia, donde la entalpía específica del líquido se asume cero. Las variables de estado: $h$ y $T$, y los parámetros constantes: $p$, $A$, $c_p$, $T_{ref}$.*

- *Balance total de masa*

$$\begin{aligned}\frac{[\textit{masa total acumulada}]}{\textit{tiempo}} &= \frac{[\textit{masa total de entrada}]}{\textit{tiempo}} + \frac{[\textit{masa total de salida}]}{\textit{tiempo}}\\ \frac{\mathrm{d}(pAh)}{\mathrm{d}t} &= pF_e - pF, \end{aligned} \tag{3.66}$$

*donde $F_e$ y $F$ son la tasa de flujo que ingresa y sale del tanque. Asumiendo la densidad constante, la ecuación se transforma en*

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = F_e - F. \tag{3.67}$$

- *Balance total de energía*

$$\begin{aligned}\frac{[\textit{acumulación de energía total}]}{\textit{tiempo}} &= \frac{[\textit{energía total de entrada}]}{\textit{tiempo}}\\ &\quad -\frac{[\textit{energía total de salida}]}{\textit{tiempo}}\\ &\quad +\frac{[\textit{energía dada por el calor}]}{\textit{tiempo}}\\ \frac{d\left[pAhc_p(T - T_{ref})\right]}{dt} &= pFec_p(T_e - T_{ref}) - pFc_p(T - T_{ref}) + Q,\end{aligned}$$

*donde $Q$ es la cantidad de calor suministrada por el vapor por unidad de tiempo. La ecuación se simplifica, si asumimos que $T_{ref} = 0$ y la agrupación convenientemente, a la forma*

$$Ah\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = F_e(T_e - T) + \frac{Q}{pc_p}. \tag{3.68}$$

*Las variables de las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse así:*

- *Variables de estado: $h$, $T$.*
- *Variables de salida: $h$, $T$.*
- *Perturbaciones: $T_e$, $F_e$.*
- *Variables manipuladas: $Q$ y $F$ (para el control por retroalimentación), $F_e$ (para el control por acción precalculada).*
- *Parámetros: $A$, $p$, $c_p$, $T_{ref}$.*

*Consideraciones en el modelamiento para procesos de control:*

- *El modelo entrada - salida:*
- *El modelo debería tener la siguiente forma general:*

$$\textit{Salida} = f(\textit{variables de entrada}).$$

### 3.4.3. Grados de libertad

Usando la Figura 3.21, la relación se expresaría:

$$yi = f(m_1, m_2, ..., m_k, d_1, d_2, ..., d_n), \tag{3.69}$$

donde $i = 1, 2, ..., m$. Cada modelo que describe directamente la relación entre las variables de entrada y salida de un proceso, se llama modelo entrada-salida.

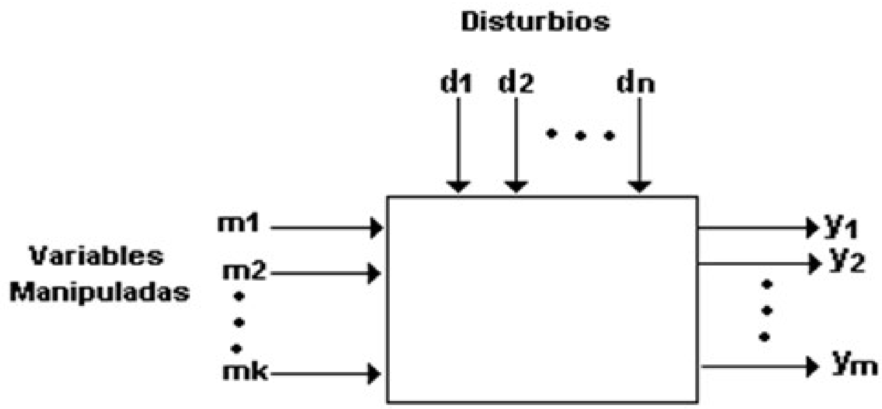



Figura 3.21: Un proceso y sus variables de entrada y salida.

Se denomina grados de libertad de un proceso, a las variables independientes que deben ser especificadas para poder definir un proceso en forma completa. Por lo tanto, los interrogantes sobre el control de un proceso, pueden darse por aclarados si y sólo si todos los grados de libertad del proceso hayan sido especificados.

**Ejemplo 3.4.12** (Grados de libertad del tanque con calentador y agitador)**.** *El modelo matemático del tanque con calentador y agitador, tal como se dedujo en el ejemplo 2, está dado por:*

$$A\frac{dh}{dt} = F_e - F \tag{3.70}$$

$$A\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = F_e - (T_e - T) + \frac{Q}{pc_p}. \tag{3.71}$$

**Solución** *¿Las ecuaciones tienen solución? Si, la solución es posible, ¿cuántas soluciones existen? Estas preguntas se responden analizando el número de ecuaciones y de variables.*

- *Número de ecuaciones = 2,*
- *Número de variables = 6; h,T,Fe,F,Te y Q.*

*Se ha asumido que A, p, y,Cp son parámetros que permanecen constantes. Evidentemente: el número de variables es mayor que número de ecuaciones. Las variables que pueden especificarse arbitrariamente son los grados de libertad y el número viene dado por la siguiente relación*

$$f = (\textit{número de variables}) - (\textit{número de ecuaciones}). \tag{3.72}$$

*Para especificar completamente un proceso el número de grados de libertad debe ser igual a cero.*

**Nota 3.4.1** (Grados de libertad y el control de proceso)**.** *Un proceso industrial cuidadosamente modelado tendrá, en general uno o más grados de libertad. Por lo tanto desde que $f > 0$ el proceso tendrá un infinito número de soluciones y nace la pregunta:*

*¿Qué se debe hacer para reducir el número de grados de libertad a cero, tal que se logre tener un sistema completamente especificado con comportamiento único?*
*Existen dos fuentes que nos proveen de ecuaciones adicionales* 1) *el mundo exterior al sistema y* 2) *al sistema de control.*

### 3.4.4. Circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos están descritos en su comportamiento por la Ley de Kirchhoff, en realidad, la teoría eléctrica está regida por un conjunto de ecuaciones conocidas en la teoría electromagnética como ecuaciones de Maxwell, que se salen de nuestro alcance, y para nuestro estudio es suficiente por ahora la Ley de Kirchhoff, la cual describe una ecuación diferencial lineal de primer orden. Estudiaremos circuitos eléctricos en serie tan elementales como los que se muestran en la Figura 3.22. Los elementos del circuito

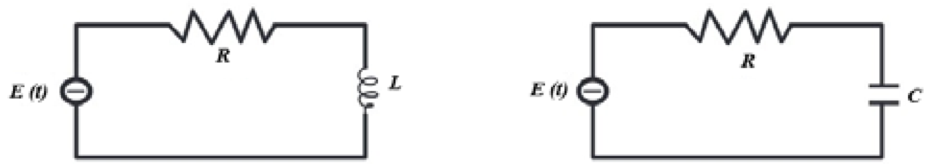



Figura 3.22: Circuito.

son:

- La fuerza electromotriz que produce un voltaje, $E$, el cual "origina" una corriente eléctrica que recorre el circuito.
- La resistencia que utiliza dicha energía, $R$.
- La inductancia, que se opone a la variación de la intensidad de corriente, $L$.
- El condensador, $C$, que es un elemento que almacena energía.

Para el circuito de la izquierda, Figura 3.22, su modelo matemático es

$$L\frac{di}{dt} + RI = E. \tag{3.73}$$

Para el circuito de la derecha en la Figura 3.22 su modelo matemático es

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E. \tag{3.74}$$

**Ejemplo 3.4.13.** *Un generador cuya fem es 100 voltios, se conecta en serie con una resistencia de 10 ohmios y una inducción de 2 henrios. Si el interruptor se cierra cuando t=0. Hallar la intensidad de la corriente en función del tiempo.*

**Solución:** *El esquema gráfico del circuito está dado por la gráfica del lado derecho de la Figura 3.22, la ecuación diferencial que modela la dinámica es*

$$2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + 10I = 100,$$

*luego*

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + 5I = 50. \tag{3.75}$$

*La solución de (3.75) es*

$$I(t) = I(0)e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t 50e^{A(x)}dx,$$

*donde,*

$$A(t) = \int_0^t 5dx = 5t,\ I(0) = 0.$$

*Luego,*

$$I(t) = 50e^{-5t} \int_0^t e^{5x}dx = 10(1 - e^{-5t}).$$

*Su gráfica se muestra en la Figura 3.23.*

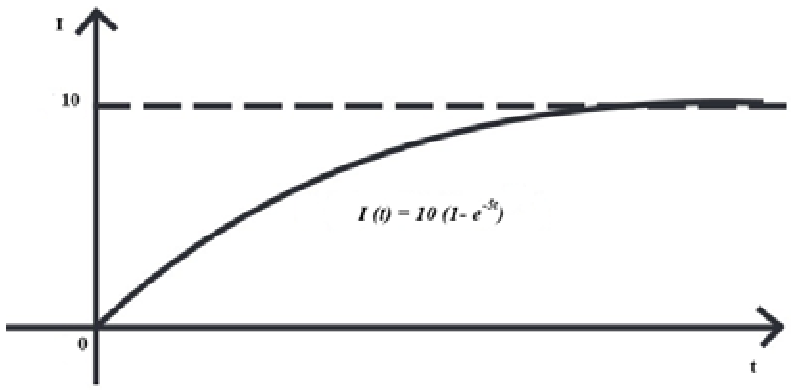



Figura 3.23: Gráfica circuito.

**Ejemplo 3.4.14.** *Una fem decreciente, $E = 200e^{-5t}$ , se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0.01 faradios. Supongamos que la carga es cero en un tiempo cero; hallar la carga y la intensidad en cualquier tiempo t, hallar la carga máxima y el tiempo necesario para alcanzarla.*

**Solución:** *Su esquema gráfico está dado por la gráfica de la derecha en la Figura 3.22, y su ecuación diferencial es*

$$20\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + 100Q = 200e^{-5t},$$

*luego*

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + 5Q = 10e^{-5t}.$$

*Su solución es:*

$$Q(t) = Q(0)e^{-A(t)} + e^{A(t)}. \int_0^t 10e^{-5x}e^{A(x)}dx,$$

*donde*

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t 5dx = 5t \\ &= 10te^{-5t} \\ Q(0) &= 0. \end{aligned}$$

*La intensidad de la corriente en un instante cualquiera es:*

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}.$$

*Para determinar el máximo de carga, hacemos* $\frac{dQ}{dt} = 0$. *Es decir,* $10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 0$, *de la cual deducimos que* $t = \frac{1}{5}$ *segundos, y el valor de la carga máxima es* $Q\frac{1}{5} = \frac{10}{5}e^{-1} = 0{,}74$ *coulombs.*

**Ejemplo 3.4.15.** *En la Figura 3.24 se muestra un marcapasos de corazón, que consiste en un interruptor, una batería, un capacitor y el corazón como un resistor. Cuando el interruptor* $S$ *está en* $P$, *el capacitor se carga; cuando* $S$ *está en* $Q$ *el capacitor se descarga, enviando estímulos eléctricos al corazón. Durante el tiempo que se están aplicando estímulos eléctricos al corazón, el voltaje* $E$ *que atraviesa el corazón satisface la ecuación diferencial lineal.*

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}E. \tag{3.76}$$

*a) Suponga que el intervalo de tiempo de duración* $0 < t < t_1$. *El interruptor* $S$, *está en la posición* $P$ *como se muestra en la Figura 3.24 y el capacitor se está cargando. Cuando el interruptor se mueve a la posición* $Q$ *al tiempo* $t_1$ *el capacitor se descarga, enviando un impulso al corazón durante el intervalo de tiempo de duración* $t_2$ *con* $t_1 \le t < t_1 + t_2$. *Por lo que el intervalo inicial de descarga es* $0 < t < t_1 + t_2$. *El voltaje en el corazón se modela realmente por la ecuación diferencial definida por tramos*

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} 0, 0 \le t < t_1 \\ -\frac{1}{RC}E, t_1 \le t < t_1 + t_2. \end{cases}$$

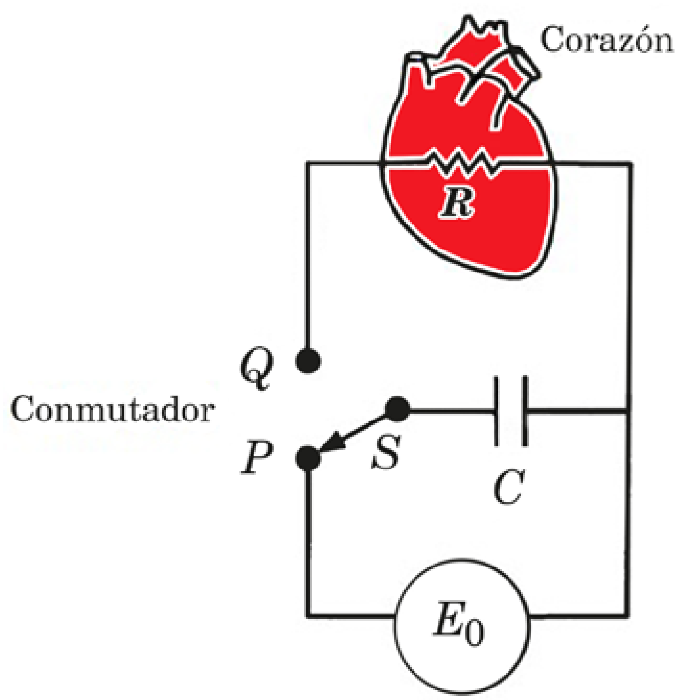



Figura 3.24: Circuito 2.

*Al moverse* $S$ *entre* $P$ *y* $Q$, *los intervalos de carga y descarga de duraciones* $t_1$ *y* $t_2$, *se repiten indefinidamente. Suponga que* $t_1 = 4s$, $t_2 = 2s$, $E_0 = 12V$, $E(0) = 0$,$E(4) = 12$, $E(6) = 0$, $E(10) = 12$, $E(12) = 0$, *etc. Determine* $E(t)$ *para* $0 \le t \le 24$.

*b) Suponga para ilustrar que* $R = C = 1$. *Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución del PVI del inicio a) para* $0 \le t \le 24$.

**Solución parte a)** *Para $0 \leq t < 4$, $60 \leq t < 10$, $12 \leq t < 16$ y $18 \leq t < 22$, el voltaje no está siendo aplicado en el corazón y $E(t) = 0$. Para los otros tiempos $4 \leq t < 6$, $10 \leq t < 12$, $16 \leq t < 18$ y $22 \leq t < 24$ la ecuación diferencial está dada por*

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E. \tag{3.77}$$

*Por medio de separación de variables tenemos:*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}E}{E} &= \int -\frac{1}{RC}dt \\
\ln|E| &= -\frac{1}{RC}t + K \\
e^{\ln|E|} &= e^{-\frac{1}{RC}t + \ln K} \\
E(t) &= Ke^{-\frac{t}{RC}}.
\end{aligned}$$

**Solución parte b)** *Se deja como ejercicio para el lector.*

### 3.4.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en los modelos económicos

- Macro Modelo de Domar

  En este modelo se consideran las siguientes variables: $S(t)$ es el ahorro, $l(t)$ es la inversión, y $(t)$ la renta, todas las funciones del tiempo. $S(t) = ay(t)$, $I(I) = \beta\frac{dy}{dt}$, $S(l) = L(t)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Hallar la solución particular $y_p(L)$, $L_p(t)$ y $S_p(t)$ si $y = y_0$ cuando $t = 0$. Realizar un gráfico.

- Modelos de Deuda de Domar

  $D$ es una deuda nacional y $y_p(t)$ la renta nacional

  $$\begin{aligned}
  \frac{dD}{dt} = \alpha y(t) \quad &, \quad D(0) = D_0 \\
  \frac{dy}{dt} = \beta \quad &, \quad y(0) = y_0 \\
  \alpha > 0 \quad &, \quad \beta > 0
  \end{aligned}$$

  Analizar la relación entre la deuda nacional y la renta nacional en $t \to \infty$.

- Un segundo modelo de deuda de Domar

  $D$ es la deuda nacional y $y(t)$ la renta nacional.

  $$\begin{aligned}
  \frac{dy}{dt} = \beta y(t) \quad &, \quad y(0) = y_0 \\
  D(0) = D_0 \quad &, \quad \alpha > 0, \beta > 0.
  \end{aligned}$$

  Analizar la relación entre la deuda nacional y la renta nacional en cuanto $t \to \infty$.

- Modelo de ajuste del precio de Evans

  $$\begin{gathered}
  d(t) = \alpha_0 + \alpha_1 p(t) \quad \textit{Demanda} \\
  s(t) = \beta_0 + \beta_1 p(t) \quad Oferta \\
  \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \gamma(d - s) \\
  \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma > 0.
  \end{gathered}$$

  Hallar $p(t)$ si $p(0) = P_0$. Tenga en cuenta que $p_t = \dfrac{\alpha_1 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}$ es el precio de equilibrio.

- Modelo de Demanda y Oferta

  La demanda y la oferta (por unidad de tiempo) de un artículo están dadas respectivamente por $x$ y $y$, siendo $p$ el precio unitario:

$$x = ap + b \quad y = cp + d.$$

  Supóngase que el precio cambia de tal manera que el exceso de la demanda sobre la oferta decrece a una tasa proporcional a dicho exceso. Encuentre $p(t)$ si $p(0) = P_0$. Demostrar que el precio unitario tiende al valor de equilibrio dado por $p_e = \dfrac{b-d}{\beta - a}$.

**Ejemplo 3.4.16.** *La relación entre el costo de manufactura por artículo, C, y el número de clases de artículos fabricados, x, es tal que la tasa de incremento del costo de manufactura, a medida que aumenta el número de clases, es igual a la razón del costo por artículo más el número de clases, dividido todo entre el número de clases de artículos que se manufacturan. Obtener la relación entre el costo de fabricación por artículo y el número de clases de productos fabricados si* $C = C_0$ *cuando* $x = 1$

**Solución** *La ecuación diferencial que modela el problema es* $\frac{dC}{dx} = \frac{C+x}{x}$ *que se puede reescribir en la forma* $\frac{dC}{dx} = \frac{C}{x} + 1$, *y así,* $f(u) = u + 1$. *Aplicando la fórmula, tenemos:* $\ln kx = \int \frac{du}{(u+1)-u} = \int du = u = \frac{c}{x}$. *Luego la solución general es* $C(x) = x \ln kx$ *siendo* $k$ *la constante de integración. Como* $C = c_0$ *Cuando* $x = 1$ *entonces, al reemplazar en la solución general tenemos*

$$C_0 = (i) lnk(I).$$

*De donde se obtiene para* $K = e^{C_0}$. *Reemplazando este valor de* $k$ *en la solución general, tenemos la solución particular,* $C(x) = xlne^{C_0}x = x(c_0 - \ln x) = x(C_0 + lnx)$.

**Ejemplo 3.4.17.** *El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece durante el periodo de 10 años a un ritmo que depende de la antigüedad de la maquinaria, cuando la maquinara tiene t años, el ritmo al que cambia su valor es* $220(t-10)$ *dólares por año. Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y del valor inicial. Si la maquinaria valía originalmente US \$12.000 =¿Cuánto valdrá cuando tenga 10 años?*

**Solución:** *Sea* $v(T)$ *el valor de la maquinaria al cabo de* $t$ *años, entonces la ecuación diferencial que modela el problema es,*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 220(t-10).$$

*De donde se obtiene* $v(t) = \int 220(t-10)dt = 110t^2 - 2200t + C$. *Como* $v(0) = 12{,}000$ *entonces* $v(t) = 110t^2 - 2200t + 12000$ *y el valor de la maquinaria después de 10 años es.*

$$v(10) = 110(10)^2 - 2200(10) + 12{,}000 - 1{,}000.$$

$US\$1{,}000$ *Después de 4 años. ¿Cuánto valdrá la maquinaría cuando tenga 8 años? Para cierto bien las ecuaciones de oferta y de demanda son las siguientes*

$$D : p + 2x_p = 25$$

$$S : p + 2x_s = 5.$$

*Supongamos que si el mercado no está en equilibrio* $(x_p + x_s)$, *entonces el precio cambia en razón proporcional al exceso de demanda sobre la oferta* $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} = k(x_p - x_s)$. *Sustituya* $x_p$ *y* $x_s$, *y resuelva la ecuación diferencial resultante para* $p(t)$. *Pruebe que no importa cuál sea el precio inicial, el mercado se aproxima eventualmente al equilibrio en* $p = 17$.

*Suponga que la tasa de crecimiento proporcional $y'(t)$, $y(t)$ de la población de la tierra es una constante. La población en 1930 era de 2 mil millones de habitantes y en 1975 fue de 4 mil millones. Considerando a 1930 como $t = 0$, determine la población $y(t)$ de la tierra en el instante $t$. De acuerdo con este modelo, ¿Cuál debió ser la población en 1960?*

*El ritmo al que se propaga una epidemia en una comunidad, es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que ha sido infectada y al número de residentes propensos a la enfermedad que no ha sido infectado. Exprese el número de residentes que ha sido infectado como una función del tiempo.*

### 3.4.6. Aplicaciones a volúmenes

Supongamos que el recipiente es el de la Figura 3.25, donde $A(y)$ es el área de la sección recta del depósito a una altura $y$ y $B$ es el área del orificio con bordes perfectamente pulimentados.

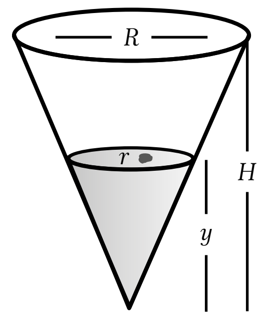



Figura 3.25: Volumen 2.

Si no existiera rozamiento no hay pérdida de energía potencial, toda se convertiría en energía cinética la cual sería la única que aparecería en este fenómeno físico. Luego

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde $y$ es la altura de caída, luego la velocidad de salida sería de $(2gy)^{\frac{1}{2}}$ metros por segundo. Como el área de orificio es $B$ entonces el producto $B(2gy)^{\frac{1}{2}}$ representa el número de metros cúbicos por segundo de líquido que sale por el orificio. Sea $c$ el coeficiente de rozamiento, es decir, el chorro no es completo por el orifico, luego la velocidad de descarga es $cB(2gy)^{\frac{1}{2}}$ metros cúbicos por segundo. Sea $V(y)$ el volumen del líquido que está en el depósito a una altura y entonces:

$$V(y) = \int_0^y A(u)du, y, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = A(y).$$

Luego

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -cB(2gy)^{\frac{1}{2}}.$$

Este resultado es negativo porque el volumen decrece con el tiempo. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dv}{dt},$$

entonces combinando la dos últimas ecuaciones tenemos la ecuación que describe nuestro suceso

$$A(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cB(2gy)^{\frac{1}{2}}.$$

La cual es una ecuación de variables separables de primer orden.

**Ejemplo 3.4.18.** *Un embudo tiene la forma de un cono circular recto, cuyo vértice está hacia abajo y está lleno de agua. Si la mitad del volumen se desocupa en un tiempo $T$, encontrar el tiempo requerido para vaciarse completamente.*

**Solución:** *El gráfico del recipiente y sus elementos son: $H$ la altura del cono, $R$ el radio mayor, $r$ el radio de la sección recta $A$ $(y)$ a una altura $y$ del vértice, como la altura depende del tiempo, sea $y = f(t)$ la función que determina la altura del líquido en el recipiente, de acuerdo a la condición dada que la mitad del volumen sale en un tiempo $T$, podemos hallar la altura del líquido que queda en función de $H$. Tenemos que $V_{total} = \frac{\pi R^2 H}{3}$, y, $\frac{1}{2}V_{total} = \frac{\pi R^2 H}{6}$. De acuerdo a la semejanza de triángulos, tenemos que: $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$. Luego, $\frac{r^2 h}{R^2 H} = \frac{h^3}{H^3}$ como la razón entre los dos volúmenes es de 1:2, entonces*

$$\frac{1}{2} = \frac{h^3}{H^3}.$$

*Luego*

$$H^3 = 2h^3,$$

*de donde*

$$f(T) = h = \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

*Como*

$$A(y) = \pi r^2 = \frac{\pi R^2 y^2}{H^2}.$$

*Luego la ecuación diferencial $A(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -CB(2gy)^{\frac{1}{2}}$ se transforma en*

$$\frac{\pi R^2 y^2 dy}{H^2 dt} = -cB(2gy)^{\frac{1}{2}},$$

*cuya solución viene dada por*

$$\frac{\pi R^2}{H^2\sqrt{2g}} \int_H^y y^{\frac{3}{2}} dy = -\int_0^t cB dt.$$

*Luego,*

$$\frac{2\pi R^2}{5H^2\sqrt{2g}} \left[ y^{\frac{5}{2}} - H^{\frac{5}{2}} \right] = -cBt.$$

*Para $y = 0$ tenemos el tiempo total, entonces*

$$\frac{2\pi R^2 H^{\frac{5}{2}}}{5H^2\sqrt{2g}} = cBt \quad total.$$

*Luego,*

$$t_{total} = \frac{2\pi R^2 \sqrt{H}}{5cB\sqrt{2g}}.$$

*El cual aparece en función de $H$, $R$, $c$ y $B$, y lo importante es dejarlo en función únicamente de $T$, pero la condición dada de que $f(T) = \frac{H}{\sqrt[3]{2}}$, luego podemos reemplazar esta condición en la solución a la ecuación diferencial y tenemos*

$$\frac{2\pi R^2 H^{\frac{1}{2}}}{5cB\sqrt{2g}} \left[ \frac{1}{\sqrt[6]{32}} - 1 \right] = -cBT$$

$$\frac{2\pi R^2 \sqrt{H}}{5cB\sqrt{2g}} = T \frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{32} - 1}.$$

*Luego,*

$$t_{total} = 2,28T.$$

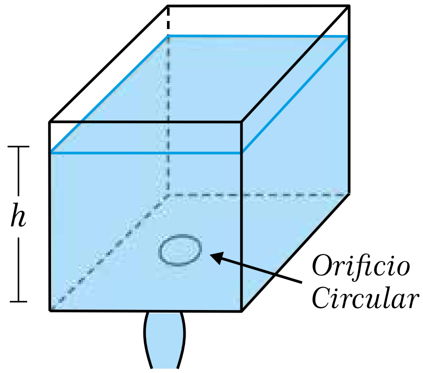



Figura 3.26: Tanque con agujero circular.

**Ejemplo 3.4.19.** *Suponga que está saliendo agua de un tanque a través de un agujero circular de área $A_0$ que está en el fondo. Cuando el agua sale a través del agujero, la fricción y la contracción de la corriente cerca del agujero reducen el volumen de agua que sale del tanque por segundo a $cA_0\sqrt{2gh}$ donde $c$ donde $0 < c < 1$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura $h$ del agua al tiempo $t$ para el tanque cúbico, que se muestra en la figura. El radio del agujero es de 2 pulg $g = 32\frac{pies}{s^2}$, el área del águjero es $Ah = \pi(2pulg)^2$, el área de la base es $Aw = 100$, $c$ es la constante que depende de las propiedades físicas del líquido. Partimos de: $\frac{dv}{dt} = -Ah\sqrt{2gh}$ . En primer lugar, podemos obtener el volumen del tanque $v = 100h$. Como la altura y el volumen varían con respecto al tiempo, tenemos*

$$\frac{dv}{dt} = 100\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dv}{dt}.$$

*Pero*

$$\frac{dv}{dt} = cAh\sqrt{2gh} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = c\pi(2)^2\sqrt{2*32*h}.$$

$$\frac{dv}{dt} = c\pi\left(\frac{1}{6}\right)^2\sqrt{64h}$$

$$\frac{dv}{dt} = c\pi\left(\frac{1}{36}\right)8\sqrt{h}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{9}c\pi\sqrt{h}.$$

*Sustituyendo $\frac{dv}{dt}$ en $\frac{dh}{dt}$ se obtiene*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100}\frac{2}{9}c\pi\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{c\pi\sqrt{h}}{450}.$$

*Pero como el nivel del agua está disminuyendo concluimos*

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{c\pi\sqrt{h}}{450}.$$

### 3.4.7. Trayectorias ortogonales

Supóngase que se tiene una sola familia infinita de curvas. Considérese una segunda familia compuesta de todas las curvas que intersectan a todas las curvas de la familia dada en ángulos rectos. Cuando dos familias están relacionadas en la forma que se ha descrito, se dice que las curvas de una familia son las trayectorias ortogonales de la otra. Si se diferencia la ecuación de la familia de curvas dadas y se elimina el parámetro, se obtiene la ecuación diferencial de la familia dada, una ecuación que da la pendiente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ de cualquiera de las curvas, en función de las coordenadas $x$, $y$ de un punto de la curva. Ahora bien, la pendiente de la trayectoria ortogonal en el punto $(x, y)$ debe ser la recíproca negativa de la pendiente de la curva dada, con objeto que se cumpla la condición de perpendicularidad. La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales se obtiene entonces escribiendo $\frac{dy}{dx}$, e igualando a la recíproca negativa del valor que tiene en la ecuación diferencial de la familia dada.

