PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV

RONALD ANDRES CABRERA MONTEALEGRE
CARLOS ANDRES CASTILLO MORALES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en matemáticas

Director
CARLOS ARTURO MIRQUEZ NUÑEZ
Magister en Educación

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ - TOLIMA
2017

Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura de Matemáticas

ACTA DE SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TRABAJOS DE GRADO

Fecha: 15 de mayo /2018
Hora: 9:20 am
Lugar: Sala de Consejos - Facultad de Educación

Título del Trabajo: Propuesta didáctica para la construcción del concepto de variable como número general basada en el modelo 3UV

Autor(es): Ronald Andrés Cabrera Código 051100232012
Carlos Andrés Castillo Código 051100112012
— Código —

Asesor: Carlos Arturo Mírquez

	Puntaje máximo	JURADO	
		Dicleny Castro C.	Miguel E Villarraga R.
1. Informe Final (Máximo 80 Puntos)			
1.1 Cumplimiento de los objetivos del proyecto	15	10 Puntos	12
1.2. Revisión Bibliográfica y cumplimiento de las normas de presentación.	5	5 puntos	5
1.3. Metodología Usada de acuerdo al tipo de trabajo	15	15 puntos	13
1.4. Interpretación y discusión de resultados.	25	25 Puntos	24
1.5. Calidad del trabajo y aporte al conocimiento.	20	20 Puntos	20
2. Sustentación Pública (Máximo 20 Puntos)			
2.1. Preparación, organización y presentación del material	4	4 Puntos	3
2.2. Claridad en la exposición e interpretación de los resultados y conclusiones	10	8 Puntos	9
2.3. Dominio del tema y precisión de las propuestas	6	4 Puntos	6
Puntaje Final:		91 Puntos	92 Puntos

Calificación (Puntaje/20): Letras-Número Cuatro - cinco 4.5 **Concepto:** meritorio

En constancia firman:

Nombre Jurado: Dicleny Castro Carvajal **Nombre Jurado:** Miguel E. Villarraga R.

Firma: Dicleny C.C. **Firma:**

Nombre Asesor: Carlos Arturo Mírquez N **Director de Programa:** Edwin Bernal Castillo

Firma: **Firma:**

DEDICATORIA

A Dios.

Por habernos permitido llevar a cabo este proyecto y por darnos la sabiduría para lograr nuestros objetivos, además de su infinita misericordia y amor.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseamos expresar nuestro más profundo y sincero agradecimiento al director de nuestro proyecto de grado, Mg. Carlos Arturo Mirquez Núñez, por la orientación, el seguimiento y la dedicación, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido durante la realización del presente trabajo.

Queremos hacer extensiva nuestra gratitud de manera muy especial por la comprensión, paciencia, amor y el ánimo recibidos de nuestras familias y amigos.

Pero, sobre todo, gracias a nuestras esposas Erika Vanessa Arias, Geraldine Sánchez Jiménez y a nuestros hijos Thaliana Cabrera Arias, Valery Alejandra Cabrera, Ariana Sofia Castillo Sánchez, Carlos Esteban Castillo Sánchez por su paciencia, comprensión y apoyo con este proyecto. Sin su apoyo este trabajo no se hubiese llevado a cabo, por esta razón, este trabajo es también el suyo.

A todos ellos, muchas gracias.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

En este proyecto se presentan algunos aspectos fundamentales en los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de la variable como número general en estudiantes pertenecientes a cinco grados diferentes de enseñanza media del instituto técnico Benjamín Herrera de la ciudad de Ibagué, teniendo como referentes principales el modelo 3UV (3 Usos de la Variable) Trigueros y Ursini, (2003); Ursini, et al., (2005) y el aprendizaje instrumental y relacional planteado por (Skemp, 1978).

Para lo cual se han realizado una secuencia de actividades encaminadas a estos educandos por medio de una metodología apropiada, de tal manera que les permita apropiarse del concepto en distintas facetas, interpretativa, aplicativa, analítica, y reflexiva que conlleve a un aprendizaje con comprensión y significado; no simplemente reducido a la aplicación de reglas o algoritmos sin sentido.

En este proyecto se hace una invitación a la reflexión sobre cómo se está enseñando las matemáticas en nuestro contexto colombiano, sobre la importancia de generar un desarrollo del pensamiento Variacional desde edades tempranas, para fortalecer el paso de la aritmética al algebra; en cuanto a esto, es muy importante integrar al currículo actividades que pensadas desde lo aritmético y geométrico potencialicen el razonamiento algebraico.

Palabras claves: patrón, álgebra, generalidad, unidad didáctica, variable, modelo 3UV.

ABSTRACT

In this Project are presented some fundamental aspects in the teaching – learning process from the concept of the variable as a general number in students belonging to five different middle school grades from the Technical Institute Benjamín Herrera from the city of Ibagué, taking as principal referents the Model 3UV (3 Uses of the Variable) Trigueros and Ursini, (2003); Ursini, et al., (2005) and the instrumental and relational learning proposed by (Skemp, 1978).

For which it has been executed a sequence of activities directed to these students by means of an appropriate methodology, in such a way that allows them to appropriate the concept in different facets, interpretative, applicative, analytical and reflective that lead to a learning with comprehension and meaning; not simply reduced to the application of rules or algorithms with no sense.

In this project is made an invitation to the reflection on how mathematics is being taught in our Colombian context, about the importance of generate a development of variational thinking since early ages, to strengthen the passage from arithmetic to algebra; in terms of this, is very important to integrate into the curriculum, activities that thought from the arithmetic and geometric, potentiate the algebraic reasoning.

Key words: pattern, algebra, generality, didactic unit, variable, Model 3UV.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de investigación nace primordialmente de la identificación de experiencias que tuvimos durante tres etapas fundamentales de nuestra formación integral como: estudiantes de educación media, maestros en formación y maestros en ejercicio. En relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las diferentes áreas académicas, específicamente las matemáticas en lo que se refiere al estudio del álgebra, donde hemos identificado posibles dificultades que presentan los estudiantes al momento de comprender el concepto de variable como número general.

Estas dificultades se hacen evidentes a través de un trabajo riguroso de indagación de las ideas previas de estudiantes del instituto técnico Benjamín Herrera de la ciudad de Ibagué la cual es de carácter privado, donde los estudiantes responden a una serie de preguntas relacionados con procesos de reconocimiento de su lenguaje natural y lenguaje matemático formal, la identificación de patrones y regularidades, el paso de lo particular a lo general, entre otros aspectos que son de interés en la investigación, obteniendo así una serie de particularidades en las ideas previas; se muestra que la gran mayoría de los estudiantes presentan dificultades en cada de uno de estos procesos.

Presentando así, diversas actividades basadas en el análisis de patrones (reconocer, interpretar, deducir, manipular y simbolizar) fundamentadas en el modelo 3UV propuesto por Trigueros y Ursini, (2003); Ursini, et al, (2005) que permiten construir el concepto y superar dichas dificultades, estos autores argumentan que en la educación media se presentan con mayor frecuencia situaciones que involucran los conceptos de la variable como incógnita, numero general y en relación funcional, quienes exponen características fundamentales pertenecientes a cada una de ellas, pero, vale aclarar que aunque se presenten por separado estos tres “usos” de la variable, guardan una relación profunda entre ellas; Ya que si, él estudiante es capaz de interpretar, diferenciar y relacionar la variable en los 3 usos logrará una comprensión significativa del concepto.

Partimos de un objetivo general que es el diseñar e implementar una estrategia didáctica que contribuya a la construcción del concepto de variable como numero general y por esta razón, empezamos con la identificación de concepciones e ideas previas que presentan los estudiantes sobre el concepto de la variable como numero general, con esto se diseñó una propuesta didáctica estructurada en situaciones relacionadas con el análisis de patrones que promovieran un aprendizaje significativo, esto por supuesto con una finalidad importante como es la de analizar la eficacia de la unidad didáctica.

Para alcanzar lo planteado nos hemos apoyado en el aprendizaje relacional propuesto por (Skemp, 1978) quien enfatiza la importancia de promover un aprendizaje con comprensión y significado. Para eso la unidad didáctica se basa en las características de la UEPS (unidad de enseñanza potencialmente significativa) (Moreira, 2011) la cual nos permite identificar las concepciones y saberes previos de los estudiantes, para luego diseñar las diferentes actividades que ayudaron a la introducción, construcción y aplicación del concepto.

1. DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

La experiencia en las matemáticas, particularmente en el álgebra, en nuestra formación escolar y hoy en día como estudiantes de licenciatura en matemáticas y profesores en ejercicio, nos han permitido reflexionar sobre aspectos relacionados con la interpretación de la variable en el trabajo algebraico escolar, el cual empezamos en el colegio a partir del grado octavo donde las letras se utilizaban de una manera distinta a como se utilizaban en la aritmética, por ejemplo en aritmética se representaba la expresión “tres metros” como 3m donde “m” representaba una unidad de medición, en este caso, metros. Hoy podemos decir que nuestra experiencia de aprendizaje en grado octavo nos llevó a creer que las letras en álgebra representaban objetos o unidades de medición. Veamos: en álgebra se encontraban situaciones como la siguiente: “dos veces el número de casas es igual al número de habitantes” cuya representación algebraica podía ser dada, según indicaciones del docente por, $2C = H$, es decir, nos recomendaba escribir las letras iniciales del nombre del objeto del que se hablaba para cada variable al formular la ecuación, pero, según esto entendíamos que la “C” hacía referencia a la casa como objeto y no como el número de casas, en otras palabras seguíamos interpretando la letra como una unidad y no como cualquier número en general.

El trabajo en la clase de algebra seguía con el estudio de expresiones algebraicas, se desarrollaba una determinada cantidad de ejercicios prácticos en los que a través de un procedimiento se llegaba a una solución; por ejemplo, el docente planteaba expresiones como $2X+4=Y$, aquí después de aplicar determinados procedimientos, no comprendíamos el por qué la letra X cambiaba por diversos números, ni tampoco entendíamos que el resultado al que llegaba correspondía al valor de la Y, solo nos conformábamos con la idea de hacer muy bien los procedimientos para llegar a una respuesta correcta. Es decir cada uno de los ejercicios nos llevaba a la respuesta de un número, pero no contemplábamos la idea de que las letras representaban números en vez de objetos, es decir que X e Y podían ser cualquier número, ni mucho menos que esto se podía aplicar a la vida diaria, ¿Qué pasaba en la escuela?, ¿Cómo estábamos aprendiendo algebra en el colegio? esta situación prevaleció en el transcurso de los grados de secundaria, utilizamos muy bien las reglas para operar expresiones algebraicas pero no comprendíamos el significado y el uso de la variable en el álgebra.

De esta manera llegamos a la licenciatura en matemáticas con una concepción errónea tanto del álgebra como de la enseñanza de las matemáticas, creíamos que estas solo se podían aprender a través de procesos de memorización y repetición de fórmulas y algoritmos. Hasta que en el curso de “indagación en el aula I” la profesora, por medio de actividades que involucraban la identificación de regularidades, nos proponía que expresáramos en forma verbal las cosas que identificábamos y todos los pensamientos que se originaran en el proceso, para después escribirlo con nuestras propias palabras y luego representarlo de una forma más concisa, y fue de esa manera que comenzamos a comprender el uso y significado de la variable en el álgebra. De ahí, por ende, empezamos a cuestionar nuestra visión del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares, pues empezamos a entender, también, los planteamientos de (Skemp, 1978) quien argumenta que aprender a aplicar reglas sin razón equivale a un aprendizaje instrumentalista, que no apoya el desarrollo de comprensión conceptual.

La información recolectada a través de un ejercicio inicial de indagación en el aula, durante el desarrollo de las asignaturas “AM 3 y 4” que nos apoyaron el desarrollo de un ciclo de investigación acción, destaca las dificultades que presentan los estudiantes de álgebra escolar para identificar y expresar regularidades y relaciones entre cantidades que cambian (*i.e.,* variables que están presentes en una situación matemática específica).

La incomprensión por parte de los estudiantes del concepto de variable ha sido objeto de estudio en otros contextos internacionales, así como lo han expuesto (Booth, 1988), (Mason, et al, 2014), (Kieran,1989), (Küchemann, 1981) y Agudelo Valderrama (todos ellos compartidos en el desarrollo de las asignaturas “AM 3 Y 4”) quienes a través de sus ideas promovieron nuestro interés en el análisis de la falta de comprensión que generan el uso de la letra para representar la variable, estos autores sostienen que los niños, desde antes de llegar a la escuela exhiben amplias capacidades para identificar y expresar regularidades, esto es, para identificar la *generalidad*—lo que lleva a situarnos en el tema de *números generales*. Agudelo citado por Mason, et al, (2014) nos convoca a los futuros y actuales profesores de matemáticas a prepararnos para cumplir con esta responsabilidad profesional cuando advierte: “se espera, entonces, que la escuela promueva y facilite la continuación del desarrollo de estas potencialidades de los niños” para promover el desarrollo de su pensamiento algebraico que juega un papel crucial en el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestro reto como futuros profesores de matemáticas escolares es trabajar en el desarrollo de una mejor comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de lo que representa la variable en el álgebra. Nos proponemos, a través del desarrollo de este proyecto, diseñar e implementar una unidad didáctica que permita una construcción conceptual de la variable como número general basada en el modelo 3UV.

2. JUSTIFICACIÓN

En Colombia, las clases de matemáticas planificadas por los docentes tienen como referente los estándares básicos de competencias en matemáticas que plantea el Ministerio de Educación Nacional (Ministerio de Educación Nacional, 2006), en donde se proponen lo que deben lograr los estudiantes en la culminación de cada grado. El reconocimiento de patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros), se empieza a desarrollar en los estudiantes a partir del grado tercero, de igual manera, el estudio de la representación de patrones numéricos con tablas y reglas verbales se debe orientar en grado quinto, (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Como se puede analizar, el proceso de enseñanza-aprendizaje del pensamiento Variacional, según los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional se deben trabajar desde edades tempranas en el estudiante. La realidad que se vive en gran parte de las instituciones educativas, según nuestra experiencia como estudiantes y docentes es la de pensar que el trabajo del pensamiento algebraico debe iniciarse en grados superiores, ya sea en séptimo u octavo de bachillerato, que son los grados donde más se tiene relevancia los temas de álgebra.

Teniendo en cuenta que en un proceso de enseñanza aprendizaje, uno de los aspectos relevantes, son los recursos, bases o las herramientas que el docente le proporcione a sus estudiantes, para que él tenga un aprendizaje significativo; el trabajo que se pretende llevar a cabo puede ayudar a adquirir esas herramientas para mejorar el pensamiento matemático en los estudiantes, teniendo en cuenta las diferentes etapas de su desarrollo cognoscitivo; pero también es una realidad, que por diferentes razones, ya sea por la premura del tiempo, de abordar una gran cantidad de temáticas, algunos docentes utilicen ciertas metodologías y concepciones instrumentalistas así como lo describe (Agudelo, 2005) quienes muestran que en la enseñanza de las matemáticas en general persisten los enfoques Instrumentalistas (Skemp, 1978), siendo estos, descritos como reglas sin razones que hasta hace poco eran considerados como la verdadera comprensión. Las matemáticas se han catalogado como el “coco” de las asignaturas

(Ver, por ejemplo, Agudelo, 2002), las más aburridas, o las que muy pocos pueden entender.

Esta investigación también intenta dar una mirada diferente a estos estereotipos que se le asignan a las matemáticas, especialmente en el inicio del estudio del algebra. Antes de iniciar con una definición de cada concepto al principio de un curso, seguido de ejercicios prácticos y repetitivos como es de costumbre utilizar en los textos guía. Se propone implementar uno de los procesos fundamentales del pensamiento algebraico que es el de identificar las variables e invariables (es decir, aquello que cambia o no cambia en una situación dada), a través de actividades donde los educandos vean, digan y escriban regularidades a partir de una secuencia grafica o numérica, que ellos tengan la oportunidad de argumentar a través de su propio lenguaje lo que piensan de todo aquello que observan, a medida que van avanzando en sus niveles de entendimiento y pueden generalizar una regularidad para pasar a un lenguaje formal utilizando símbolos, letras y todo lo relacionado con la coherencia entre su lenguaje natural y el lenguaje matemático. Cuando se logra identificar un patrón en una serie de figuras o incluso situaciones de contexto y lo aprenden a expresar en su propio lenguaje el estudiante logra un aprendizaje por comprensión.

Partimos de la idea de realizar un trabajo de indagación en el pensamiento de los estudiantes sobre el lenguaje que utilizan para expresar una situación en la que se involucran procesos matemáticos, el concepto de variable, la manera como dan solución a una situación y a partir de las dificultades que se observen, para así construir una secuencia de actividades que ayude a desarrollar habilidades en los procesos de enseñanza- aprendizaje en el inicio del algebra escolar, para contribuir en la formación procedimental y conceptual de los educandos, como también combatir la enseñanza de este concepto de forma mecánica y repetitiva (uso del texto guía, manipulación de símbolos sin significado)

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar una estrategia didáctica que contribuya a la construcción del concepto de variable como número general basada en el modelo 3UV y en situaciones que involucran el análisis de patrones en los estudiantes de cinco grados diferentes de enseñanza media del instituto técnico Benjamín Herrera de la ciudad de Ibagué.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar concepciones e ideas previas que presentan los estudiantes sobre el concepto de la variable como número general por medio de la implementación y análisis del instrumento de recolección de información

- Diseñar y aplicar una propuesta didáctica estructurada en situaciones relacionadas con el análisis de patrones que promuevan un aprendizaje con comprensión y significado del concepto de la variable como número general.