**Ejemplo 3.4.20.** *Hallar las trayectorias ortogonales de las hipérbolas $xy = c$.*

**Solución:** *la familia dada es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, luego la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, la cual es una ecuación de variables separables, cuya solución es $y^2 = x^2 + c$, donde $c$ es una constante.*

## 3.5. Curvas determinadas de propiedades geométricas

A menudo se tiene una familia de curvas caracterizada por una propiedad geométrica indicada en función de las coordenadas de un punto en una de las curvas y de la primera derivada de una de las coordenadas con respecto a la otra. Tal enunciado será una ecuación diferencial de primer orden cuya solución general representa la familia de curvas, cada una de las cuales posee la propiedad dada. Si se da una condición adicional, tal como que la curva contiene un punto fijo dado, se puede usar dicha condición para determinar la constante en la solución general.

**Ejemplo 3.5.1.** *Hallar la familia de curvas de tal manera que la proyección de la normal al eje $x$ tiene una longitud $k$.*

**Solución:** *En la Figura 3.27 se observa la curva, su tangente y su normal en un punto $P(x, y)$, luego para nuestro caso tenemos que $DB$ mide $k$, luego $y \tan u = y\frac{dy}{dx}$. Para $P$ en cualquiera de los cuatro cuadrantes $dy/dx$ ya sea obtuso o agudo, la longitud de $DB$ es siempre $y\frac{dy}{dx}$ , o, $-y\frac{dy}{dx}$. Luego la ecuación diferencial para la familia pedida es*

$$\pm y\frac{dy}{dx} = k.$$

*La cual es una ecuación de variables separables cuya solución es*

$$y^2 = \pm 2kx + c,$$

*donde $c$ es una constante.*

## 3.6. Técnica moderna avanzada para la cuantificación del riesgo de terrorismo: ecuaciones Lanchester modificadas

En el artículo llamado Lanchester resurgent? The mathematics of terrorism, escrito por Michael Powers (2008), se hace un análisis de la aplicabilidad de las ecuaciones de Lanchester de combate militar en el modelaje de los riesgos financieros asociados con los ataques terroristas contemporáneos. El ensayo inicia describiendo el modelo original de Lanchester y su espacio de aplicación. Las ecuaciones de combate militar tradicionales Lanchester datan de la primera guerra mundial (1916), y se escriben a continuación (Powers, 2008, p. 227).

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -k_1 A^{\alpha_1} D^{\delta_1} \\ \frac{dD}{dt} &= -k_2 A^{\alpha_2} D^{\delta_2}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

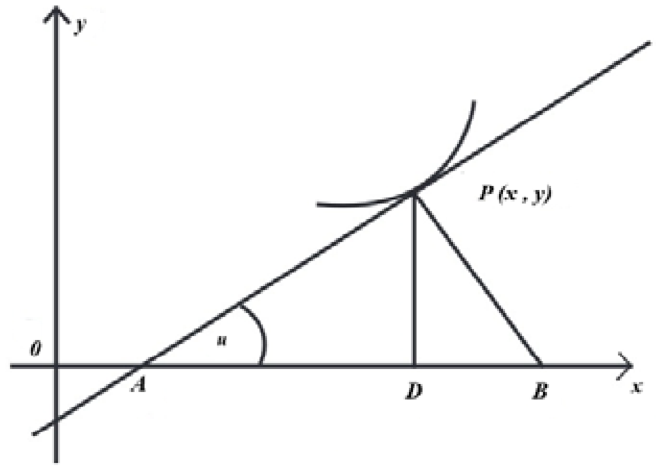



Figura 3.27: Gráfica del problema.

donde $A = A(t)$ y $D = D(t)$ denota, respectivamente, los tamaños de las fuerzas de los atacantes y de los defensores en el tiempo $t \geq 0$ ; $k_1$, $k_2$ son parámetros positivos reales denotando, respectivamente, las tasas de destrucción efectivas de los defensores y los atacantes; y $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\delta_1$, $\delta_2$ son parámetros reales reflejando la naturaleza fundamental del combate bajo análisis. En su formulación original, Lanchester (1916) considera dos casos considerados: uno para guerra "antigua", en el cual $\alpha_1 = 1$; $\delta_1 = 1$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$, y uno para la guerra "moderna" en el cual, $\alpha_1 = 0$; $\delta_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$. La deducción para el modelo original surge del combate mano a mano, en el que el número potencial de micro-enfrentamientos es dado por el producto de las fuerzas de los dos ejércitos, así que la tasa de atrición de cada uno de los ejércitos en cualquier momento t es proporcional a su producto. Resolviendo los sistemas de ecuaciones diferenciales bajo este supuesto da la siguiente condición (Powers, 2008, p. 227)

$$\frac{k_2}{k_1} > [<] \, \frac{D(0)}{A(0)}, \tag{3.79}$$

para que los atacantes (defensores) puedan ganar. El último modelo trata de reflejar un tipo de combate en el cual los dos ejércitos se disparan uno a otro de cierta distancia, con lo que la tasa de atrición de cada uno de los ejércitos en un momento determinado t es proporcional al tamaño de las fuerzas del ejército oponente. Bajo este supuesto, el sistema de ecuaciones diferenciales obtiene la siguiente condición (Powers, 2008, p. 227)

$$\frac{k_2}{k_1} > [<] \left[\frac{D(0)}{A(0)}\right]^2, \tag{3.80}$$

para que los atacantes (defensores) puedan ganar. La principal conclusión obtenida del análisis original es que la proporción de las fuerzas de los ejércitos oponentes iniciales (i.e. $D(0) = A(0)$) juega un papel más importante en el combate "moderno", al evaluar el cuadrado en la condición (3.80), que en combate "antiguo", en comparación a la primera (3.79) elevado solo a la primera potencia. A pesar de su aplicabilidad exitosa, las ecuaciones de Lanchester han presentado ciertas debilidades que les han hecho perder terreno frente a técnicas como la simulación y técnicas de juegos de rol. Esas debilidades se expresan a continuación:

- El supuesto de las fuerzas homogéneas (es decir; tanto $A(t)$ y $D(t)$ cambian continuamente a través del tiempo, así la pérdida de un tanque no se diferencia de la pérdida de un soldado).
- La formulación meramente determinística (es decir; el ejército con fuerzas mayores asegura la victoria).
- La presencia de componentes difíciles de cuantificar (especialmente terreno, clima y moral).

- La falla de reconocer ciertas asimetrías entre ejércitos (es decir; específicamente las diferencias en objetivos, información y armamento).

### Combate de terrorismo

¿Por qué intentar un enfoque de Lanchester hacia el terrorismo cuando la naturaleza del conflicto no necesariamente debe ser determinístico, donde los terrenos inexplorados juegan un papel vital, y cuando las asimetrías de los objetivos, información y armamento son tan extremos? La respuesta es simple. La ventaja principal del enfoque de Lanchester es el tratamiento analítico. Por lo tanto, asumiendo que la motivación de nuestra discusión es calcular la probabilidad condicional de la destrucción de un objetivo, dado el objetivo seleccionado para ataque; esto representa una oportunidad de intentar sobreponerse a las debilidades expuestas anteriormente. Estas debilidades pueden ser abordadas al sustituir las ecuaciones (3.78) por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (Powers, 2008, p. 228)

$$\begin{aligned} dA &= -\frac{k_1}{v^q}ADdt + \sigma_1 dz_1 \\ dD &= -k_2 Adt + \sigma_2 dz_2, \end{aligned} \tag{3.81}$$

donde $dz_1$, $dz_2$, son movimientos estándares Brownianos; $\sigma_1 = \delta_1\ (A, D, t) > 0$, $\sigma_2 = \delta_2\ (A, D, t) > 0$ son las desviaciones estándar infinitesimales asociadas; $v$ denota el volumen tridimensional del objetivo bajo ataque; y $q$ denota un parámetro potencia-transformación usado para reconocer el campo apropiado de combate (e.g. $q = \frac{1}{3}$ si un edificio puede ser atacado a través del perímetro del primer piso, $q = \frac{2}{3}$ si el edificio puede ser atacado por cualquier parte de su superficie, como un avión lleno de kerosene, y $q = 1$ si una bomba puede ser colocada en cualquier parte del edificio). Aunque cualquier formulación con valores continuos de $A$ y $D$, se modelaran fuerzas homogéneas solo de forma aproximada, el sistema de ecuaciones (3.81) posee una serie de mejoras en relación al modelo de Lanchester original. Primero, este introduce una estructura estocástica específica en un esquema determinístico. Segundo, este captura el papel del terreno hasta cierto grado a través del parámetro $q$, y casi no es afectado por cambios en el clima y la moral debido a que los ataques terroristas son generalmente cortos en duración. Tercero, éste captura la información asimétrica asociada con un ataque sorpresa sobre el objetivo a través de las formas funcionales de los cambios infinitesimales en el lado derecho de las ecuaciones (3.81).

## 3.7. Ejercicios

### 3.7.1. Crecimiento y Decaimiento

1. Si se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento $t$. Si la población se duplico en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

2. La población de una comunidad crece a razón proporcional a la población en cualquier momento $t$. Su población inicial es de 500 y aumenta un 15 % en 10 años. ¿cuál será la población en 30 años?

3. Cuando pasa un haz vertical de luz por una sustancia transparente, la rapidez con que decrece su intensidad $I$ es proporcional a $I(T)$, donde $t$ representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es de 25 % de la intensidad inicial $I_0$ del haz incidente. ¿Cuál es la intensidad del haz a 15 pies bajo la superficie?

4. El Pb-209, Isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier cuerpo $t$ y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre un 90 %?

5. Al inicio había 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Al cabo de seis horas, esa cantidad disminuyó 3 %. Si la rapidez de desintegración, en cualquier tiempo $t$, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente calcule la cantidad que queda después de 24 horas.

### 3.7.2. Fechado con carbono

1. Muchos creen que el Sudario de Turín, que muestra un negativo de la imagen de un cuerpo de un hombre crucificado, es la mortaja de Jesús de Nazareth. En 1988, el Vaticano otorgó autorización para que fechara el carbono del manto. Tres laboratorios científicos independientes, que analizaron la tela, llegaron a la conclusión que tiene unos 660 años, edad que coincide con su aparición histórica. Con esa edad, determine qué porcentaje de la cantidad original de C-14 quedaba en la tela en 1988.

### 3.7.3. Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

1. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70°F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10°F$. Después de $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica $50°F$. ¿Cuál es la lectura cuando t=1 min? cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°F$.

2. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de $20°C$ se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar $90°C$ si se sabe que su temperatura aumentó $2°C$ en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a $98°C$.

### 3.7.4. Mezclas

1. Un tanque contiene 200 litros de agua donde se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 L/min de solución con un 1 g de sal por litro; bien mezclado, de él sale líquido con la misma rapidez. Calcule la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t$.

2. Un tanque tiene 500 galones de agua pura y le entra salmuera con 2 libras de sal por galón a razón de $5\frac{gal}{min}$. El tanque está bien mezclado, y de él sale la solución con la misma rapidez. Determine la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t$ ¿Cuál es la concentración de la solución en el tanque cuando $t = 5$ min?

3. Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 lb de sal disuelta. Le entra salmuera con $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón a razón de $6\frac{gal}{min}$. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale a razón de 4 gal/min de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

### 3.7.5. Ejercicios Generales

1. Una piedra que pesa 4 lbs cae hacia la superficie terrestre partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, el aire ejerce sobre ella una resistencia que es numéricamente igual a $\frac{1}{2}v$ (en libras), donde $v$ es la velocidad (en pies por segundo).

   *a*) Hallar la velocidad y distancia recorrida en $t$ segundos.

   *b*) Hallar la velocidad y distancia recorrida al final de los 5 segundos.

2. Desde un punto situado a 6 pies por encima de la superficie terrestre y con una velocidad inicial de $20\frac{pies}{seg}$, se lanza verticalmente hacia arriba una bola que pesa $\frac{1}{2}lib$. En su ascensión encuentra una resistencia por parte del aire que es numéricamente igual $\frac{1}{64}v$ (en libras), donde $v$ es la velocidad (en pies por segundo).¿Cuál será la altura alcanzada por la bola?

3. Dos hombres navegan en una lancha motora, siendo 640 lb el peso combinado de los hombres, motor, lancha y equipo. El motor ejerce una fuerza constante de 20 lb sobre la lancha en el sentido del movimiento, mientras que la resistencia (en libras) es numéricamente igual a una mitad de la velocidad (en pies por segundo). Si la lancha partió del reposo, hallar su velocidad al cabo de (a) 20 seg, (b) 1 minuto.

4. Una bala de 2 onzas de peso se dispara verticalmente hacia abajo desde un helicóptero detenido en el aire con una velocidad en la boca del arma de 1200 pies/seg. La resistencia del aire (en libras) es numéricamente igual a $10^{-5}v^2$, donde $v$ es la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad de la bala como función del tiempo.

5. Supongamos que el coeficiente de variación instantánea con que se desintegra un núcleo radioactivo es proporcional al número de tales núcleos, presentes en una muestra dada. En una cierta muestra, el 10 % del número original de núcleos radioactivos ha sufrido desintegración en un periodo de 200 años.

   *a*) ¿Qué porcentaje de los núcleos radioactivos originales quedará al cabo de 1000 años?
   *b*) ¿En cuántos años quedará solamente un cuarto del número original?
   *c*) Realice el diagrama de fase.

6. Una reacción química convierte un cierto compuesto en otro, siendo la razón de conversión del primer compuesto proporcional a la cantidad de éste presente en cualquier instante. Al cabo de una hora quedan 50 gr. del primer compuesto, mientras que al cabo de las tres horas sólo quedan 25 gr.

   *a*) ¿Cuántos gramos del primer compuesto existían inicialmente?
   *b*) ¿Cuántos del primer compuesto quedarán al cabo de 5 horas?
   *c*) ¿En cuántas horas quedarán sólo 2 gramos del primer compuesto?

7. La población de una ciudad aumenta con un coeficiente de variación que es proporcional al número de sus habitantes en cualquier instante t. Si la población de la ciudad era 30000 en 1960 y 35000 en 1970 ¿Cuál será su población en 1980?

# Capítulo 4

# Ecuaciones diferenciales de orden superior

## 4.1. Ecuación diferencial lineal de orden n

La teoría general de ecuaciones diferenciales lineales, en realidad comienza con los teoremas que hallan la solución a las ecuaciones de orden n; hasta el momento únicamente lo hemos hecho para orden uno, para el caso de orden n la existencia y unicidad de la solución es mucho más compleja de probar, debido a ello nos limitaremos a enunciarlo y al final en el apéndice segundo lo demostraremos, para el lector interesado.

**Teorema 4.1.1.** *Sea $L$ un operador diferencial lineal normal de orden $n$, definido en un intervalo $I$, y sea $x_0$ un punto arbitrario de $I$. Si $a_0$, $a_1, \ldots,$ $a_{n-1}$ son reales arbitrarios, entonces la ecuación $L(y) = h$, con $h \in C(I)$, y $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1, \ldots,$ $y^{n-1}(x_0) = a_{n-1}$ tiene una única solución.*

Luego este teorema caracteriza la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial lineal normal de orden n. Ahora probemos que la dimensión del espacio solución a dicha ecuación es igual al orden de la ecuación.

**Teorema 4.1.2.** *Dada la ecuación diferencial lineal normal homogénea de orden $n$*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = 0, \tag{4.1}$$

*definida en $I$. entonces el espacio solución de esta ecuación es un sub-espacio $n$-dimensional de $C^n(I)$.*

*Demostración.* Para un punto fijo $x_0$ de $I$, y las siguientes $n$-etuplas

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, \ldots, 0)\\(0, 1, 0, \ldots, 0)\\\vdots\\(0, 0, 0, \ldots, 1),\end{gathered}$$

existen $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ que son soluciones de la ecuación (4.1) y satisfacen las condiciones dadas. Entonces

$$\begin{array}{cccc}
y_1(x_0) = 1 & y_1'(x_0) = 0 & ... & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0\\
y_2(x_0) = 0 & y_2'(x_0) = 1 & ... & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0\\
. & . & ... & .\\
. & . & ... & .\\
. & . & ... & .\\
y_n(x_0) = 0 & y_n'(x_0) = 0 & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,
\end{array}$$

o sea $(y_i(x_0), y_i'(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0))$, para $i = 1, 2, ..., n$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ y forman una base de éste. Probemos que estas soluciones son una base para el espacio solución de (4.1). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n$-reales tales que

$$a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \ldots + a_ny_n(x) = 0,$$

para $x$ en $I$. Luego hallando las $n-1$ derivadas, tenemos

$$\begin{array}{c} a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + ... + a_ny_n(x) = 0 \\ a_1y_1'(x) + a_2y_2'(x) + ... + a_ny_n'(x) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_1y_1^{(n-1)}(x) + a_2y_2^{(n-1)}(x) + ... + a_ny_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{array}$$

Haciendo $x = x_0$, obtenemos

$$\begin{array}{c} a_1y_1(x_0) + a_2y_2(x_0) + \ldots + a_ny_n(x_0) = 0 \\ a_1y_1'(x_0) + a_2y_2'(x_0) + \ldots + a_ny_n'(x_0) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_1y_1^{(n-1)}(x_0) + a_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + a_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{array}$$

Entonces $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ , lo cual implica que $y_1$, $y_2, \ldots$, $y_n$ son linealmente independientes en $C(I)$, lo único que falta para poder concluir que $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ es una base del espacio solución de la ecuación (4.1), es que cualquier solución de dicha ecuación se puede expresar como combinación lineal de las n-funciones dadas. Sea $y$ una solución arbitraria de la ecuación (4.1) y supongamos que $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n$. Por el Teorema 4.1.1, sabemos que esta solución es única. Definimos $h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$ para $x$ en $I$. Luego $h$ es solución de (4.1) y satisface las condiciones dadas, pero el teorema 5 asegura que dicha solución es única, luego $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$, de donde podemos concluir que $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ generan el espacio solución de la ecuación (4.1), luego este conjunto de funciones es una base a dicho espacio generan el espacio solución de la ecuación (4.1), luego este conjunto de funciones es una base a dicho espacio. $\square$

Al observar la demostración del Teorema 6, vemos que establece un método para comprobar la independencia lineal de funciones, el cual lo podemos caracterizar así.

**Corolario 4.1.1.** *Sea $y_1$, $y_2, \ldots$, $y_n$, n-funciones de $C(I)$, cada una de las cuales posee derivadas hasta del orden $(n-1)$ inclusive en todo $I$, y supongamos que existe un punto $x_0$ en $I$ tal que los vectores $y(x_0)$, $y'(x_0), \ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)$ , para $i = 1, 2, \ldots, n$ Son linealmente independientes en $R^n$. Entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente independientes en $C(I)$.*

### 4.1.1. El Wronskiano

Acabamos de mostrar cuando n-funciones son linealmente independientes en $C(I)$, pero esto también lo podemos caracterizar a través de la idea del Wronskiano de $y_1, y_2, ..., y_n$ para n-funciones de $C^{(n-1)}(I)$, el cual notaremos así

$$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)), \tag{4.2}$$

y está definido por el siguiente determinante

$$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

En el apéndice uno, se demostrará que si $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ son $n$-vectores linealmente independientes entonces

$$D(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con base en este enunciado tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.1.3.** *Dadas las funciones $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$, n-funciones de $C^{(n-1)}(I)$ tal que $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \neq 0$ para $x$ en $I$, entonces $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$ son linealmente independientes en $C(I)$.*

**Ejemplo 4.1.1.** *Hallemos el wronskiano de las funciones $e^x$ y $e^{-x}$, y determinemos si las funciones son linealmente independientes.*

***Solución:***

$$W\left(e^x, e^{-x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{vmatrix} = 2,$$

*luego $e^x$ y $e^{-x}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.*

**Ejemplo 4.1.2.** *Dadas las funciones $x^3$ y $|x|^3$, ya que si $c_1x^3 + c_2\,|x|^3 = 0$ para $x = 1$, y, $x = -1$, tenemos que $c_1 = c_2 = 0$. Pero*

$$W\left(x^3, |x|^3\right) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

*si $x$ es mayor o igual a cero. El wronskiano satisface*

$$W\left(x^3, |x|^3\right) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

*si $x$ es menor de cero.*

Lo cual demuestra que el recíproco al Teorema 4.1.3 es falso, o sea no podemos deducir dependencia lineal de un conjunto de funciones en $C(I)$ del hecho de que su Wronskiano sea idénticamente cero en $I$, pero si condicionamos estas funciones a ser soluciones de una ecuación diferencial lineal normal homogénea, podemos concluir el siguiente resultado

**Teorema 4.1.4.** *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n-funciones de $C^n(I)$ que son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden n.*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = 0,$$

*tales que $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = 0$ sobre $I$. Entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son linealmente dependientes en $C^n(I)$.*

*Demostración.* Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n incógnitas tales que

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) = 0,$$

para $x$ en $I$. Entonces

$$\begin{array}{c} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + ... + c_ny_n(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + ... + c_ny_n'(x_0) \\ . \\ . \\ . \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_ny_n^{(n-1)}(x_0), \end{array} \tag{4.3}$$

Dado que $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = 0$ para $x$ en $I$, entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son linealmente dependientes en $C^n(I)$ □

Ahora, el determinante de (4.3) es cero y el sistema tiene una solución no trivial $(\hat{c_1}, \hat{c_2}, ..., \hat{c_n})$ en base al siguiente teorema.

**Teorema 4.1.5.** *Si los vectores $a_1, ..., a_n$ son linealmente dependientes entonces $D(a_1, ..., a_n) = 0$.*

*Demostración.* Luego la función $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_1\hat{y_i}(x)$ es solución de la ecuación diferencial y satisface las condiciones $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, y^{n-1}(x_0) = 0$. Como la función $y(x) = 0$ para $x$ en $I$ es solución a la ecuación con esas condiciones, entonces por el teorema de existencia y unicidad de la solución la ecuación diferencial lineal normal homogénea de orden $n$, tenemos $\hat{c_1}y_1(x)+\hat{c_2}y_2(x)+...+\hat{c_n}y_n(x) = 0$, para $x$ en $I$. Luego $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son n-funciones linealmente dependientes ya que no todas las $c_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, no son cero. □

Al observar la demostración vemos que solamente se hace uso del hecho de que el Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se anula en un solo punto de $I$. Luego podemos deducir

**Teorema 4.1.6.** *Un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden $n$ es linealmente independiente en $C^n(I)$, y por consiguiente una base para el espacio solución de la ecuación, si y solo sí, su Wronskiano nunca se hace cero en $I$.*

**Ejemplo 4.1.3.** *El Wronskiano de $u_1, u_2$ es nulo para todo $x$ en un intervalo abierto $I$, demostrar que el cociente $\frac{u_2}{u_1}$ es constante en $I$.*

*Para ello tomemos el cociente $\frac{u_2(x)}{u_1(x)}$ y derivamos, obtenemos:*

$$\frac{u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)}{u_1^2(x)} = \frac{W(u_1(x), u_2(x))}{u_1^2(x)} = 0.$$

*Para todo $x$ en $I$, luego $\frac{u_2}{u_1}$ es constante en $I$.*

**Ejemplo 4.1.4.** *Sea $w$ el Wronskiano de $u_1, u_2$, soluciones de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, siendo $a$ y $b$ constantes.*

1. *Demostrar que $W$ satisface la ecuación de primer orden $W' + aW = 0$ y por tanto $W(x) = W(0)e^{-\alpha x}$.*

2. *Suponiendo que $u_1$ no es idénticamente nula, demostrar que $W(0) = 0$ si y solo si $u_1, u_2$ es constante.*

***Solución:***

1. *Como* $W(u_1(x),u_2(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$. *Luego*

$$W'(u_1(x),u_2(x)) = u_1(x),u_2''(x) - u_2(x),u_1''(x).$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} W'(u_1(x),u_2(x)) + aW(u_1(x),u_2(x)) &= u_1(x),u_2''(x) - u_2(x),u_1''(x) + au_1(x),u_2'(x) \\ &\quad -au_2(x),u_1'(x) \\ &= u_1(x)\left[u_2''(x)au_2'(x)\right] - u_2(x)\left[u_1''(x)au_1'(x)\right] \\ &= u_1(x)\left[-bu_2(x)(x)\right] - u_2(x)\left[-bu_1(x)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Que era lo que deseábamos probar. Aplicando la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden uno, a*

$$W' + aW = 0,$$

*tenemos que* $W(x) = W(0)e^{-A(x)}$, *donde* $A(x) = \int_0^x a dt = ax$, *entonces* $W(x) = W(0)e^{-a(x)}$.

2. *Si* $u_1(x)$ *es diferente de cero para todo* $x$ *en* $I$, *y suponemos que* $W(u_1(0),u_2(0)) = 0$, *probemos que* $\frac{u_2}{u_1}$ *es constante, para ello derivemos dicho cociente, y obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\right] &= \frac{u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)}{u_1^2(x)} \\ &= \frac{W\left[u_1(x),u_2(x)\right]}{u_1^2(x)} \\ &= \frac{W(0)e^{-ax}}{u_1^2(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Luego el cociente* $\frac{u_2}{u_2}$ *es una función constante en* $I$. *Ahora, supongamos que* $\frac{u_2}{u_2}$ *es constante para todo elemento de* $I$, *derivando este cociente tenemos:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\right) &= \frac{u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)}{u_1^2(x)} \\ &= \frac{W\left[u_1(x),u_2(x)\right]}{u_1^2(x)} = 0. \end{aligned}$$

*Luego,*

$$W(u_1(x),u_2(x)) = 0 = W(u_1(0),u_2(0)).$$

## 4.2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Algunas ecuaciones de segundo orden se pueden resolver por procesos de integración inmediata o por reducción de orden.

### 4.2.1. Ecuaciones del tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

La solución general se obtiene integrando dos veces, así

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int f(x)dx + c_1 \\ y(x) &= \int \left[ \int f(x)dx + c_1 \right] dx + c_2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.2.1.** *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 10x^2.$$

***Solución:*** *Integrando la ecuación diferencial con respecto a $x$ dos veces obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int 15x^2 dx = 5x^3 + c_1 \\ y(x) &= \int (5x^3 + c_1)dx = \frac{5}{4}x^4 + c_1 x + c_2 \\ y(x) &= \frac{5}{4}x^4 + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.2.2.** *Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-\frac{1}{n}}$$

*con $n \in \mathbb{Z}^+$.*

*Solución: Como $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = x^{-\frac{1}{n}}$, entonces*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int x^{-\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{x^{-(\frac{n-1}{n})}}{-\frac{1}{n} + 1} + c \\ &= \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} + c \\ &= \frac{n}{(n-1)} x^{\frac{n-1}{n}} + c. \end{aligned}$$

*Integrado la ecuación anterior se obtiene*

$$\begin{aligned} y &= \frac{n}{(n-1)} \int x^{\frac{n-1}{n}} dx + cx + c_0 \\ &= \frac{n}{(n-1)} . \frac{x^{\frac{n-1}{n}+1}}{\frac{2n-1}{n}} + cx + c_0 \\ &= \frac{n^2}{(n-1)(2n-1)} x^{\frac{2n-1}{n}} + cx + c_0, \end{aligned}$$

*donde $c, c_0 \in \mathbb{R}$.*

**Ejemplo 4.2.3.** *Resolver la Ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{2}}; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

***Solución:*** *Sabemos que*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx \\
&= \int \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{\sqrt{x}} dx \\
&= \int \left( x^{2m-\frac{1}{2}} - 2x^{m+n-\frac{1}{2}} + x^{2n-\frac{1}{2}} \right) dx \\
&= \frac{x^{2m-\frac{1}{2}+1}}{2m - \frac{1}{2} + 1} - \frac{2x^{m+n-\frac{1}{2}+1}}{m+n-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + c \\
&= \frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{2x^{m+n+\frac{1}{2}}}{2(m+n)+1} + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + c. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

*Integrando (4.4) se obtiene*

$$y(x) = \frac{2x^{2m+\frac{3}{2}}}{4m+3} - \frac{4x^{m+n+\frac{3}{2}}}{2(m+n)+1} + \frac{2x^{2n+\frac{1}{2}}}{4n+1} + cx + c_0,$$

*con* $c, c_0 \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 4.2.4.** *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \tan(t)^2.$$

***Solución:*** *Integrando la ecuación diferencial se tiene*

$$\frac{dx}{dt} = \int \left[ (\sec t)^2 - 1 \right] dt + c_1 = \tan t - t + c_1,$$

*luego*

$$x = \int \tan t dt - \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

*Por lo tanto,*

$$x(t) = -\ln|\cos t| - \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

*con* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

### 4.2.2. Ecuaciones del tipo $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$.

En estas ecuaciones se utiliza el cambio de variable $z = \frac{dy}{dx}$ para llevarlas a una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, z).$$

**Ejemplo 4.2.5.** *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0.$$

***Solución:*** *Haciendo el cambio de variable* $z=\frac{dy}{dx}$ *se obtiene* $\frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$*, por lo que la ecuación dada se transforma en*

$$(x-1)\frac{dz}{dx}+z=0,$$

*o equivalentemente*

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x-1},$$

*cuya solución es*

$$\ln z+\ln(x-1)=\ln c_1,$$

*con* $c_1$ *constante. Aplicando las propiedades de logaritmos se obtiene*

$$\ln(x-1)z=\ln c_1,$$

*luego*

$$(x-1)z=c_1,$$

*en consecuencia*

$$z=\frac{c_1}{x-1}.$$

*Ahora deshacemos el cambio de variables*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{x-1},$$

*de donde se obtiene*

$$y(x)=\int\frac{c_1}{x-1}dx.$$

*Finalmente la solución general es*

$$y(x)=c_1\ln(x-1)+c_2.$$

*Obsérvese que la solución general tiene las dos constantes* $c_1$ *y* $c_2$ *ya que la ecuación diferencial es de segundo orden.*

**Ejemplo 4.2.6.** *Hallar la solución general y particular de la ecuación diferencial.*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=0,$$

*con las condiciones iniciales* $y(1)=y'(1)=0$*. Haciendo el cambio de variable* $z=\frac{dy}{dx}$ *, entonces* $\frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$*, por lo que la ecuación dada se transforma en*

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=0\Rightarrow\frac{dz}{z}\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln z-\ln c_1x\Rightarrow z=c_1x.$$

*Deshaciendo el cambio*

$$\frac{dy}{dx}=c_1x\Rightarrow\int dy=\int c_1xdx\Rightarrow y(x)=\frac{c_1x^2}{2}+c_2$$

*La solución general es* $y(x)=c_1x^2+c_2$*, y la solución particular será* $y_p(x)=x^2+1$*.*

### 4.2.3. Ecuaciones de los tipos $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$

*Para reducir el orden de estos dos tipos de ecuaciones, hay que considerar la $y$ como la nueva variable independiente, por lo que el cambio $z = \frac{dy}{dx}$ se completa así*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

*Al realizar el cambio de variable en estos tipos de ecuaciones, las nuevas ecuaciones diferenciales de primer orden quedan así*

$$z\frac{dz}{dy} = f(z) \quad y \quad z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

**Ejemplo 4.2.7.** *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

***Solución:*** *Aplicando los cambios*

$$z = \frac{dy}{dx} \quad y \quad z = \frac{dz}{dy} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

*tenemos*

$$z\frac{dz}{dy} = y,$$

*o equivalentemente*

$$zdz - ydy = 0,$$

*luego*

$$z^2 = y^2 + c_1 \Rightarrow z = \sqrt{y^2 + c_1}.$$

*Deshaciendo el cambio*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 + c_1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2 + c_1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + c_1}} = \int dx.$$

*La integral de la izquierda se realiza con un cambio de variable como que sigue. Sea $y = \sqrt{c_1}\tan\theta$, entonces $dy = \sqrt{c_1}\sec^2\theta d\theta$. En consecuencia*

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + c_1}} &= \int \frac{\sqrt{c_1}\sec^2\theta}{\sqrt{c_1}\sec\theta}d\theta \\ &= \int \sec\theta d\theta \\ &= ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|,\end{aligned}$$

*luego*

$$ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| = x + c_2,$$

*luego*

$$\sec\theta + \tan\theta = c_2 e^x.$$

*De acuerdo al cambio de variable en $\theta$ (ver Figura 4.1 ), se obtiene*

$$\frac{\sqrt{c_1 + y^2}}{\sqrt{c_1}} + \frac{y}{\sqrt{c_1}} = c_2 e^x \Rightarrow \sqrt{c_1 + y^2} + y = c_2 e^x \Rightarrow \sqrt{c_1 + y^2} = c_2 e^x - y.$$

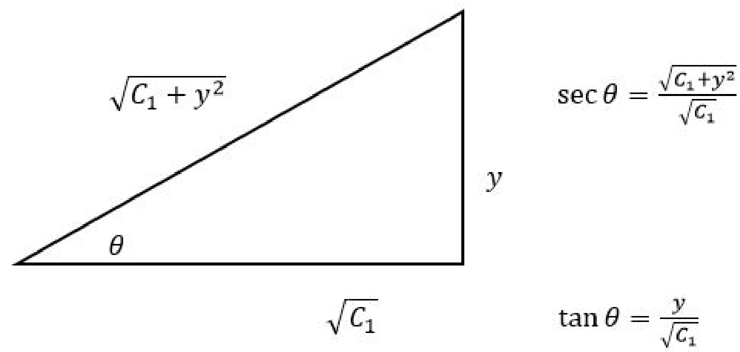



Figura 4.1: Diagarma de la integral.

*Elevando al cuadrado en ambos lados de la última ecuación*

$$\left[\sqrt{c_1 + y^2}\right]^2 = (c_2e^x - y)^2 \Rightarrow c_1 + y^2 = c_2e^{2x} - 2c_2ye^x + y^2,$$

*entonces*

$$c_1 = c_2e^{2x} - 2c_2ye^x.$$

*En consecuencia*

$$2c_2ye^x = c_2e^x - c_1.$$

*Por lo tanto*

$$y = \frac{c_2e^x - c_1}{2c_2e^x} = c_3e^x + c_4e^{-x}.$$

*Luego la solución general es*

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

**Ejemplo 4.2.8.** *Resolver*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \operatorname{sen} y = 0.$$

***Solución:*** *La ecuación anterior es equivalente a* $y'' - \operatorname{sen} y = 0$. *Sea* $z = \frac{dy}{dx}$, *entonces* $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. *Por lo tanto,* $\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy}$. *Así* $z\frac{dy}{dz} - \operatorname{sen} y = 0$, *lo cual implica* $z\frac{dy}{dz} = \operatorname{sen} y$. *Por lo tanto*

$$zdz = \operatorname{sen}(y)dy,$$

*luego*

$$\int zdz = \int \operatorname{sen}(y)dy,$$

*lo anterior implica*

$$\frac{z^2}{z} + c = -\cos(y),$$

*luego*

$$z^2 = -2\cos(y) + 2c,$$

*o equivalentemente*

$$z^2 = -2\cos(y) + c_1.$$

*Despejando $z$ se obtiene*

$$z = \sqrt{-2\cos(y) + c_1},$$

*es decir*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-2\cos(y) + c_1}.$$

*Resolviendo la ecuación anterior se obtiene*

$$\frac{dy}{\sqrt{-2\cos(y) + c}} = dx,$$

*luego*

$$x + c = \int \frac{dy}{\sqrt{-2\cos(y) + c_1}}.$$

### 4.2.4. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Estudiaremos la solución a la ecuación

$$y'' + ay' + by = R(x). \tag{4.5}$$

Donde $a$ y $b$ son constantes reales y $R \in C(I)$. Si $R(x) = 0$ para todo $x$ en $I$, la ecuación (4.5) se denomina homogénea, consideremos en principio esta ecuación y hallemos su solución, para ello, supongamos que $a = 0$, es decir, la ecuación homogénea se transforma en

$$y'' + by = 0. \tag{4.6}$$

Consideremos tres casos

1. Sea $b = 0$, luego la ecuación (2) se transforma en $y'' = 0$, luego las funciones $y = 1$, y $y = x$ son solución a la ecuación diferencial dada, estas funciones son linealmente independientes porque

   $$W(1, x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

   Entonces cualquier solución de $y'' = 0$, viene dada por

   $$y = c_1 + c_2 x,$$

   donde $c_1$ y $c_2$ son constantes, en base al Teorema 4.1.6.

2. Sea $b$ mayor que cero, entonces existe un real $k$ tal que $b = k^2$ y la ecuación (4.6) se transforma en $y'' = -k^2$ y son soluciones a esta ecuación las funciones $y = \cos(kx)$ y $y = \operatorname{sen}(kx)$, las cuales son linealmente independientes, lo cual se puede demostrar usando el Wronskiano de estas funciones. Entonces cualquier solución a $y'' + by = 0$, para $b$ mayor que cero está dada por $y = c_1\cos(kx) + c_2\operatorname{sen}(kx)$ donde $c_1$ y $c_2$ son constantes y $k = \sqrt{b}$.

3. Sea $b$ menor que cero, entonces existe un número real $k$ tal que $b = -k^2$, entonces la ecuación (4.6) se transforma en $y'' = k^2 y$, son solución a esta ecuación las funciones $y = e^{kx}$, y, $y = e^{-kx}$, las cuales son linealmente independientes, ya que al calcular el Wronskiano de estas funciones, obtenemos $-2k$, el cual es diferente de cero, implica que cualquier solución de la ecuación $y'' + by = 0$ para $b$ menor que cero, es $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes y, $k = \sqrt{-b}$.

**Teorema 4.2.1.** *Sean $y$ y $u$ funciones en $C(I)$ tal que $y = ue^{\frac{-ax}{2}}$, entonces $y$ es solución de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ si y solo sí, $u$ satisface la ecuación $u'' + \frac{4b-a^2u}{4} = 0$.*

*Demostración.* Si $y = ue^{\frac{-ax}{2}}$ es solución de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$, entonces la satisface. Ahora, la primera y segunda derivada de $y$ están dadas por

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{\frac{-ax}{2}} - \frac{a}{2}ue^{\frac{-ax}{2}} \\ y'' &= u''e^{\frac{-ax}{2}} - \frac{a}{2}u'e^{\frac{-ax}{2}} - -\frac{a}{2}u'e^{\frac{-ax}{2}} + \frac{a^2}{4}ue^{\frac{-ax}{2}}. \end{aligned}$$

Reemplazando $y'$ y $y''$ en $y'' + ay' + by = 0$ se obtiene

$$u''e^{\frac{-ax}{2}} - au'e^{\frac{-ax}{2}} + \frac{a^2}{4}ue^{\frac{-ax}{2}} + au'e^{\frac{-ax}{2}} - \frac{a^2}{2}ue^{\frac{-ax}{2}} + bue^{\frac{-ax}{2}} = 0,$$

o equivalentemente

$$e^{\frac{-ax}{2}}(u'' - au' + \frac{a^2}{4}u + au' - \frac{a^2}{2}u + bu) = 0.$$

Como $e^{\frac{-ax}{2}} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$u'' - \frac{a^2}{4}u + bu = 0.$$

Que era lo que se deseaba demostrar. Ahora, supongamos que $u = ye^{\frac{ax}{2}}$, es solución de $u'' + \frac{4b-a^2u}{4} = 0$. En efecto, al reemplazar tenemos

$$y''e^{\frac{ax}{2}} + ay'e^{\frac{ax}{2}} + \frac{a^2}{4}ye^{\frac{ax}{2}} + \frac{4b-a^2}{4}ye^{\frac{ax}{2}} = 0,$$

luego

$$e^{\frac{ax}{2}}\left[y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y + by - \frac{a^2}{4}y\right] = 0.$$

Por lo tanto $y'' + ay' + by = 0$, de aquí concluimos que $y = ue^{\frac{-ax}{2}}$, es solución de $y'' + ay' + by = 0$. Si $u$ es solución de $u'' - \frac{a^2-4b}{4}u = 0$, como sabemos la solución a esta última ecuación viene dada por $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, donde $c_1, c_2$ son constantes, y en la cual

1. $u_1(x) = 1, u_2(x) = x,$, si $a^2 - 4b = 0$.
2. $u_1(x) = e^{kx}, u_2(x) = e^{-kx}$, si $a^2 - 4b = 0$ es mayor que cero, y $k = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$.
3. $u_1(x) = \cos(kx), u_2(x) = \operatorname{sen}(kx)$, si $a^2 - 4b = 0$ es menor que cero, y $k = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

□

Es decir, podemos caracterizar este resultado en la siguiente proposición.

**Teorema 4.2.2.** *La solución a la ecuación $y'' + ay' + by = 0$, viene dada por la expresión*

$$e^{\frac{-ax}{2}}\left[c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)\right],$$

*donde $c_1$ y $c_2$ son constantes, $u_1$ y $u_2$ son funciones que dependen del valor de $a^2 - 4b = d$, que denominaremos el discriminante de la ecuación cuadrática $m^2 + am + b = 0$, de la siguiente forma:*

1. *Si $d = 0$ entonces $u_1(x) = 1$,$u_2(x) = x$.*
2. *Si $d$ es mayor que cero, entonces $u_1(x) = e^{ax}, u_2(x) = e^{-ax}$ donde $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$.*
3. *Si $d$ es menor que cero, entonces $u_1(x) = coskx, u_2(x) = senkx$ donde $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.*

**Ejemplo 4.2.9.** *Hallar la solución*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

***Solución:*** *Le asociamos la ecuación cuadrática* $m^2 - 3m + 2 = 0$*, luego* $a = -3$ *y* $b = 2$ *entonces el discriminante es 1, el cual es mayor que cero, lo cual implica que la solución a la ecuación dada es*

$$y = e^{\frac{3x}{2}}\left[c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\right] = c_1 e^{2x} - c_2 e^{x},$$

*donde* $c_1$ *y* $c_2$ *son constantes.*

En este momento ya estamos en capacidad de hallar la solución de $y'' + ay' + by = R$ donde $a$ y $b$ son constantes y, $R \in C(I)$. Definimos el operador $L$ de $C^n(I)$ en $C(I)$, tal que $L(y) = y'' + ay' + by$, luego $L(y) = R$, la solución a esta ecuación viene dada por la suma de la solución general a $L(y) = 0$, con una solución particular a $L(y) = R$. Un método para resolver la última ecuación es el de "variación de parámetros", el cual fue utilizado por Lagrange no solo para ecuaciones de orden dos sino de mayor orden. El método consiste en hallar funciones $t_1$ y $t_2$ tales que $t_1v_1 + t_2v_2$ sea solución de $L(y) = R$, donde $v_1$, $v_2$ son soluciones linealmente independientes de $L(y) = 0$. Como dicha función verifica la ecuación $L(y) = 0$, entonces derivamos y reemplazamos. Sea $y = t_1v_1 + t_2v_2$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= t_1'v_1 + t_1v_1' + t_2'v_2 + t_2v_2' \\ y'' &= t_1v_1'' + t_2v_2'' + (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1' + t_2'v_2') \end{aligned}$$

Como $L(y) = y'' + ay' + by = R$ y $L(v_1) = L(v_2) = 0$, entonces

$$L(y) = (t_1'v_1' + t_2'v_2') + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + a(t_1'v_1 + t_2'v_2).$$

Como deseamos hallar $t_1$ y $t_2$ de tal manera que $L(y) = R$, entonces podemos hacer $t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0$ y $t_1'v_1' + t_2'v_2' = R$ que son dos ecuaciones lineales con las incógnitas $t_1'$ y $t_2'$. Luego

$$t_1' = \frac{-v_2R}{W[v_1, v_2]}$$

$$t_2' = \frac{v_1R}{W[v_1, v_2]}.$$

Entonces

$$t_1(x) = \int \frac{-v_2R(x)}{W[v_1(x), v_2(x)]}dx$$

$$t_2(x) = \int \frac{v_1R(x)}{W[v_1(x), v_2(x)]}dx.$$

Se puede observar que $t_1$ y $t_2$ se expresan como integrales indefinidas, cada una de las cuales queda determinada si le sumamos una constante, es decir $t_1 + c_1$, y $t_2 + c_2$; podemos definir una función $y_h = y + c_1v_1 + c_2v_2$ y aplicamos el operador $L$ a esta función, tenemos $L(y_h) = L(y) + L(c_1v_1 + c_2v_2) = L(y)$ ya que L es un operador lineal, entonces $y_h$ es también solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

**Ejemplo 4.2.10.** *Hallar la solución general a*

$$y'' + y = \operatorname{sen} x.$$

*para hallar la solución particular a dicha ecuación usando el método de variación de parámetros, primero hallaremos la solución de la ecuación* $y'' + y = 0$*. Como el discriminante es menos cuatro, luego la solución general a la ecuación homogénea es* $y = c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)$*.*

***Solución:*** *Sea $v_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $v_2(x) = \cos 2x$, hallemos $t_1$ y $t_2$ de tal manera que $t_1v_1 + t_2v_2$ sea solución de $y' + y = \operatorname{sen} x$. Luego*

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= -\int \frac{\cos 2x \operatorname{sen} x}{2} dx \\
&= -\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{2} dx + \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{2} dx \\
&= \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{2} dx \\
&= \frac{\cos^3 x}{2} - \frac{\cos x}{2} \\
t_2(x) &= \int \frac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}{2} dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2} dx.
\end{aligned}$$

*Entonces la solución a la ecuación diferencial dada es*

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos x}{2}.$$

Otro método por medio del cual podemos calcular un solución particular a una ecuación definida por el operador $L$, en el cual $L(y) = y'' + ay' + by$, siendo $L(y) = R$, es el llamado método de coeficientes indeterminados, y como su nombre lo dice se trata de dar como solución un “polinomio” en el cual calculamos los coeficientes, para que este verifique la ecuación, podemos considerar tres casos.

**Caso 1:** si $R$ es un polinomio de grado $n$, con $b \neq 0$, podemos hallar un polinomio $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ que satisface la ecuación $L(y) = R$; sustituyendo en la ecuación podemos hallar los coeficientes $a_0$, $a_1$,..., $a_{n-1}$, $a_n$.

**Ejemplo 4.2.11.** *Hallar la solución general a*

$$y'' - y = x.$$

*La solución general de la ecuación homogénea asociada es $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ donde $c_1$ y $c_2$ son constantes.*

Ahora calculamos una solución particular a la ecuación no homogénea, usando el método de coeficientes, ya $R(x) = x$ y, $b = -1$, luego $R$ es un polinomio de grado 1, entonces supongamos que dicha solución es $Ax + B$, derivando esta solución y reemplazando en la original tenemos $-Ax - B = x$, de donde concluimos que $A = -1$ y, $B = 0$. Entonces la solución particular es $y = -x$. Luego ya podemos dar la solución general a la ecuación $y'' - y = x$ cual es

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - x.$$

Si $b = 0$, la ecuación $y'' + ay' = R$, no se puede satisfacer con un polinomio de grado $n$; pero si con uno de grado $n + 1$, siempre que $a \neq 0$. Si $a = b = 0$, su solución general es un polinomio de grado $n + 2$, obtenido de dos integraciones sucesivas.

**Caso 2:** $R(x) = p(x)e^{mx}$, siendo $p$ un polinomio de grado $n$ y $m$ una constante; si hacemos el siguiente cambio de variable $y = u(x)e^{mx}$, la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = R$ se transforma en $u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p$. La cual es una ecuación del caso anterior.

**Caso 3:** si $R(x) = p(x)e^{mx}cos(ux)$ o $R(x) = p(x)e^{mx}sen(ux)$, siendo $p$ un polinomio; $m$ y $u$ constantes. En ambos casos, existe siempre una solución particular de la forma $y(x) = e^{mx}[Q(x)\cos(ux) + H(x)\,\mathrm{sen}(ux)]$, donde $Q$ y $H$ son polinomios.

**Ejemplo 4.2.12.** *Determinemos la solución de*

$$y'' + 3y' + 4y = 0.$$

*De aquí $a = 3$ y $b = 4$, la ecuación cuadrática asociada a la ecuación diferencial dada es $m^2+3m+4 = 0$. Por consiguiente $d = \sqrt{3^3 - 4} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} > 0$. Entonces se tiene $u_1(x) = e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ y $u_2(x) = e^{\frac{-\sqrt{5}}{2}x}$. De este modo la solución general de la ecuación dada es*

$$y = e^{-\frac{3}{2}x}\left[c_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x}\right] \Rightarrow y = c_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x}.$$

**Ejemplo 4.2.13.** *Hallar la solución de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 8y = 0.$$

*Solución: Observemos que $\sqrt{d} = \sqrt{4-4(8)} = 2\sqrt{-7}$ lo cual implica que $d = -28 < 0$. Entonces la solución general está dada por*

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{2x}{2}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{28}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{7}x\right)\right] \\ &= e^{x}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{7}x\right)\right]. \end{aligned}$$

Solución de la Ecuación Diferencial $y'' + ay' + by = \mathbb{R}$ (Método De Variación De Parámetros)

**Ejemplo 4.2.14.** *Hallar la solución general de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 10 \tag{4.7}$$

*Solución: La ecuación diferencial homogénea asociada a (4.7) es*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

*y su polinomio asociado es $m^2 + 2m + 1 = 0$. De aquí $d = 4 - 4 = 0$ entonces $u_1(x) - 1 = 0$ y $u_2(x) = x$. Así la solución general de la homogénea asociada es*

$$y = e^{-x}\left[c_1 + c_2x\right],$$

*luego*

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}.$$

*Ahora sea $y_p = t_1u_1 + t_2u_2$ una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (4.7). Aplicando el método de variación de parámetros se tiene*

$$t_1' = \frac{-xe^{x},10}{w(e^{-x}, xe^{-x})} \qquad t_1' = \frac{e^{-x},10}{w(e^{-x}, xe^{-x})}.$$

*Calculemos*

$$\begin{aligned} W(e^{-x}, xe^{-x}) &= \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x}(1-x) + xe^{-2x} \\ &= e^{-2x}(1-x+x) \\ &= e^{-2x}. \end{aligned}$$

*Ahora*

$$t_1' = \frac{-10xe^x}{e^{-2x}} = -10xe^x,$$

*luego*

$$t_1 = -10\int xe^x dx.$$

*Sea* $u = x$ *y* $dv = e^x dx$, *entonces* $du = dx$ *y* $v = e^x$, *por integrando por partes se tiene*

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x.$$

*Así,*

$$t_1' = 10(x-1)e^x.$$

*Ahora*

$$t_2' = \frac{10e^{-x}}{e^{-2x}} = 10e^x,$$

*lo cual implica*

$$t_2 = 10e^x.$$

*De esta manera*

$$y_p = e^{-x}10(x-1)e^x + 10e^x xe^{-x} = 10x - 10 + 10x = 20x - 10.$$

*Finalmente, la solución general es*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + 20x - 10.$$

## 4.3. Ejercicios

### 4.3.1. Mixtos

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = th^2x.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x.e^x.$

3. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

4. $y'' = e^x - e^{-x}.$

5. $y'' = \lim_{x\to 0} \dfrac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}.$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{a^x}{1+a^{2x}}$.

8. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \tan(x)$.

9. Las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y_1$ se aplican a la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Para qué valores de $y_0$ y $y_1$ tiene una solución el PVI.

### 4.3.2. Ecuaciones del tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(3x + \dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

2. $y'' = \dfrac{xy'}{\cos(x^2)^2}$.

3. $y'' = \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{x}{5}\right)}$.

4. $\operatorname{sen}(x).\cos(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \operatorname{sen}(x)\dfrac{dy}{dx}$.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen}(6x)^3\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

6. $3\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\operatorname{sen}(x).\cos(x)}{\sqrt{\cos(x)^2.\operatorname{sen}(x)^2}} + 8x\dfrac{dy}{dx}$.

### 4.3.3. Ecuaciones del tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} - f(y) = 0$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$

Por medio de las sustituciones $z = \dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dy}$. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

4. $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

5. $-8\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} - 16y = 0$.

6. $-3y'' - 2y' + y = 0$.

7. $\pi \dfrac{d^2v}{du^2} - \sqrt{2}\dfrac{dv}{du} + eu = 0.$

8. $\alpha \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \beta\dfrac{d\theta}{dt} + \theta = 0.$

# Capítulo 5

# Aplicaciones para ecuaciones diferenciales de orden superior

## 5.1. Segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

De acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, la aceleración de caída libre de un cuerpo, tal como el satélite que se muestra en la figura, que está cayendo desde una gran distancia hacia la superficie no es la constante $g$. Más bien, la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra $a = k/r^2$ donde $k$ es la constante de proporcionalidad. Utilice el hecho de que en la superficie de la tierra, $r = R$ y $a = g$, para determinar $k$. Si la dirección positiva se considera hacia arriba, utilice la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal para encontrar, una ecuación diferencial para la distancia $r$. Según la ley de la gravitación universal, la aceleración de caída libre es $\mathbf{a}$. Si $a = \frac{k}{r^2}$ donde $k$ es la constante de proporcionalidad y $r = R$. Distancia desde el centro de la tierra (en la superficie de la tierra $r = R$ y $a = g$). Para la superficie de la tierra (la dirección vertical hacia arriba es el eje positivo y el contrario sería el negativo). Si $a = g$, entonces $g = k/r^2$, en consecuencia para $r = R$ se tiene $k = gR^2$.