- Presentar algunos resultados de forma cualitativa obtenidos en la propuesta didáctica sobre la construcción del concepto de la variable como número general en los estudiantes de cinco grados diferentes de enseñanza media del instituto técnico benjamín herrera de la ciudad de Ibagué.

3.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

- ¿El modelo 3UV y el análisis de patrones permite una aproximación al concepto de variable como numero general?

4. ANTECEDENTES

En el área de las matemáticas se han realizado muchas investigaciones sobre la enseñanza del algebra, principalmente basadas en el concepto de variable, debido a su importancia en el desarrollo del Pensamiento Variacional y el en estudio de los sistemas algebraicos y analíticos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en sus Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Así mismo, en el aprendizaje instrumental y memorístico que impide la comprensión y construcción del concepto de variable necesario para el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas. Por otro lado, Investigaciones muestran la baja comprensión del concepto de variable en sus diferentes interpretaciones junto con las dificultades y concepciones erróneas que tienen los estudiantes en el inicio del algebra escolar.

Por esto, realizaremos una investigación apoyada en la construcción del concepto de variable como número general basados en el modelo 3UV (3 Usos de la variable) y en la búsqueda de antecedentes sobre investigaciones relacionadas con la enseñanza del álgebra y en el estudio de la variable, expuestas a continuación.

En primer lugar tenemos a Kieran y Filloy, (1989) en su estudio El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, en el cual enfatizan que al iniciar el estudio del álgebra se presentan distintos factores que interfieren en su correcto aprendizaje, entre otros relacionados con el paso de la aritmética al algebra, interpretación y significado de las letras, además, del reconocimiento y uso de estructuras; destacan que la experiencia de los estudiantes en la escuela elemental sobre el uso de las letras se da de manera más frecuente en fórmulas como por ejemplo ($A= b.h$), o usando las letras como etiqueta como por ejemplo ($1h = 3600\ s$).

También en el libro Children’s difficulties in beginning Algebra (Dificultades de los Niños en el Inicio del Algebra) por Booth, (1984) afirma sobre la interpretación de los símbolos por parte de los estudiantes, lo siguiente “Parte del problema en los estudiantes es intentar simplificar expresiones tales como 2a + 3b, esto se refiere a sus interpretaciones del símbolo de la operación" (p. 301). Debido al trabajo en la aritmética con símbolos tales como + y =, tienen un significado y una interpretación sobre acciones que se deben realizar, pero en el álgebra se establecen algunas restricciones para realizar expresiones tales como 2a + 3b, por ello se presentan este tipo de errores en el inicio del algebra.

Además, Booth, (1984) nos muestra una de las diferencias más significativas entre la aritmética y el álgebra, la cual es el uso de las letras para representar valores, por ello afirma:

> las letras también aparecen en aritmética, pero de una manera muy diferente. Por ejemplo, las letras "m" y "c" se usan en aritmética para representar "metros" y "centavos" en cambio en el álgebra representan el número de metros o el número de centavos (p.303).

Por otro lado, Küchemann, (1978, 1984) en el proyecto CSMS (Conceptos en Matemáticas Secundaria y Proyecto de ciencias) realizó un estudio exhaustivo y sistemático de las interpretaciones que los estudiantes asignan a las letras en el estudio del algebra, estudio en el cual identificó seis significados y usos de la letra como son: Letra no usada, letra evaluada, como objeto, como incógnita, como numero generalizado, y como variable; además, encontró que en situaciones como expresiones y ecuaciones los estudiantes no identificaban las letras como número general ni como relación funcional, por el contrario, la mayor parte de los participantes las usaban como incógnita.

Así Como también, Trigueros y Ursini, (2003) desarrollaron un modelo para poder resolver ejercicios y problemas típicos del algebra denominado 3UV (3 usos de la variable), por esto mencionan lo siguiente "Se pudo comprobar que, en los cursos de álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos de la variable: como incógnita específica, número general y relación funcional." (p.7). También se asocian una serie de aspectos para cada una de las interpretaciones, para así poder desarrollar los problemas dependiendo del nivel de abstracción, debido a ello Ursini, Escareño, Montes y

Trigueros, (2005) afirma “Consideramos que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos” (p. 8).

5. MARCO TEÓRICO

5.1 MODELO 3UV (TRES USOS DE LA VARIABLE)

A partir de este punto, situaremos el problema dentro de un conjunto de aportes en conocimiento de algunos autores que van a sustentar y orientar la conceptualización que se va a utilizar en este proyecto.

En el estudio del algebra escolar resaltan tres usos fundamentales de la variable, como se afirma en el modelo 3UV (tres usos de la variable) propuesto por (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) los cuales son: la variable como número general (foco de este proyecto), variable como incógnita específica y variable en relación funcional. En este modelo se hace referencia a los niveles de comprensión (interpretación, simbolización y manipulación) y a las características de cada uno de estos, que se necesitan para un buen desempeño en la solución de situaciones que involucran la variable en diferentes contextos, cada uno de los usos requiere, por parte de los estudiantes, el desarrollo de unas capacidades específicas las cuales promueven su comprensión del concepto de variable. Dichas capacidades las describen las autoras de la siguiente manera:

(**I:** incógnita, **G:** número general, **F:** relación funcional)

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la incógnita es necesario:

I1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario:

G1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en relación funcional es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Para tener una mejor compresión sobre el concepto de la variable en sus tres usos, se realizará un análisis exhaustivo de ejemplos concretos que se desarrollaran para llegar a unas conclusiones y reflexiones sobre los aspectos conceptuales utilizados para la resolución de dichos problemas. En primer lugar, se desarrollará un ejemplo sobre la variable como incógnita específica, este ejemplo es tomado del libro Enseñanza Del Algebra Elemental, Una propuesta alternativa de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, (2005):

"Una caja en forma de prisma rectangular tiene 4,5 cm de ancho y 3 cm de alto y su volumen es de 81 cm^3 ¿Cuánto mide el largo?" (p. 24)

Para resolver el problema es necesario:

- Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido en la situación problemática.

En este problema es el largo de la caja en forma de prisma rectangular.

- Simbolizar la incógnita e interpretar los símbolos de la ecuación que representan los valores específicos.

La incógnita la simbolizaremos con la letra x, además los valores específicos son el ancho con 4,5 cm, el alto con 3 cm y el volumen con 81cm^3.

- Organizar y relacionar la variable en la ecuación para que el enunciado sea verdadero.

Teniendo en cuenta que el volumen de un prisma rectangular se obtiene mediante la multiplicación de su ancho, alto y largo, obtendremos la siguiente expresión:

$$4{,}5\text{cm} * 3\text{ cm} * X = 81cm^3$$

- Realizar las operaciones algebraicas o aritméticas para determinar la cantidad desconocida.

$$4{,}5\text{cm} * 3\text{ cm} * X = 81cm^3$$
$$13{,}5cm^2 * X = 81cm^3$$
$$X = 81cm^3 / 13{,}5cm^2$$
Por lo tanto, X = 6 cm

- Sustituir el valor encontrado en la ecuación.

$$4{,}5\text{cm} * 3\text{cm} * 6\text{cm} = 81cm^3$$

Ahora desarrollaremos una situación problema sobre la variable como relación funcional, este ejemplo también es tomado del libro Enseñanza Del Algebra Elemental, Una propuesta alternativa de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, (2005).

El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide en la báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso, la charola de la báscula se desplaza 4 cm. Encuentre la relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola. Si la charola se desplaza 10,5 cm ¿Cuántos kilogramos pesa la mercancía?. (p. 32)

Para resolver el problema es necesario:

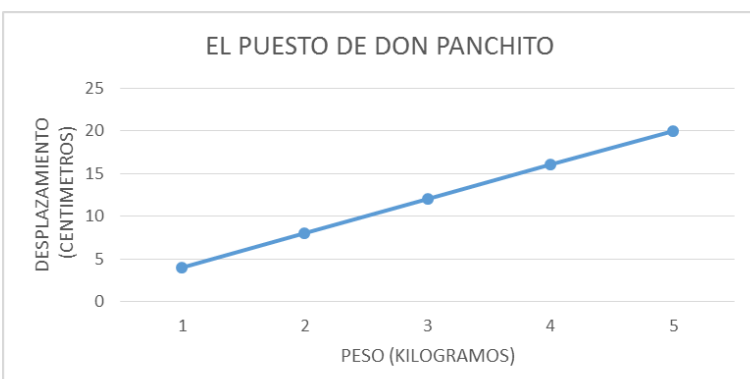
- Reconocer la correspondencia entre los valores de las dos variables a partir del problema verbal mediante una tabla o gráfico.

Tabla 1. Relación entre el peso y el desplazamiento.

PESO (KILOGRAMOS)	DESPLAZAMIENTO (CENTIMETROS)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Fuente: El autor

Figura 1. Relación entre el peso y el desplazamiento.



Fuente: El autor

- Determinar los valores de la variable dependiente, mediante los valores de la variable independiente.

Variable independiente: Peso (el número de kilogramos)

Variable dependiente: Desplazamiento (el número de centímetros)

Tabla 2. Procedimiento para encontrar los valores de la variable dependiente.

PESO (KILOGRAMOS)	PROCEDIMIENTO	DESPLAZAMIENTO (CENTIMETROS)
1	1*4	4
2	2*4	8
3	3*4	12
4	4*4	16
5	5*4	20

Fuente: El autor

- Determinar los valores de la variable independiente, mediante los valores de la variable dependiente.

Tabla 3. Procedimiento para encontrar los valores de la variable independiente.

DESPLAZAMIENTO (CENTIMETROS)	PROCEDIMIENTO	PESO (KILOGRAMOS)
4	4/4=1	1
8	8/4=2	2
12	12/4=3	3
16	16/4=4	4
20	20/4=5	5

Fuente: El autor

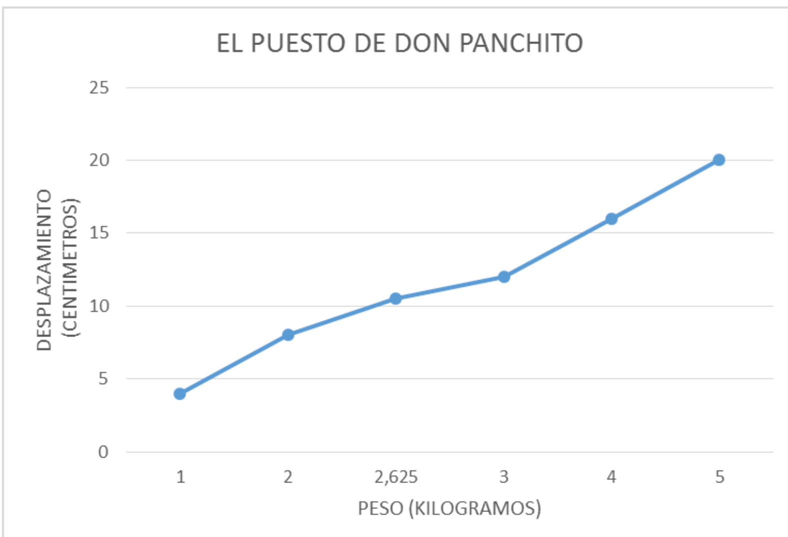
- Reconocer el cambio de las variables involucradas en la relación funcional utilizando los datos de la tabla y la gráfica.

Tabla 4. Relación del peso con el desplazamiento y su procedimiento.

PESO (KILOGRAMOS)	PROCEDIMIENTO	DESPLAZAMIENTO (CENTIMETROS)
1	1*4	4
2	2*4	8
2,625	2,625*4	10,5
3	3*4	12
4	4*4	16
5	5*4	20

Fuente: El autor

Figura 2. Variación del desplazamiento dependiendo del peso.



Fuente: El autor

La variación del desplazamiento depende de la variación del peso, por ello mientras el peso incrementa una unidad el desplazamiento incrementa cuatro unidades.

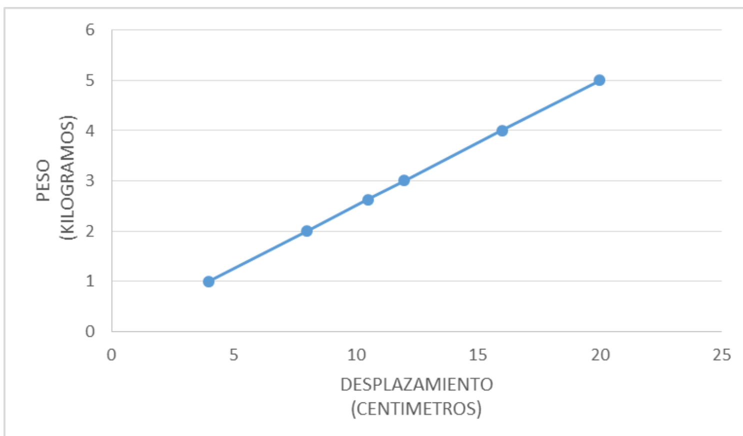
- Determinar los intervalos de variación del peso dado los intervalos de variación del desplazamiento.

Tabla 5. Relación del desplazamiento con el peso y su procedimiento.

DESPLAZAMIENTO (CENTIMETROS)	PROCEDIMIENTO	PESO (KILOGRAMOS)
4	4/4=1	1
8	8/4=2	2
10.5	10.5/4=2.625	2.625
12	12/4=3	3
16	16/4=4	4
20	20/4=5	5

Fuente: El autor

Figura 3. Variación del peso dependiendo del desplazamiento.



Fuente: El autor

- Simbolizar la relación funcional entre el peso y el desplazamiento mediante una formula, teniendo en cuenta el análisis de los datos del problema realizado anteriormente.

Y: Desplazamiento

X: Peso

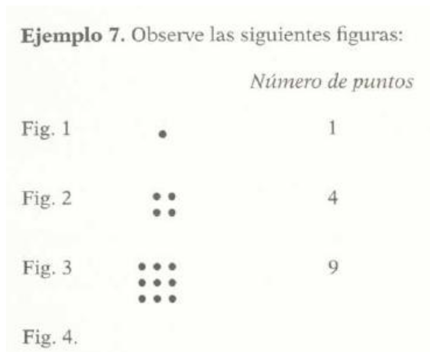
$$Y = 4X$$

$$X = Y/4$$

También desarrollaremos una situación problemática sobre la variable como numero general, el cual es el foco de investigación de nuestro proyecto, este ejemplo es tomado del libro Enseñanza Del Algebra Elemental, Una propuesta alternativa de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, (2005).

Observe las siguientes figuras:

Figura 4. Problema sobre variable como numero general.


Ejemplo 7. Observe las siguientes figuras:

		Número de puntos
Fig. 1		1
Fig. 2		4
Fig. 3		9
Fig. 4.		

Fuente: Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, (2005)

- ¿Cuántos puntos hay en la figura 4?
- Dibuje la figura 5 y dé el número total de puntos.
- Dibuje la figura 6 y dé el número total de puntos.
- Imagine que puede seguir dibujando figuras hasta la figura m. ¿Cuántos puntos en total tendrá esa figura?

Para resolver el problema es necesario:

- Reconocer el patrón que suministra la relación entre el número de la figura y el número de puntos que la compone.

Tabla 6. Relación del número de la figura con la cantidad de puntos.

Número de la figura	Número de puntos de la figura
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Fuente: El autor

- Interpretar la letra m como número general a la cual se le puede asumir cualquier valor.

Tabla 7. Generalización de la relación entre número de la figura y cantidad de puntos

Número de la figura	Número de puntos de la figura
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
…	…
m	?

Fuente: El autor

- Deducir la regla general del patrón distinguiendo entre lo que varía y lo que permanece invariante. En este caso podemos determinar que la cantidad de puntos del ancho es igual a la cantidad de puntos del largo y se puede relacionar con el área de un cuadrado.

Tabla 8. Relación del ancho con el largo.

ANCHO	1	2	3	4	5	6	…	m
LARGO	1	2	3	4	5	6	…	m

Fuente: El autor

- Manipular la variable simbólica

Tabla 9. Relación del ancho con el largo y su procedimiento.

ANCHO	1	2	3	4	5	6	…	m
LARGO	1	2	3	4	5	6	…	m
TOTAL	1	4	9	16	25	36	…	m*m

Fuente: El autor

- Simbolizar el enunciado del problema mediante una expresión matemática.

$$m*m = m^2$$

Con la implementación de actividades similares a las anteriores, se fomenta el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, mediante el reconocimiento de regularidades, patrones y construcción de generalidades planteadas en situaciones problemáticas. Además, permite reconocer los usos que puede presentar la variable al inicio del algebra escolar, para así, reflexionar acerca de la concepción sobre el pensamiento algebraico de manipular exclusivamente símbolos y expresiones algebraicas; debido a esto analizaremos en el siguiente capítulo que es el pensamiento algebraico y como avivarlo mediante algunas actividades.

5.2 PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y VARIABLE EN ALGEBRA ELEMENTA

Queremos empezar la siguiente subsección considerando la siguiente situación:
Algunas veces los cálculos mentales pueden hacerse más fácilmente si expresamos los números dados de otra forma; por ejemplo, al sumar los números 13 y 24, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$13 + 24 = 10 + 3 + 20 + 4 = 10 + 20 + 3 + 4 = 30 + 7 = 37$$

Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adiciona los siguientes números:

$31 + 16 =$……………………………………………………………………………

$32 + 49 =$……………………………………………………………………………

Si el niño, al realizar la actividad contesta $31 + 16 = 30 + 1 + 10 + 6 = 30 + 10 + 1 + 6 = 40 + 7 = 47$, él ha reconocido entonces, que los sumandos hay que descomponerlos en decenas y unidades (lo cual hacemos cuando realizamos cálculos mentales); lo mismo hará para la suma de 32 + 49, el niño ha reconocido una regularidad o generalidad sobre la forma de realizar la suma, esto es, según Mason et al (2014), cuando el niño reconoce el patrón aparece pensamiento algebraico porque se ha enfocado de lo particular a reconocer lo general en una situación matemática.