Según la segunda ley de newton $F = ma$. Si la fuerza neta del objeto es igual a la fuerza que ejerce el peso del objeto, entonces $ma = -mg$ (La fuerza del peso del objeto es negativa porque el objeto va cayendo, es decir, va en dirección contraria a nuestro eje positivo). Dado que

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg,$$

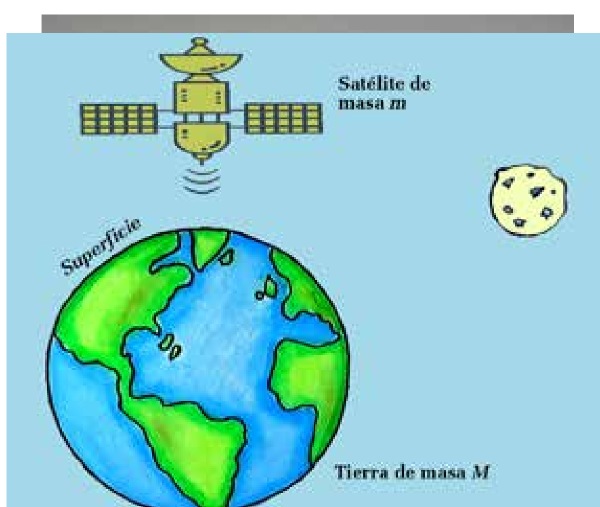


Figura 5.1: Ley de gravitación universal.

entonces

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g.$$

Dado que $g = a$, entonces $\frac{d^2r}{dt^2} = -a$. Ahora, reemplazando $a = \frac{k}{r^2}$ en la ecuación anterior se obtiene $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} = -\frac{gR^2}{r^2}$. La ecuación diferencial para la distancia $r$ es

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{gR^2}{r^2} = 0.$$

## 5.2. Movimiento armónico simple

Consideremos una partícula que se mueve sin resistencia a lo largo de una recta, que puede ser el eje $x$, bajo la acción de una fuerza localizada en el origen 0. Supongamos que la fuerza es proporcional al desplazamiento $x$ de la partícula de 0 en un tiempo $t$; suponiendo $x$ positiva a la derecha y negativa a la izquierda de 0. Puesto que la fuerza es proporcional a la aceleración, la aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$ será proporcional al desplazamiento $x$. Si la partícula se encuentra a la derecha de 0, el desplazamiento es positivo y la fuerza (hacia la izquierda) y la aceleración son negativas; si la partícula se encuentra a la izquierda de 0, el desplazamiento es negativo y la fuerza (hacia la derecha) y la aceleración son positivas; luego la aceleración y el desplazamiento son opuestos, y la ecuación diferencial que define el movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

donde $k$ es la constante de proporcionalidad y es positiva. Su solución es

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen} dt + c_2 \cos dt, \tag{5.1}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes y $d = \sqrt{k}$. Sea $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\cos(u) = \dfrac{c_1}{A}, \operatorname{sen}(u) = \dfrac{c_2}{A}$, Luego $u = \arctan \dfrac{c_2}{c_1}$. Por lo tanro, la ecuación (5.1) se transforma en

$$x(t) = A \operatorname{sen}(dt + u). \tag{5.2}$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) dan las dos formas equivalentes para $v = \dfrac{dx}{dt}$ luego

$$v = c_1 d \cos dt - c_2 d \operatorname{sen} dt = dA \cos(dt + u).$$

Este movimiento se denomina armónico simple y la partícula vibra entre $A$ y $-A$, la cual es la amplitud del movimiento. El movimiento es periódico, su periodo es $\dfrac{2\pi}{d}$ y, la frecuencia es $\dfrac{d}{2\pi}$.

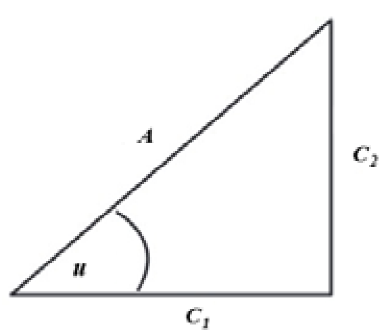



Figura 5.2: Teorema de Pitágoras.

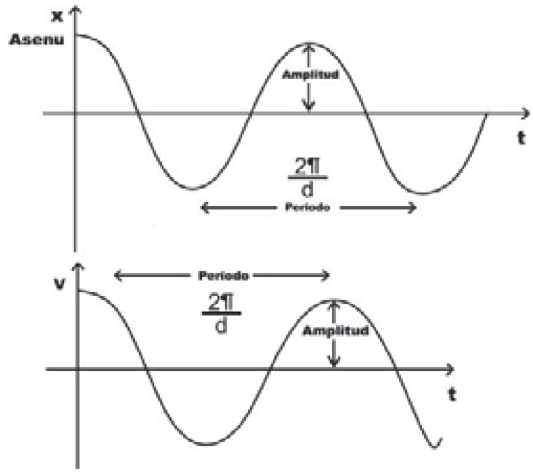



Figura 5.3: Movimiento armónico simple.

**Ejemplo 5.2.1.** *una partícula se mueve con un movimiento armónico simple en una línea recta. Cuando t=0, la aceleración es 9 metros por segundo cuadrado, la velocidad es de 4.5 metros por segundo y el desplazamiento es de 4 metros a la izquierda del origen. Encontrar*

1. *El desplazamiento cuando ha transcurrido medio periodo.*
2. *El primer tiempo cuando el desplazamiento es cero y cuando es un metro.*
3. *La velocidad máxima.*

***Solución:*** *la ecuación diferencial es* $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. *Podemos calcular el valor de k ya que* $\frac{d^2x}{dt^2} = 9$ *cuando* $x = -4$ *luego* $9 = 4k$, *entonces* $k = \frac{9}{4}$. *Luego la ecuación diferencial se transforma en*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9x}{4}. \tag{5.3}$$

*Su solución es*

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right).$$

*Además,*

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}c_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{3}{2}c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right).$$

*Podemos hallar* $c_1$ *y* $c_2$, *empleando las condiciones de frontera dadas;* $x = -4$, $v = 4,5$ *para* $t = 0$ *y obtenemos* $c_1 = 3$ *y,* $c_2 = -4$. *Luego*

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) - 4\cos\left(\frac{3}{2}t\right) \\ v(t) &= \frac{9}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right). \end{aligned}$$

*Sean* $A = \sqrt{3^2 + (4^2)} = 5$, $\cos(u) = \dfrac{3}{5}$ *y* $\operatorname{sen}(u) = \dfrac{-4}{5}$, *entonces*

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t + u\right) \\ v(t) &= \frac{15}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t + u\right). \end{aligned}$$

*Para hallar la respuesta a la parte a) debemos hallar el periodo el cual es* $\frac{4\pi}{3}$, *la mitad de este es* $\frac{2\pi}{3}$ *sustituyendo en la ecuación (5.1) tenemos* $x = 3\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} - 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4$ *metros. Para hallar el tiempo cuando* $x = 0$, *ó* $x = 1$ *metros, empleamos la ecuación (5.2), luego* $0 = 5\operatorname{sen}(\frac{3}{2}t - 0,9273)$. *Para ello primero calculamos el valor de* $u$, *como tenemos que* $\operatorname{sen}(u) = -\frac{4}{5}$ *y,* $\cos(u) = \frac{3}{5}$ *entonces* $u$ *pertenece al cuarto cuadrante, luego* $u = -0,9273$, *reemplazando este valor tenemos* $0 = 5sen(\frac{3}{2}t - 0,9273)$, *luego* $\frac{3}{2}t = 0,92730$, *lo cual implica que* $t = 0,618$ *segundos. Cuando* $x = 1$, *tenemos que hallar el valor de* $t$ *positivo más pequeño que satisface* $1 = 5sen(\frac{3}{2}t - 0,9273)$. *Por lo tanto* $\frac{3}{2}t - 0,9273 = \operatorname{arc\,sen}(0,2) = 0,2013$. *Es decir, que* $\frac{3}{2}t = 1,1286$ *lo cual implica que* $t = 0,752$. *Para la parte c) tenemos que* $v = \frac{15}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t + u\right)$, *luego la máxima velocidad es* $7,5$ *metros por segundo.*

**Ejemplo 5.2.2.** *Un resorte fijo en su extremo superior, soporta un peso en el extremo inferior, que alarga el resorte 15 centímetros.*

*a) Si el peso se baja 7,5 centímetros adicionales de su punto de equilibrio y se suelta, encontrar el periodo de vibración y la ecuación del movimiento del peso.*

*b) Si el peso se hace descender 7,5 centímetros bajo su posición de equilibrio y se le aplica una velocidad hacia abajo de 30 centímetros por segundo, encontrar la distancia, bajo la posición de equilibrio, del punto más bajo que alcanza el peso; la velocidad máxima y el tiempo que se requiere para que el peso regrese a la posición de equilibrio por primera vez.*

***Solución:*** *primero planteemos el problema, para hallar la ecuación diferencial que representa el movimiento vibratorio de un peso colgando del resorte, bajo la suposición de que no existe resistencia al movimiento. En principio tenemos un resorte colgado de su extremo superior verticalmente, Figura 5.4a. Después de que se fija una masa* $M$ *de peso* $w$, *a un resorte, Figura 5.4b, este se estira* $S$ *unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio. Después el sistema masa-resorte se pone en movimiento, ya sea dándole una velocidad vertical inicial o puede desplazarse el peso verticalmente de su posición de equilibrio y entonces soltarlo. Se toma la posición de equilibrio como el origen. Sea que* $x(t)$ *denote la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las únicas fuerzas son peso de la masa y la fuerza restauradora del resorte estirado. La cantidad de desplazamiento del peso en un tiempo* $t$ *es* $s + x$, *independiente del hecho que el peso se encuentre arriba o abajo de la posición de equilibrio y la tensión del resorte es* $k(s + x)$, *Figura 5.4c. Con base en la la Ley de Hooke, la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento* $x(t)$ *al tiempo* $t$. *La* $c$ *constante de proporcionalidad se llama constante del resorte. En la posición de equilibrio la tensión del resorte es* $w$ *kilogramos, y el alargamiento es* $s$ *metros; luego* $w = ks$, *donde* $k$ *es la constante del resorte, entonces* $k = \frac{W}{s}$ *kilogramos por metro.*

*El resorte hala entonces el peso hacia arriba con una fuerza* $-k(s + x)$ *y la gravedad lo solicita hacia abajo con una fuerza* $W$, *luego la fuerza resultante que actúa sobre el peso es* $w - k(s + x) = -kx$ *ya que la condición de equilibrio es* $mg = kS$. *Como la fuerza que actúa sobre un peso es proporcional a la aceleración, entonces la ecuación que define el movimiento es* $\sum F = ma$, *luego*

$$mg - k(x + s) = mg - kx - kS = mg - kx - mg = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

*Dado que*

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

*o equivalentemente*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0.$$

*Esta ecuación diferencial representa un movimiento armónico simple. Luego el peso ejecuta un movimiento armónico simple, con respecto a su posición de equilibrio. De acuerdo a las condiciones del problema,*

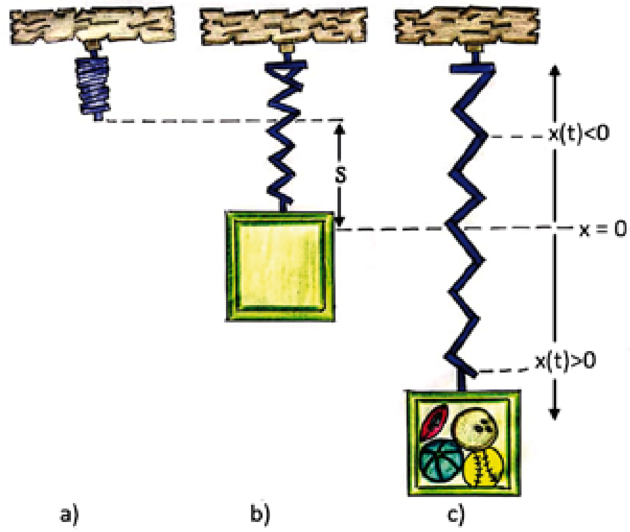



Figura 5.4: Resorte.

*tenemos que el peso $W$ produce un alargamiento de 0,15 metros; luego $W = 0,15k$ entonces $k = \frac{W}{0{,}15}$ kilogramos por metro. En consecuencia, la ecuación diferencial se transforma en*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{0,15} = 0.$$

*Su solución es*

$$x = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{20g}{3}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{20g}{3}} t \tag{5.4}$$

*y*

$$v = \sqrt{\frac{20g}{3}} \left[ c_1 cos \sqrt{\frac{20g}{3}} t - c_2 sen \sqrt{\frac{20g}{3}} t \right], \tag{5.5}$$

*donde $c_1$ y $c_2$ son constantes que podemos hallar con las condiciones dadas en a) y estas son $x = 0,075$, $v = 0$ para $t = 0$, sustituyendo tenemos que $c_1 = 0$ y, $c_2 = 0,075$, luego la ecuación del movimiento es $x = 0,075 cos\sqrt{\frac{20g}{2}} t$. Su periodo es $2\pi\sqrt{\frac{3}{20g}} = 0,778$ segundos. Para la parte b) empleamos las condiciones dadas, es decir $x = 0,075$, $v = 0,30$ para $t = 0$ y obtenemos que $c_1 = 0,3\sqrt{\frac{3}{20g}}$ y, $c_2 = 0,075$. La distancia bajo la posición de equilibrio del punto más bajo que alcanza el peso es la amplitud del movimiento; esto es*

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{3}{10}\sqrt{\frac{5g+12}{80g}}.$$

*La velocidad máxima es el valor de $v$ en la ecuación (5.5); es decir*

$$\sqrt{\frac{20g}{3}(c_1^2 + c_2^2)} = \frac{3}{20}\sqrt{\frac{5g+12}{3}}.$$

*Se obtiene cuando el peso pasa por su posición de equilibrio. El tiempo requerido para que el peso alcance su posición de equilibrio se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación (1), y resolviendo para el valor positivo más pequeño de $t$ se obtiene*

$$t = \frac{2,01\sqrt{3}}{\sqrt{20g}} = 0,2505 \ \ segundos.$$

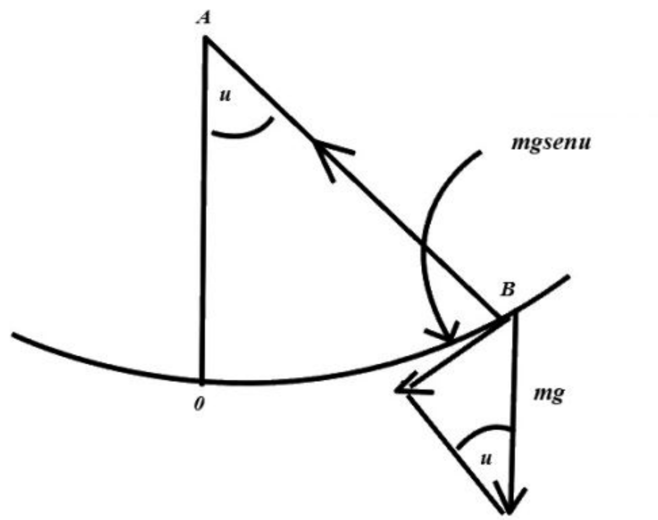



Figura 5.5: Sistema masa - resorte.

**Ejemplo 5.2.3.** *Un peso de* 6 lb *estira un resorte 6 pulg. Si el peso se halla* 4 pulg *por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la posición del peso como una función del tiempo.*

***Solución:*** *Las medidas expresadas en ulgadas se deben pasar a pies. En consecuencia* $6\,pulg = \frac{1}{2}\,ft$ *y* $4pulg \equiv \frac{1}{3}ft$. *Ahora, a partir de los datos suministrados se obtiene* $6 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ *lo cual implica que* $k = 12\left(\frac{lb}{ft}\right)$. *Además, dado que* $mg = P$, *entonces* $m = \frac{P}{g} = \frac{6}{32}$. *Reemplazando en la ecuación de movimiento se obtiene*

$$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x.$$

*Por lo tanto se obtiene el siguiente problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \\ x(0) = \frac{1}{3}, x'(0) = 0 \end{cases},$$

*cuya solución en está dada por*

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos 8t.$$

**Ejemplo 5.2.4.** *Sea AB figura 5.5, el alambre, siendo A el punto fijo de suspensión y B el otro extremo del alambre, al cual se halla unida una masa m. Designemos por u el ángulo formado por al alambre y la vertical A*0 *en un instante cualquiera. Cuando la masa m se halla en movimiento, actúan sobre ella dos fuerzas, la tensión T de la cuerda y el peso mg de la masa.*

*Podemos descomponer al peso mg en dos componentes una tangente y otra perpendicular a la trayectoria del movimiento, tenemos que la componente perpendicular es equilibrada por la tensión, la fuerza tangencial a la trayectoria es mg sen*$(u)$. *Tomemos u positivo si m se halla a la derecha de* 0 *y u es negativo si m se halla a la izquierda de 0. Cuando u es positiva la fuerza resultante se halla dirigida hacia la izquierda y se dirige hacia la derecha si u es negativo, luego la fuerza resultante es* $-mg\operatorname{sen}(u)$. *Como la longitud del arco es* $s = lu$, *luego aplicando la Ley de Newton tenemos*

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2u}{dt^2} = -mg\operatorname{sen}u,$$

*es decir*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}u. \tag{5.6}$$

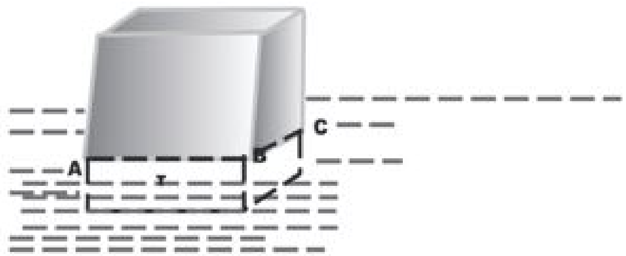



Figura 5.6: Cubo en su posición de equilibrio.

*Esta ecuación no se puede resolver exactamente por funciones elementales, pero podemos hacer la aproximación, para u entre $5^o$ y $-5^o$ se tiene que* $\operatorname{sen} u \approx u$*, donde u aparece expresado en radianes. Luego la ecuación (5.6) se convierte en*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{gu}{l} = 0.$$

*Su solución es* $u = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$*, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes y el periodo es* $\frac{2\pi\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$.

Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el de un cuerpo que flota en el agua. Para analizar este caso resolvamos este problema.

**Ejemplo 5.2.5.** *Una caja cúbica de 3 metros de lado flota en agua tranquila. Se nota que la caja oscila subiendo y bajando con un periodo de medio segundo. ¿Cuál es el peso de la caja?*

***Solución:*** *la Figura 5.6 representa el cubo en su posición de equilibrio, dado por $ABC$. En la Figura 5.7 el cubo está casi totalmente sumergido en el agua, en esta posición hay una fuerza que tiende a empujar la caja hacia arriba. Esta fuerza está determinada por el Principio de Arquímedes. Un peso parcial o totalmente sumergido en un líquido, experimenta un empuje hacia arriba originando un movimiento vibratorio por una fuerza igual al peso del líquido que desaloja. Luego en la Figura 5.6, según el principio dado el peso de la parte I sumergida es igual al peso de volumen de agua que desaloja. En la Figura 5.7 se muestra la parte I sumergida y otra parte de cubo dentro del agua a una altura $x$, lo cual indica que hay una fuerza no equilibrada, luego el peso de agua desalojada es* $3{,}3.x{,}1{,}000$*, o sea* $9000x$*, ya que* $1000$ *kilogramos por metro cúbico es la masa específica del agua. El valor de la fuerza que tiende a mover el cubo es análoga a la fuerza de restitución del resorte vibrante. Si designamos por $W$ el peso de la caja tendremos la ecuación diferencial*

$$\frac{W}{g}.\frac{d^2x}{dt^2} = -9000x,$$

*o sea*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{88200x}{W} = 0.$$

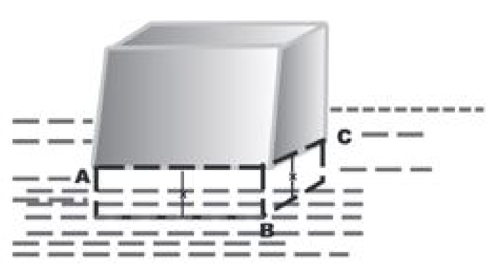



Figura 5.7: Cubo casi totalmente sumergido en el agua.

*Su solución es* $x = c_1 cos\sqrt{\frac{88200}{W}}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{88200}{W}}t$ *donde* $c_1$ *y,* $c_2$ *son constantes, el periodo de vibración es*

$$\frac{2\pi W}{\sqrt{88200}} = \frac{1}{2}.$$

*Resolviendo esta ecuación tenemos que* $W = 559kgs$*. En todos estos problemas hemos considerado que la resistencia es despreciable, ahora consideraremos en caso en el cual la resistencia no es nula.*

### 5.2.1. Fuerza de atracción proporcional al desplazamiento; resistencia proporcional a la velocidad

El movimiento vibratorio con amplitud constante, resulta de una fuerza proporcional al desplazamiento. Si se toman en cuenta la fricción o fuerzas de rozamientos que disminuyen la amplitud de las oscilaciones y finalmente detienen el movimiento, esta fuerza se denomina amortiguadora o resistente; no se conoce ley exacta que gobierna estas fuerzas puesto que dependen de muchos factores variables, pero se observa experimentalmente que, si la velocidad es pequeña, la magnitud de la fuerza amortiguadora es aproximadamente proporcional a la velocidad instantánea, o sea su magnitud es $c\frac{dx}{dt}$ donde $c$ es la constante de proporcionalidad. La fuerza amortiguadora se opone al movimiento en caso de una partícula que se desplaza sobre la línea recta, sucede que si la partícula se mueve hacia la derecha, la velocidad es positiva y $-c\frac{dx}{dt}$ representa la fuerza resistente. Si la partícula se mueve hacia la izquierda, la velocidad es negativa y $-c\frac{dx}{dt}$ representa la fuerza amortiguadora; similarmente podemos considerar el caso de movimiento producido por un resorte; luego el modelo matemático que define estas situaciones es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt} - kx,$$

o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

La solución a esta ecuación depende del valor de

$$\frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{m^2}.$$

I) Si $c^2 - 4km = 0$, entonces la solución es

$$x = e^{-\frac{ct}{2m}}\left[c_1 + c_2 t\right],$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes, su gráfica se muestra en la Figura 5.8.

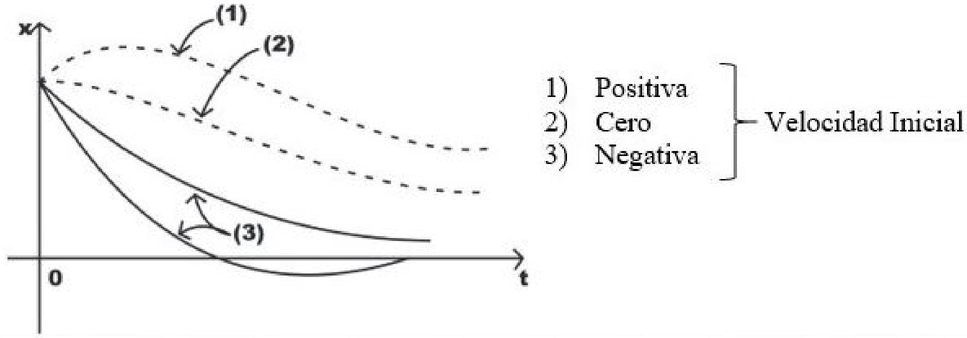



Figura 5.8: Movimiento criticamente amortiguado.

II) Si $c^2 - 4km$ es mayor que cero, la solución es

$$x = e^{-\frac{ct}{2m}} \left[ c_1 e^{dt} + c_2 e^{-dt} \right],$$

con $d = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km}$, siendo $c_1$ y $c_2$ constantes, su gráfica se muestra en la Figura 5.9

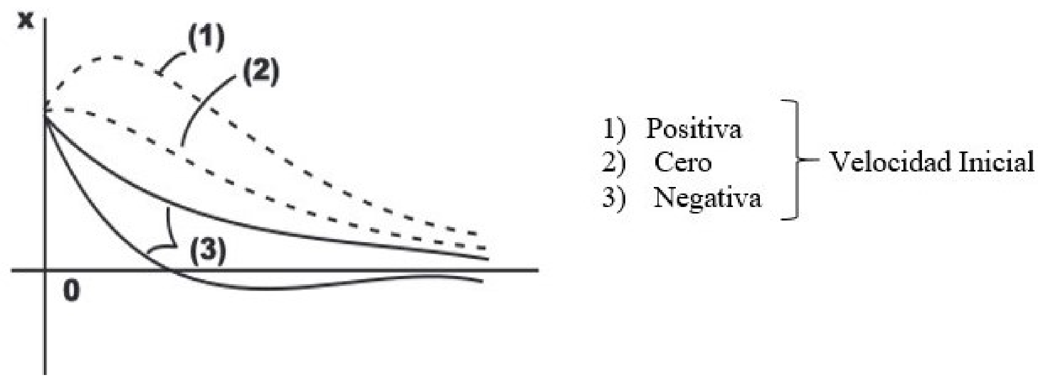



Figura 5.9: Movimiento sobreamortiguado.

III) Si $c^2 - 4km$ es menor que cero, la solución viene dada por

$$x = e^{-\frac{ct}{2m}} \left[ c_1 \cos dt + c_2 \operatorname{sen} dt \right],$$

con $d = \frac{1}{2m}\sqrt{4km - c^2}$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes, su gráfica se muestra en la Figura 5.10.

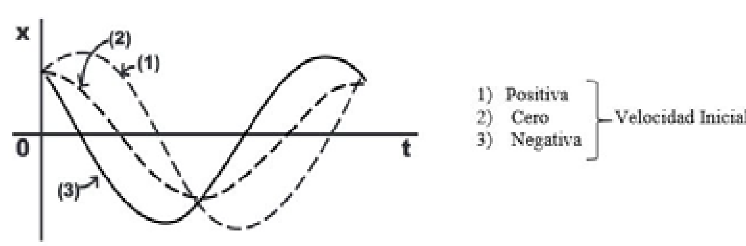



Figura 5.10: Movimiento subamortiguado.

En todos los casos el factor $e^{-\frac{ct}{2m}}$ se llama factor de amortiguación.

**Ejemplo 5.2.6.** *Una partícula parte del reposo para $t = 0$, con un desplazamiento $x = 5$ metros a la derecha del origen y se mueve a lo largo del eje $x$, de acuerdo a la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1,25x = 0.$$

*Encontrar:*

*a) El tiempo requerido para que el factor de amortiguación disminuya el 50 %.*

*b) El porcentaje de disminución del factor de amortiguación después de un periodo.*

*c) La posición de la partícula después de un periodo y la velocidad en ese instante.*

*d) Hallar la gráfica del desplazamiento contra tiempo y la de velocidad contra tiempo.*

***Solución:***

*a) El factor de amortiguamiento es* $e^{-\frac{t}{2}}$*, para t=0, este es 1, debemos hallar el tiempo t, en el cual el factor de amortiguamiento es* $\frac{1}{2}$*, luego* $e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$ *o equivalentemente* $-\frac{t}{2} = -ln2$*. En consecuencia* $t = 21ln2 = 1,39\,s$*.*

*b) Hallemos el factor de amortiguación después de un periodo, para ello* $e^{-\pi} = 0,0432$*; luego su porcentaje de disminución es* $95,7\,\%$*.*

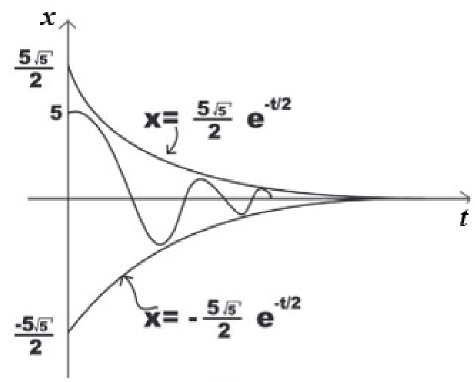



Figura 5.11: Gráfica de la ecuación (5.7).