Se podría tener la concepción de que cuando se habla de pensamiento algebraico se trata de utilizar exclusivamente símbolos y expresiones algebraicas, pero, además, cuando se logra reconocer regularidades, hacer representaciones, identificar relaciones entre cantidades, generalizar y modelizar situaciones se está vivenciando este tipo de pensamiento como lo afirma Godino, (2000). Teniendo en cuenta esto, aunque, en el ejemplo anterior no se llegó a una expresión simbólica, sí se logra reconocer la regularidad, por tanto, se está haciendo presente uno de los procesos característicos del pensamiento algebraico.

De acuerdo con el desarrollo histórico del álgebra en la que resalta tres etapas principales las cuales son: etapa I "*álgebra pre-simbólica*" donde representa el método de solución de una situación específica por medio de un lenguaje natural, pero no era posible llegar a una representación general del problema y su método de solución; la etapa II denominada "*representación sincopada*", establece un lenguaje más abreviado para expresar el problema y el método; finalmente la etapa III a la que haremos referencia como "*notación sucinta*" (uso completo de símbolos) que consiste en la adaptación del lenguaje simbólico para la representación generalizada del problema y del método de solución.

Lo anterior muestra la formación y los procesos estructurales que llevaron al algebra a ser la que se conoce en la actualidad, en la cual se evidencia la importancia en el lenguaje y su representación buscando establecer de forma generalizada tanto situaciones problema como métodos de solución. Cabe aclarar que "el álgebra no es un conjunto de expresiones simbólicas y de reglas para manipular dichas expresiones. El álgebra es una forma de pensar, de ver una situación dada y, por tanto, es una dimensión clave de toda actividad matemática" (Agudelo, 2002, p. 31).

La enseñanza del álgebra en el contexto colombiano muestra el desconocimiento que tienen los docentes sobre el proceso que se llevó a cabo para llegar a la estructuración de lo que hoy se conoce como álgebra, es decir, desconocen las dificultades en cada etapa de descubrimiento y su desarrollo histórico; Si los docentes sólo dan a conocer a sus estudiantes los resultados de una construcción que tardó mucho tiempo en estructurarse estarán pasando por alto todos los procesos, las justificaciones e incluso errores que se cometieron en la elaboración de todos los conceptos del algebra, solo van a orientar lo que conocen de ella, llevando su enseñanza directamente al manejo de símbolos, ecuaciones y formulas preestablecidas, generando en los estudiantes grandes vacíos en la construcción conceptual del lenguaje utilizado.

Como se ha hecho referencia anteriormente, la formación del lenguaje algebraico ha tenido que atravesar por distintas etapas, mostrándose como un proceso complejo que se ha estructurado paulatinamente, el cual ayuda a clarificar el concepto de variable, que representa un papel primordial en la enseñanza aprendizaje del algebra, ya que permite representar las distintas situaciones que se proponen tanto en la aritmética como en la geometría de forma más generalizada, obteniendo construcciones de expresiones algebraicas que permiten representar familias de problemas y métodos de solución.

Haciendo referencia al concepto de variable (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005). Afirman que los tres principales usos de la variable que más se presentan y se estudian en las instituciones educativas al nivel de secundaria son: la variable como incógnita específica, la variable como número general y la variable en relación funcional; las cuales trataremos de aclarar en el desarrollo de la siguiente actividad que se propone para el inicio del algebra escolar.

5.2.1 Actividad

Figura 5. Problema sobre los usos de la variable.

Ésta es una sucesión de figuras hechas con pequeños cuadrados:

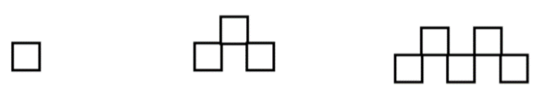


Figura No. 1 *Figura No. 2* *Figura No. 3*

Dibuje la Figura No. 4.
¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 7?
¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 13?
¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 100?
Diga qué fue lo que hizo para encontrar el número de cuadraditos de la Figura No. 100.
Escriba una regla a seguir para hallar el número de cuadritos en la Figura No. 1000 *o* en cualquier otro número de figura.

Fuente: El autor

Cuando los estudiantes comienzan a desarrollar la actividad, al revisar con detenimiento la secuencia de figuras podrán reconocer alguna regularidad que se presenta, lo cual les dará varias posibilidades para dar solución a las preguntas propuestas y a través de estas construir una posible expresión general de la situación. A continuación, describimos algunas de dichas regularidades que se pueden presentar en el desarrollo de la actividad y para lograr una mejor descripción nos apoyaremos en el análisis de los resultados del ejercicio de exploración realizado en IAM III (Indagación en el aula III) en la cual se aplicó esta misma actividad.

En la primera pregunta, para poder dibujar la figura número 4 se debe primero identificar una regularidad que esté presente en las figuras propuestas, una de las que se logra evidenciar es que entre la figura número 1 y la figura número 2 hay un aumento de 2 cuadrados, de la misma manera se presenta entre la figura número 2 y la figura número 3 en donde también hay un aumento de 2 cuadrados, siendo así se deduce que para dibujar la siguiente figura se ha de preservar dicha regularidad para así confirmar que la figura número 4 tendrá 7 cuadrados como se muestra en el siguiente dibujo:

Figura 6. Respuesta a la pregunta uno del problema sobre los usos de la variable

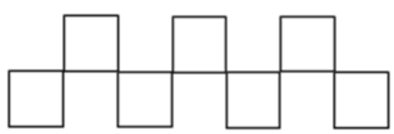
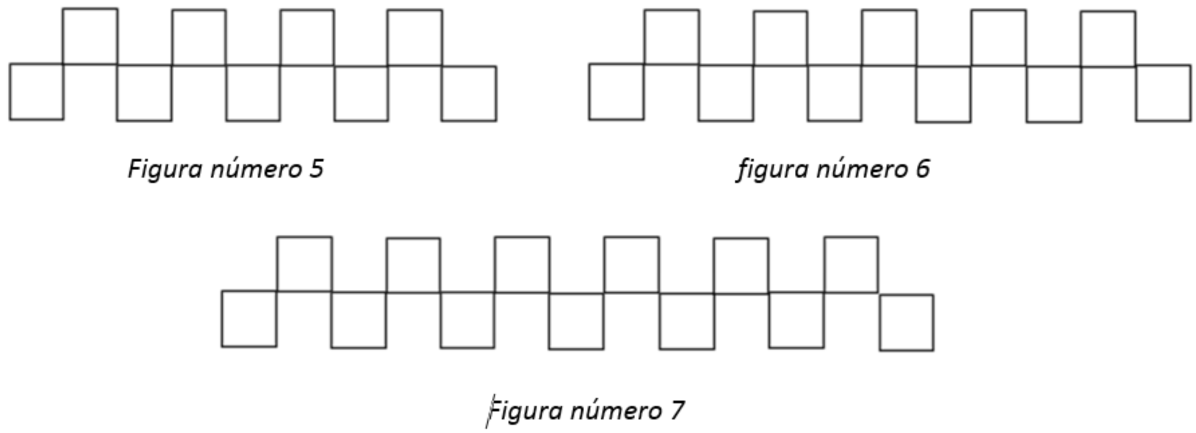


Figura número 4

Fuente: El autor

Continuando con la actividad se pide encontrar el número de cuadrados que hay en la figura número 7, para responder esto, uno de los caminos es dibujar las figuras hasta la número 7, otra es adicionar 2 por cada figura hasta llegar a la que se requiere; por ejemplo, si en la figura número 4 hay 7 cuadritos, para hallar el número de cuadritos de la figura número 5 a 7 le sumamos 2 y encontramos que la figura 5 tiene 9 cuadros y así seguiría hasta llegar a la figura número 7; a continuación dibujaremos las tres figuras siguientes apoyándonos en la regularidad encontrada inicialmente donde se llega a que la figura numero7 tiene 13 cuadraditos.

Figura 7. Respuesta a la pregunta dos del problema sobre los usos de la variable.



Fuente: El autor

Según el análisis de los resultados que se obtuvieron cuando realizamos esta actividad en IAM III, se logró reconocer a través de esta pregunta, que la gran mayoría de estudiantes desarrollan la regularidad anteriormente descrita con cierta facilidad, pero lo maravilloso de este tipo de actividades es que permite a los estudiantes poder identificar no solamente una regularidad, como sucedió en esta actividad, donde además de la descrita anteriormente, los estudiantes lograron identificar otras, como por ejemplo:

Al momento de dibujar las figuras 5, 6 y 7, si se presta un poco más de atención a la forma en que se ubican los cuadrados, se observa que las figuras se caracterizan por tener un número de cuadrados en la parte “superior” el cual es un cuadrado menor al número de cuadros de la parte “inferior”, por ejemplo, en la figura cuatro, hay 3 cuadrados en la parte superior y cuatro cuadros en la parte inferior, así mismo, en la figura número 5 hay cuatro cuadros en la parte superior y cinco en la parte inferior. Si seguimos este proceso con las figuras subsiguientes, se mantiene la misma regularidad, en la cual, el número de cuadrados de la parte “inferior” es igual al número de la respectiva figura, y la parte “superior” tiene un cuadrado menos que la parte “inferior” y si sumamos los números de los cuadrados de ambas partes encontramos la cantidad de cuadrados que tiene cada figura. De esta manera se puede deducir el número de cuadros de la figura que elijamos, por ejemplo, si se hace referencia a la figura número 13, la cantidad de cuadrados serán 13 en la parte inferior y 12 en la parte superior y si se suman, se tienen 13+12 = 25 cuadrados o, si se trata de la figura número 100 tendremos 100 cuadrados en la parte inferior y 99 en la parte superior para un total de 100+99=199 cuadrados.

Se describieron dos regularidades pero, aclaramos que la percepción de los estudiantes es tan amplia que incluso algunos de ellos, en la (IAM III), relacionaron con facilidad el número de cuadrados de la figura, con los números impares y algunos son conscientes de algún tipo de regularidad, pero no encuentran las palabras para expresarla, así que siendo más precisos en esto último, veamos qué ocurre cuando se les plantea: "Diga qué fue lo que hizo para encontrar el número de cuadrados de la figura No. 100" donde se encuentran respuestas como:

- "Pues hice el ejercicio 50 y lo multipliqué y dio 199"
- "Enumeré cada número impar hasta llegar a 100"
- "Pues en el ejemplo de la figura N°3 hay tres cuadros abajo y 2 arriba y siempre van a quedar menos arriba que abajo"
- "Se multiplica 2x 100 y se resta 1 que el número con que se comienza el ejercicio"

Las primeras preguntas planteadas en la actividad conllevan a que los estudiantes comiencen a realizar procesos que contienen características esenciales para lograr una comprensión sobre el uso de la variable como número general, nos referimos a procesos como el reconocimiento de patrones y regularidades, lograr deducir reglas y métodos generales, los cuales son propuestos en el modelo 3uv propuesto por (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005), además como se destaca en los dos primeros niveles de construcción del concepto y expresión de la generalidad propuestos por John Mason tales como ver un patrón (percibir una regularidad) y decir el patrón (aquello que puede expresar en palabras a partir de la observación realizada en la secuencia de figuras o números) Mason, et al, (1999), los cuales son verificados mediante ejemplos particulares con el fin de reflexionar sobre las conjeturas encontradas en el desarrollo de la actividad.

Para la última parte de la actividad en la cual se pide escribir una regla a seguir para hallar el número de cuadrados de la figura número 1000 o, cualquier otro número de figura, nos enfocaremos en la segunda regularidad que se describió al momento de dibujar las figuras 4, 5,6 y 7 descrita y verificada anteriormente, aunque es de aclarar que la descripción y el registro de la regla estará influenciada por la regularidad encontrada. Luego de clarificar la regularidad que se pretende registrar, se deben organizar las ideas para así escribirlas en un primer momento con un lenguaje común, con el fin de plasmarlas por escrito y que no se convierta en ideas volátiles o cambiantes, ya que como se afirma en la siguiente frase "El habla es una forma más directa y eficiente en la comunicación, la cual puede ser modificada fácilmente. El modificar lo que está escrito se presenta de manera más complicada ya que parece tener más rigidez y permanencia" (Mason, et al, 1999, p. 13). Al final esto logrará indicar un camino a recorrer para que cualquier persona pueda a través de él para encontrar el número de cuadrados de cualquier figura. Por ejemplo, para la segunda regularidad encontrada podríamos obtener un registro escrito de la siguiente manera:

Al número de la figura, le sumamos el número de la figura restado uno, dará como resultado el número de cuadrados de la figura.

Aunque no se estén utilizando símbolos matemáticos en la expresión anterior se logra comprender un procedimiento o regla a seguir para hallar el número de cuadrados de cualquier figura usando un lenguaje común. Este proceso Mason et al. lo considera como la tercera etapa denominada "registrar un patrón" (expresar de forma sucinta lo que se logró decir, de tal manera que las ideas y pensamientos puedan ser plasmados de manera escrita, utilizando palabras o dibujos que mejorará hasta llegar a una expresión simbólica).

Es de resaltar que en estudios realizados sobre el inicio del trabajo algebraico sobresale la dificultad que se presenta en los estudiantes al momento de escribir lo que ya se ha expresado en palabras, así como se encontró en el análisis del ejercicio de exploración (IAM III), donde los estudiantes reconocían distintas regularidades en la misma situación propuesta en la actividad pero, al momento de registrarlas se les dificultaba, prefiriendo en muchos casos no escribir nada o escribir una expresión que no se ajusta a lo que ellos decían de la regularidad de la secuencia; aunque un porcentaje mínimo de estudiantes lograron registrar de manera coherente la regularidad expresada.

De lograr con éxito el registro escrito, los estudiantes conseguirán una expresión general de la secuencia de figuras en un nivel clasificado por Mason et al. Como el más simple. A continuación, se muestran los niveles propuestos:

- Nivel más simple: (registros iniciales en dibujos y palabras)
- Siguiente nivel: (un ejercicio más retador es usar solo palabras, que alguien que no esté presente logre entender)
- Tercer nivel: (surge de la necesidad de ser más concisos, es el empleo de las palabras y símbolo).
- Cuarto nivel: (uso completo de símbolos).

Siguiendo con el desarrollo de la actividad planteada se pretende que al alcanzar el cuarto nivel se llegue a una expresión algebraica como la siguiente:

Tomaré a “n” como el número de la figura y “m” como el número de cuadrados de la figura, lo cual quedaría escrito de la siguiente manera:

$$n + (n - 1) = m$$

Después de realizar la suma nos quedaría:

$$2n - 1 = m$$

Cuando se logra recorrer estos niveles, el estudiante, muy probablemente habrá alcanzado comprensión del porqué se usan las letras en el álgebra como número general, alcanzando de esta manera un aprendizaje con sentido y significado.

Ahora bien, adicional a esto, aunque la actividad está más enfocada en que los estudiantes logren una compresión de las letras en el álgebra como número general, al momento que los alumnos encuentran esa expresión generalizada ya sea en palabras o símbolos, se estará dando paso al reconocimiento de la relación que existe entre el número de figura y el número de cuadrados de la misma, la cual es considerada como un atributo esencial que hace parte en la comprensión del uso de la variable en relación funcional (Trigueros & Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005).

Por último, si en la actividad se realizaran preguntas como ¿qué número de figura tiene 27 cuadrados? O ¿Cuál es el número de la figura que tiene 15 cuadrados? Ya estaríamos haciendo referencia al uso de la variable como incógnita específica, pues, para dar respuesta a ellas es necesario identificar la existencia de algo desconocido, interpretar los símbolos como la representación de un valor especifico, determinar la cantidad desconocida, simbolizar y plantear ecuaciones como se muestra en el siguiente ejemplo:

- Para la pregunta ¿Cuál es el número de la figura que tiene 15 cuadrados? Desconocemos el número de la figura y podemos plantear la ecuación de esta manera: $2n - 1 = 15$, en donde "n" representa un valor específico, el cual obtendremos al realizar operaciones algebraicas y aritméticas; despejando 2n obtendremos $2n = 15 + 1 \rightarrow 2n = 16$, luego, despejando a n se tiene $n = 16/2 \rightarrow n = 8$, de esta manera encontramos que la respuesta es la figura número 8.

Con la actividad propuesta se logran observar los procesos fundamentales que caracterizan al pensamiento algebraico como el reconocimiento de regularidades, la solución de problemas, la modelización y generalización de situaciones, en este caso, de un patrón geométrico, entre otras, las cuales forman parte esencial en la formación y construcción del concepto de variable y la identificación y manejo de los tres usos descritos.

Es un logro el fomentar un aprendizaje relacional, de una situación aparentemente sencilla de resolver, el pensamiento de un estudiante es rico en alternativas o percepciones para lograr un análisis detallado de la misma.

Ahora, nos referiremos a ciertos aspectos que caracterizan el aprendizaje instrumental en las matemáticas, particularmente del álgebra y cuál es su impacto, sus consecuencias o efectos en los entes que conforman el proceso de enseñanza aprendizaje.