*c) Como la solución a la ecuación diferencial es*

$$x = e^{-\frac{t}{2}}\left[c_1 sen(t) + c_2 cos(t)\right]. \tag{5.7}$$

*Derivando tenemos*

$$v = e^{-\frac{t}{2}}\left[(c_1 - \frac{c_2}{2})\cos(t) - (\frac{c_1}{2} + c_2)\operatorname{sen}(t)\right]. \tag{5.8}$$

*Podemos hallar* $c_1$ *y* $c_2$ *con las condiciones dadas de* $x = 5$*,* $v = 0$*, para* $t = 0$*, reemplazando en (5.7) y en (5.8), obtenemos que* $c_1 = \frac{5}{2}$ *y* $c_2 = 5$*. Luego:*

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{5}{2}\operatorname{sen} t + 5cost\right] \\ v &= e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{15}{2}sen(t)\right]. \end{aligned}$$

*Entonces* $x(2\pi) = e^{-\pi}(5) = 0,216\,m$ *o sea la partícula después de un periodo se halla a 0,216 metros a la derecha del origen* $v(2\pi) = e^{-\pi}(0) = 0\,m/s$*.*

*d) Para realizar las gráficas pedidas expresamos estas funciones de una manera más sencilla. Sea* $A = \sqrt{c_1^2.c_2^2} = \sqrt{25.\frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ *y* $u = \arctan\frac{c_1}{c_2} = \arctan\frac{1}{2}$*. Luego la ecuaciones (5.7) y (5.8) se convierten en* $x = \frac{5\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[\operatorname{sen}(t+u)\right]$ *y* $v = e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{15}{2}\operatorname{sen}(t)\right]$*, respectivamente.*

**Ejemplo 5.2.7.** *se coloca un peso de 3 kilogramos en un resorte el cual se estira 153 milímetros. Si se tira del peso 10 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta. Hallar la posición del peso en función del tiempo si existe una fuerza de amortiguamiento que es 6,12 veces la velocidad.*

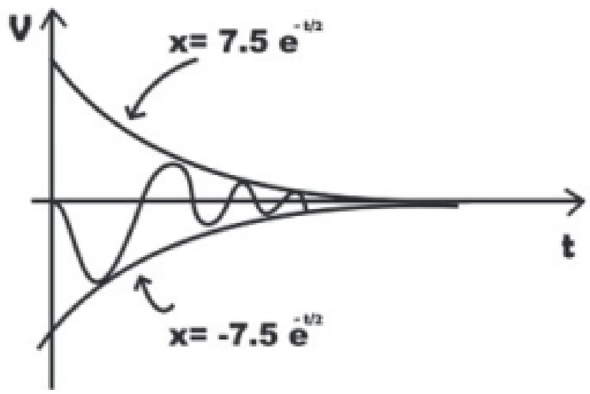



Figura 5.12: Gráfica de la ecuación (5.8).

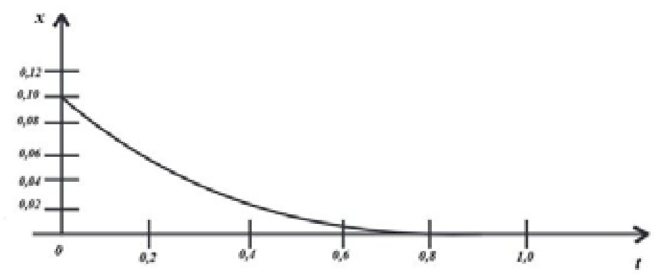



Figura 5.13: Gráfica de $x = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}$.

***Solución:*** *la ecuación diferencial que define el movimiento es*

$$\frac{3}{9,8}\frac{d^2x}{dt^2} = -19,6x - 6,12\frac{dx}{dt},$$

*o sea*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0.$$

*Las condiciones iniciales son $x = 0,10$ metros, $v = 0$, para $t = 0$. Luego al reemplazar las condiciones dadas en la solución a la ecuación diferencial $x = Ae^{-4t} + Be^{-16t}$. Tenemos $x = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}$ cuya gráfica se muestra en la Figura 5.13. Es claro que no habrá oscilaciones; se ha amortiguado tanto al peso que éste solo volverá gradualmente a su posición de equilibrio, sin pasar por él.*

## 5.3. Vibraciones forzadas

Hemos visto problemas únicamente de resortes donde se consideran fuerzas de restitución y amortiguamiento; ahora trataremos casos en que pueden actuar otras fuerzas externas que dependen del tiempo. Estas fuerzas suelen presentarse, por ejemplo, cuando el resorte sube y baja de manera prescrita, como un movimiento periódico, o bien cuando se empuja ligeramente al peso cada vez que alcanza su posición más baja. Si designamos por $F(t)$ la fuerza externa, fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, la ecuación diferencial del movimiento del resorte es

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F,$$

es decir

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

Figura 5.14: Vibracciones forzadas.

**Ejemplo 5.3.1.** *Se coloca un peso de 3 kilogramos en un resorte al cual lo estira 153 milímetros. Si se tira del peso hasta 10 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta. Hállese la posición del peso en función del tiempo, si existe una fuerza amortiguadora, la cual es 2,45 veces la velocidad y además actúa una fuerza periódica externa dada por $F(t)$ igual a $39,2cos8t$.*

***Solución:*** *La ecuación diferencial que define el movimiento es*

$$\frac{3}{9,8}\frac{d^2x}{dt^2} = -1,96x - 2,45\frac{dx}{dt} + 39,2\cos 8t,$$

*o equivalentemente*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128\cos 8t. \tag{5.9}$$

*La cual es una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden dos con coeficientes constantes, entonces su solución general está dada por la suma de una solución particular de (5.9) y la solución general a la ecuación homogénea asociada de (5.9). La solución de la ecuación homogénea asociada es*

$$x(t) = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\,\mathrm{sen}\,4\sqrt{3}t).$$

*Supongamos que $a\sin 8t + b\cos 8t$, es solución particular a la ecuación no homogénea, reemplazando esta solución en la ecuación diferencial dada tenemos que $a = 2$, $b = 0$. Luego la solución a la ecuación diferencial dada es $x = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\,\mathrm{sen}\,4\sqrt{3}t) + 2\,\mathrm{sen}\,8t$. Podemos hallar el valor de $A$ y $B$, empleando las condiciones iniciales, las cuales son $x = 0,1$, $v = 0$ para $t = 0$, de donde tenemos $A = 0,1$, $B = -1,33\sqrt{3}$ y por ende $x = 0,1e^{-4t}(\cos 4\sqrt{3}t - 13,3\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,4\sqrt{3}t) + 2\,\mathrm{sen}\,8t$ cuya gráfica se muestra en la Figura 5.15.*

*En la última ecuación observamos que los términos que contienen $e^{-4t}$ se vuelven despreciables $t$ es grande; estos términos se llaman "Términos Transitorios" y sólo son significativos cuando $t$ es cercano a cero. Algunas veces, cuanto estos términos transitorios de la solución son significativos, reciben el nombre de "Solución Transitoria". El término $2\,\mathrm{sen}\,8t$ permanece aún cuando los términos transitorios sean despreciables y se denomina "Término de Estado Estacionario o Solución de Estado Estacionario", porque indica el comportamiento del sistema cuando se han estabilizado las condiciones de funcionamiento. Se ve que la solución de estado estacionario (curva de trazos) es periódica y que tiene la misma frecuencia y periodo que la fuerza externa aplicada.*

**Ejemplo 5.3.2.** *Se encontró experimentalmente que un peso de 6 lb estira un resorte 6 pul. Si el peso se halla 4 pul por debajo de la posición de equilibrio y se suelta, encuentre la posición del peso como función del tiempo si adicionalmente actúa un fuerza amortiguadora, dada en libras numéricamente igual a 1,5 veces la velocidad instantánea en pies por segundo y una fuerza externa periódica dada por $F(t) = 24\cos 3t$.*

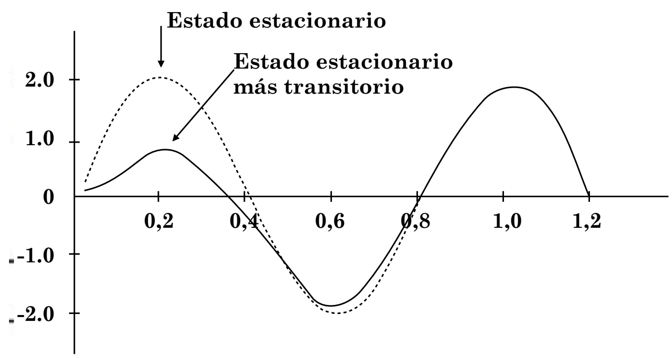



Figura 5.15: Gráfica de la solución.

***Solución:*** *La ecuación diferencial es*

$$\frac{6}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 1,5\frac{dx}{dt} + 24\cos 8t.$$

*De esta forma el problema de valor inicial es*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128\cos 8t, \quad x(0) = \frac{1}{3} \quad x'(0) = 0.$$

*La solución complementaria es* $x_c(t) = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\operatorname{sen} 4\sqrt{3}t)$. *La solución general es* $x(t) = e^{-4t}(A\cos 4\sqrt{3}t + B\operatorname{sen} 4\sqrt{3}t) + 2\operatorname{sen} 8t$. *Usando las condiciones iniciales se obtiene*

$$x(t) = \frac{e^{-4t}}{9}(3\cos 4\sqrt{3}t - 11\sqrt{3}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}t) + 2\operatorname{sen} 8t.$$

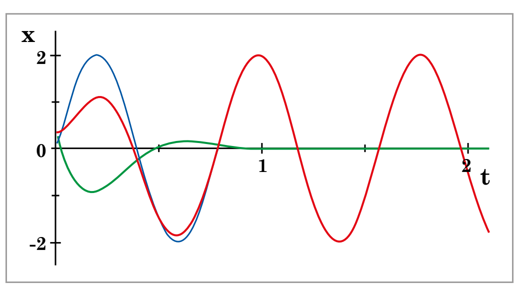



Figura 5.16: Gráfica de la solución.

## 5.4. El fenómeno de resonancia

Cuando la frecuencia de una fuerza externa periódica aplicada a un sistema se relaciona de una manera sencilla, que se describirá, con la frecuencia natural del sistema, puede aparecer el fenómeno de resonancia, que aumenta la magnitud de las oscilaciones hasta valores tan grandes que el sistema llega a disgregarse. Es por ello que una compañía de soldados que marche al paso sobre un puente puede provocar la caída del mismo, aun cuando éste podría soportar mucho más soldados si no caminaran al paso. En forma similar puede ocurrir que una nota musical con una frecuencia característica adecuada rompa un cristal. El fenómeno de resonancia es funesto en los casos mecánicos mientras que en los sistemas eléctricos sus efectos son útiles. La radio, la televisión, el radar y las comunicaciones serían virtualmente imposibles sin la resonancia eléctrica; en estos casos la corriente y, en consecuencia, la energía eléctrica generada puede aumentarse hasta grandes intensidades que necesitan estos campos. El que podamos sintonizar nuestro radio a la frecuencia de la estación radiotransmisora para conseguir una recepción clara se debe a la resonancia eléctrica. El sguiente es un ejemplo de resonancia mecánica.

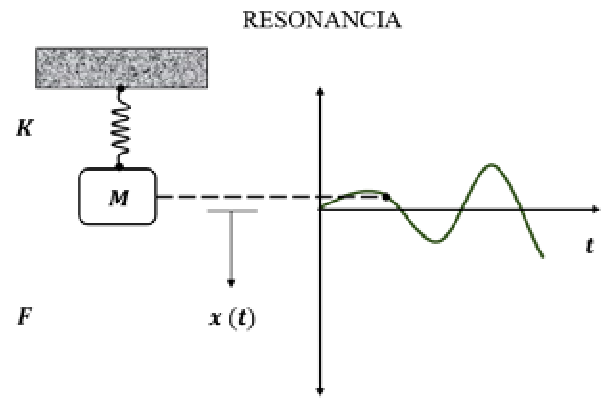



Figura 5.17: Fenómeno de resonancia.

**Ejemplo 5.4.1.** *Dado un resorte al cual se le coloca un peso de 3 kilogramos que lo estira 153 milímetros. Si se tira el peso hasta 10 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y luego se suelta. Hallar la ecuación que describe el movimiento si se le aplica una fuerza externa dada por* $4,9cos8t$.

***Solución:*** *La ecuación diferencial es* $\frac{3}{9,8}\frac{d^2x}{dt^2} = -19,6x + 4,9\cos 8t$, *o sea* $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 16\cos 8t$. *La solución general a la ecuación homogénea es* $x = Acos8t + B\operatorname{sen} 8t$. *Supongamos que la solución particular es* $x_h = t(acos8t + bsen8t)$ *sustituyéndola en la ecuación diferencial, obtenemos* $a = 0$ *y* $b = 1$. *Luego la solución general es* $x = A\cos 8t + Bsen8t + \operatorname{sen} 8t$. *Como las condiciones iniciales son* $x = 0,1$ $v = 0$ *para* $t = 0$ *de donde obtneemos que* $x = t\operatorname{sen} 8t$, *ya que* $A = B = 0$. *La gráfica de esta última función está comprendida entre las rectas* $x = t$ *y* $x = -t$, *tal como aparece en la Figura 5.18. En esta gráfica podemos observar que la magnitud de las oscilaciones aumentará ilimitadamente, naturalmente el resorte se romperá al cabo de poco tiempo. Se observará que en este ejemplo se despreció el amortiguamiento y que la resonancia se produjo porque la frecuencia* $f$ *de la fuerza externa aplicada era igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado, este es un principio general. En el caso de que haya amortiguamiento, las oscilaciones no aumentan ilimitadamente pero, no obstante, pueden hacerse muy grandes; en este caso, la resonancia se produce cuando la frecuencia de la fuerza externa aplicada es ligeramente menor que la frecuencia natural del sistema.*

**Ejemplo 5.4.2.** ***Ejemplo de movimiento forzado:*** *un resorte vertical con constante 8 Ib/pie tiene suspendido un peso de 16 Ib. Se aplica un fuerza externa dada por* $F(t) = 16\operatorname{sen} 4t$. *Se asume que actúa una fuerza amortiguadora dada en libras numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea en pies por segundo. Si se suelta el peso de su posición de equilibrio, determine la posición del peso en cualquier instante.*

***Solución:*** *La ecuación diferencial es*

$$\frac{16}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 4\frac{dx}{dt} + 16\operatorname{sen} 4t.$$

*De esta forma el problema de valor inicial es*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 32\operatorname{sen} 4t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

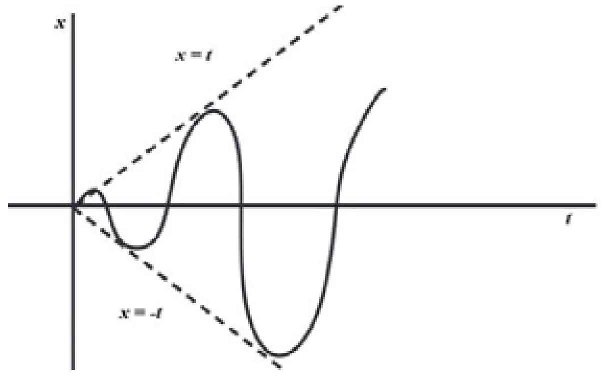



Figura 5.18: Gráfica de la última función comprendida entre las rectas $x = t$ y $x = -t$.

*La solución complementaria es* $x_c(t) = e^{-4t}(A + Bt) - \cos 4t$. *La solución general es* $x(t) = e^{-4t}(A + Bt) - \cos 4t$. *Usando las condiciones iniciales se obtiene* $x(t) = e^{-4t}(1 + 4t) - \cos 4t$.

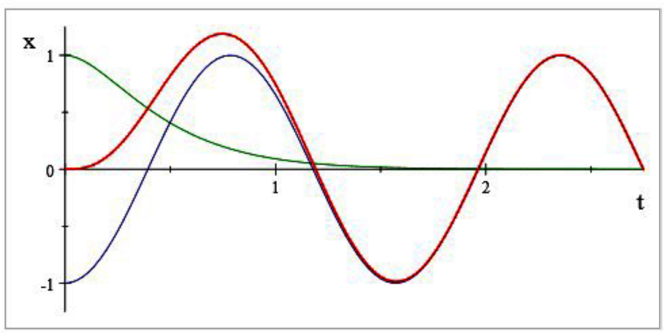



Figura 5.19: Gráfica del ejemplo.

## 5.5. Circuitos eléctricos

En el capítulo anterior se estudiaron los circuitos eléctricos $RL$ y $RC$ que conducía a ecuaciones diferenciales lineales, ahora estamos interesados en circuitos $RLC$, tal como en la figura 5.20. Entonces, según la Ley de Kirchhoff,

$$L\frac{dl}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \tag{5.10}$$

como $I = \frac{dQ}{dt}$, la ecuación (5.10) se transforma en

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación general de las vibraciones forzadas del numeral 8.3., observamos una sorprendente analogía entre las cantidades mecánicas y las eléctricas. La carga $Q$ corresponde a la posición $x$. La inducción $L$ corresponde a la masa $m$, o sea $\frac{W}{g}$. La resistencia $R$ corresponde a la constante de amortiguamiento $c$. La inversa de la capacidad $\frac{1}{c}$, corresponde a la constante del resorte $k$. La fuerza electromotriz $E(t)$ corresponde a la fuerza externa aplicada $F(t)$. La intensidad de la corriente $I = \frac{dQ}{dt}$ corresponde a la velocidad $v = \frac{dx}{dt}$. Debido a la notable analogía que existe entre estas cantidades mecánicas y eléctricas, la cual se verifica en los casos más complicados, la mayoría de las conclusiones que se dedujeron para los sistemas mecánicos se aplican a los eléctricos, e inversamente. Es más, en la industria se utiliza con frecuencia esta analogía para estudiar sistemas mecánicos donde la construcción de estos resultaría muy cara o complicada, y cuando las consecuencias quizá pudieran ser muy peligrosas.

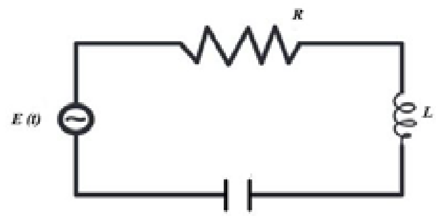



Figura 5.20: Circuitos.

**Ejemplo 5.5.1.** *se conectan en serie un inductor de 0,5 henrios, una resistencia de 6 ohmios, un condensador de 0,02 faradios, un generador que tiene un voltaje alterno dado por* $24sen10t$*, para* $t$ *mayor o igual a cero. Hallar la carga y la intensidad de la corriente en un tiempo* $t$ *cualquier, si la carga existente en el condensador es nula para un tiempo* $t = 0$*.*

***Solución:*** *De acuerdo a la Ley de Kirchhoff, tenemos*

$$0,5\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + 50Q = 24\operatorname{sen}10t,$$

*o sea*

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 12\frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\operatorname{sen}10t.$$

*La solución a la ecuación homogénea es* $Q = e^{-6t}(A\cos 8t + B\operatorname{sen}8t)$*. Supongamos que* $a\operatorname{sen}10t + b\cos 10t$*, es solución particular de la ecuación no homogénea dada, sustituyéndola en esta tenemos* $a = 0$ *y* $b = -\frac{2}{5}$*, luego la solución general a la ecuación no homogénea es* $Q = e^{-6t}(Acos8t + Bsen8t) - \frac{2}{5}cos10t$*, con las condiciones iniciales* $Q = 0$*,* $I = \frac{dQ}{dt} = 0$*, para* $t = 0$*. Obtenemos que* $A = \frac{2}{5}$ *y,* $B = \frac{3}{10}$*, luego la solución buscada es* $Q = e^{-6t}(0,4\cos 8t + 0,3\operatorname{sen}8t) - 0,4\cos 10t$*. Derivando tenemos* $I = -5e^{-6t}\operatorname{sen}8t + 4\operatorname{sen}10t$*. Nótese que el término con el factor* $e^{-6t}$ *es la solución transitoria que pronto se hace despreciable. La solución estacionaria la constituye para* $Q = -0,4cos10t$*, y para* $I = 4sen10t$*; las cuales se conservan después de que el término transitorio ha desaparecido virtualmente.*

## 5.6. Flexión de vigas

Las vigas pueden ser isostáticas o hiperestáticas. Una viga hiperestática es aquella que tiene más condiciones de contorno, es decir, movimientos impedidos, de los que son estrictamente necesarios para su estabilidad. Por ello su cálculo no se realiza con las ecuaciones de equilibrio, sino recurriendo a los esfuerzos y deformaciones a partir de las ecuaciones constitutivas del material. Son las vigas normalmente usadas en las estructuras de construcción, su uso es el más extendido. Otro tipo de viga hiperestática es aquella que tiene más de dos soportes y que se denomina Viga Continua.

### Vigas Isostáticas

Las estructuras isostáticas son aquellas que sus reacciones pueden ser calculadas con las ecuaciones de la estática

$$\sum F = 0 \qquad \sum M = 0,$$

es decir, la sumatoria de las fuerzas en los planos $(x, y, z)$ es igual a cero y la sumatoria de los momentos en los planos $(x, y, z)$ es igual a cero. De una forma un poco más técnica se puede decir que una estructura isostática posee igual número de ecuaciones que de incógnitas, por lo cual, se puede resolver mediante un simple sistema de ecuaciones lineales Los apoyos de vigas, son los elementos que le proporcionan la estabilidad de la viga y por lo general, se encuentran en los extremos o cerca de ellos. Las fuerzas en los apoyos que se generan son productos de las cargas aplicadas y se llaman reacciones y equilibran las cargas

Figura 5.21: Soportes de vigas.

aplicadas. Analíticamente estas reacciones representan las incógnitas de un problema matemático. Las reacciones se pueden dividir en tres grupos que corresponden al tipo de apoyo que se está empleando. En la figura se muestra una sección de una viga flexionada de longitud L, homogénea y que tiene secciones transversales uniformes a los largo de su longitud. En ausencia de carga en la viga, una curva que une los centroides de todas sus secciones transversales es una recta conocida como eje de simetría. Si se aplica una carga a la viga en un punto vertical que contiene al eje de simetría, la viga, experimenta una distorsión. Observe una sección transversal en figura 5.22, puede considerarse como compuesta de fibras tales como $F'F$, todas originalmente de longitud $s$. La superficie $PQ$, que contiene fibras cuyas longitudes no se alteran cuando se flexiona la viga, se llama superficie neutra, y la curva que conecta los centroides de las secciones transversales de estas fibras $B'B$ se denomina curva de **deflexión** o **curva elástica** de la viga. Las fibras debajo de la superficie neutra se alargan y las que están por encima se acortan cuando la viga se flexiona. Supongamos que la fibra $F'F$ que está a una distancia $z$ abajo de la superficie neutra, se alarga una distancia $e$ por la fuerza $SdA$, donde $S$, es el esfuerzo por unidad de área transversal y $dA$ es el área transversal de la fibra. Sea $R$ la longitud de $BC$ (radio de curvatura) y sea $Q'Q$ perpendicular a $B'B$ y $BC$. Por la Ley de Hooke, tenemos que el esfuerzo $S$ por unidad de área es proporcional al alargamiento $\frac{e}{s}$ por la longitud de la fibra $F'F$; esto es

$$S = E\frac{e}{s}, \tag{5.11}$$

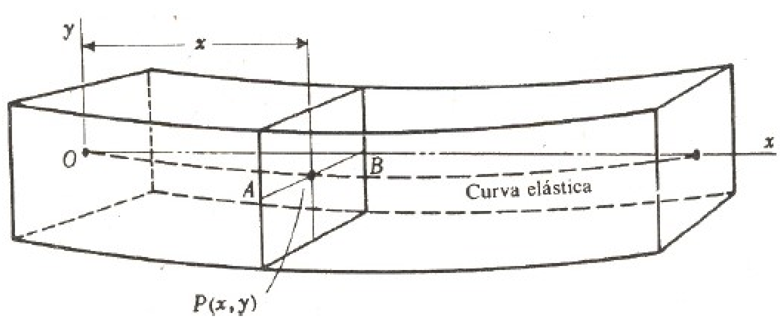



Figura 5.22: Sección transversal.

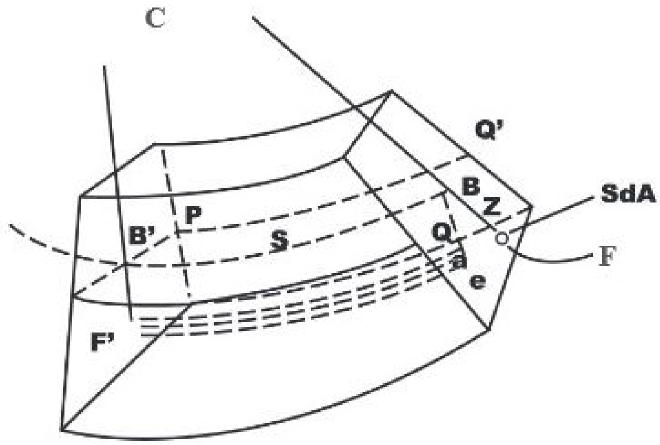



Figura 5.23: Curva elástica de la viga.

donde la constante de proporcionalidad $E$, es el módulo de Young, o módulo de elasticidad. Además se tiene que

$$\frac{e}{s} = \frac{S}{R}. \tag{5.12}$$

Entonces de (5.11) y (5.12) tenemos

$$S = \frac{Ez}{R}.$$

El momento de la fuerza $SdA$ con respecto al $QQ'$ es

$$zSdA = \frac{E}{R}z^2dA.$$

Integrando para toda la sección transversal de la viga se tiene el momento flexionante $M$

$$M = \frac{E}{R}\int z^2dA.$$

Pero

$$z^2dA = I,$$

donde $I$ es el momento de inercia del área transversal de la viga con respecto al eje $QQ'$ luego $M = \frac{EI}{R}$. Ahora, se toma el eje $x$ horizontal a través de algún punto de la fibra $B'B$, tomada como el origen y el eje $y$ positivo hacia arriba. La fórmula para radio de curvatura es $R = \frac{(1+y'^2)}{y''}$ pero para la flexión reducida, la pendiente $y' \approx 0$, y $y'^2$ puede despreciarse en comparación con la unidad, y por tanto $\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx 1$, de manera que una aproximación bastante precisa del radio de curvatura es $R = \frac{1}{y''}$. Reemplazando esta aproximación en la última ecuación tenemos

$$M = EIy''.$$

Ahora suponga que el eje $x$ coincide con el eje de simetría y que la deflexión $y(x)$, medida desde este eje, es positiva si es hacia abajo. En la teoría de la elasticidad se muestra que el momento de flexión $M(x)$ en un punto $x$ a lo largo de la viga se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x).$$

Además, el momento de flexión es proporcional a la curvatura $k$ de la curva elástica, $M(x) = EIk$, donde $E$ es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga e $I$ es el momento de inercia de una sección transversal de la viga. El producto $EI$ se llama rigidez flexional de la viga. Ahora

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

De la deducción anterior se obtiene que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de cuarto Orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x).$$

## 5.7. Condiciones de frontera

A continuación se resumen algunas propiedades de las condiciones de frontera

| *Extremos de la viga* | *Condiciones de la frontera* |
|---|---|
| *Empotrados* | $y = 0, y' = 0$ |
| *Libres* | $y'' = 0, y''' = 0$ |
| *Apoyados* | $y = 0, y'' = 0$ |

**Ejemplo 5.7.1.** *una viga horizontal de 21 metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva elástica y su máxima deformación vertical cuando tiene una carga uniformemente distribuida de w kilogramos.*

**Solución:** Tomamos 0 como origen en el extremo izquierdo como en la Figura 5.24. Luego la ecuación diferencial asociada es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = wlx - wx(\frac{1}{2}x).$$

Luego

$$EIy = \frac{1}{6}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{3}wl^3x,$$

y

$$y_{max} = \frac{5Wl^4}{24EI}.$$

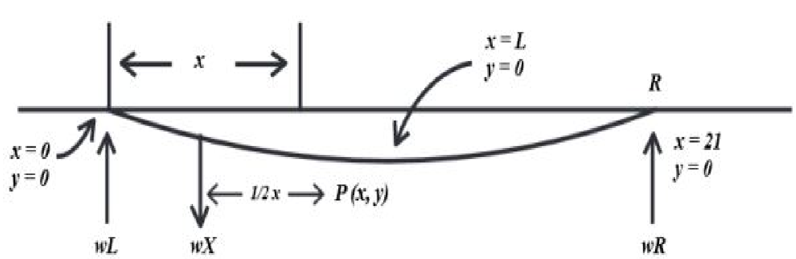



Figura 5.24: Gráfica viga horizontal planteada en el Ejemplo 5.7.1.

## 5.8. El cable suspendido

Supongamos que se tiene un cable de peso uniformemente distribuido $W$, suspendido entre dos soportes $A$ y $B$ como se muestra en la Figura 5.25. El cable se soltará y tendrá su punto más bajo $V$. Deseamos determinar la curva formada por el cable suspendido. La curva se denomina catenaria. Tomando ejes de coordenadas como se muestra en Figura 5.26. Tomando $V$ en eje vertical, sea $s$ la longitud del cable desde $V$ a un punto $P$ de coordenadas $(x, y)$. Entonces la porción del cable desde $V$ hasta $P$ está sujeto a fuerzas, una de ellas es la fuerza gravitacional $Ws$ actuando hacia abajo a través del centro de gravedad de la porción de cable desde $V$ hasta $P$, otra fuerza es la tensión $T_1$ actuando tangencialmente en P, y finalmente la tensión $T_2$ actuando horizontalmente en $V$. La tensión $T_1$ es variable y $T_2$ es constante.

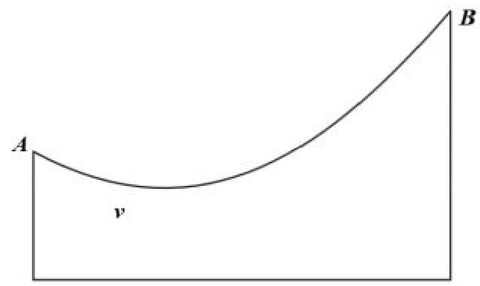



Figura 5.25: Cable suspendido entre dos soportes A y B.

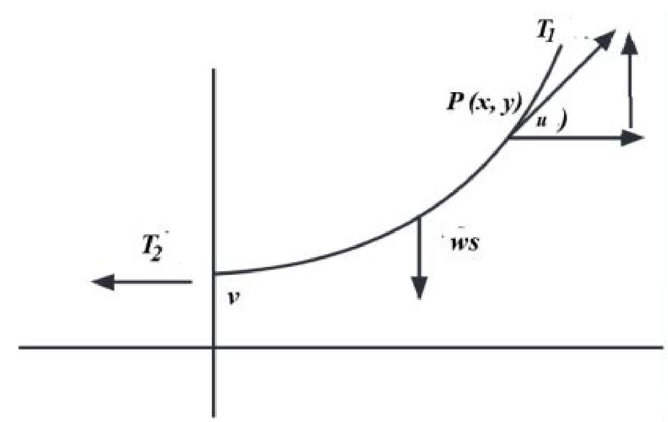



Figura 5.26: Curva catenaria.

Suponemos que el sistema $F$ está en equilibrio

$$\begin{aligned} T_1 senu - Ws &= 0 \\ T_1 cosu - T_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dividiendo la primera ecuación de (5.13) entre la segunda ecuación de (5.13) tenemos

$$\tan(u) = \frac{Ws}{T_2}.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ws}{T_2},$$

como $s$ es la longitud del arco de la curva entonces derivando la última fórmula tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{T_2}.\frac{ds}{dx}.$$

Si $\frac{ds}{dx}$ es constante, entonces la solución a la ecuación diferencial es

$$y = \frac{Wx^2}{2T_2} + b,$$

donde $b$ es una constante. En este caso el cable toma la forma de una parábola. Si $\frac{ds}{dx}$ no es constante, como $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$. Luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{T_2}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}.$$

Ecuación que podemos resolver transformándola en una ecuación de primer orden si definimos $h = \frac{dy}{dx}$, luego

$$\frac{dh}{dx} = \frac{W}{T_2}\sqrt{1 + h^2}.$$

La cual es una ecuación de variables separables, al integrar tenemos

$$h + \sqrt{h^2 + 1} = Ce^{\frac{Wx}{T_2}},$$

elevando al cuadrado tenemos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{Wx}{T_2}} - e^{-\frac{Wx}{T_2}}).$$

Integrando tenemos

$$y = \frac{T_2}{2W}(e^{\frac{Wx}{T_2}} + e^{-\frac{Wx}{T_2}}) + D,$$

donde $D$ es una constante, si utilizamos funciones hiperbólicas, tendremos

$$y = \frac{T_2}{W} cosh \frac{Wx}{T_2} + D.$$

La gráfica de esta curva recibe el nombre de catenaria.

**Ejemplo 5.8.1.** *Un barril cilíndrico de s pies de diámetro y w lb de peso, está flotando en agua como se muestra en la Figura 5.27a. Después de un hundimiento inicial el barril presenta un movimiento oscilatorio, hacia arriba y hacia abajo, a lo largo de la vertical. Utilizando la Figura 5.27b, defina una ecuación diferencial para establecer el desplazamiento vertical $y(t)$, si se supone que el origen está en el eje vertical y en la superficie del agua cuando el barril está en reposo. Use el principio de Arquímedes: la fuerza de flotación o hacia arriba que ejerce el agua sobre el barril es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva, que la densidad de masa del agua es $62,5\frac{lb}{pies^3}$ y que no hay resistencia entre el barril y el agua.*

***Solución:*** *Según el Principio de Arquímedes se tiene que la fuerza ascendente del agua sobre el barril $f_{aa}$ satisface*

$$\begin{aligned} f_{aa} &= Peso\, del\, agua\, desplazada \\ &= (62,4)x(volumen\ de\ agua\ desplazada) \\ &= (62,4)\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 y \\ &= 15,6\pi s^2 y. \end{aligned}$$

*Utilizando la segunda ley de Newton tenemos*

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -15,6\pi s^2 y,$$

*luego*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{15,6\pi s^2 gy}{w} = 0$$

*donde $g = 32\frac{pies}{seg^2}$ es la constante de gravedad y $w = el/h$ es peso del barril en libras.*

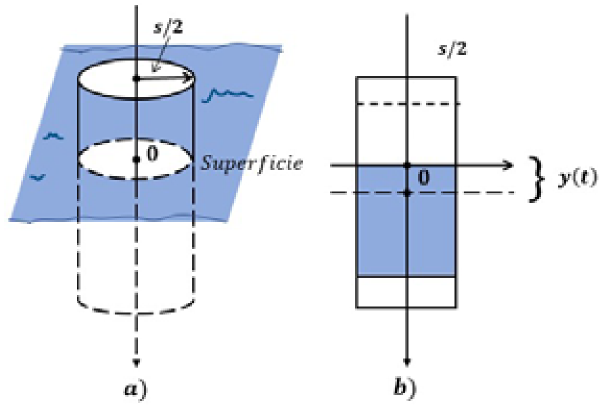



Figura 5.27: Barril cilíndrico

## 5.9. Romance de la derivada y el arco tangente

Veraneaba una derivada enésima en un pequeño chalet situado en la recta del infinito del plano de Gauss, cuando conoció a un arco tangente simpatiquísimo y de espléndida representación gráfica, que además pertenecía a una de las mejores familias trigonométricas. Enseguida notaron que tenían propiedades comunes. Un día, en casa de una parábola que había ido a pasar allí una temporada con sus ramas alejadas, se encontraron en un punto aislado de ambiente muy íntimo. Se dieron cuenta que convergían hacia límites cuya diferencia era tan pequeña como se quisiera. Había nacido un romance. Acaramelados en un entorno de radio épsilon, se dijeron mil teoremas de amor. Cuando el verano pasó, y las parábolas habían vuelto al origen, la derivada y el arco tangente eran novios. Entonces empezaron los largos paseos por las asíntotas siempre unidos por un punto común, los interminables desarrollos en serie bajo los conóides llorones del lago, las innumerables sesiones de proyección ortogonal. Hasta fueron al circo, donde vieron a una troupe de funciones logarítmicas dar saltos infinitos en sus discontinuidades. En fin, lo que eternamente hacían los novios. Durante un baile organizado por unas cartesianas, primas del arco tangente, la pareja pudo tener el mismo radio de curvatura en varios puntos. Las series melódicas eran de ritmos uniformemente crecientes y la pareja giraba entrelazada alrededor de un mismo punto doble. Del amor había nacido la pasión. Enamorados locamente, sus gráficas coincidían en más y más puntos. Con el beneficio de las ventas de unas fincas que tenía en el campo complejo, el arco tangente compró un recinto cerrado en el plano de Riemann. En la decoración se gastó hasta el último infinitésimo. Adornó las paredes con unas tablas de potencias de $e$ preciosas, puso varios cuartos de divisiones del término independiente que costaron una burrada. Empapeló las habitaciones con las gráficas de las funciones más conocidas, y puso varios paraboloides de revolución chinos de los que surgían desarrollos tangenciales en flor. Y Bernouilli le prestó su lemníscata para adornar su salón durante los primeros días. Cuando todo estuvo preparado, el arco tangente se trasladó al punto impropio y contempló satisfecho su dominio de existencia. Varios días después fue en busca de la derivada de orden n y cuando llevaban un rato charlando de variables arbitrarias, le espetó, sin más:

- ¿Por qué no vamos a tomar unos neperianos a mi apartamento? De paso lo conocerás, ha quedado monísimo.

Ella, que le quedaba muy poco para anularse, tras una breve difusión del resultado, aceptó.

El novio le enseñó su dominio y quedó integrada. Los neperianos y una música armónica simple, hicieron que entre sus puntos existiera una correspondencia unívoca. Unidos así, miraron al espacio euclídeo. Los astroides rutilaban en la bóveda de Vivian y... Eran felices!

- ¿No sientes calor? - dijo ella

- Yo sí. ¿Y tú?

- Yo también.
- Ponte en forma canónica, estarás más cómoda.
Entonces el le fue quitando constantes. Después de artificiosas operaciones la puso en paramétricas racionales...
- ¿Qué haces? Me da vergüenza... - dijo ella
- ¡Te amo, yo estoy inverso por tí...! ¡Déjame besarte la ordenada en el origen...! ¡No seas cruel...¡ven...! Dividamos por un momento la nomenclatura ordinaria y tendamos juntos hacia el infinito...
El acarició sus máximos y sus mínimos y ella se sintió descomponer en fracciones simples.
(Las siguientes operaciones quedan a la imaginación del lector) Al cabo de algún tiempo la derivada enésima perdió su periodicidad. Posteriores análisis algebráicos demostraron que su variable había quedado incrementada y su matriz era distinta de cero.
Ella le confesó a él, saliéndole los colores:
- Voy a ser primitiva de otra función.
Él respondió:
- Podríamos eliminar el parámetro elevando al cuadrado y restando. - Eso es que ya no me quieres!
- No seas irracional, claro que te quiero. Nuestras ecuaciones formarán una superficie cerrada, confía en mí.
La boda se preparó en un tiempo diferencial de $t$, para no dar que hablar en el círculo de los 9 puntos. Los padrinos fueron el padre de la novia, un polinomio lineal de exponente entero, y la madre del novio, una asiroide de noble asíntota. La novia lucía coordenadas cilíndricas de Satung y velo de puntos imaginarios. Ofició la ceremonia Cayley, auxiliado por Pascal y el nuncio S.S. monseñor Ricatti.
Hoy día el arcotangente tiene un buen puesto en una fábrica de series de Fourier, y ella cuida en casa de 5 lindos términos de menor grado, producto cartesiano de su amor.

Autor: Desconocido

## 5.10. Ejercicios

### 5.10.1. Movimiento armónico simple

1. Una masa $m$ se une al extremo de un resorte cuya constante es $k$, después de alcanzar el equilibrio, su soporte comienza a oscilar verticalmente a ambos lados de una línea horizontal $L$, de acuerdo con una función $h(t)$. El valor de $h$ representa la distancia en pies, a partir de $L$.

    *a*) Deduzca la ecuación diferencial de movimiento si el sistema se mueve por un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\beta(dx/dt)$.

    *b*) Resuelva la ecuación diferencial en la parte *a*) si un contrapeso de 16 libras estira el resorte 4 pies y $\beta = 2$, $h(t) = 5\cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

2. Un resorte de 4 pies alcanza 8 pies al colgarle un contrapeso de 8 lb. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces de su velocidad instantánea. Deduzca la ecuación de movimiento si el contrapeso se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 pie/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

3. En algunos casos, cuando dos resortes paralelos de constantes $k_1$ y $k_2$ sostienen un solo contrapeso $W$, la constante efectiva de resorte del sistema es $k = 4k_1k_22/(k_1 + k_2)$. Un contrapeso de 20 Ib estira 6 in un resorte y 2 in otro. Estos resortes están fijos a un soporte rígido común por su parte superior y a una placa metálica en su extremo inferior. El contrapeso de $20\,lb$ está fijo al centro de la placa del sistema. Determine la constante efectiva de resorte de este sistema. Deduzca la ecuación del movimiento, si el contrapeso parte de la posición de equilibrio, con una velocidad de $2\,ft/s$ hacia abajo.

4. Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, lo estira 4 pulg. Deduzca la ecuación de movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulg arriba de la posición de equilibrio.

5. Un resorte de 4 pies alcanza 8 pies al colgarle un contrapeso de 8 lb. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual $\sqrt{2}$ veces de su velocidad instantánea. Deduzca la ecuación de movimiento si el contrapeso se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 pie/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cual es su posición en ese instante?

### 5.10.2. Ejercicios Mixtos

1. En cálculo diferencial, la curvatura de una curva representada por $y = f(x)$ se define como sigue:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

   Determine una función, $y = f(x)$ para la cual $\kappa = 1$.

# Capítulo 6

# Series de Potencias

Hasta el momento hemos visto como solucionar la ecuación

$$S(E,n,d) = \sum_{v=0}^{E-1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right] + \binom{n}{E+1}E!d^E \tag{6.1}$$

$$E \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > E, d \in \mathbb{R} E \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > E, d \in \mathbb{R}$$

$$y'' + ay' + by = R,$$

donde $a$ y $b$ son constantes y $R$ es una función continua en $I$. Ahora trataremos de solucionar la ecuación

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0,$$

donde $P_1$, $P_2$, $P_0$ son funciones analíticas, es decir se pueden expresar como una serie de potencias. La solución a esta ecuación involucra series de potencias, es decir de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

o de una forma más general:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n q(x),$$

donde $q(x)$ es una función en $x$. Las mismas ideas se pueden aplicar a las ecuaciones de otros órdenes, y también directamente a ecuaciones no-homogéneas. Antes de empezar este análisis, es necesario repasar las propiedades pertinentes de las series de potencias. Para cada serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, existe un valor no negativo fijo $R$ denominado radio de convergencia, tal que cuando $|x-x_0| < R$, la serie converge y cuando $|x-x_0| > R$, ella diverge. Decimos que la serie converge absolutamente si la serie de valores absolutos converge, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)|^n$ converge para el mismo radio. La convergencia absoluta siempre implica la convergencia ordinaria.

Las series de potencias son simplemente una generalización de los polinomios, y muchas veces se pueden manipular de manera análoga. Las series se pueden sumar, restar, multiplicar, y si el denominador no es igual a cero, dividir. La derivación y la integración de funciones representadas por series de potencias se permiten término a término dentro del radio de convergencia.

Anteriormente dijimos que los coeficientes de la ecuación eran funciones analíticas, es decir, de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, con un radio de convergencia $R$. En este caso es fácil verificar que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$, y de hecho esta igualdad se puede utilizar para construir la serie ya que viene dada en base a las derivadas de la función que es analítica. Utilizaremos varios criterios para analizar la convergencia de nuestras series de potencias. Los más importantes son los de la razón, de comparación, y series geométricas. Se encuentran también los criterios de la raíz y de la integral. Nuestro interés es una ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0,$$

donde $P_1$, $P_2$,..., $P_n$, son coeficientes analíticos con radio de convergencia $R$, puede demostrarse que existen $n$ soluciones linealmente independientes $u_1$, $u_2$,..., $u_n$, cada una de las cuales es analítica con el mismo radio de convergencia. Demostraremos este teorema para ecuaciones diferenciales de orden dos.

**Teorema 6.0.1.** *Sean $P_1$ y $P_2$, funciones analíticas con un radio de convergencia $R$, tales como*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \\ P_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \end{aligned}$$

*entonces la ecuación diferencial*

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \tag{6.2}$$

*tiene dos soluciones linealmente independientes $u_1$ y $u_2$ que son analíticas con el mismo radio de convergencia.*

*Demostración.* Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ solución de la ecuación (1), convergente dentro de un radio dado. Hallemos los coeficientes $a_n$, para que se satisfaga nuestra condición. Como $y$ es solución de la ecuación, entonces la verifica, luego derivando una y dos veces tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Los productos $P_1(x)y'$ y $P_2(x)y$ vienen dados por las series de potencias:

$$\begin{aligned} P_1(x)y' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] (x-x_0)^n \\ P_2(x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \right] (x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.2), tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \left[ (k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k} \right] \right\} (x-x_0)^n = 0.$$

Esto se tiene si

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} \left[ (k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k} \right].$$

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, esta fórmula expresa $a_{n+2}$ en función de los coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$, y los coeficientes de las funciones dadas $P_1$ y $P_2$ convergen absolutamente para $x = x_1$, los términos de esas series están acotados, es decir

$$|b_k|\, t^k \leq M_1 \quad y \quad |c_k|\, t^k \leq M_2.$$

Para ciertos $M_1$ y $M_2$ positivos. Sea $M$ el mayor entre $M_1$ y $M_2$ entonces

$$|b_k| \leq \frac{M_1}{t^k} \quad y \quad |c_k| \leq \frac{M_1}{t^{k+1}}$$

Luego de la fórmula de recurrencia tenemos

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)\,|a_{n+2}| \leq & \sum_{k=0}^{n} \left\{ (k+1)\,|a_{k+1}|\,\frac{M}{t^{n-k}} + |a_k|\,\frac{M}{t^{n-k+1}} \right\} \\
=&\frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left\{ (k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} |a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0| - |a_{n+1}|\,t^{n+1} \right\} \\
=&\frac{M}{t^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0| \right\} \\
=&\frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\,|a_k|\,t^k.
\end{aligned}$$

Hagamos $A_0 = a_0$, $A_1 = a_1$ y definimos $A_2, A_3, \ldots,$ mediante la fórmula de recurrencia

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)A_k t^k \text{ para } n \geq 0 \tag{6.3}$$

Entonces $|a_n| \leq A_n$ para todo $n$ mayor o igual a cero. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - (x - x_0)^n$ es menor que $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,|x - x_0|^n$.
De (6.3) tenemos que:

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)A_{n+2} =& \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)A_k t^k \\
(n+1)nA_{n+1} =& \frac{M}{t^{n}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)A_k t^k
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$t^{n-1}(n+1)nA_{n+1} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)A_k t^k. \tag{6.5}$$

De (6.4) restamos (6.5), y obtenemos:

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - t^{-1}n(n+1)A_{n+1} = M(n+2)A_{n+1}.$$

Luego

$$A_{n+2} = A_{n+1}\frac{(n+1)n + (n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t}.$$

Hallemos

$$\frac{A_{n+2}\,|x - x_0|^{n+2}}{A_{n+1}\,|x - x_0|^{n+1}} = \frac{(n+1)n + (n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t}\,|x - x_0| \to \frac{|x - x_0|}{t} \quad \textit{cuando}\ n \to \infty$$

Este límite es menor que 1 si $|x - x_0| < t$, luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge si $|x - x_0| < t$. Pero como $t = |x_1 - x_0|$, y , $x_1$ es un punto arbitrario del intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge para todo $x$ en $(x_0 - R, x_0 + R)$. Como los coeficientes de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ aparecen en función de $a_0$ y $a_1$, sea $u_1$ la serie de potencias solución tal que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, entonces:

$$u_1(x_0) = 1 \quad y \quad u_1'(x_0) = 0.$$

Dado que $u_2$ una solución con $a_0 = 0$, y, $a_1 = 1$ entonces

$$u_2(x_0) = 1 \quad y \quad u_2'(x_0) = 0.$$

Por lo tanto las soluciones $u_1$ y $u_2$ serían funciones analíticas linealmente independientes.

**Ejemplo 6.0.1.** *Hallar la solución de $y'' - xy = 0$.*

**Solución:** Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solución a la ecuación dada, en este caso tomamos $x_0 = 0$. Entonces

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

y

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^n,$$

luego

$$\begin{aligned} y'' - xy =& \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n 2^{x^n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\ =& 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]x^n = 0, \end{aligned}$$

lo cual es cierto si

$$a_2 = 0 \;\; y \;\; (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0$$

Si $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad para \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

De donde podemos deducir que:

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)3n} && para \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ a_{3n+1} &= \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)} && para \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ a_{3n+2} &= 0 && para \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

De esta manera vemos que todos los coeficientes $a_n$ están determinados en base a $a_0$ y $a_1$. Agrupando todos los términos que contienen como factores a $a_0$ y $a_1$, obtenemos:

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots\right] + a_1\left[x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots\right]$$

De donde podemos decir que

$$u_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)3n}$$

$$u_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}.$$

Veamos que $u_1$ es convergente, empleando el criterio del cociente; si expresamos

$$u_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x).$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d_n 1(x)}{d_n(x)}\right| &= \left|\frac{x^{3n+3} 2{,}3{,}5{,}6 \ldots (3n-1)(3n)}{2{,}3{,}5{,}6 \ldots (3n-1)(3n)(3n+2)(3n+3).x^{3n}}\right| \\ &= \frac{|x|^3}{(3n+2)(3n+3)} \to 0 \quad si \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

luego $u_1$ converge para todo $x$ real. Dejamos al lector la demostración de la convergencia de $u_2$ y el hecho que $u_1$ y $u_2$ son linealmente independientes. □

## 6.1. Ecuación de Legendre

Algunas de las ecuaciones diferenciales importantes que surjan en problemas físicos, son ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes analíticos. Una de ellas es la ecuación de Legendre

$$L(y) = (1-x^2)y'' - 2xy' + a(a+1)y = 0,$$

donde $a$ es una constante. Si esta ecuación la escribimos:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{a(a+1)}{1-x^2}y = 0.$$

Vemos que las funciones $\dfrac{-2x}{1-x^2}$ y $\dfrac{a(a+1)}{1-x^2}$ son analíticas en $x = 0$, ya que tienen un desarrollo en serie de potencias y convergen para $|x| < 1$. Nuestro interés es hallar una base para las soluciones a esta ecuación. Sea

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

luego

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ -2xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -2n a_n x^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\ -x^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_n - 2na_n + a(a+1)a_n\right]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (a+n+1)(a-n)a_n\right]x^n = 0. \end{aligned}$$

Luego los coeficientes de todas las potencias de $x$, deben ser iguales a cero, es decir

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (a+n+1)(a-1)a_n = 0 \quad para \;\; n = 0, 1, \ldots$$

Por lo tanto

$$a_{n+2} = -\frac{(a+n+1)(a-n)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad para \;\; n = 0, 1, \ldots$$

Al desarrollar esta fórmula recurrente, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n(a+2n-1)(a+2n-3)\ldots(a+1)(a)(a-2)\ldots(a-2n+2)}{(2n)}a_0 \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n(a+2n)(a+2n-2)\ldots(a+2)(a-1)(a-3)\ldots(a-2n+1)}{(2n+1)}a_1 \end{aligned}$$

Todos los coeficientes pueden determinarse a partir de $a_0$ y $a_1$, entonces

$$y(x) = a_0u_1(x) + a_1u_2(x),$$

donde

$$\begin{aligned} u_1(x) =& 1 - \frac{(a+1)}{2}x^2 + \frac{(a+3)(a+1)a(a-2)}{4}x^4 + - \ldots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+2n-1)(a+2n-3)\ldots(a+1)(a)(a-2)\ldots(a-2n+2)}{2n}x^{2n} \\ u_2(x) =& x - \frac{(a+1)(a-1)}{2}x^3 + \frac{(a+4)(a+2)(a-1)(a-3)}{(5)}x^5 + - \cdots \\ u_2(x) =& x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+2n)(a+2n-2)\ldots(a+2)(a-1)(a-3)\ldots(a-2n+1)}{(2n+1)}x^{2n+1}, \end{aligned}$$

las series $u_1$ y $u_2$ son soluciones de la ecuación de Legrende, que corresponden a las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \qquad a_1 = 0 \quad y \\ a_0 &= 0 \qquad a_1 = 1 \end{aligned}$$

Respectivamente, estas funciones forman una base para las soluciones, ya que

$$u_1(0) = 1 \qquad u_2(0) = 0$$

$$u_1'(0) = 0 \qquad u_2'(0) = 1.$$

Luego

$$W\left[u_1, u_2\right] \neq 0.$$

Es importante notar que si $a$ es un entero par no negativo, entonces $u_1$ solamente tiene un número finito de términos diferentes de cero. Más aún, en este caso $u_1$ es un polinomio de grado $n$ que contiene solamente potencias pares de $x$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} u_1(x) =& 1 && \textit{para } a=0 \\ u_1(x) =& 1-3x^2 && \textit{para } a=2 \\ u_1(x) =& 1-10x^2+\frac{35}{3}x^4 && \textit{para } a=4, \end{aligned}$$

la solución $u_2$ no es un polinomio en este caso, ya que ninguno de sus coeficientes se anula. Ocurre una situación similar cuando $a$ es un entero impar no negativo. Se deja al lector la demostración de que $u_1$ y $u_2$ son convergentes para $|x|<1$.

## 6.2. Ecuaciones lineales con puntos singulares regulares

Dada la ecuación diferencial

$$L(y) = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0,$$

donde $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ son analíticos en algún punto $x_0$, y vamos a examinar el caso en el cual $P_0(x_0)=0$, dicho punto se llama un punto singular de la ecuación diferencial dada; trataremos de resolver el problema alrededor de una vecindad de $x_0$, entonces a dicho punto lo llamaremos punto singular regular. Ilustremos el método con un ejemplo.

**Ejemplo 6.2.1.** *Hallemos la solución de $L(y) = x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + xy = 0$, la cual tiene un punto singular regular en el origen. Restringimos a $x>0$, solamente.* ***Solución:*** *Supongamos que la solución a la ecuación es de la forma*

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

*Con $a_0 \neq 0$. Esta idea es sencilla, hacemos formalmente las operaciones y buscamos las condiciones que deben ser satisfechas por $r, a_0, a_1, \ldots$ para que esta función sea solución a la ecuación dada, tenemos que*

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} \\ x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \\ \frac{3}{2}xy' &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2}(n+r)a_n x^{n+r} \\ xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}. \end{aligned}$$

*Reemplazando en la ecuación original tenemos:*

$$\begin{aligned}
L(y) =& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(n+r)(n+r-1) + \frac{3}{2}(n+r)\right] x^{n+r} + x^{n+r+1} \right\} a_n \\
=& \left[r(r-1) + \frac{3}{2}r\right] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(n+r)(n+r-1) + \frac{3}{2}(n+r)\right] a_n + a_{n-1} \right\} x^{n+r} \\
=& r\left(r + \frac{1}{2}\right) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+\frac{1}{2})a_n + a_{n-1}\right] x^{n+r} = 0.
\end{aligned}$$

*Luego*

$$r\left(r+\frac{1}{2}\right) = 0 \quad y \quad (n+r)\left(n+r+\frac{1}{2}\right)a_n + a_{n-1} = 0 \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*Sean*

$$q(r) = r\left(r+\frac{1}{2}\right) \quad y \quad q(r+n) = (n+r)\left(n+r+\frac{1}{2}\right) \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*Luego* $L(y) = 0$ *se verifica si*

$$q(r) = 0 \quad y \quad q(n+r)a_n + a_{n-1} = 0 \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*Al polinomio* $q$ *se llama polinomio indicial de la ecuación diferencial dada. Además es el coeficiente de la mínima potencia de* $x$ *que aparece en* $L(y)$, *y vemos que sus raíces son los únicos valores posibles de* $r$ *para los cuales existen soluciones de la forma*

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

*En nuestro caso las raíces de* $q$ *son* $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{1}{2}$. *Como* $q(r+n)a_n + a_{n-1} = 0 \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots,$ *entonces*

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{q(r+n)} \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*si*

$$r_1 = 0, \quad q(r_1 + n) = q(n) \neq 0 \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*como la otra raíz de* $q$ *es* $r_2 = -\frac{1}{2}$, *en forma similar, tenemos*

$$q(r_2 + n) = q(-\frac{1}{2} + n) \neq 0 \qquad para \;\; n = 1, 2, \ldots$$

*haciendo* $a_0 = 1$ *y* $r = r_1 = 0$ *tenemos a* $u_1$ *de la forma*

$$u_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{q(n)q(n-1)\ldots q(1)},$$

*y haciendo* $a_0 = 1$ *y* $r = r_1 = -\frac{1}{2}$ *tenemos a* $u_2$, *otra solución*

$$u_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{q(n-\frac{1}{2})q(n-\frac{3}{2})\ldots q(\frac{1}{2})}.$$

Dejamos al lector la prueba de que $u_1$ y $u_2$ convergen para todo $x$ real y que son linealmente independientes, es decir, forman una base del espacio solución de la ecuación

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' + xy = 0.$$

El siguiente teorema justifica el método utilizado anteriormente.