5.3 APRENDIZAJE RELACIONAL Y APRENDIZAJE INSTRUMENTAL

5.3.1 Aprendizaje Relacional. En los procesos de enseñanza aprendizaje considero que uno de los objetivos principales que debemos tener los profesores de matemáticas y de cualquier área de formación es, buscar que los estudiantes logren construir y comprender los conceptos propuestos, pero, para que estos procesos se lleven a cabo debemos esforzarnos por fomentar un aprendizaje con significado y con comprensión como lo propone (Skemp, 1976) quien enfatiza la importancia y las ventajas que tiene el aprendizaje relacional en las matemáticas como se muestra a continuación:

- Se adapta a cualquier tipo de situaciones matemáticas, ya que va en busca de la comprensión del porqué de los métodos o soluciones utilizadas y hacer uso de ello en nuevas situaciones, por otro lado, el conocimiento instrumental se limita a la comprensión de un solo método para un determinado problema, teniendo así, la necesidad de utilizar un tipo de proceso para cada situación propuesta.

- El aprendizaje relacional en matemáticas prevalece en la memoria ya que cuando algo se aprende, no se olvida. promover dicho aprendizaje es más complejo que el aprendizaje instrumental pero este último utiliza procesos tan mecánicos, que se olvidan con facilidad, por ejemplo, es más sencillo aprender a hallar la pendiente de la recta con la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que el comprender que la pendiente representa una razón que compara los valores de la distancia respecto al eje y (vertical) con los valores de la distancia respecto al eje x (horizontal) sobre una recta dada. Cuando se comprende esta razón el estudiante no va tener que recordar una formula si sentido.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone el desarrollo de una actividad que promueva un aprendizaje relacional (aprendizaje con comprensión y significado) del uso de las letras en el álgebra, en el cual se manifiestan los tres principales usos de la variable que más se presentan y se estudian en las instituciones educativas al nivel de secundaria las cuales son: la variable como incógnita específica, la variable como número general y la variable en relación funcional (Trigueros & Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005).

Carlos trabaja los domingos vendiendo paletas en los alrededores de la plaza de Bolívar. Su patrona le paga $ 2000 al día, como básico, por hacer ese trabajo, más $100 por cada paleta que venda.

1. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?

2. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?

3. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?

4. complete la siguiente tabla:

Tabla 10. Relación entre el número de paletas y el sueldo de Carlos.

NÚMERO DE PALETAS	SUELDO DE CARLOS
0	
1	
2	
3	
4	
. . .	
10	

Fuente: El autor

5. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?

6. construya una expresión que me permita calcular el sueldo de Carlos.

En la pregunta número uno (1) destaca la presencia de un valor desconocido, en este caso, el sueldo que gana Carlos si vende 5 paletas, el cual nos piden determinar, estos son aspectos que hacen parte del uso de la variable como incógnita especifica.

Como Carlos recibe $100 por paleta, multiplicamos 5 que es el número de paletas que vende, lo cual da un valor de $500, a esto le sumamos $2000 que es el costo fijo que recibe independientemente del número de paletas que venda de lo cual se obtiene un total de $2500.

$$(100*5) + 2000 = 2500$$

Lo mismo ocurre para calcular el sueldo de Carlos si vende 23 paletas

$$(100*23) + 2000 = 4300$$

Continuando con la pregunta número 2 se identifica que el valor desconocido en este caso es el número de paletas que debe vender Carlos para que su sueldo sea de $6000

Como Carlos recibió $ 6000 de sueldo debemos restarle el básico que es de $2000 lo cual da un valor $4000 y como recibe $100 por paleta vendida se divide los $4000 entre $100 para determinar el número de paletas vendidas en este caso 40.

$$(6000 - 2000) \div 100 = 40$$

De manera análoga se hace para saber cuántas paletas vendió si su sueldo fue de $13.500.

$$(13.500 - 2000) \div 100 = 115$$

Para completar la tabla nos basamos en los cálculos realizados para la pregunta número uno, la cual al completar nos permitirá hacer un análisis más detallado de la situación como se muestra a continuación:

Tabla 11. Relación del número de paletas con el sueldo de Carlos y su procedimiento.

NÚMERO DE PALETAS	SUELDO DE CARLOS
0	2000
1	2100
2	2200
3	2300
4	2400
. . .	
10	3000

+ 100
+ 100

Fuente: El autor

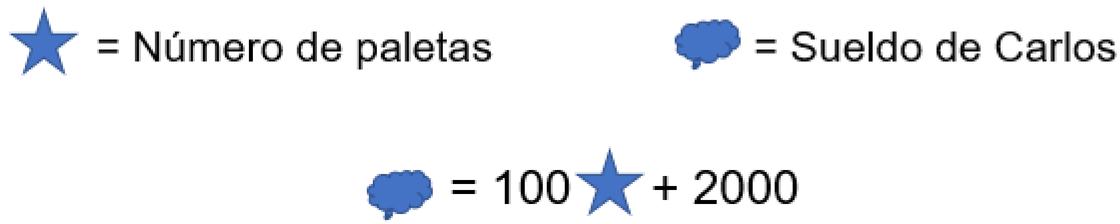
Si se lee verticalmente para pasar de 2000 a 2100 sumo 100, para pasar de 2100 a 2200 sumo 100, de 2200 a 2300 sumo 100, etc., de modo que se puede describir el patrón numérico obtenido como un patrón creciente con primer término 2000 y que se obtiene de sumar 100 al número anterior.

Ahora bien, para la pregunta ¿Cuánto se puede ganar Carlos en un domingo? es necesario reconocer la presencia de algo que no varía en este caso el básico que son los $2000, las dos magnitudes que varían, el número de paletas y el sueldo de Carlos, además, de la relación que existe entre ellas, en donde el sueldo de Carlos depende del número de paletas que venda.

“Para hallar el sueldo de Carlos se multiplica el número de paletas por cien (100), a esto se le suma el básico que es 2000”

Con la ayuda de la descripción anterior podemos elaborar una expresión matemática que nos permita determinar el sueldo de Carlos para cualquier número de paletas.

Figura 8. Expresión matemática para determinar el sueldo de Carlos.



Fuente: El autor

Con el desarrollo de esta actividad se puede lograr un acercamiento a la identificación de las características principales de los tres usos de la variable, ya que como vimos en las primeras preguntas se hacen presentes atributos de la variable como incógnita específica, en la última parte de la actividad al reconocer la relación de dependencia que existe entre las dos variables vemos propiedades de la variable como relación funcional y al lograr simbolizar las variables, en este caso con la nube y la estrella y de poder expresar esa relación mediante el uso de dos lenguajes tanto natural como simbólico, se hacen presentes características de la variable como número genera.

Actividades como estas promueven un aprendizaje relacional debido a que el estudiante está logrando comprensión sobre la variable en el álgebra, a diferencia de memorizar y repetir procedimientos que no lleven sentido alguno para él estudiante como se logra muchas veces cuando se fomenta un aprendizaje instrumental como se muestra en el siguiente apartado.

5.3.2 Aprendizaje Instrumental. En el contexto colombiano en las matemáticas escolares de las instituciones educativas es común encontrar en algunos de los estudiantes, una opinión de rechazo hacia el estudio de las matemáticas, por ejemplo para ser más específico y ubicarme en un grado escolar, por lo general en octavo de bachillerato donde, hablando a través de mi experiencia, algunos docentes se “esmeran” por asignar tareas o talleres con una gran cantidad de ejercicios que, promueven la mecanización de un procedimiento dado por él mismo, relacionados con la solución de los casos de factorización.

Describiendo un poco como se llevaba a cabo el proceso de solución de estas tareas, una primera parte consiste, en el grado octavo donde el álgebra de Baldor se convierte en el libro guía por excelencia, al empezar a resolver los ejercicios como por ejemplos los de factorización que, regularmente son de procedimientos cortos, el estudiante puede encontrar rápidamente la respuesta correcta e inmediatamente compararla con el solucionario que viene en la última parte del libro, este momento se convierte en sentir una especie de satisfacción al encontrar que las respuestas dadas por mí coincidían con las del libro o por el contrario sentir impotencia o enojo cuando después de varios intentos por llegar a la respuesta esto no ocurría, esto se ve encaminado a que los estudiantes se enfrenten a un tipo de aprendizaje mecánico y memorístico como lo describe (Skemp,1976) en su estudio sobre la *comprensión relacional e instrumental,* concibe este último como como un conjunto de “planes preestablecidos” para desarrollar actividades que involucran formalismos matemáticos.

Ahora bien, es de resaltar que existe una idea que también prevalece en este tipo de aprendizaje instrumental de las matemáticas en la que, el estudiante está en permanente búsqueda de la conexión de los procedimientos que aprende con la realidad, es como plantearse la común pregunta ¿y esto para que me va a servir en la vida?, así que el aprendizaje de las matemáticas se convierte en una especie de entrenamiento o guía de pasos para manipular símbolos sin sentido, así como se presenta en el contexto colombiano donde investigaciones como la de Agudelo, (2012) describe que en la enseñanza de las matemáticas persiste un patrón:

- Presentación, por parte del profesor, de definiciones de términos/conceptos/ algoritmos procedimentales matemáticos (i. e., de los formalismos)

- Explicación de un problema/ejercicio por parte del profesor

- Mecanización de procedimientos explicados (trabajo que exigen bajo nivel de pensamiento)

- Asignación de tarea sobre el uso del mismo tipo de procedimiento

Un ejemplo de este proceso que describe la autora se puede llevar a cabo mediante la siguiente situación:

Al iniciar el estudio del algebra el docente empieza con una definición de expresión algebraica:

Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas[1].

Seguido a esta definición se dan una serie de ejemplos de expresiones algebraicas: $a, 5x, \sqrt{4a}, (a+b)c.$ Se sigue esta misma secuencia en la descripción de los elementos que la conforman, como, término, grado de un término. Clases de término, la clasificación de las expresiones algebraicas entre otros, y al llegar a términos semejantes, después de dar definición y ejemplos, se proponen una gran cantidad de ejercicios, después de definir algún tipo de regla como la siguiente en la que se explica la

Reducción de dos términos semejantes de distinto signo.

REGLA: se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

EJEMPLO:

$$2a - 3a = -a$$
$$18x - 11x = 7x$$

EJERCICIOS:

$$x + 2x$$
$$8a + 9a$$

[1] Algebra de Baldor.

De esta manera, se puede afirmar que este proceso instrumental que se presenta en un texto guía para el docente ofrece al proceso educativo de los estudiantes unas matemáticas que permanecen muy poco en sus mentes, al principio resolverán con facilidad los ejercicios, pero en algún momento después, recordarán solo algunas reglas o procesos, o incluso las olviden por completo. Skemp (1976) habla de las razones por las cuales los docentes prefieren utilizar este tipo de enseñanza instrumental:

- Son usualmente más fáciles de aprender;

Por ejemplo, es difícil entender relacionalmente la multiplicación de dos números negativos, o la división de fracciones, mientras que reglas como “Menos por menos, más” y “para dividir por una fracción, multiplicas en cruz” se recuerdan con facilidad.

- Debido a que se requieren menos conocimientos, permite proporcionar la respuesta correcta de manera más rápida y fiable que la que se consigue mediante un pensamiento relacional.

- Al poder dar la respuesta correcta rápidamente el alumno puede obtener un sentimiento de éxito. Godino, Batanero y Font, (2004).

Contrario a las características identificadas en el aprendizaje instrumental, en el marco legal de la educación en Colombia se proponen tanto en los lineamientos curriculares como en los estándares básicos de competencias, estrategias que van más ligadas a los procesos de formación y características de un aprendizaje relacional.

5.4 PENSAMIENTO VARIACIONAL

En el contexto colombiano se propone en los lineamientos curriculares que “El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 3). A su vez plantea que para dar sentido y significado al algebra es pertinente relacionarla en situaciones de cambio y variación de la vida cotidiana.

Se logra observar que en los primeros grados de la básica primaria se diseñan estándares básicos de competencias en matemáticas relacionados tanto con el pensamiento aritmético como con el pensamiento algebraico; por ejemplo, Para los grados de primero a tercero se plantean:

> Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.” y “Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). (Ministerio de Educación Nacional, 2006 p. 9)

Para los grados cuarto y quinto, se propone una aproximación al álgebra desde la aritmética relacionada con secuencias numéricas y geométricas como se muestra en los siguientes estándares “Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.”, y “Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 5)

Además, los lineamientos curriculares proponen los patrones como una herramienta para iniciar el desarrollo del pensamiento Variacional en los primeros grados de educación básica

> Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, 1998, p. 3)

A su vez los lineamientos nos muestran como el uso de tablas para representar situaciones de cambio contribuyen en el desarrollo y construcción tanto del pensamiento Variacional como del concepto de la variable

> La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento Variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 2).

Teniendo presente las exigencias de los lineamientos y de los estándares curriculares de Colombia respecto a la educación de pensamiento Variacional, es necesario apoyarlo desde niveles educativos tempranos para que el niño pueda ir interactuando en las diferentes aplicaciones donde vemos algebra y sus variables, en aplicaciones con el contexto y demás, pero en la realidad encontramos que el pensamiento Variacional como tal se establece desde los grados iniciales de la secundaria lo cual contradice los requerimientos de los lineamientos y estándares curriculares.

5.5 LA EXPRESIÓN DE LA GENERALIDAD

En este apartado haremos referencia a las ideas de (Mason et al, 2014) pero, es de aclarar que, aunque él hace alusión a la letra como numero general, el proyecto se fundamenta en las ideas de (Trigueros & Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) quienes identifican variable como número general. A partir de la visión de estos autores (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 2014) el álgebra es un lenguaje por medio del cual se dan a conocer las ideas matemáticas de forma simplificada y que su característica principal es que puede expresar afirmaciones generalizadas las cuales se presentan en todas las áreas de las matemáticas.

Para que el estudiante tenga una comprensión eficaz de ese pensamiento algebraico plantean que es necesario conocer las ideas básicas de lo de que proviene del álgebra y de las cuales representan la base de la comprensión de dicho contenido. En una frase se sustenta: “la generalidad es la vida de las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad” (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 2014, p. 18).

De acuerdo con John Mason, los niveles de comprensión que se deben desarrollar para la construcción de la expresión general son:

- Ver un patrón: esta etapa hace referencia a la observación de una serie de figuras o números en secuencia con el fin de percibir o identificar una regularidad.

- Decir un patrón: es aquello que puede expresar en palabras a partir de la observación realizada en la secuencia de figuras o números e identificar si sus reflexiones son correctas o no.

- Registrar un patrón: aquí lo que se busca es expresar de forma sucinta lo que se logró decir, de tal manera que las ideas y pensamientos puedan ser plasmados de manera escrita, utilizando palabras o dibujos que mejorará hasta llegar a una expresión simbólica.

También el Grupo Azarquiel definen la generalización como traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico (Grupo-Azarquiel, 1993) en donde nos habla sobre el proceso de generalización y las etapas que se deben desarrollar para poder generalizar situaciones que involucran la identificación de patrones y regularidades dentro y fuera de las matemáticas, estas etapas son:

5.5.1 Identificación de la Regularidad, la Diferencia, la Relación**.** Esta etapa tiene como objetivo que el estudiante identifique las características de cada actividad como se afirma en

> Se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía. Se trata de

> encontrar lo que se mantiene en cada caso, los factores clave, y conseguir, mediante una combinación adecuada, una regla, una expresión que resuma todas las situaciones (Grupo-Azarquiel, 1993, p. 5)

En la culminación de esta etapa el alumno posteriormente de construir la regla deberá comprobar si esta se aplica satisfactoriamente para todos los casos.

5.5.2 Su Expresión Verbal. En esta se etapa se busca que los estudiantes describan de manera oral las regularidades y características identificadas en cada situación en la que "Esta descripción en el lenguaje natural es un paso que se da habitualmente al generalizar, y que permite posteriormente expresar por escrito, con precisión, la propiedad general que se ha obtenido" (Grupo-Azarquiel, 1993, p. 6). Aquí los educandos describen de formas diferentes dependiendo de las características en las que se enfoquen.

5.5.3 Su Expresión Escrita de la Manera Más Breve Posible. En esta última etapa del proceso de generalización los estudiantes realizan la expresión escrita mediante palabras y dibujos, o bien solo palabras, o solo símbolos, pero "La expresión escrita, el registro de las palabras y de las ideas, es una fase avanzada del proceso de generalización, y de todas las formas de expresar una regla por escrito, la simbólica suele ser la más difícil." (Grupo-Azarquiel, 1993, p. 6). Por esto, los estudiantes necesitan de mayor esfuerzo y precisión para exponer sus ideas de manera escrita sin tener contradicciones o ambigüedad en el proceso.

Pero en medio de las etapas de generalización de los patrones y regularidades dentro y fuera de la matemática, podemos encontrar concepciones erradas y dificultades que nos llevan por un camino equivocado en la construcción del conocimiento del algebra elemental.

5.6 CONCEPCIONES E IDEAS PREVIAS

A lo largo del tiempo se han logrado identificar diversos paradigmas (sistemas de creencias) sobre la naturaleza del conocimiento científico especialmente en las matemáticas, una de estas, ha sido el platonismo quien establece el conocimiento matemático como un “sistema de verdades que han existido desde siempre e independientemente del hombre, que trascienden la mente humana, y existen fuera de ella como una “realidad ideal” independiente de nuestra actividad creadora y de nuestros conocimientos previos” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 10). Aquí se puede observar que el conocimiento matemático es considerado como algo estático el cual no se construye y simplemente se transmite.