**Teorema 6.2.1.** *Consideremos la ecuación*

$$x^2y'' + P_1(x)xy' + P_2(x)y = 0, \tag{6.6}$$

*donde $P_1$ y $P_2$ son funciones analíticas, cuya series de potencia, tienen un radio de convergencia $R$. Sean $r_1$ y $r_2$ las raíces del polinomio indicial, tal que $R_e(r_1) \geq R_e(r_2)$.*

$$q(r) = r(r-1) + P_1(0) + P_2(0).$$

*Para $x$ $R$, existe una solución $u_1$ de la forma*

$$u_1(x) = x_1^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 = 1)$$

*Si $r_1 - r_2$ no es nulo, ni un entero positivo, entonces, existe una segunda solución $u_2$, para $x$ $R$, de la forma*

$$u_2(x) = x_2^r \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n x^n \qquad (\hat{a}_0 = 1),$$

*donde ambas series convergen para $x$ $R$. Los coeficientes $a_n, \hat{a}_n$ pueden obtenerse, mediante sustitución de las soluciones en la ecuación diferencial.*

*Demostración.* Supongamos que existe una solución $y$ de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0),$$

para la ecuación $L(y) = x^2y'' + P_1(x)xy' + P_2(x)y = 0$, donde $P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para $x$ $R$. Entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n \\ y''(x) &= x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n \end{aligned}$$

y entonces los productos $P_1(x)xy'$ y $P_2(x)y$, vienen dados por

$$\begin{aligned} P_1(x)xy' &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} (k+r) a_k b_{n-k} \right] x^n \\ P_2(x)y &= x^r \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \right] x^n. \end{aligned}$$

Ahora,

$$x^2y'' = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n,$$

luego

$$L(y) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} [(k+r)a_k b_{n-k} + a_k c_{n-k}] \right\} x^m = 0.$$

Luego debe cumplirse

$$(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} [(k+r)a_k b_{n-k} + a_k c_{n-k}] = 0,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ luego

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r)b_0 + c_0]\, a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}]\, a_k = 0,$$

y para $n = 0$ tenemos que $r(r-1) + rb_0 + c_0 = 0$ ya que $a_0 \neq 0$. El polinomio $q$ de segundo grado, dado por

$$q(r) = r(r-1) + rb_0 + c_0,$$

se llama polinomio indicial de la ecuación (6.6), y los únicos valores que puede tomar $r$, son las raíces de $q$, además tenemos

$$q(r+n)a_n + d_n = 0, \qquad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} [(n+r)b_{n-k} + c_{n-k}]\, a_k \qquad \textit{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Notemos que $d_n$ es una combinación lineal de $a_0, a_1, \ldots, a_{(n-1)}$ cuyos coeficientes involucran las funciones conocidas $P_1$, $P_2$, $r$. Definimos

$$\begin{aligned} D_1(r) &= (rb_1 + c_1)a_0 \\ C_1(r) &= -\frac{D_1(r)}{q(r+1)}, \end{aligned}$$

y en general

$$\begin{aligned} D_n(r) &= \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}]\, c_n(r) \\ C_n(r) &= -\frac{D_n(r)}{q(r+n)} \quad \textit{para} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Los $C_n$ así definidos, son funciones racionales de $r$ y en los únicos puntos donde no están definidos es en los puntos $r$ para los cuales $q(r+n) = 0$, para algún $n = 1, 2, \ldots$. De éstos, solamente existen dos puntos posibles. Definimos:

$$F(x, r) = a_0 x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) x^n,$$

si esta serie es convergente para $0\ x\ R$, entonces

$$L\,[F(x, r)] = a_0 q(r) x^r,$$

hemos llegado a la situación de que si la función

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

es solución de $x^2y'' + P_1(x)xy' + P_2(x)y = 0$, entonces $r$ debe ser una raíz del polinomio indicial $q$, y además todos los $a_n(n \geq 1)$ están determinados unívocamente en términos de $a_0$ y $r$ para ser las $C_n(r)$ siempre y cuando $q(r+n)$ sea distinto de cero para $n = 1, 2, 3, \dots$ y recíprocamente, si $r$ es una raíz de $q$, y si las $C_n(r)$ se pueden determinar, entonces la función $y(x) = F(x, r)$ es solución de la ecuación

$$x^2y'' + P_1(x)xy' + P_2(x)y = 0.$$

Para toda selección de $a_0$, siempre y cuando pueda demostrarse que $F(x, r)$ es convergente. Ejercicio que dejamos al lector, como también el hecho que las funciones $u_1$ y $u_2$ son linealmente independientes. Luego como las raíces son $r_1$ y $r_2$ tales que $q(r_1 + n) \neq 0, q(r_2 + n) \neq 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$ luego las soluciones son

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1)x^n \\ u_2(x) &= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2)x^n. \end{aligned}$$

Siempre y cuando $r_1 - r_2$ no sea un entero positivo y tampoco cero, ya que $q(r_2 - n) \neq 0$, para $n = 1, 2, 3, \dots$ Si $r_1 = r_2$, o $r_1 - r_2$ es un entero positivo, podemos caracterizar las soluciones mediante el siguiente teorema. □

**Teorema 6.2.2.** *Consideremos la ecuación:*

$$x^2y'' + P_1(x)xy' + P_2(x)y = 0\ ,$$

*donde $P_1$ y $P_2$ tienen desarrollos en series de potencias, los cuales son convergentes para $x \in R$. Sean $r_1, r_2$ (con $R_e(r_1) \leq R_e(r_2)$) las raíces del polinomio inicial*

$$q(r) = r(r-1) + P_1(0)R + P_2(0)\ .$$

*Si $r_1 = r_2$ existen dos soluciones $u_1$, $u_2$ linealmente independientes para $|x| \leq R$, las cuales tienen la forma de*

$$u_1(x) = |x|^{r_1+1}\left[F_2(x)\right] + \left[\log|x|\right] + F_1(x)\ ,$$

*donde $F_1$, $F_2$ pueden desarrollarse en series convergentes de potencias para $|x| \leq R$ y $F_1(0) \neq 0$. Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, existen dos soluciones $u_1$, $u_2$ linealmente independientes y definidas para $|x| \leq R$ que tienen la forma*

$$\begin{aligned} u_1(x) &= |x|^{r_1}\left[F_1(x)\right] \\ u_2(x) &= |x|^{r_2}\left[F_2(x)\right] + M\left[\log|x|\right]F_1(x), \end{aligned}$$

*donde $F_1$ y $F_2$ vienen desarrollados en series de potencias convergentes para $|x| \leq R$ y además $F_1(0) \neq 0$, $F_2(0) \neq 0$, $M$ es una constante; puede suceder que $M$ sea igual a cero.*

*Demostración.* Teníamos en la demostración anterior a la función

$$F(x, r) = a_0x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$$

y,

$$L\left[F(x, r)\right] = a_0q(r)x^r,$$

además, $c_n(r)$ se determina por recurrencia mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} c_0(r) &= a_0 \neq 0 \\ q(r+n)c_n(r) &= -D_n(r) \\ D_n(r) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+r)b_{n-k} + c_{n-k}\right] c_k(r), \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. como $q(r_1) = 0$, $q'(r_1) = 0$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left[L\left[F(x,r)\right]\right] &= L\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right](x,r) \\ &= a_0\left[q'(r) + \left[\log(x)q(x)\right]\right] x^r \,, \end{aligned}$$

y si tenemos $r = r_1 = r_2$, $a_0 = 1$, entonces

$$u_2(x) = \frac{\partial F}{\partial r}\left[(x, r_1)\right],$$

la cual nos daría una solución de la ecuación, siempre y cuando la serie involucrada converja, entonces

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r_1)x^n + \left[\log(x)\right] x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1)x^n, \\ &= x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r_1)x^n + \left[\log(x)\right] u_1(x) \,, \end{aligned}$$

donde $u_1$ es la solución que ya se había obtenido

$$u_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1)x^n \,.$$

Nótese que $C_n'(r_1)$ existe para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, ya que $c_n$ es una función racional de $r$, cuyo denominador no se anula en $r = r_1$. También $c_0(r) = 1$ implica que $c_o'(r) = 0$, y así que la serie que en $u_2$ multiplica a $x^{r_1}$ comienza con la primera potencia de $x$. Ahora supongamos que $r_1 = r_2 + m$, donde $m$ es un entero positivo. Si $a_0$ está dado,

$$c_1(r_2), c_2(r_2), \ldots, c_{m-1}(r_2) \,,$$

existen todos y tienen valores finitos, pero dado que

$$q(r+m)c_m(r) = -D_m(r).$$

Encontramos dificultad para calcular $c_m(r_2)$; como

$$q(r) = (r - r_1)(r - r_2)\,,$$

luego

$$q(r+m) = (r - r_2)(r + m - r_2).$$

Si $D_m(r)$ también tiene a $r - r_2$, como factor, esto implica que se puede cancelar el mismo factor en $q(r+m)$, y $C_m(r_2)$ existe, lo cual implica que $C_{m+1}(r_2), C_{m+2}(r_2), \ldots$, existen todos. Más aún tenemos $U_2$ de la forma

$$u_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2)x^n, \qquad \left[c_0(r_2) = 1\right].$$

Siempre podremos arreglarla de tal manera que $D_m(r_2) = 0$, para ello escogemos $C_0(r) = r - r_2$. Como $q(r+n) = C_n(r) = -D_n(r)$. Vemos que $D_n(r)$ es lineal homogénea en $C_0(r), C_1(r), \ldots, C_{n-1}(r)$ y por consiguiente $D_n(r)$ tiene a $C_n(r) = r - r_2$, como factor. Así $c_m(r_2)$ existirá en forma de número finito. Definimos

$$G(x,r) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)x^n \qquad [c_0(r) = r - r_2]\,.$$

Encontramos que

$$L\left[G(x,r)\right] = (r - r_2)q(r)x^r.$$

Haciendo $r = r_2$, obtenemos entonces una solución $g$ dada por

$$g(x) = G(x, r_2).$$

Sin embargo,

$$C_0(r_2) = C_1(r_2) = \cdots = C_{m-1}(r_2) = 0.$$

Así, la serie que define a $g$ realmente comienza con la n-ésima potencia de $x$ y entonces $g$ tiene la forma:

$$g(x) = x^{r_2+m}\left[F(x)\right] = x^{r_1}\left[F(x)\right],$$

donde $F$ es una serie de potencias. De donde concluimos que $g$ es un múltiplo constante de la solución $u_1$ que ya se había obtenido. Lo cual nos lleva a obtener la solución asociada con $r_2$, derivamos a $L\left[G(x,r)\right]$ con respecto a $r$, obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left[L\left[G(x,r)\right]\right] &= L\left[\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)(x,r)\right] \\ &= q(r)x^r + (r - r_2)\left[q'(r) + (\log(x))q(r)\right]x^r.\end{aligned}$$

Haciendo $r = r_2$, hallamos que $u_2$ dada por

$$u_2(x) = \frac{\partial G}{\partial r}(x, r_2).$$

La cual es solución, siempre y cuando las series involucradas sean convergentes, tiene la forma

$$u_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r_2)x^n + (\log(x))x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2)x^n,$$

donde $c_0(r) = r - r_2$. Dado que

$$c_0(r_2) = c_1(r_2) = \cdots = c_{m-1}(r_2) = 0,$$

o sea

$$u_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r_2)x^n + M(\log(x))u_1(x)\ ,$$

donde $M$ es una constante. □

El método empleado en esta sección para obtener soluciones alrededor de algún punto singular, se llama *Método de Frobenius*.

## 6.3. Ecuación de Bessel

Nuestro objetivo es solucionar la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Utilizando la técnica presentada anteriormente, o sea hallar una base del espacio solución de la ecuación citada, alrededor de cero, bajo la condición de que $p$ es un real, como vimos anteriormente se denomina la ecuación de Bessel de orden $p$. Tenemos que el polinomio indicial asociado a la ecuación es

$$r^2 - p^2 = 0,$$

cuyas raíces son $\pm p$, de donde el Teorema 6.6 garantiza que la ecuación de Bessel de orden $p$ posee una solución, válida para todo $x$, de la forma

$$u_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Para hallar los $a_n$, observamos que

$$\begin{aligned}
(x^2 - p^2)u_1(x) =& x^p \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - x^p \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^n \\
xu_1'(x) =& x^p \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)a_n x^n \\
x^2u_1''(x) =& x^p \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1)a_n x^n.
\end{aligned}$$

Al reemplazar en la ecuación original tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+p)(n+p-1) + (n+p) - p^2\right] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0,$$

o

$$(2p+1)a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(2p+n)a_n + a_{n-2}\right] x^n = 0\ ,$$

y tenemos por tanto

$$a_1 = 0, \qquad\qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}, n \geq 2.$$

De esto se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned}
a_1 =& a_3 = a_5 = \cdots = 0 \\
a_2 =& -\frac{a_0}{2(2p+2)} \\
a_4 =& \frac{a_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}\ ,
\end{aligned}$$

y en general

$$\begin{aligned}
a_{2n} =& (-1)^n \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)\cdot (2p+2)\cdot (2p+4)\cdot \cdots \cdot (2p+2n)} \\
=& (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)}\ ,
\end{aligned}$$

de donde

$$u_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)} x^{2n+p},$$

en donde $a_0 \neq 0$ es una constante arbitraría. Por varias razones, resulta conveniente hacer

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

En donde denota la tan conocida función gamma definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt, \qquad p > 0,$$

se puede demostrar que esta integral converge para todo $p > 0$, diverge hacia $+\infty$ cuando $p = 0$ y tiene los valores

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \qquad p > 0.$$

En particular, $\Gamma(n+1) = n!$ Siempre que $n$ sea un entero positivo, y por esta razón a la función gamma se le conoce también como la función factorial generalizada. Volvemos ahora al hecho de que si hacemos $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ para obtener la primera de las dos soluciones particulares necesarias para resolver la ecuación de Bessel. Esta solución se conoce como la función de Bessel de orden $p$ de primera clase, y se presenta por $J_p$. Tenemos concretamente

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+p}}{2^{2n+p} n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)\Gamma(p+1)}.$$

Una expresión que puede volverse a escribir en la forma más sencilla como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

En particular, cuando $p = 0$, tenemos

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

En general, cuando $p$ es un entero no negativo $k$

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$

La gráfica de $J_0$, $J_1$ y $J_2$ aparecen esbozadas en la Figura 6.1. Para completar el estudio de la ecuación de Bessel, nos falta encontrar una segunda solución linealmente independiente de $J_p$. Usamos de nuevo el Teorema 6.6, dividiendo nuestra argumentación en casos dependientes del valor de $p$.

**Caso 1:** $p > 0$, $2p$ no es entero. En tal caso las raíces de la ecuación indicial no difieren en un entero, y se puede obtener una segunda solución repitiendo el argumento anterior con $-p$ en lugar de con $p$. Obviamente esto nos llevará a una serie cuyos coeficientes tendrán la misma forma que anteriormente, y como la función gamma está definida para valores negativos no enteros, de donde podemos escribir

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p},$$

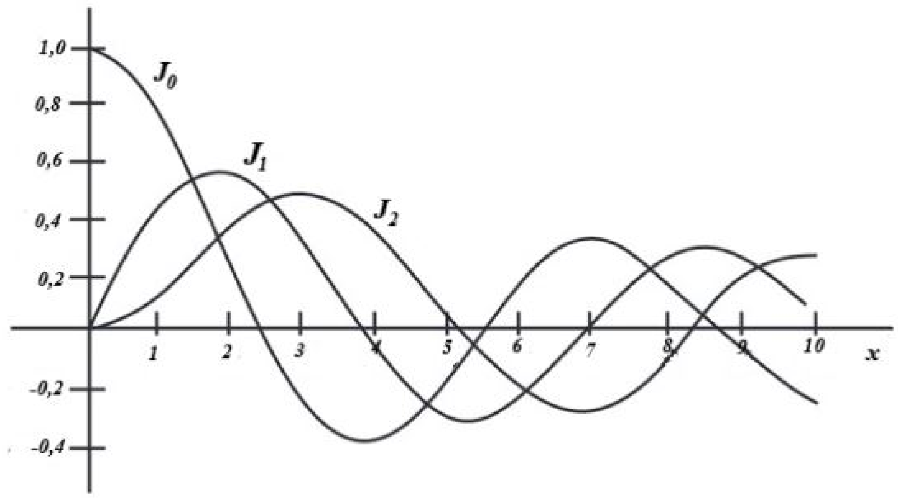



Figura 6.1: Gráfica de $J_0$, $J_1$ y $J_2$

para $x > 0$. Finalmente observamos que la función está definida incluso cuando $p$ es de la forma $k + \frac{1}{2}$, $k$ un entero, y de nuevo da lugar a una solución que es linealmente independiente de $J_p$. De todo ello se concluye que siempre que $p$ no es un entero, la solución general de la ecuación de Bessel de orden $p$ es

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x).$$

**Caso 2:** $p = 0$. Aquí la ecuación de Bessel toma la forma

$$xy'' + y' + xy = 0 \,,$$

y su polinomio indicial tiene a cero como raíz repetida. Por tanto, por el Teorema 6.6, podemos encontrar una segunda solución de la forma

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n + J_0(x)\ln(x),$$

con $J_0$ como anteriormente. Para hallar los valores de $b_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} xu_0(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2}x^{n-1} + xJ_0(x)ln(x) \\ u_0'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} + J_0'(x)\ln(x) + \frac{J_0(x)}{x} \\ xu''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + xJ_0''(x)\ln(x) + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x}. \end{aligned}$$

Al reemplazar en la ecuación tenemos

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2 b_n + b_{n-2}\right] x^{n-1} + \left[xJ_0'' + J_0'(x) + xJ_0(x)\right] \ln(x) + 2J_0'(x) = 0,$$

y como

$$xJ_0'' + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0,$$

tenemos

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2 b_n + b_{n-2}\right] x^{n-1} = -2J_0'(x),$$

como

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-1},$$

de donde

$$b_1 + 4b_2x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2 b_n + b_{n-2}\right] x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot x^{2n-1}.$$

Para facilitar la evaluación de los $b_n$ multiplicamos ahora esta expresión por $x$ y separamos la serie del primer miembro en sus partes par e impar para obtener

$$b_1x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n+1)^2 b_{2n+1} + b_{2n-1}\right] x^{2n+1} + 4b_2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2}\right] x^{2n}$$

$$= x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Luego $b_1 = b_3 = \cdots = 0$, mientras que

$$4b_2 = 1 \quad y \quad (2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = (-1)^{n+1} \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2} \qquad n > 1,$$

de donde

$$\begin{aligned}
b_2 =& \frac{1}{2^2} \\
b_4 =& -\frac{1}{2^2,4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^2.(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&\vdots \\
b_{2n} =& (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right],
\end{aligned}$$

y de ello se sigue que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x)\ln(x).$$

En el trabajo teórico con funciones de Bessel es práctica común reemplazar $u_0$ por una cierta combinación de $J_0$ y $u_0$. La función resultante se conoce como la función de Bessel de orden cero de segunda clase, y se define por la fórmula

$$u_0(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[\ln\frac{x}{2} + \gamma\right],$$

en donde $\gamma = 0,57721566\ldots$, y se conoce como la constante de Euler. La gráfica de $u_0$ la podemos observar en la Figura 6.2.

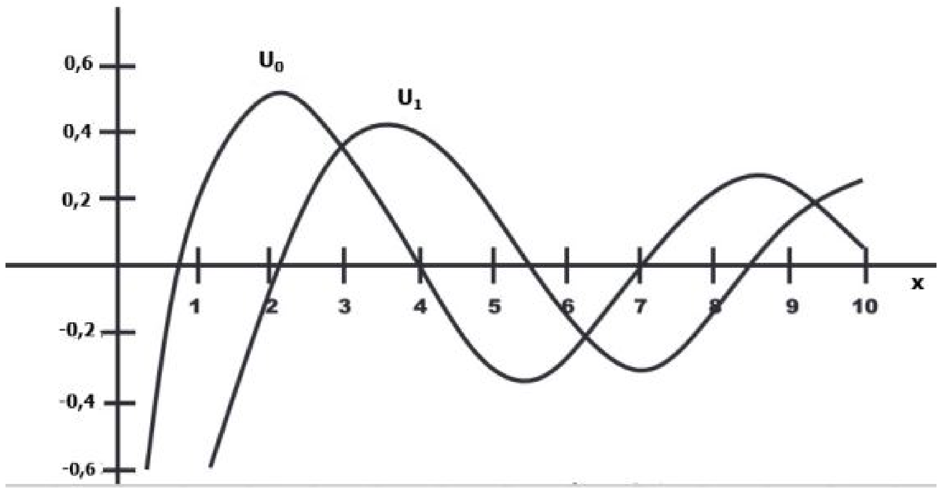



Figura 6.2: Gráfica de $u_0$

**Caso 3:** $p = n$, un entero. Esta vez las raíces de la ecuación indicial difieren en $2n$, y el Teorema 6.2, afirma que la segunda solución de la ecuación de Bessel es de la forma

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r} + M J_n(x)\ln(x),$$

en donde $M$ es una constante. Aquí también podemos calcular los $b_k$ y $M$ por el método de coeficientes indeterminados, similar al método empleado por el teorema, razón por la cual se omitirá, de donde tenemos

$$\begin{aligned} u_n(x) &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-k-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{H_n}{2n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[H_k + H_{n+k}\right]}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + J_n(x)\ln(x)\ , \end{aligned}$$

en donde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Es importante notar que es habitual reemplazar $u_n$ por una combinación lineal de $J_n$ y $u_n$, representada por $u_n$, que es denominada la función de Bessel de orden $n$ de segunda clase. Se define por la fórmula

$$\begin{aligned} u_n(x) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{H_n}{\pi(n)!}(\frac{x}{2})^{n} \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[H_k - H_{k+n}\right]}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + \frac{2}{\pi}J_n(x)\left[\ln\frac{x}{2} + \gamma\right]. \end{aligned}$$

## 6.4. Ejercicios

### 6.4.1. Soluciones de ecuaciones clásicas

Hallar la solución de

1. la Ecuación Hipergeométrica de Gauss $x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]\,y' + aby = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son parámetros fijos.
2. la Ecuación de Laguerre $xy'' + (1-x)y' + ay = 0$, donde $a$ es un número real. Si $a$ es un entero no negativo, una solución de la ecuación es un polinomio.
3. la Ecuación de Hermite $y'' - 2xy' + 2py = 0$, donde $p$ es una constante.
4. la Ecuación de Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$, donde $p$ es una constante.
5. la Ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0$, donde $p$ es un número real. Las soluciones de esta ecuación se denominan funciones de Bessel.

### 6.4.2. Mixtos

1. Compruebe por sustitución directa que la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

   es una solución particular de la ecuación diferencial

$$(x+1)y'' + y' = 0$$

2. Hallar dos soluciones en series de potencias de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0. \tag{6.7}$$

3. Hallar una solución en series de potencias de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0$$

   alrededor de $x = 0$.

4. Hallar la solución general en series de potencias de la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' + 2p^2y = 0,$$

   donde $p$ es una constante.

# Capítulo 7

# La transformada de Laplace

## 7.1. Definiciones

Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$, entonces la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt = F(s),$$

se llama *Transformada de Laplace* de $f$. El dominio de la función $F(s)$ consta de aquellos valores de $s$ para los que el límite anterior exista como número real. Además nótese que $\mathscr{L}$ es un operador lineal.

**Ejemplo 7.1.1.** *Calcular* $\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\}$

**Solución:** A partir de la definición se tiene que

$$\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-3t} dt = \int_0^\infty e^{-(st+3t)} dt = \int_0^\infty e^{-t(s+3)} dt. \tag{7.1}$$

Sea $u = (s+3)t$, entonces $\dfrac{du}{dt} = s+3$ o equivalentemente $\dfrac{du}{s+3} = dt$. Reemplazando en la integral definida en (7.1) se obtiene

$$\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\} = \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{s+3} = \frac{1}{s+3} \int_0^\infty e^{-u} du = -\frac{1}{s+3} e^{-u} \,|_0^\infty = -\frac{1}{s+3} e^{-(s+3)\infty} + \frac{1}{s+3} e^{(s+3)0}, \tag{7.2}$$

dado que

$$\frac{1}{s+3} e^{-(s+3)\infty} = \lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t} = 0,$$

para tado $s > -3$, entonces la taransformada definida en (7.2) se reduce a

$$\mathscr{L}[e^{3t}] = \frac{1}{s+3},\ s > 3.$$

**Teorema 7.1.1.** *Para $k$ constante se tiene*

1. $\mathscr{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}, s > 0 \qquad \mathscr{L}\{k\}(s) = \dfrac{k}{s}, s > 0$

2. $\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, s > 0, n = 1, 2, \ldots$

3. $\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \mathit{para} \quad s > a$

*4.* $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(kt)\right\}(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}, para \quad s > 0$

*5.* $\mathscr{L}\left\{\cos(kt)\right\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}, para \quad s > 0$

*6.* $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(kt)\right\}(s) = \dfrac{s}{s^2-k^2}, para \quad s > |k|$

*7.* $\mathscr{L}\left\{\cos(kt)\right\}(s) = \dfrac{k}{s^2-k^2}, para \quad s > |k|$

*8.* $\mathscr{L}\left\{t^n e^{at}\right\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a, n = 1, 2, \cdots$

*Demostración.* A continuación verificaremos los dos primeros literales.

1. A partir de la definición se obtiene

$$\mathscr{L}\left\{1\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

2. La demostración se realiza por el método de inducción. Para ello supongamos que $s > 0$ y utilizamos el siguiente límite

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| = 0, n = 1, 2, \cdots$$

Para $n = 1$ se obtiene tiene

$$\mathscr{L}\left\{t\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}tdt. \tag{7.3}$$

Resolveremos la integral definida en (7.3) por el método de integración por partes. Sea $u = t$ y $dv = e^{-st}dt$ entonces se tiene $du = dt$ y $v = -\dfrac{1}{s}e^{-st}$ respectivamente. Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t\right\}(s) &= \left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= -(0-0) + \frac{1}{s}\frac{1}{-s}\left.e^{-st}\right|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Ahoram, supongamos que la hipótesis se cumple para $n-1$ y verifiquemos que también se satisface para $n$. En efecto, sea $u = t^n$ y $dv = e^{-st}dt$, entonces $du = nt^{n-1}dt$ y $v = -\dfrac{1}{s}e^{-st}$, respectivamente. Reemplazando en

$$\mathscr{L}\left\{t^n\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t^n\right\}(s) &= -\left.\frac{t^n e^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt}_{\mathscr{L}(t^{n-1})(s)} \\ &= -(0-0) + \frac{n}{s}\mathscr{L}\left\{t^{n-1}\right\}(s) \\ &= \frac{n}{s}\mathscr{L}\left\{t^{n-1}\right\}(s).\end{aligned}$$

Pero por la hipótesis de inducción

$$\mathscr{L}\left\{t^{n-1}\right\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n},$$

luego

$$\mathscr{L}\left\{t^{n}\right\}(s) = \frac{n}{s}\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

De manera similar se verifican los literales restantes. □

Si $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, se dice que $f(t)$ es la *transformada inversa* de $F(s)$ y se escribe

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

El siguiente teorema presenta algunas de sus propiedades

**Teorema 7.1.2.** *Para $a$ y $k$ constantes se tiene*

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$, *y* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s}\right\} = k$, *si* $s > 0$.
2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$, *y* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}$, *si* $s > 0$.
3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, *si* $s > a$.
4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen}(kt)$, *y* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+k^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen}(kt)}{k}$, *si* $s > 0$.
5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos(kt)$, *si* $s > 0$.
6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\} = \operatorname{senh}(kt)$ *y* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-k^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{senh}(kt)}{k}$, *si* $s > |k|$.
7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh(kt)$, *si* $s > |k|$.
8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{at}$ *y*, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n e^{at}}{n!}$, *si* $s > a$.

**Ejemplo 7.1.2.** *Evaluar* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\}$.

**Solución:** Por medio de fraaciones parciales se obtiene

$$\frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}, \tag{7.4}$$

donde $A$, $B$ y $C$ son constantes. Luego, evaluando la transformada inverersa en la ecuación (7.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}\right\} \\
&= A\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + B\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el método de fracciones lineales en la ecuación (7.4) obtenemos $A = 1$, $B = -1/3$ y $C = -2/3$. Utilizando la tabla de transformadas tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} = e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{t}.$$

**Ejemplo 7.1.3.** *Con factores lineales repetidos*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}\right\}\\ &= A\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + B\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + D\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}\\ &+ E\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}\\ &= A + Bt + Ce^{-2t} + D\frac{te^{-2t}}{1!} + E\frac{t^2e^{-2t}}{2!}.\end{aligned}$$

*Utilizando el método de las fracciones parciales tenemos*

$$A = -\frac{1}{16},\quad B = \frac{1}{8},\quad C = \frac{1}{16},\quad D = 0,\quad E = -\frac{1}{4},$$

*luego*

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}.$$

## 7.2. Propiedades y Teoremas

Para los teoremas y propiedades se asume que $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ y $\mathscr{L}[g(t)] = G(s)$.

**Teorema 7.2.1.** *Si $f(t)$ es continua a trozos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t > T (T \in \mathbb{R}, T > 0)$, entonces $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ existe para $s > c$ y para algún $c \in \mathbb{R}$. Además*

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}[f(t)] = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

**Teorema 7.2.2.** *(Primer teorema de Traslación)*
*Si $a$ es un número real cualquiera, entonces*

$$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a) = \mathscr{L}[f(t)]_{s\to s-a}$$

*Equivalentemente,*

$$e^{at}f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathscr{L}[f(s)_{s\to s-a}].$$

*Demostración.*

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s-a) = F(s-a).$$

□

**Nota 7.2.1.** $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$. *Para el segundo teorema de traslación se usa la función escalón unitario, definida como sigue*

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

**Teorema 7.2.3.** *(Segundo teorema de Traslación)*
*Si $a > 0$, entonces*

$$\mathscr{L}[u_a(t)f(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)] = e^{-as}F(s).$$

*Equivalentemente,*

$$u_a(t)f(t-a) = \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right].$$

**Corolario 7.2.1.**

$$\mathscr{L}[u_a(t)f(t)] = e^{-as}\mathscr{L}[f(t+a)].$$

**Teorema 7.2.4.** *(Derivadas de una transformada) Para $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathscr{L}^n}{\mathscr{L}s^n}\{\mathscr{L}[f(t)]\}.$$

*Equivalentemente,*

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathscr{L}^n}{\mathscr{L}s^n}[F(s)]\right\}.$$

*Demostración.* Por inducción sobre $n$, se tiene que para $n = 1$ se sigue

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

luego derivando $F(s)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dF(s)}{ds} =& \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
=& \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}f(t))dt \\
=& \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}(tf(t))dt \\
&\overset{def.c.}{=} -\mathscr{L}\{tf(t)\}(s),
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathscr{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s).$$

Supongamos que se cumple para $n = k$

$$\mathscr{L}\left\{t^k f(t)\right\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s).$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^{k+1}f(t)\right\}(s) =& \mathscr{L}\left\{tt^k f(t)\right\}(s) \\
&\overset{n=1}{=} -\frac{d}{ds}d\left\{t^k f(t)\right\}(s) \\
&\overset{n=k}{=} -\frac{d}{ds}\left[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s)\right] \\
&= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 7.2.5.** *(Transformada de una Derivada)*
*Si $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua parte por parte para $t \geq 0$, entonces,*

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

*Para el siguiente teorema es necesario el producto de convolución de dos funciones, el cual se define como sigue:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

**Teorema 7.2.6.** *(Teorema de Convolución)*
*Si $f(t)$, $g(t)$ son continuas parte por parte y de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces*

$$\mathscr{L}[f * g] = F(s)G(s).$$

*Equivalentemente,*

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g.$$

*En particular*

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \mathscr{L}[1 * f(t)] = \frac{1}{s}F(s).$$

*Que puede verse como la transformada de una integral.*

**Teorema 7.2.7.** *(Transformada de una Función Periódica).*
*Si $f(t)$ es continua parte por parte y de orden exponencial para $t \geq 0$, y es periódica con periodo $T$ (para $T > 0, f(t+T) = f(t)$), entonces*

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

*Para el último teorema que vamos a enunciar es necesario conocer la función Delta de Dirac, definida de la siguiente forma*

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0),$$

*donde,*

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} \quad \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0, \quad t \leq t_0 - a, 0 \quad bien \quad t \geq t_0 + a \end{cases}$$

*$\delta_a(t-t_0)$ es conocida como la función impulso unitario y $\delta(t-t_0)$ es la llamada **Función Delta de Dirac** (que entre otras cosas realmente no es una función en el sentido tradicional).*

**Teorema 7.2.8.** *(La transformada de la función Delta).*

$$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}.$$

*En particular*

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1.$$

## 7.3. Aplicaciones de la transformada a las Ecuaciones diferenciales

La Transformada de Laplace puede ser utilizada para resolver ecuaciones diferenciales con valores iniciales, ecuaciones integrales y ecuaciones integro diferenciales. Los dos últimos tipos de ecuaciones son como se definen a continuación:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(x)h(t-x)dx.$$

Donde las funciones $g$, $h$ son conocidas

$$f'(t) = g(t) + \int_0^t f(x)h(t-x)dx, \qquad (E.\ Integrodiferencial)$$

donde las funciones $g$, $h$ son conocidas. Para resolver cualquiera de estas ecuaciones se debe tomar transformada a ambos lados de la igualdad, resolver la ecuación algebraica en $s$ y luego tomar transformada inversa para hallar la solución en $t$.
Pasos:
- Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación.
- Aplicar el teorema de la transformada de la derivada.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{y'\right\} &= sY(s) - y(0)\\ \mathscr{L}\left\{y''\right\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).\end{aligned}$$

**Nota 7.3.1.** *Cuando las condiciones iniciales no están dadas en $t=0$, sino en $t=a$, se hace el cambio de variable $\tau = t-a$, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en $\tau = 0$*

1. *Conseguir una función en $s$, es decir, despejar $Y(s)$.*
2. *Hallar la transformada inversa: $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$.*

**Ejemplo 7.3.1.** *Hallar la solución del problema de valores iniciales definido por $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 6$.*

**Solución:** Evaluando la transformada de Laplace en la ecuación se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathscr{L}\left\{y''\right\} - 6\mathscr{L}\left\{y'\right\} + 9\mathscr{L}\left\{y\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2e^{3t}\right\}. \tag{7.5}$$

Aplicando las propiedades de la transformada en la ecuación (7.5) se obtiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{2!}{(s-3)^3}. \tag{7.6}$$

Reemplazando las condiciones inciales en la ecuación (7.6) se obtiene

$$s^2Y(s) - s(2) - 6 - 6(sY(s) - 2) + 9Y(s) = \frac{2!}{(s-3)^3}.$$

o equivalentemente

$$s^2Y(s) - 6(sY(s)) + 9Y(s) = \frac{2!}{(s-3)^3} + 2(s-3). \tag{7.7}$$

A partir de de la ecuación (7.7) se obtiene

$$Y(s) = \frac{2!}{(s-3)^5} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2}. \tag{7.8}$$

Por lo tanto, evalaundo la transformada inversa en la ecuación (7.8) obtenemos

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \frac{2!}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\} = \frac{t^4}{12}e^{3t} + 2e^{3t}.$$

**Ejemplo 7.3.2.** *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\frac{d^3Y}{dt^3}+4\frac{d^2Y}{dt^2}+5\frac{dY}{dt}+2Y=10\cos(t),\ Y(0)=0,\ Y'(0)=0,\ Y''(0)=3.$$

**Paso 1.** *Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\}+4\mathscr{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\}+5\mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}+2\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}=10\mathscr{L}\left\{\cos(t)\right\}$$

*Denotamos $\mathscr{L}\{Y(t)\}$ por $y(s)$, entonces las siguientes transformadas*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\},\ \mathscr{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} y\ \ \mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\},$$

*en función de $y(s), Y(0), Y'(0), Y''(0)$. Se obtiene*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\}=&s^3y(s)-s^2Y(0)-sY'(0)-Y'(0),\\ \mathscr{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\}=&s^2y(s)-sY(0)-Y'(0),\\ \mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}=&sy(s)-Y(0).\end{aligned}$$

*Aplicando las condiciones iniciales se reducen a*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\}=&s^3y(s)-3,\\ \mathscr{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\}=&s^2y(s),\\ \mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}=&sy(s),\end{aligned}$$

*Por tanto,*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\}+4\mathscr{L}\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\}+5\mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}+2\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\} &= s^3y(s)-3+4s^2y(s)+5sy(s)+2y(s)\\ &= \left[s^3+4s^2+5s+2\right]y(s)-3,\end{aligned}$$

*donde utilizando la tabla de transformadas tenemos*

$$10\mathscr{L}\left\{\cos(t)\right\}=\frac{10s}{s^2+1}.$$

*Por tanto, la ecuación se reduce a*

$$(s^3+4s^2+5s+2)y(s)-3=\frac{10s}{s^2+1},$$

*con la incógnita $y(s)$.*

**Paso 2.** *Resolvemos ahora la ecuación para $y(s)$. Tenemos*

$$(s^3+4s^2+5s+2)y(s)-3=\frac{3s^2+10s+3}{s^2+1},$$

*o*

$$y(s)-3=\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}.$$

**Paso 3** *Determinamos*

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}\right\}.$$

*Empleando el método de descomposición en fracciones simples y así encontrar una forma de la expresión para $y(s)$, tenemos*

$$\begin{aligned}\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)} &= \frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s+1)^2(s+2)}\\ &= \frac{A}{S+2}+\frac{B}{S+1}+\frac{C}{(S+1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+1}.\end{aligned}$$

*A partir de aquí hallamos*

$$\begin{aligned}3s^2+10s+3 =& A(s+1)^2(s^2+1)+B(s+2)(s+1)(s^2+1)\\ &+C(s+2)(s^2+1)+(Ds+E)(s+2)(s+1)^2,\end{aligned}$$

*o*

$$\begin{aligned}3s^2+10s+3 =& (A+B+D)s^4+(2A+3B+C+4D+E)s^3\\ &+(2A+3B+2C+5D+4E)s^2\\ &+(2A+3B+C+2D+5E)s\\ &+(A+2B+2C+2E)\end{aligned}$$

*Se obtiene así el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}A+B+D =& 0,\\ 2A+3B+C+4D+E =& 0,\\ 2A+3B+2C+5D+4E =& 3,\\ 2A+3B+C+2D+5E =& 10,\\ A+2B+C+2E =& 3.\end{aligned}$$

*Haciendo $s=-1$, hallamos que $C=-2$ y haciendo $s=-2$ en esta misma ecuación tenemos $A=-1$. Utilizando estos valores de $A$ y $C$ el sistema nos da*

$$B=2, D=-1, \quad y \quad E=2$$

*Sustituyendo estos valores de A,B,C,D y E se obtiene*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}\right\} =& -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\ &-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\}\\ &+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}.\end{aligned}$$

*Utilizando la tabla de transformadas tenemos*

$$Y(t)=-e^{-2t}+2e^{-t}-2te^{-t}-\cos(t)+2\sin(t).$$

## 7.4. Solución de sistemas lineales usando la transformación de Laplace

Aplicamos el método de la transformación de Laplace para hallar la solución de un sistema de primer orden

$$a_1\frac{dX}{dt}+a_2\frac{dY}{dt}+a_3x+a_4Y=B_1(t)$$

$$b_1\frac{dX}{dt}+b_2\frac{dY}{dt}-b_3x+b_4Y=B_2(t),$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ y $b_4$ son constantes y $B_1$ y $B_2$ son funciones conocidas que satisfacen las condiciones iniciales

$$X(0)=c_1 \quad e \quad Y(0)=c_2,$$

donde $c$ y $c_2$ son constantes. Supongamos que $x(s)$ denota la transformada $\mathscr{L}\left\{X(t)\right\}$ e $y(s)$ denota la transformada $\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}$. Se procede entonces como sigue:

1. Se toma la trasformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las dos ecuaciones del sistema, se aplica el teorema y las condiciones iniciales; igualando los resultados se obtiene una ecuación algebraica lineal en las dos incógnitas $x(s)$ e $y(s)$.

2. Para determinar explícitamente $y(s)$ y $x(s)$ se resuelve el sistema lineal de dos ecuaciones algebraicas, obtenido en la etapa precedente.

3. Una vez halladas $y(s)$ y $x(s)$, se emplea la tabla de transformadas para determinar la solución $X(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{x(s)\right\}$ e $Y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{y(s)\right\}$ del problema de valores iniciales dado.

**Ejemplo 7.4.1.** *Usar la transformación de Laplace para hallar la solución del sistema.*

$$\frac{dX}{dt}-6X+3Y=8e^t$$

$$\frac{dY}{dt}-2X-Y=4e^t,$$

*que satisface las condiciones iniciales* $X(0)=-1$, $Y(0)=0$.

**Paso 1.** *Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema, tenemos*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dX}{dt}\right\}-6\mathscr{L}\left\{X(t)\right\}+3\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}\mathscr{L}d\left\{8e^t\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}-2\mathscr{L}\left\{X(t)\right\}-\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{4e^t\right\}.$$

*Designemos* $\mathscr{L}\left\{X(t)\right\}$ *por* $x(s)$ *y* $\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}$ *por* $y(s)$. *Aplicando entonces el teorema y las condiciones iniciales, tenemos*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dX}{dt}\right\}=sx(s)-X(0)=sx(s)+1$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dY}{dt}\right\}=sy(s)-Y(0)=sy(s).$$

*Usando la tabla de transformadas*

$$\mathscr{L}\left\{8e^t\right\} = \frac{8}{s-1} \quad y \quad \mathscr{L}\left\{4e^t\right\} = \frac{4}{s-1}.$$

*En consecuencia,*

$$sx(s) + 1 - 6x(s) + 3y(s) = \frac{8}{s-1}$$

$$sy(s) - 2x(s) - y(s) = \frac{4}{s-1},$$

*que al simplificarse quedan en la forma*

$$\begin{aligned}
(s-6)x(s) + 3y(s) &= \frac{8}{s-1} - 1 \\
-2x(s) + (s-1)y(s) &= \frac{4}{s-1} \\
(s-6)x(s) + 3y(s) &= \frac{-s+9}{s-1} \\
-2x(s) + (s-1)y(s) &= \frac{4}{s-1}.
\end{aligned}$$

**Paso 2.** *Resolvemos el sistema lineal algebraico cuyas "incógnitas" son $y(s)$ y $x(s)$. Obtenemos*

$$\begin{aligned}
(s-1)(s-6)x(s) + 3(s-1)y(s) &= -s+9 \\
-6x(s) + 3(s-1)y(s) &= \frac{12}{s-1}.
\end{aligned}$$

*Restando queda*

$$(s^2 - 7s + 12)x(s) = -s + 9 - \frac{12}{s-1},$$

*de donde hallamos*

$$x(s) = \frac{-s^2 + 10s - 21}{(s-1)(s-3)(s-4)} = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}.$$

*De igual modo encontramos*

$$y(s) = \frac{2s-6}{(s-1)(s-3)(s-4)} = \frac{2}{(s-1)(s-4)}.$$

**Paso 3.** *Hemos de determinar ahora*

$$X(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{x(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}\right\}$$

*e*

$$Y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{y(s)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s-4)}\right\}.$$

*Hallamos primeramente $X(s)$. Usando fracciones simples escribimos*

$$\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4},$$

*y se encuentra*

$$A = -2 \quad y \quad B = 1,$$

*entonces*
$$X(t) = -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\},$$
*y usando la tabla de transformadas, obtenemos*
$$X(t) = -2e^t + e^{4t}.$$
*De igual modo hallamos $Y(s)$. Se obtiene así*
$$Y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}.$$

**Ejemplo 7.4.2.** *Una masa acoplada en el extremo inferior de un resorte vertical de constante $k$. En el tiempo $t = t_0$ la masa es golpeada al aplicarle una fuerza hacia arriba durante un tiempo muy pequeño. Describe el movimiento subsecuente.*
***Solución:*** *la ecuación diferencial asociada con el problema es*
$$\begin{cases} mx'' + kx = P_0\delta(t-t_0) \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}.$$
*Utilizando transformada de Laplace, se tiene*
$$(ms^2 + k)X(s) = P_0e^{-st_0}.$$
*Ésto implica que,*
$$X(s) = \frac{P_0e^{-st_0}}{ms^2+k} = \frac{P_0}{m}\cdot\frac{e^{-st_0}}{s^2+w^2}, w^2 = \frac{k}{m}.$$
*Utilizando ahora la transformada inversa de Laplace, se obtiene*
$$x(t) = d^{-1}\left\{\frac{P_0}{m}.\frac{e^{-st_0}}{s^2+w^2}\right\} = \frac{P_0}{m}u(t-t_0)\frac{1}{w}\operatorname{sen} w(t-t_0)$$
$$= \frac{P_0}{m}u(t-t_0)\sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) = \frac{P_0}{\sqrt{mk}}u(t-t_0)\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0).$$

## 7.5. Ejercicios

### 7.5.1. Transformada de Laplace

Determinar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(t) = te^{2t}$.
2. $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$.
3. $f(t) = te^{-t}\cos(\sqrt{2}t)$.
4. $f(t) = t^2 - 3t - 2e^{-t}\operatorname{sen}(3t)$.
5. $f(t) = (e^t + 1)^2$.
6. $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$.
7. $f(t) = 4e^t - 5\cos 3t$.

### 7.5.2. Transformada inversa de Laplace

Determinar la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

1. $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+4)}$.
2. $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2)}$.
3. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$.

### 7.5.3. Problemas de valores iniciales

Utilizar la transformada de Laplace para resolver cada uno de los problemas de valores iniciales

1. $y'' + 6y' + 5y = 12e^t; \quad y(0) = -1, y'(0) = 7.$
2. $y'' - 7y' + 10y = 39\cos(t) - 13\operatorname{sen}(t); \quad y(0) = 7, y'(0) = 16.$
3. $y''' - y'' + y' - y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 3.$
4. $\dfrac{dY}{dt} - Y = e^{3t}, \quad Y(0) = 2.$
5. $\dfrac{dY}{dt} + Y = 2\operatorname{sen}(t), \quad Y(0) = -1.$
6. $\dfrac{d^2Y}{dt^2} - 5\dfrac{dY}{dt} + 6Y = 0, \quad Y(0) = 1, Y'(0) = 2.$
7. $\dfrac{d^2Y}{dt^2} + \dfrac{dY}{dt} - 12Y = 0, \quad Y(0) = 4, Y'(0) = -1.$
8. $\dfrac{d^2Y}{dt^2} - \dfrac{dY}{dt} - 2Y = 18e^{-t}\operatorname{sen}(3t), \quad Y(0) = 0, Y'(0) = 3.$
9. $\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 2\dfrac{dY}{dt} + Y = te^{-2t}, \quad Y(0) = 1, Y'(0) = 0.$
10. $\dfrac{d^3Y}{dt^3} - 5\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 7\dfrac{dY}{dt} - 3Y = 20\operatorname{sen}(t), \quad Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y''(0) = -2.$
11. $\dfrac{d^3Y}{dt^3} - 6\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 11\dfrac{dY}{dt} - 6Y = te^{-4t}, \quad Y(0) = 1, Y'(0) = 0, Y''(0) = -1.$
12. Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si; } 0 \le t < \pi \\ 1, & \text{si; } \pi \le t < 2\pi \\ 0, & \text{si; } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

13. Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si; } 0 \le t < 2\pi \\ 0, & \text{si; } t \ge 2\pi \end{cases}$$

14. Use la transformada de Laplace para resolver el P.V.I

$$y'' - 5y' + 6y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

15. La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie, con un solo bucle es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

donde $L$ y $R$ son constantes, además $H$ es una función periódica de periodo $T = 2$ definida por

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si; } \quad 0 \le t < 1, \\ 0, & \text{si; } \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Determine la corriente $i(t)$ cuando $i(0) = 0$.

### 7.5.4. Sistemas lineales

En cada uno de los siguientes ejercicios y usando la transformada de Laplace, hallar la solución de los sistemas lineales dados que satisfacen las condiciones iniciales.

1. $\frac{dX}{dt} + Y = 3e^{2t}$
   $\frac{dY}{dt} + X = 0$
   $X(0) = 3, Y(0) = 0.$

2. $\frac{dX}{dy} - 2Y = 0$
   $\frac{dY}{dy} + X - 3Y = 2$
   $X(0) = 3, Y(0) = 0.$

3. $\frac{dX}{dt} + 2X - 4Y = 0$
   $\frac{dY}{dt} - 2X = t$
   $X(0) = 3, Y(0) = 3.$

4. $\frac{dX}{dt} + X - 8Y = e^t$
   $\frac{dY}{dt} - 2X + Y = 1$
   $X(0) = 1, Y(0) = 2.$

5. $\frac{dX}{dt} + X + Y = e^{-3t}$
   $\frac{dY}{dt} + X - 4Y = 1$
   $X(0) = 1, Y(0) = 2.$

6. $\dfrac{dX}{dt} - 4X + 2Y = 2t$

$\dfrac{dY}{dt} - 8X + 4Y = 1.$

# Bibliografía


[1] POWERS, M. Lanchester resurgent? The mathematics of terrorism risk, *The Journal of Risk Finance,* Vol. 9 No. 3, 2008, pp. 225-231.

[2] EZELL, B. *et al.* Probabilistic Risk Analysis and Terrorism Risk, *Risk Analysis,* Vol. 30 No. 4, 2010, pp. 575-589.

[3] CONGRESS OF THE UNITED STATES. Federal Terrorism Reinsurance: An update, *Congresitional Budget Oce,* January 2005. Recuperado el día 05 de marzo del 2011 de: http://www.cbo.gov/sites/default/files/cbofiles

[4] D. ZILL, M. Cullen. *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw-Hill, 3a. edición, 2008 2.

[5] E. CODDINGTON. *An Introduction to Ordinary Diff. Equations.* NY, Dover, 1989 3.

[6] G. SIMMONS. *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw-Hill, 2a. Edición, 1998.

[7] G. SIMMONS, S. KRANTZ. *Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill, 2007 W. Boyce.

[8] R. DI PRIMA. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*s, J. Wiley, 8a. edición, 2005.

[9] MAJOR, J. Advanced Techniques for modeling Terrorism Risk, *The Journal of Risk Finance,* Fall 2002, pp. 15-24.

[10] KUMAR, J. (agosto 2011). Insurance and Reinsurance of Terrorism Risk, *The Insurance Times*, Recuperado el día 05 de marzo del 2012 de: http://www.bimabazaar.com/index.php?option=com_content&view=article&id=185:insurance-and-reinsurance-of-terrorism-risk&catid=95:reinsurance-articles&Itemid=70

# LOS AUTORES

**Mawency Vergel Ortega**

Nace en Bucaramanga, Santander, Colombia. Profesora Titular del Departamento de MatemÁticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander. Investigadora Senior de grupos de investigación Euler, Quetelet, Graunt, Zulima y Arquímedes, autor de libros de en áreas de educación matemática, matemática aplicada, educación matemática, así mismo es autora de capítulos de libro y artículos en revistas indexadas de divulgación, nacionales e internacionales. Es Licenciada en Matemáticas y Física, Especialista en Estadística aplicada, especialista en Informática educativa, Magister en Educación mención Gerencia Educativa, Doctora en Educación, doctorando en estadística, Postdoctora en Imaginarios y representaciones sociales, postdoctora en Ciencias sociales, niñez y juventud del Cinde Universidad de Manizales-Red Clacso, doctorando en proyectos y estadística. Obtiene su primera patente en el año 2017. Ha desempeñado cargos como consultor estadístico, director departamento de Matemáticas y Estadística, Director de programa de licenciatura en matemáticas y computación, jefe de oficina de planeación, vicerrectora de Bienestar universitario, representante de investigadores Facultad de ciencias Básicas en Comité central de investigación y extensión en la Universidad Francisco de Paula Santander, gestor revista eco matemático, par evaluador Minciencias y CNA, editor de la revista Covalente.

**Olga Lucy Rincón Leal**

Magister en Educación Matemática, especialista en Computación para la Docencia, licenciada en Matemáticas y Física; Investigador Junior, autora de artículos de investigación en revistas indexadas y libros resultados de investigación. Directora del Programa Académico de Licenciatura en Matemáticas, Editora de la Revista Eco Matemático (indexada Publindex categoría C). Profesora Tiempo Completo adscrita al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander. Perteneciente al grupo de Investigación Euler y Graunt.

**Eduardo Ibargüen Mondragón**

Matemático y Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle (Colombia), Dr. en Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Profesor Titular del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, Investigador Senior de Minciencias, líder del Grupo de Investigación en Biología Matemática y Matemática Aplicada- GIBIMMA, autor de artículos en revistas indexadas nacionales e internacionales en diferentes ramas de la biomatemática, matemática pura y/o aplicada, ciencias ambientales, así mismo es autor de capítulos de libro y libros.

Este libro surge de las observaciones realizadas por estudiantes del curso de Ecuaciones diferenciales ofrecido en la Universidad Francisco de Paula Santander y la Universidad de Nariño. El libro abarca de manera introductoria los temas básicos del curso de Ecuaciones diferenciales para ciencias básicas e Ingeniería. El principal aporte consiste ampliar el capítulo de ecuaciones diferenciales de primer orden y el capítulo de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden. En estos capítulos abordamos métodos y aplicaciones que nosotros consideramos relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden, y que además no han llamado la atención de los textos clásicos.

El propósito de este libro es contribuir en los procesos que incluyen demostraciones, interpretaciones y soluciones de problemas, como también la búsqueda de nuevos modelos sin tener en cuenta los ya descritos en textos. No obstante, cuando la persona se enfrenta a estos retos, se motiva y alcanza logros que le generan motivación y una mejor percepción de sí mismos. Por lo general, los procesos dinámicos que se involucran en el curso de ecuaciones diferenciales, permiten que un gran porcentaje de los estudiantes alcancen cierto tipo de resultados que fortalecen su formación integral.

ISBN: 978-628-7509-35-1
9 786287 509351

Editorial
Universidad de **Nariño**