Por otra parte vemos como el paradigma constructivo considera que las matemáticas “son una creación de la mente humana, y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos”(Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 11). La cual muestra al conocimiento matemático como algo dinámico en el cual se hacen presentes procesos de construcción y aplicación.

Teniendo en cuenta lo anterior en los procesos de enseñanza – aprendizaje tanto en las matemáticas como en las otras áreas del saber, las concepciones e ideas previas que tienen los estudiantes sobre características, propiedades, significados, representaciones, entre otros, de temas en común con los que se pretenden enseñar y aprender, cumplen un papel fundamental en la construcción de nuevas ideas y conceptos, ya que estas pueden ayudar al educando a obtener una mejor compresión de los nuevos conocimientos o por el contrario convertirse en un obstáculo para su aprendizaje.

Ahora bien, ¿qué se entiende por concepciones? Para dar respuesta a esta pregunta hemos recurrido desde su significado en el diccionario hasta la revisión de autores quienes la definen, debido a que es un término que se usa bastante cuando hablamos de educación y que también se hace presente en otros contextos para referirse a diferentes procesos.

En el diccionario de la lengua inglesa encontramos la siguiente definición a la palabra concepción "idea general que tienes en tu mente cuando piensas en algo. La formación de una idea de algo en tu mente. La habilidad para imaginar que algo puede suceder o puede ser posible" debido a la relación que existe entre el termino concepción y el verbo concebir daremos la definición que aporta la real academia de la lengua española "formar ideas, hacer concepto de una cosa, comprenderla".

En la actualidad encontramos distintos trabajos de investigación que profundizan sobre las concepciones como parte fundamental del aprendizaje en donde encontramos autores como (Ponte, 1994) quien muestra que "las concepciones pueden ser vistas como el plano de fondo organizador de los conceptos. Ellas constituyen como "miniteorías", o sea cuadros conceptuales que desempeñan un papel semejante a los presupuestos teóricos de los científicos. Las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas y ligadas a ellas están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada uno tiene de lo que constituye su papel en una situación dada".

Por otra parte, vemos como (Rodrigo, Rodríguez & Marrero 1993) afirman que:

> Las concepciones son el resultado de procesos de activación de síntesis de conocimiento o de creencias, que se elaboran en respuesta a ciertas demandas de manera que el producto cognitivo resultante (teoría) sea sensible a las condiciones situacionales y a las metas del individuo. (p. 30)

Y Pozo, (1998) quien expone que la "concepción de aprendizaje pasa de una interpretación intuitiva, basada en sistemas de intenciones y deseos, es decir, de estados mentales, a una interpretación cognitiva conceptualizada en términos de representaciones y procesos, lo cual implica un verdadero cambio conceptual" (p. 13)
De igual manera encontramos como Martínez, (2004) en su trabajo Concepción de aprendizaje, metacognición y cambio conceptual en estudiantes universitarios de psicología, describe las concepciones de aprendizaje como "la forma en que los sujetos asumen el aprendizaje y su naturaleza, y en cómo se aproximan al logro de los objetivos

propuestos" (p.7) en donde también habla que las concepciones presentan una evolución desde un

> Nivel más elemental de reproducción o copia fiel del modelo, para pasar posteriormente a concepciones más elaboradas que implican la acción constructiva del sujeto, la relatividad del pensamiento y el cambio en las ideas como parte del aprendizaje continuo y durante toda la vida. (p. 8)

Con lo cual da a entender que estas tienden a un cambio, enriquecimiento y reestructuración de los conocimientos.

Por último, hacemos referencia a Ruiz, (1994) quien caracteriza las concepciones de la siguiente manera

- Los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;

- El conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;

- El conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta

De este modo podemos entender las concepciones como una estructura que da orden a las ideas, pensamientos, experiencias, e informaciones que se almacenan en la mente del hombre para luego ser aplicadas en la solución de distintas situaciones que involucran el concepto trabajado.

Entendiendo el concepto como lo describen los autores Larroyo, (1960) "es el contenido significativo, la función, el fundamento, o el punto de vista por medio del cual se determina la materia del conocimiento", Kant quien define al concepto como "todo conocimiento, es decir, toda representación referida conscientemente a un objeto es intuición o concepto… conocer por conceptos equivale a pensar” (Citado por Arredondo y Escobar, 2015, p.31) y también como lo argumentan José Arredondo y Gustavo escobar “Unidad de significación que recoge las determinaciones esenciales de un objeto o de una serie de objetos análogos” (Arredondo & Escobar, 2015) Por ejemplo al pensar en un objeto como el “teléfono” podemos recordar sus características como el color, la marca, el tamaño, el material, entre otras, pero al momento de dar el concepto de teléfono estas características pasan a un segundo plano dejando solo lo esencial lo cual es el teléfono como un aparato que sirve para comunicarse con otras personas a distancia.

Otro aspecto que destacar es como diferentes estudios sobre enseñanza de las ciencias muestran que los estudiantes ya “poseen unos conocimientos” sobre los nuevos temas que se les va a enseñar y resaltan la importancia que tiene el que el alumno a partir de ellos pueda construir nuevos conceptos como lo describen Osborne y Wittrock, (1983) “los alumnos desarrollan ideas sobre su mundo, construyen significados para las palabras que se usan en ciencia y despliegan estrategias para conseguir explicaciones sobre cómo y por qué las cosas se comportan como lo hacen” (p. 156) a estas ideas, investigaciones las denominan como ideas previas, preconcepciones, concepciones alternativas, preconceptos entre otros.

Sobre las ideas previas autores como Ausubel, Novak y Hanesian, (1989) las usan para “reducir” la psicología educativa en el siguiente principio “el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente” lo cual nos permite reflexionar que, como docentes, necesitamos conocer de nuestros estudiantes estas ideas, para que a partir de ellas elaboremos las diferentes estrategias y actividades para el desarrollo de sus aprendizajes. (Giordan, 1996) definen a estas ideas previas como “más que un almacén para consultas posteriores, una especie de filtro conceptual que permite a los alumnos entender, de alguna manera, el mundo que los rodea”. (p.157)

Pero nos encontramos entonces ante dos términos que tienen un gran parecido e incluso que han sido escogidos en ocasiones como sinónimos en trabajos de investigación educativa, por lo cual, para efectos de este proyecto los hemos diferenciado apoyándonos en los aportes expuestos anteriormente y para clarificar aún más en las palabras de (Rodríguez, 1999) quien habla sobre las ideas previas como concepciones alternativas argumentando que el término *concepción* es uno de los más neutrales e indica cómo el sujeto construye una representación mental del mundo que le permite entender el entorno y actuar de forma apropiada, y el adjetivo *alternativa* establece una distinción con las concepciones científicas y, al mismo tiempo, concede a la concepción derecho propio, entidad en sí misma o como la diferenciación que realiza pozo, lo que los alumnos saben (ideas previas), saben hacer (estrategias de razonamiento), creen (concepciones epistemológicas) y creen que saben (metacognición). (Pozo, 1987)

Nosotros utilizaremos el término de “ideas previas” como las nociones que los educandos traen consigo antes de escuchar las explicaciones del profesor, en otras palabras, antes de un aprendizaje formal de un determinado tema, estas ideas se dan en la mente del estudiante mediante la interacción con el entorno en el que se enfrentan, de manera que no han sido influenciadas por la enseñanza escolar.

5.7 ALGUNAS CONCEPCIONES ERRADAS CONDUCEN AL ERROR DEL ALGEBRA ELEMENTAL

La investigación ha demostrado que la dificultad que los niños presentan en el aprendizaje del algebra, es su confusión con las letras, dando valores incorrectos a estas (Booth, 1988).

Los niños no entienden que las letras pueden representar números, ellos piensan en que las letras son unidades de medida, objetos, apellidos, o hasta comida. Como lo presenta (Booth, 1988) en la entrevista a un niño de 14 años llamado Benedicto:

e: que significa " y " (en la adición de 3 a 3y)

B: puede significar cualquier cosa
e: ¿Cómo qué?
B: como piñas, uvas, (Entrevista a Benedicto, 14 años)

Se evidencia el desconocimiento del verdadero significado de la variable en el ejercicio propuesto, el niño atribuye la " y " a una fruta la cual debe sumar con otra sin tener en cuenta nada más en el ejercicio.

El inicio de la educación matemática involucra a los niños en un proceso repetitivo donde una letra representa el número de lados de un cuadrado " L" o una letra es la inicial de un nombre “E" al dar operaciones en las cuales se involucren estas ellos siguen atados a estas formaciones iniciales por ejemplo si se realiza la adición de 3 + 3e, los estudiantes comprenden como 3 sumado con 3 elefantes, atribuyendo la “e” a la inicial del nombre del elefante.

Al realizar operaciones aritméticas que sean de tipo algebraico, algunos de los jóvenes muestran solución a diferentes ejercicios propuestos en clase; será que en verdad entienden esas operaciones, por lo general el procedimiento que ellos efectúan es el de sumar o el de restar los números y luego unir a esa operación las diferentes letras que estuvieran involucradas, pero este procedimiento se hace sin una verdadera razón lógica.

Otra de las investigaciones realizadas sobre el concepto de la variable en el álgebra que hemos tenido como referente es la elaborada por (Küchemann,1980) en la que participaron poco más de 3000 estudiantes de edades entre 13 y 15 años de edad que cursaban sus estudios de secundaria, quienes desarrollaron actividades de interpretación y manipulación de expresiones algebraicas, además, de solución de situaciones en los que la variable se representa mediante letras; Küchemann gracias al análisis de este estudio identifico seis diferentes maneras de interpretar la letra en el álgebra las cuales son:

- La letra evaluada: Se les asignan a las letras un valor numérico, por ejemplo “si e+f=8, ¿cuánto es e+f+g?, el muchacho responde 12, en lugar de 8+g” (Grupo-Pretexto, 1999).

- Letra ignorada: Las letras son ignoradas o en ocasiones las tienen en cuenta, pero no se les atribuyen significado, por ejemplo “súmele 2 a 3n, el muchacho escribe 5 o 5n en vez de 3n+2” (Grupo-Pretexto, 1999).

- Letra como un objeto: se utilizan las letras como una abreviación del nombre de un objeto o como a objetos en sí mismos, por ejemplo “2n+3n se piensa en 2 naranjas y 3 naranjas, o simplemente como 2 enes y 3 enes, lo cual significa 5 enes juntas” (Grupo-Pretexto, 1999).

- Letra como una incógnita específica: los estudiantes la usan para representar números específicos pero desconocidos y son capaces de operar directamente sobre ellas, por ejemplo, La diferencia entre el doble de un número y cuatro nos da como resultado 10. ¿cuál es ese número?

- Letras como números generales: Se percibe que las letras representan valores, o por lo menos son capaces de asumir varios valores en lugar de un solo valor específico, por ejemplo “qué puede usted decir de C si C+D=10 y C es menor que D” (Grupo-Pretexto, 1999).

- Letra como variación de cantidad: Se considera que las letras representan un rango de valores no específico y que existe una relación entre dos conjuntos de valores, por ejemplo “*a*=b+3; ¿qué le pasa a *a* si *b* es incrementado en 2?” (Grupo-Pretexto, 1999).

Estas interpretaciones reflejan una dificultad que se presenta en el estudio del algebra debido al carácter multifacético de la variable, en donde (Küchemann, 1980) afirma que un estudiante habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en algebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable”.

6. METODOLOGÍA

La metodología para la construcción de la unidad didáctica se enmarca en el diseño cuasi experimental en el que se utiliza un grupo y se mide los cambios producidos por intervención mediante la aplicación de las actividades de la UEPS. Este estudio utiliza el método descriptivo empleando técnicas cuantitativas y cualitativas de recolección y análisis de datos.

6.1 DESCRIPCIÓN DE LA UEPS

Para el desarrollo de este proyecto, inicialmente se aplicó un instrumento de recolección de información de siete preguntas en el Instituto Técnico Benjamín Herrera de la ciudad de Ibagué, en el cual participaron 24 estudiantes de cuatro grados diferentes de educación secundaria (8°,9°,10° y 11°); se propuso para ellos el desarrollo de una unidad didáctica basada en los parámetros de la Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS) propuesta por (Moreira, 2011), los cuales van encaminados a un proceso cualitativo que fomenta un aprendizaje significativo, el cual guiará el estudio y el desarrollo de la propuesta, donde se tendrán en cuenta aspectos como: las preguntas que surgen en los estudiantes, las diferentes respuestas que ellos den a los interrogantes planteados, las estrategias implementadas en cada situación y los procesos (razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, entre otros) que realizan los estudiantes a través del desarrollo de las actividades, el cual se llevará a cabo por medio de los siguientes procesos:

- Definir el tema específico. Identificación y descripción de la problemática que nace en un primer momento de la revisión de la literatura, la cual nos lleva a reflexionar sobre nuestro paso por la escuela secundaria, nuestra experiencia como estudiantes de licenciatura en matemáticas y docentes en ejercicio acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar; además, de la preocupación por generar en los estudiantes el gusto por aprender matemáticas y lograr una compresión del álgebra.

- Crear situaciones que lleven al estudiante a exteriorizar su conocimiento previo. Se diseña un instrumento inicial de exploración, el cual ayudará a identificar las ideas previas que tienen los estudiantes de los grados (8,9,10 y 11) del Instituto Técnico Benjamín Herrera respecto al concepto de variable y sus concepciones acerca del uso de la variable en el álgebra, enfocándonos en actividades que implican la comprensión de la variable como número general.

- Proponer situaciones en un nivel introductorio. Consiste en proponer actividades que lleven a los estudiantes a vivenciar situaciones que involucran pensamiento Variacional dentro de un contexto en el cual se cambia un poco los algoritmos y de la formalización algebraica por el razonamiento y la observación de regularidades y patrones figúrales y numéricos. (Ver la actividad número 1: activa tu mente).

- Presentar el conocimiento que debe ser enseñado y aprendido. Luego de llevar acabo los momentos preliminares, se da inicio a la formación y construcción del concepto que se pretende enseñar/aprender, en este caso la variable como número general, mediante una secuencia progresiva, es decir, cambiando el contexto y grado de dificultad a medida que se avanza el desarrollo de la unidad, la cual inicia con actividades que involucran patrones y regularidades, en las que se hace énfasis en los procesos de interpretación, simbolización, manipulación y generalización.

- Cuestionar situaciones que impliquen comprensión. Se proponen actividades que lleven a los estudiantes a la aplicación del concepto, además, de cuestionarse sobre situaciones que involucran pensamiento algebraico, estas dos últimas etapas se trabajan simultáneamente debido a que en las actividades realizadas para aprender/enseñar el concepto se aplican a contextos reales, las cuales requieren diferentes niveles de comprensión.

- Evidencia de aprendizaje significativo (diseño de actividades para la evaluación del concepto). Se diseña un instrumento final de exploración, el cual ayudará a evaluar la incidencia que ha tenido la unidad didáctica en el aprendizaje del concepto de variable como número general y sus concepciones acerca del uso de la variable en el álgebra.

6.2 ACTIVIDADES DE LA UEPS

6.2.1 Instrumento de Recolección de Información

Figura 9. Preguntas realizadas en el instrumento de recolección de información.

Su pensamiento matemático es importante para nosotros
Gracias por su participación

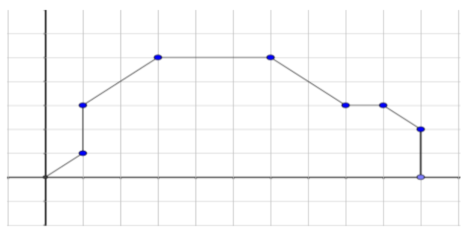
Nombre: ____ **Edad:** __________

Lee antes de empezar:

El siguiente cuestionario no tendrá una calificación que afecte su desempeño en la asignatura, consiste en responder algunas preguntas que nos permitirán indagar sobre su manera de pensar y expresar las matemáticas. cualquier detalle (descripción, grafico, escrito, entre otros) es de importancia para nosotros, trata de describir todo lo que vas pensando a medida que avanzas la actividad.

PREGUNTAS:

1. Imagine que quiere dictar a su compañero el siguiente dibujo. Describa de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.



2. Algunas veces los cálculos mentales pueden hacerse fácilmente si expresamos los números dados de otra forma; por ejemplo, al sumar los números 13 y 24, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$13 + 24 = 10 + 3 + 20 + 4 = 10 + 20 + 3 + 4 = 30 + 7 = 37$

Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adicione los siguientes números:

31 + 16 =...

32 + 47 =...

3. Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera...
b) La suma de dos números distintos...
c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15...............................
d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7.................................

4. En la operación siguiente la nube en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debe realizar con dicho número:

$\cdot 2+3$

a) tome el número y multiplíquelo por 5.
b) tome el número, multiplíquelo por 2 y súmale 3.
c) tome el número, multiplíquelo por 2 más 3.

Fuente: El autor

1. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tener la letra. Si piensas que hay más de uno, escribe algunos de ellos.

a) x+2=2+x ________________________________ **b)** 3+y=7 ________________________________

c) x = x ________________________________ **d)** 4+s ________________________________

e) x+5=x+x ________________________________ **f)** 3+a+a+a+10 ____________________________

2. Observe la siguiente tabla:

Entrada	Salida
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	
7	
8	

- Descubra la relación que se da entre los números de la entrada y salida para completar la tabla.
- Explique qué relación existe entre cada pareja de números de la tabla.
- ¿Puede expresarla mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan la misma relación?

3. Observe el diagrama

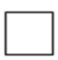


Figura No. 1

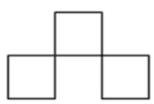


Figura No. 2

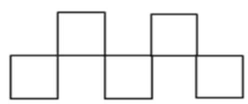


Figura No. 3

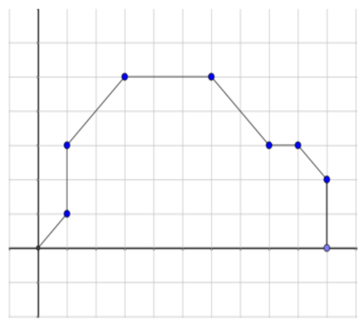
- Dibuje la Figura No. 4.
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 7?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?
- ¿Cómo hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100?
- ¿Puede expresarlo mediante una operación de manera que sirva para hallar el número de cuadrados para cualquier número de figura?

4. Carlos trabaja los Domingos vendiendo paletas en los alrededores de la plaza de Bolívar. Su patrona le paga $ 2000 al día, como básico, por hacer ese trabajo, más $100 por cada paleta que venda.

a. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?
b. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?
c. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?
d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera

6.2.2 Análisis del Instrumento de Recolección de Información Inicial

Tabla 12. Análisis de la pregunta uno del instrumento de recolección de información inicial.

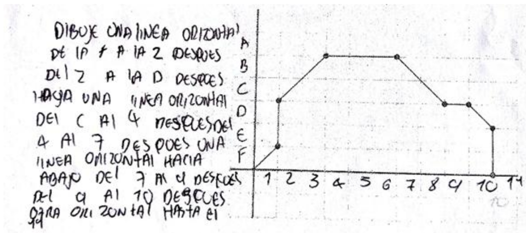
<table>
<tr><th colspan="7">PREGUNTA NÚMERO 1</th></tr>
<tr><td colspan="7">Imagine que quiere dictar a su compañero el siguiente dibujo. Describa de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.
</td></tr>
<tr><td colspan="7"></td></tr>
<tr><th colspan="2">TIPO DE RESPUESTA</th><th>C.E</th><th>%</th><th>JUSTIFICACIÓN</th><th>C.E</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T.1</td><td rowspan="3">Describe la trayectoria de forma clara y coherente con el diagrama</td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">33.3%</td><td>uso de lenguaje natural</td><td>1</td><td>12.5%</td></tr>
<tr><td>coordenadas cartesianas formales</td><td>6</td><td>75%</td></tr>
<tr><td>especie de coordenadas informales</td><td>1</td><td>12.5%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T.2</td><td rowspan="2">describe una trayectoria pero falta claridad y coherencia con el diagrama</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">41.6%</td><td>lenguaje natural</td><td>6</td><td>60%</td></tr>
<tr><td>especie de coordenadas informales</td><td>4</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>T.3</td><td>falta coherencia con lo propuesto en la actividad</td><td>1</td><td>4.16%</td><td>lenguaje natural</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>T.4</td><td>No responde</td><td>5</td><td>20.83%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fuente: El autor

Esta primera pregunta tiene como objetivo principal verificar la capacidad que tienen los estudiantes para expresarse y evidenciar el tipo de lenguaje que usan para describir los pasos a seguir de la trayectoria presentada.

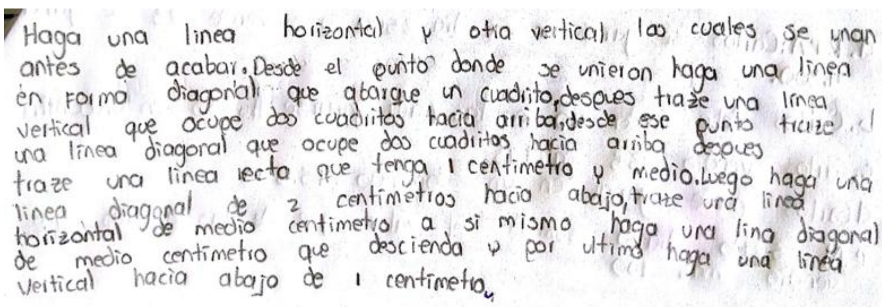
En este estudio se encontró que de los 24 estudiantes que participaron en el instrumento de recolección de información 8 describieron la trayectoria, de estos, uno lo hizo mediante un lenguaje natural, seis utilizando coordenadas cartesianas formales, y por último solo uno realizó la descripción con una especie de coordenadas informales, a continuación, ejemplos de las respuestas encontradas.

Figura 10. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta uno.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 11. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta uno.

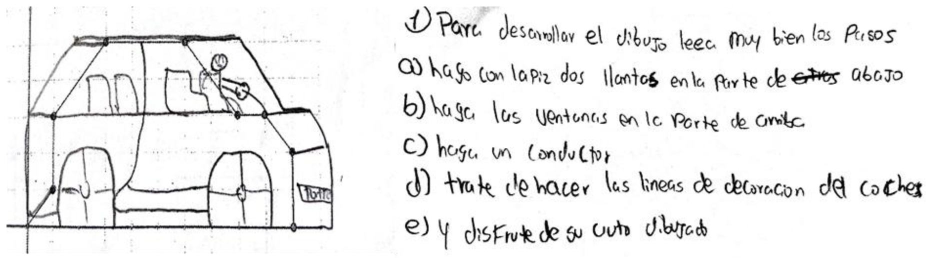


Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Como se puede apreciar en las figuras 9 y 10 los estudiantes hacen una descripción acertada de la trayectoria, el primero usando en su totalidad un lenguaje natural y en el segundo asignando unos valores tanto para el eje x como para el eje y en los que se han basado para hacer su descripción de la trayectoria.

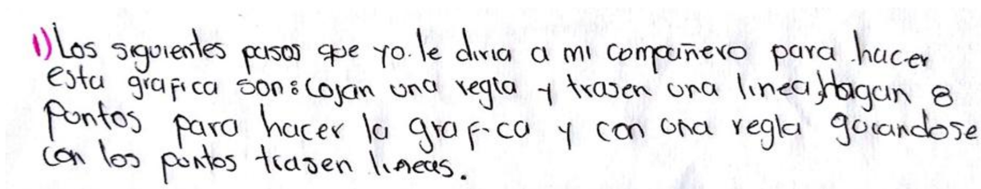
Ahora bien, 10 estudiantes describen una trayectoria, pero falta claridad y coherencia con el diagrama, 1 describe una trayectoria, pero se evidencia falta de coherencia con lo propuesto en la actividad y los otro 5 no responden a esta pregunta, a continuación, mostramos ejemplos de las respuestas de los participantes.

Figura 12. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta uno.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 13. Ejemplo cuatro de las respuestas a la pregunta uno.


1) Los siguientes pasos que yo le diria a mi compañero para hacer esta grafica son: cojan una regla y trasen una linea, hagan 8 puntos para hacer la grafica y con una regla guiandose con los puntos trasen lineas.

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Hubo uno de ellos que realizó un dibujo a partir de la figura que se les planteó, esto significa que la interpretación que le dan al problema es particular, sin dar solución a la situación planteada, en este caso el estudiante completa la figura con lo que él considera es la idea de un carro, agregando más características a la situación. Teniendo en cuenta el objetivo que se espera en esta pregunta, el estudiante, aunque utiliza un lenguaje natural e instructivo, tiene dificultades en deducir y dar a entender las ubicaciones precisas de la trayectoria de una figura, a partir de un punto de referencia.

Tabla 13. Análisis de la pregunta dos del instrumento de recolección de información

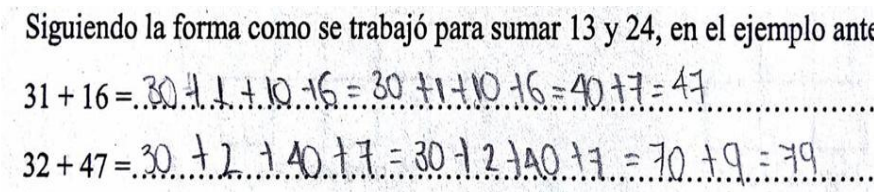
Fuente: El autor

PREGUNTA NÚMERO 2						
Algunas veces los cálculos mentales pueden hacerse fácilmente si expresamos los números dados de otra forma; por ejemplo, al sumar los números 13 y 24, podemos hacerlo de la siguiente manera: 13 + 24 = 10 + 3 + 20 + 4 = 10 + 20 + 3 + 4 = 30 + 7 = 37 Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adicione los siguientes números: 31 + 16 =…………………………………………………………………………… 32 + 49 =……………………………………………………………………………						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades	5	20.83%			
T.2	No reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades	19	79.16%	Descompone según decenas y unidades pero no las agrupan	6	31.57%
				No descomponen según la regularidad mostrada en el ejemplo	13	68.42%
T.3	No responde	0	0,00%			

Uno de los objetivos de esta pregunta es que los estudiantes reconozcan la regularidad del tipo de descomposición en decenas y unidades de los números para realizar las sumas de los ejemplos que se presentan, aunque no se utilizan símbolos o letras, esta pregunta permite al estudiante identificar en una situación particular una generalidad a partir de un contexto matemático como lo es la suma de números de dos cifras.

Como se puede observar en la tabla un 79.16% de los estudiantes tienen dificultades en el reconocimiento de la regularidad que se presenta en esta actividad, la cual puede llevarse a entender la manera como los estudiantes llegan a una generalidad en situaciones que involucren este tipo de operaciones.

Figura 14. Ejemplo uno de la respuesta a la pregunta dos.


Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo ant

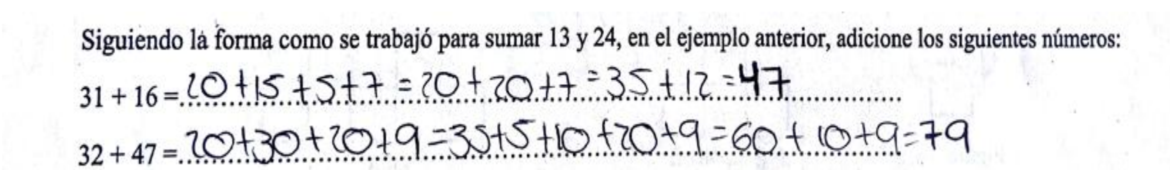
31 + 16 = 30 + 1 + 10 + 6 = 30 + 1 + 10 + 6 = 40 + 7 = 47

32 + 47 = 30 + 2 + 40 + 7 = 30 + 2 + 40 + 7 = 70 + 9 = 79

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En esta respuesta se puede observar la manera como el estudiante reconoce que hay, primero, una descomposición de los números en decenas y unidades, la cual es la primera regularidad que se presenta en la actividad, a la vez se evidencia que no establece la agrupación de los términos y escribe la misma descomposición nuevamente, finalizando con el valor correcto de la suma.

Figura 15. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta dos.


Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adicione los siguientes números:

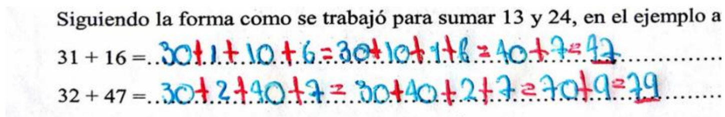
31 + 16 = 20 + 15 + 5 + 7 = 20 + 20 + 7 = 35 + 12 = 47

32 + 47 = 20 + 30 + 20 + 9 = 35 + 5 + 10 + 20 + 9 = 60 + 10 + 9 = 79

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En esta situación particularmente podemos observar la dificultad que presenta el estudiante al no identificar la regularidad presente en el ejemplo, ya que describe en la primera parte una descomposición de los sumandos diferente a la propuesta en la actividad y después no agrupa los términos, por el contrario aparece unos nuevos antes de dar el valor de la suma, esto nos lleva a concluir que el estudiante está haciendo los cálculos de las operaciones pero no es clara la manera como se expresa y da a entender la operación.

Figura 16. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta dos.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

De los 24 estudiantes encuestados, 5 de ellos respondieron al objetivo de la actividad, en los dos momentos de descomposición de números y agrupación de los mismos según decenas y unidades.

Tabla 14. Análisis de la pregunta tres del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 3						
Exprese de forma matemática los siguientes enunciados: a) Un numero cualquiera…………… b) La suma de dos números distintos…………… c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15…………… d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……………						
a) Un número cualquiera……………						
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Construye una expresión de forma general	9	37.5%	uso de una letra	7	77.8%
				mezcla lenguaje natural con el uso de letras	1	11.1%
				usa dos o mas letras	1	11.1%
T.2	No construye la expresión de forma general	15	62.5%	Utilizan numeros cardinales		
T.3	No responde	0				
b) La suma de dos números distintos……………						
T.1	Construye la expresión de forma general	9	37.5%	usando letras ejemplo: (x+y)	9	100%
T.2	No construye la expresión de forma general	15	62.5%	Utilizan números cardinales	15	100%
T.3	No responde	0				
c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15……………						
T.1	Construye una expresión coherente con la actividad	2	8.3%	2x+x/2=15	2	100%
T.2	Construye una expresión no coherente con la actividad	13	54.16%	Utilizan números cardinales	9	69.23%
				combinan numeros cardinales con letras	4	30.76%
T.3	No responde	9	37.5%			
d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……………						
T.1	Construye una expresión coherente con la actividad	0	0%			
T.2	Construye una expresión no coherente con la actividad	15	62.5%	uso de números cardinales	9	60%
				x/5 = y+7	2	13.3%
				x/5 = 7; x/5=x+7	4	26.7%
T.3	No responde	9	37.5%			

Fuente: El autor

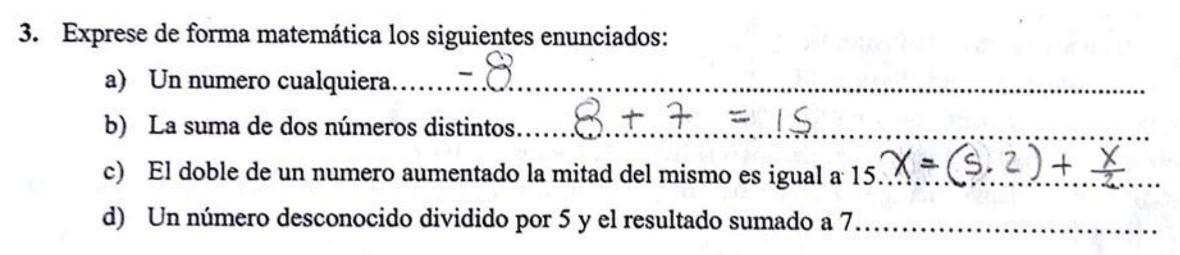
En esta actividad los estudiantes deben escribir cada enunciado, que está en lenguaje natural, a un lenguaje matemático formal. El objetivo de la actividad es analizar la manera como los jóvenes identifican y simbolizan una variable como representación de un número cualquiera a partir de una situación expresada en lenguaje cotidiano.

Cada enunciado se clasificó en tres tipos de respuestas T1, construye la expresión de forma algebraica; T2, no construye la expresión de forma algebraica acorde a la situación y T3, no responde; En general se puede observar que los porcentajes más altos en los tipos de respuestas están en los T2, y los porcentajes más bajos se presentan en los T1, una dificultad marcada en el uso de un lenguaje matemático formal y de la interpretación de la variable como número general. Se observa también, que en los tipos de respuesta T2, hay una gran cantidad de estudiantes que utilizan los números cardinales para dar respuesta a los enunciados, escriben casos particulares de números que cumplan los procedimientos aritméticos que se señalan, a pesar de que las elaboraciones de algunas operaciones son matemáticamente correctas, es necesario fortalecer en ellos la comprensión del lenguaje algebraico formal.

A continuación, se analizan algunas respuestas particulares de los estudiantes respecto a la actividad, donde se encontraron situaciones que ameritan análisis y fortalecimiento en la comprensión de procesos algebraicos de los estudiantes:

Figura 17. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta tres.

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)



3. Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera........ -8

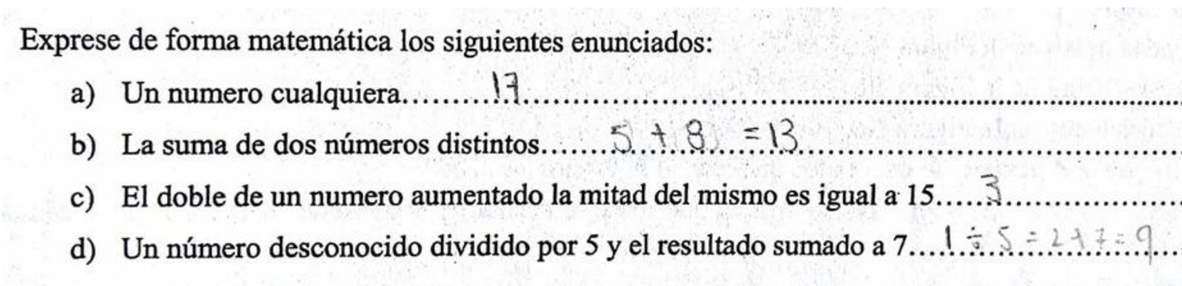
b) La suma de dos números distintos...... 8 + 7 = 15

c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15.... $X = (5 . 2) + \frac{X}{2}$

d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7..........

En este caso vemos cómo el estudiante en los dos primeros ejercicios usa números cardinales para representar la expresión, aunque, en teoría está bien, se evidencia que no reconoce el enunciado como una expresión general y la representa con un caso particular, para el tercer inciso vemos como combina letras con números cardinales, sin embargo, no le confiere a este el valor riguroso de la escritura matemática en cuanto a los signos y uso de la letra “x” en este caso.

Figura 18. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta tres.


Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera………17………

b) La suma de dos números distintos……5 + 8 = 13……

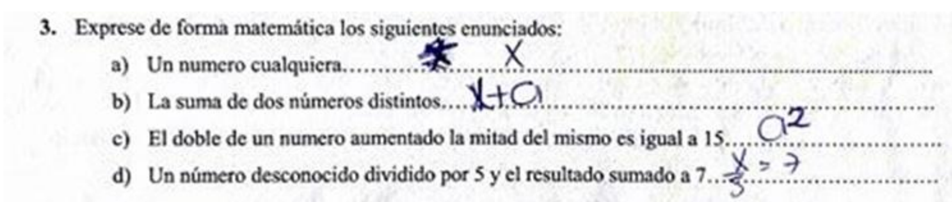
c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15……3……

d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……1 ÷ 5 = 2 + 7 = 9…

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

El ejemplo anterior es una muestra de cómo contestaron la mayoría de los estudiantes a esta actividad, en éste, se logra observar el uso exclusivo de números cardinales para expresar los enunciados, lo cual indica las dificultades que tienen los educandos para primero, diferenciar de una expresión general y una particular, y segundo pasar de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico formal.

Figura 19. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta tres.


3. Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera……… X ………

b) La suma de dos números distintos……X+a……

c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15……a^2……

d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……$\frac{X}{3} = 7$……

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En la figura 18 observamos como el estudiante logra percibir los enunciados de una manera general describiendo por medio de letras y números cada uno de los enunciados establecidos, aunque falla la representación de las operaciones adecuada de los encisos c y d, por ejemplo, donde dice “el doble de un número…” lo representa como a^2 en lugar de la forma correcta que en este caso seria $2a$ y omite el resto del enunciado. En el último punto también hizo un acercamiento a la representación correcta de la frase, pero se evidencia la dificultad para operar con la expresión $\frac{x}{5}$, la cual contiene una operación indicada y no realizada, es decir: $\frac{x}{5} + 7$.

Tabla 15. Análisis de la pregunta cuatro del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 4			
En la operación siguiente la nube en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debe realizar con dicho número:  $\cdot 2+3$ a) tome el número y multiplíquelo por 5. b) tome el número, multiplíquelo por 2 y súmale 3. c) tome el número, multiplíquelo por 2 más 3.			
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%
T.1	no confieren el valor riguroso de su escritura aritmética en cuanto a prioridad de operaciones	4	16.7%
T.2	comprende los signos en toda su magnitud y se expresa correctamente	12	50%
T.3	le falta rigor en la expresión, aunque distinga la prioridad de operaciones	5	20.8%
T.4	No responde	3	12.5%

Fuente: El autor

El objetivo de esta pregunta es identificar el uso que los estudiantes dan a los símbolos matemáticos como los signos de adición y producto en una expresión donde una “nube” representa un valor numérico, el estudiante deberá escoger entre las tres opciones aquella operación aritmética que describa la operación correcta con el número desconocido. La primera opción de respuesta es la que más se aleja de la correcta puesto que no tiene en cuenta la jerarquía de las operaciones, (primero la multiplicación, luego la suma), la segunda opción es la correcta, y la tercera, tiene un valor riguroso en la expresión, en la escritura puesto que se refiere a tomar el número desconocido y multiplicarlo por la suma de 2 y 3. Es una variación de la opción 1.

Se organizó una tabla según los 4 tipos de respuesta encontrados, (T1, T2, T3 y T4), así como se presenta en la tabla. En el T1, T3 y T4, se muestran, respectivamente los resultados de 12 estudiantes que o presentaron alguna dificultad en la comprensión de la operación aritmética, no distinguen la prioridad de operaciones o que no responden a la pregunta, y teniendo en cuenta que con el dominio del lenguaje aritmético es posible su representación general en lenguaje algebraico, Nos da la idea de realizar un trabajo de fortalecimiento de tipo de operaciones, puesto que facilitaría la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico.

Se evidencia que, de los 24 estudiantes el 50% de ellos contestan la opción correcta a la pregunta y, basados en que la edad de los estudiantes oscila entre los 13 y 16 años, en esta etapa, suponemos, han alcanzado un nivel básico aritmético, así que dicho porcentaje de estudiantes, muestran estar en este nivel.

Tabla 16. Análisis de la pregunta cinco del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 5

5. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tener la letra. Si piensas que hay más de uno, escribe algunos de ellos.

a) x+2=2+x ______ **b)** 3+y=7 ______

c) x = x ______ **d)** 4+s ______

e) x+5=x+x ______ **f)** 3+a+a+a+10 ______

TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
a) x+2=2+x						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	12	50%	asigna un solo valor	9	75%
				asigna dos o mas valores	3	25%
T.2	asigna valores no coherentes	3	12.5%			
T.3	No responde	9	37.5%			
b) 3+y=7						
T.1	asigna el valor correspondiente	14	58.3%			
T.2	asigna un valor que no corresponde	1	4.2%			
T.3	No responde	9	37.5%			
c) x=x						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	13	54.2%	asigna un solo valor	10	76.9%
				asigna dos o mas valores	3	23.1%
T.2	asigna valores no coherentes	0	0%			
T.3	No responde	11	45.8%			
d) 4+s						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	12	50%	asigna un solo valor	3	25%
				asigna dos o mas valores	9	75%
T.2	asigna valores no coherentes	0				
T.3	No responde	12	50%			

e) x+5=x+x						
T.1	asigna el valor correspondiente	2	8.3%			
T.2	asigna un valor que no corresponde	10	41.7%			
T.3	No responde	12	50,00%			
f) 3+a+a+a+10						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	6	25%	asigna un solo valor	4	66.7%
				asigna dos o mas valores	2	33.3%
T.2	asigna valores no coherentes	7	29.2%			
T.3	No responde	11	45.8%			

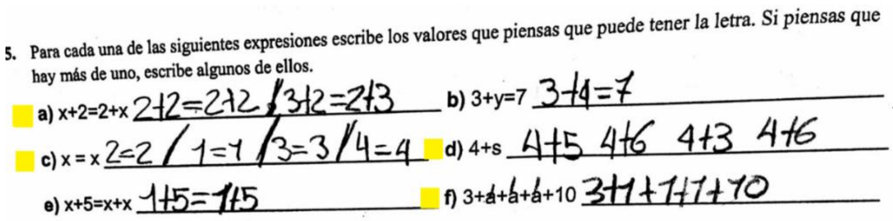
Fuente: El autor

La pregunta 5 está compuesta por 6 incisos, su objetivo es determinar la interpretación y el uso que le dan los estudiantes a la variable como incógnita específica y como número general, para la cual se han identificado tres tipos de respuestas, T.1: asigna uno o más valores coherentes, T.2: asigna valores no coherentes y T.3: no responde.

Los literales a, c, d y f al cual haremos referencia en esta parte del análisis, son ejercicios donde la solución de los mismos se da a partir de la interpretación de la letra como número general. En este caso se pretende identificar si los estudiantes hacen un adecuado manejo de la letra a partir de la manera como se presenta la operación o ecuación. La tendencia en este caso es que los estudiantes asocien la letra con un número específico, según los análisis de las respuestas que se evidencian en la tabla donde de aproximadamente (respecto a los incisos mencionados) el 45% de los estudiantes asignan a la letra, uno o más valores coherentes (T1) y de este porcentaje aproximadamente un 30% la entienden la letra como número general ya que asignan más de un valor a la letra que cumpla con la operación que se propone.

En estos dos casos se verifica lo dicho anteriormente con la solución que propone uno de los estudiantes:

Figura 20. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta cinco.


5. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tener la letra. Si piensas que hay más de uno, escribe algunos de ellos.

a) x+2=2+x 2+2=2+2 / 3+2=2+3 b) 3+y=7 3+4=7

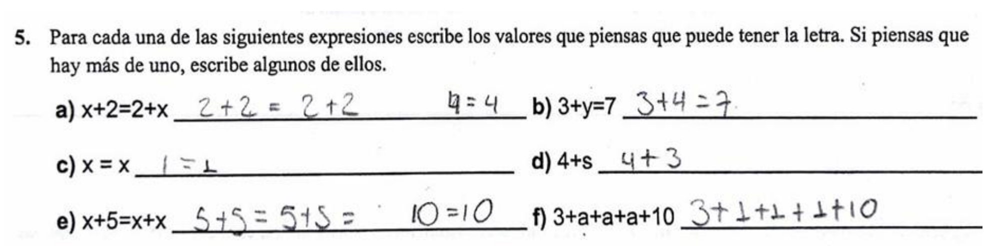
c) x = x 2=2 / 1=1 / 3=3 / 4=4 d) 4+s 4+5 4+6 4+3 4+6

e) x+5=x+x 1+5=1+5 f) 3+a+a+a+10 3+1+1+1+10

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Siguiendo con la idea, del análisis de los encisos a, c, d y f, aproximadamente el 70% de los estudiantes que se encuentran en el tipo de respuesta T1, asignan a la letra un solo valor numérico en particular, por ejemplo, en la siguiente imagen se muestra que el estudiante no reconoce, en alguno de los incisos, la letra como representante de un conjunto de valores.

Figura 21. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta cinco.


5. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tener la letra. Si piensas que hay más de uno, escribe algunos de ellos.

a) x+2=2+x 2+2 = 2+2 4=4 b) 3+y=7 3+4=7

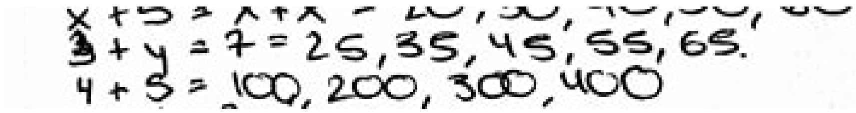
c) x = x 1=1 d) 4+s 4+3

e) x+5=x+x 5+5 = 5+5 = 10=10 f) 3+a+a+a+10 3+1+1+1+10

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En cuanto al análisis de las respuestas de los encisos b y e, en los cuales se presentan ecuaciones donde la letra tiene un valor específico para que se cumpla la igualdad, se obtienen que en el caso del ejercicio b, el 58,3% de los estudiantes asignan sin dificultad el valor coherente con la expresión 3+y=7, que en este caso es el número 4. El 4,2% que corresponde a 1 estudiante asigna un valor que no corresponde, escribe un listado de números, que según él cumple con la ecuación.

Figura 22. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta cinco.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En el ejercicio e, aparece en la ecuación una incógnita que se repite 3 veces, x+5=x+x, para que se cumpla con la igualdad se le debe asignar el número 5, así como lo interpretaron el 8.3% de los estudiantes. Hay un 41,7% de ellos que se confunden al observar el tipo de ecuación y deducen que la letra x, como se repite 3 veces, tienen valores numéricos diferentes, en otras palabras, en ecuaciones con una incógnita con un nivel de complejidad más avanzado al estudiante se le dificulta encontrar un procedimiento o estrategia para encontrar el valor de la letra.

Es de resaltar que el análisis del pensamiento de los estudiantes se torna difícil ya que hay un 37,5% de ellos que no responden. Así como se presenta en algunas de las otras encuestas, no se puede afirmar con seguridad si es desconocimiento o desinterés por los temas. Pero si hay una muestra de inseguridad por dar su respuesta.

Tabla 17. Análisis de la pregunta seis del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 6

Observe la siguiente tabla:

Entrada	Salida
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	
7	
8	

• Descubra la relación que se da entre los números de la entrada y salida para completar la tabla.

TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Completa la tabla siguiendo la regularidad	14	58.3%	20, 23, 26		
T.2	Completa la tabla sin seguir la regularidad	3	12.5%	19, 22, 25		
T.3	No responde	7	29.16%			

• Explique qué relación existe entre cada pareja de números de la tabla.

T.1	Explican una relación	20	83.33%	Encuentra relacion entre los datos de la "entrada y salida" (El número de la entrada se multiplica por tres y se le suma dos)	1	5%
				falta coherencia entre la explicación y los datos que escriben en la tabla	4	20%
				Identifica una regularidad en solo un lado de la tabla (se suman de a 3)	15	75%
T.2	No responde	4	16.7%			

• ¿Puede expresarla mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan la misma relac

T.1	Identifica la relacion entre las variables y expresan la operación de manera general	2	8.33%	n.3 + 2 y 3x + 2		
T.2	Describen una expresion general no coherente con la regularidad	9	37.5%	X+3=Y, 2x-2=y		
T.3	No responde	13	54.16%			

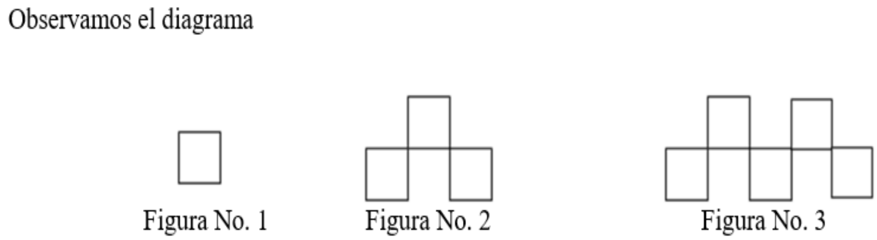
Fuente: El autor

Los objetivos de esta actividad son tres básicamente: primero identificar el reconocimiento que realizan los estudiantes en la relación entre los datos de “entrada” y “salida” como se describe en la tabla, segundo analizar la regularidad que los estudiantes detectan a partir de las características de los datos que se proponen y tercero, evidenciar el proceso de pasar de lo particular a lo general a partir de la situación, intrínsecamente en este último objetivo se deriva el analizar en los estudiantes el tipo de expresión escrita de su lenguaje, ya sea por medio de su propio lenguaje natural o el uso de símbolos y signos matemáticos, lo relevante es la capacidad de darse a entender a otras personas la interpretación que da al problema.

La actividad se divide en tres partes, la primera, a partir de la identificación de la regularidad de los datos, completar la tabla, a lo cual el 58,3% de los estudiantes respondieron según el objetivo planteado. En la segunda pregunta se pide que los estudiantes expliquen la relación entre cada pareja de números en la tabla. En este caso se evidencia dificultades en el objetivo propuesto ya que, a pesar de que el 83,3% de los estudiantes explican su propio tipo de interpretación de la relación entre los datos de entrada y de salida, el 5% de estos, dan una explicación coherente con la información presentada relacionando los datos de la entrada y salida. El 20% de ellos, escriben diferentes interpretaciones, pero no son afines con la situación y el 75% de ellos, encuentran una regularidad en algún conjunto de datos de la tabla, pero no una relación entre ellos. Finalmente, el 16,7% del total de estudiantes no responden a esta actividad.

Ahora bien, a partir de dichos resultados, los estudiantes ven la regularidad, pero la dificultad se encuentra en la manera como la expresan en cualquier tipo de lenguaje, natural o algebraico. Es necesario llevar a cabo con más frecuencia este tipo de actividades para promover en ellos la capacidad de identificar, expresar y dar a entender a otras personas, coherentemente, las características particulares de una situación esto facilitaría el ejercicio de iniciar con la escritura de un lenguaje algebraico formal.

Tabla 18. Análisis de la pregunta siete del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 7						
						
• Dibuje la Figura No. 4.						
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Dibuja la figura numero 4 siguiendo la regularidad	17	70.83%			
T.2	Dibuja la figura numero 4 pero no sigue la regularidad	4	16.7%			
T.3	No responde	3	12.5%			
• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 7?						
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	10	41.7%	colocando el número 13	9	90%
				utilizando el grafico	1	10%
T.2	Encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	9	37.5%			
T.3	No responde	5	20.83%			
• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?						
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	10	41.7%	colocando el número 25	10	100%
				utilizando el grafico	0	0%
T.2	Encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	11	45.8%			
T.3	No responde	3	12.5%			
• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?						
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	7	29.2%			
T.2	Encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	13	54.2%			
T.3	No responde	4	16.7%			

• ¿Cómo hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100?						
T.1	Justifican el procedimiento para hallar el número de cuadrados de la figura	16	66.7%	Multiplica el número 100 por 2 y al resultado le resta 1	3	
				Suman el numero de cuadrados de parte inferior de la figura con los cuadrados de la parte superior	2	
				identificando que los cuadrados aumentan de dos en dos	7	
				sumando el numero de la figura con su antecesor	1	
				falta de coherencia entre la justificación y la actividad	3	
T.2	No responde	8	33.3%			
• ¿Puede expresarlo mediante una operación de manera que sirva para hallar el número de cuadrados para cualquier número de						
T.1	Expresan la relación de manera general	9	37.5%	coherente con la secuencia (n.2-1);(x.2-1); x+(x-1)	4	44.4%
				no coherente con la secuencia (x+y); (2x); (2xn=+1)	5	55.6%
T.2	No responde	15	62.5%			

Fuente: El autor

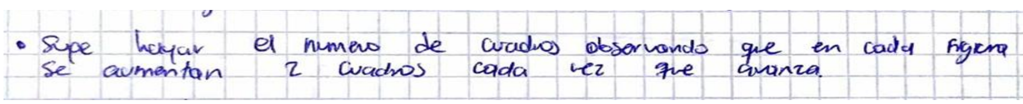
En esta pregunta se aborda esencialmente las características (G1, G2, G3, G4 y G5) de la variable como número general descritas por (Trigueros & Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005), a través de una secuencia figura1 que guarda una fuerte relación con los números impares, con la cual, se pretende analizar los procesos que los estudiantes llevan a cabo al interactuar con situaciones que involucran las características mencionadas.

En esta pregunta se les ha hecho énfasis a los participantes en dar una justificación escrita especialmente en los 3 últimos incisos, teniendo en cuenta que si la actividad se lleva a cabo satisfactoriamente es posible llegar a la construcción de una expresión general de la forma “$2n$ – 1 = m”, con **m** representando el número de cuadrados de la figura y **n** como el número de la posición de la figura.

En cuanto a los hallazgos obtenidos en esta pregunta, se tiene que el 70,83 % de los estudiantes inicialmente identifican el patrón encontrando las características propias de la secuencia, lo cual les permite dibujar la figura siguiente, pero, al ser preguntados por el número de cuadrados que tendrán las figuras 7 y 13 se logra observar cómo se parte el grupo entre los que encuentran el número de cuadrados según la regularidad presentada y los que encuentran un número de cuadrados que no corresponde a la regularidad 41,7 % y en promedio 41,65% respectivamente.

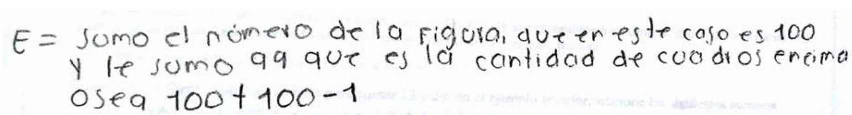
Ahora bien, cuando se les cuestiona en relación con el número de cuadrados que habrá en la figura número 100 y sobre la manera como hicieron para saber el número de estos, se logra evidenciar las diferentes regularidades y características que encontraron los estudiantes en la secuencia de figuras, a continuación, se muestran algunos ejemplos de las justificaciones que ellos dan:

Figura 23. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta siete.


• Supe hayar el numero de cuadros observando que en cada figura se aumentan 2 cuadros cada vez que avanza.

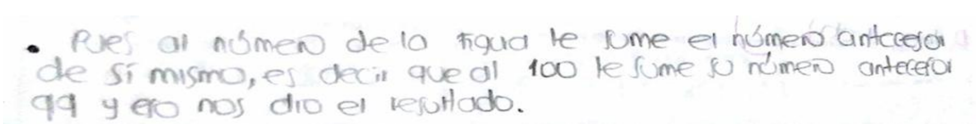
Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 24. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta siete.


E= Sumo el número de la figura, que en este caso es 100 y le sumo 99 que es la cantidad de cuadros encima osea 100 + 100 - 1

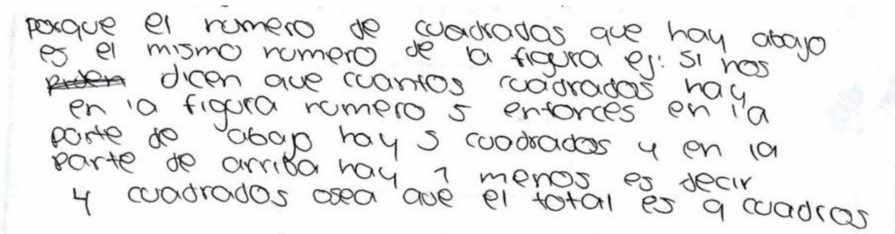
Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 25. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta siete.


• Pues al número de la figura le sume el número antecesor de sí mismo, es decir que al 100 le sume su número antecesor 99 y eso nos dio el resultado.

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 26. Ejemplo cuatro de las respuestas a la pregunta siete.

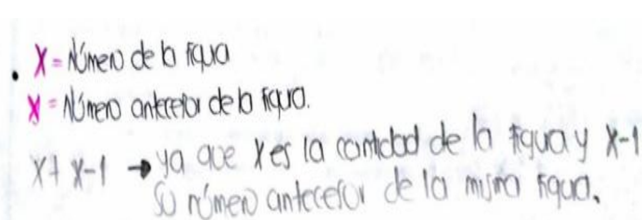

porque el numero de cuadrados que hay abajo es el mismo numero de la figura ej: si nos ~~piden~~ dicen que cuantos cuadrados hay en la figura numero 5 entonces en la parte de abajo hay 5 cuadrados y en la parte de arriba hay 1 menos es decir 4 cuadrados osea que el total es 9 cuadros

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Los estudiantes dan su punto de vista de acuerdo con su propia percepción deducen el número de cuadrados a partir del comportamiento del aumento secuencial de cuadrados en cada figura, siendo más específicos, del total de estudiantes el 67% aproximadamente identifican y escriben el procedimiento que hicieron para deducir el número de cuadrados de la figura número 100.

Por último, se les propone que expresen una operación que sirva para hallar el número de cuadrados para cualquier número de figura. En esta parte 9 de los 24 alumnos expresan la relación de manera general por medio de letras y símbolos, aunque de ellos solo 4 lo hacen de forma coherente con la secuencia y los otros 5 describen una expresión que no la satisface. Por otro lado, los 15 estudiantes restantes no responden. Las siguientes figuras muestran unas de las expresiones construidas.

Figura 27. Ejemplo cinco de las respuestas a la pregunta siete.

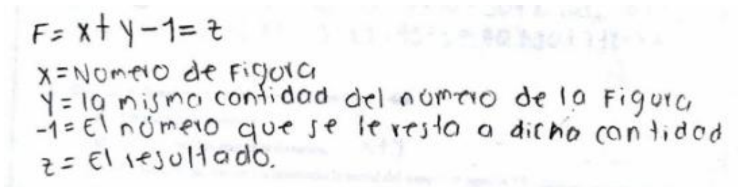

X = Número de la figura

X = Número anterior de la figura.

X+X-1 → ya que X es la cantidad de la figura y X-1 su número anterior de la misma figura.

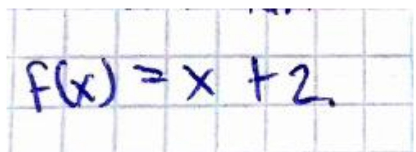
Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 28. Ejemplo seis de las respuestas a la pregunta siete.



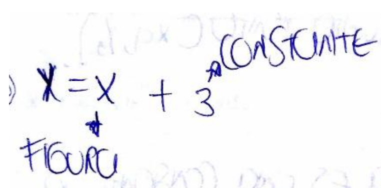
Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 29. Ejemplo siete de las respuestas a la pregunta ocho.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 30. Ejemplo ocho de las respuestas a la pregunta ocho.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En términos generales, los estudiantes logran identificar el patrón presente en la secuencia de diferentes maneras, pero la gran dificultad se encuentra al momento de elaborar la descripción y explicación de las estrategias y operaciones realizadas.

Tabla 19. Análisis de la pregunta ocho del instrumento de recolección de información inicial.

PREGUNTA NÚMERO 8

Carlos trabaja los Domingos vendiendo paletas en los alrededores de la plaza de Bolívar. Su patrona le paga $ 2000 al día, como básico, por hacer ese trabajo, más $100 por cada paleta que venda.

a. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?
b. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?
c. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?
d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera

a. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Responde corectamente las dos	12	50%			
T.2	Responde corectamente solo una	3	12.5%	2500	2	
				4300	1	
T.3	Responde de forma incorecta las dos	3	12.5%			
T.4	No responde	6	25%			
b. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?						
T.1	Responde correctamente	11	45.8%			
T.2	Responde incorrectamente	5	20.8%			
T.3	No responde	8	33.3%			
c. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?						
T.1	Responde de forma correcta	8	33.3%			
T.2	Responde de forma incorrecta	5	20.8%			
T.3	No responde	11	45.8%			
d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?						
T.1	Identifica la relación entre el número de paletas y el sueldo de carlos (lo exoresa en forma general)	10	41.7%	Depende del numero de paletas que venda	2	
				2000 fijos más el numero de paletas que venda	8	
T.2	asignan un valor númerico (ejemplo particular)	1	4.2%	13.500, 19.500, 11.500, entre otros.	1	
T.3	No responde	13	54.2%			
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera						
T.1	Construye una expresion que representa la relacion entre las variables	1	4.2%	100 x + 2000 = y		
T.2	Construye una expresion que no representa la relacion entre las variables	6	25%	x.100 +2000	3	
				100x+2000=x	1	
				x+2000=y	1	
				20.100=2000+2000=4000	1	
T.3	No responde	17	70.8%			

Fuente: El autor

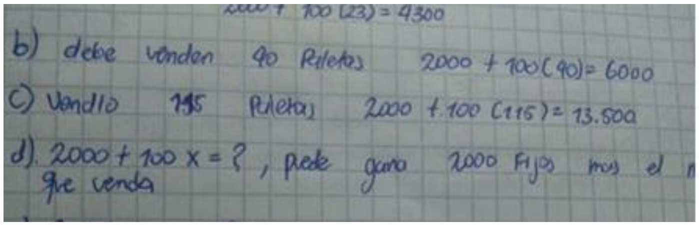
Esta última pregunta tiene como objetivo principal involucrar a los estudiantes en una situación de contexto real, en la que se involucran características de los tres usos de la variable, con la intensión de analizar el pensamiento de los estudiantes, la manera como describen, interpretan y representan las variaciones que se dan entre el número de paletas y el sueldo de Carlos. Para una mejor comprensión esta actividad la hemos descrito en al apartado 5.3.1 aprendizaje relacional.

Teniendo en cuenta la tabla anterior observamos que los estudiantes ante la primera pregunta en la cual se hace presente la variable como incógnita específica, el 50 % de los alumnos contestan satisfactoriamente lo que se gana Carlos al vender 5 y 23 paletas, en este caso 2500 y 4300 respectivamente, el 12,5 % responde solo a una de las dos ya sea para 5 o para 23 paletas, también vemos que otro 12,5% responde de forma incorrecta ambas y por último el 25% no responden. Estos porcentajes dejan en evidencia la dificultad que tuvieron el casi 40% de los participantes en el significado del lenguaje natural que tiene este cuando se escribe en lenguaje matemático. Por ejemplo el hecho de entender que si "…su patrona le paga $2000 al día como básico,…" matemáticamente es adicionar esa constante al valor total de paletas vendidas, o que si Carlos no vende Paletas igualmente va a ganar $2000 cada día esto es $y=2000+100x$ donde y representa el sueldo de Carlos y x el número de paletas vendidas.

La comprensión acertada de la primera pregunta (a) permite al estudiante responder correctamente las siguientes preguntas c y d, las cuales se asemejan en el proceso para darles solución. En este caso se obtiene que aproximadamente 9 de los 24 estudiantes responde con éxito las dos preguntas. Algunos de ellos son detallados en escribir el proceso para llegar a la respuesta, pero la gran mayoría de ellos hace un tipo de operación mental y escriben el resultado.

Es necesario evidenciar algunas respuestas para conocer su manera de resolver esta situación:

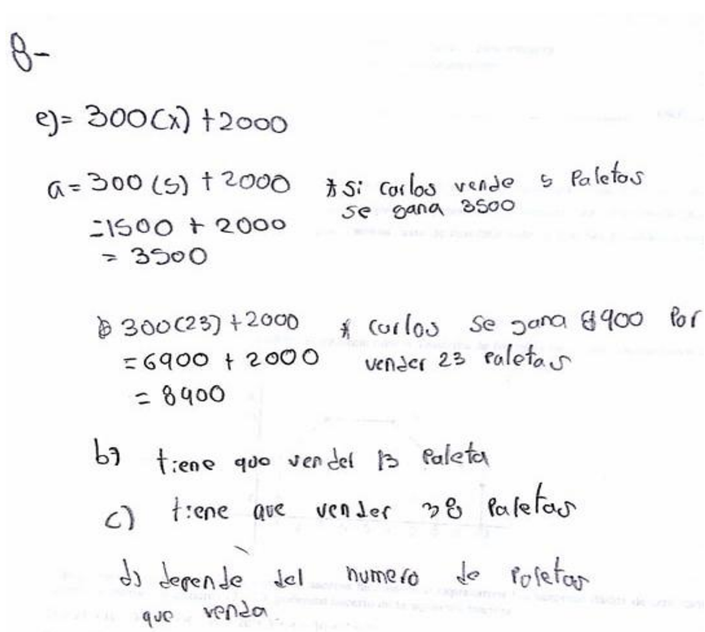
Figura 31. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta ocho.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En este caso el estudiante reconoce las dos variables que son: el número de paletas vendidas a la cual le asigna la letra “x” y la otra es el sueldo de Carlos al que a la que asigna el símbolo “?”, iguala la ecuación con los respectivos salarios que se dan en las preguntas y realiza la operación adecuada que satisfaga la igualdad, encontrando como respuestas las 40 y las 115 paletas respectivamente.

Figura 32. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta ocho.

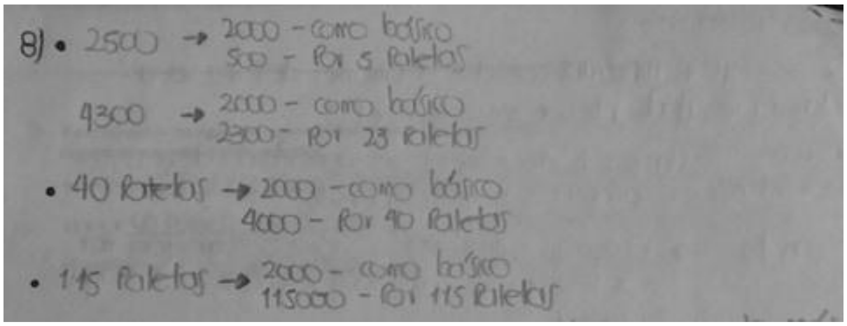


Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En esta situación el estudiante a pesar de tener una comprensión en la estructura del problema asigna valores que no corresponden con la información brindada (el número

300, que en realidad vendría a ser 100) por tal razón las respuestas no son las matemáticamente esperadas. Es de resaltar que el estudiante comprende y escribe una estructura matemática, reconoce variables, pero les da uso con un poco de inseguridad.

Figura 33. Ejemplo tres de las respuestas a la pregunta ocho



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Otra situación que se presenta es aquella en la que el estudiante, a pesar de que acierta en todas sus respuestas, sin representar alguna variable, sin querer decir que sea un error, se observa que hay un proceso mental particular para este tipo de problemas.

Observemos ahora la siguiente pregunta donde se deducirá la interpretación general al problema, pero en su lenguaje natural al responder: *¿Cuánto puede ganar Carlos en un Domingo?* Esto con el objetivo de analizar si este lenguaje tiene un impacto en la manera de generalizar matemáticamente la situación.
Los resultados se evidencian en la siguiente tabla:

Tabla 20. Análisis de la pregunta ocho inciso D del instrumento de recolección de información inicial.

d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?						
T.1	Identifica la relación entre el número de paletas y el sueldo de carlos (lo exoresa en forma general)	10	41.7%	Depende del numero de paletas que venda	2	
				2000 fijos más el numero de paletas que venda	8	
T.2	asignan un valor númerico (ejemplo particular)	1	4.2%	13.500, 19.500, 11.500, entre otros.	1	
T.3	No responde	13	54.2%			

Fuente: El autor

Según las respuestas de los estudiantes, el 41,7% dan una respuesta que relaciona las dos variables relevantes, el número de paletas y el sueldo de Carlos, la respuesta más común fue: "*$2000 fijos más el número de paletas que venda"* que, en sí, es una idea en la que es necesario ser especifico que al número de paletas se multiplica por 100, es decir: la idea completa seria -$2000 fijos más, el número de paletas que venda **multiplicado por 100"-**

Uno de los estudiantes responde que en un domingo Carlos puede ganar $2000, también es una respuesta cercana, pero teniendo en cuenta que falta este es un caso particular, en el que Carlos no vendiera alguna paleta. Aproximadamente un 58,4% se alejan de la respuesta, porque prefieren no responder o escriben un valor que no se relaciona con las variables del problema.

Finalmente, en la actividad se les propone que los estudiantes escriban una expresión matemática que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera.
Obteniendo así los siguientes resultados:

Tabla 21. Análisis de la pregunta ocho inciso E del instrumento de recolección de información inicial.

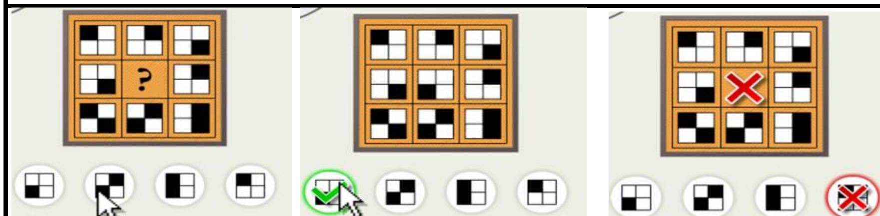
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera						
T.1	Construye una expresion que representa la relacion entre las variables	1	4.2%	100 x + 2000 = y		
T.2	Construye una expresion que no representa la relacion entre las variables	6	25%	x.100 +2000	3	
				100x+2000=x	1	
				x+2000=y	1	
				20.100=2000+2000=4000	1	
T.3	No responde	17	70.8%			

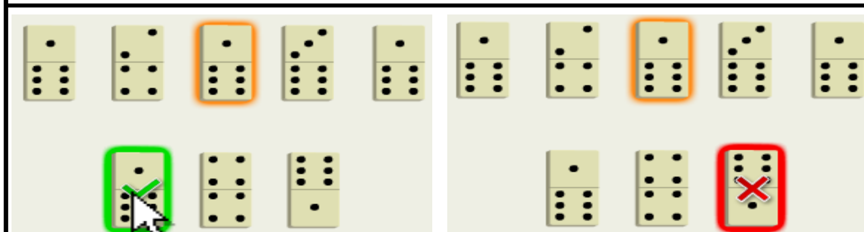
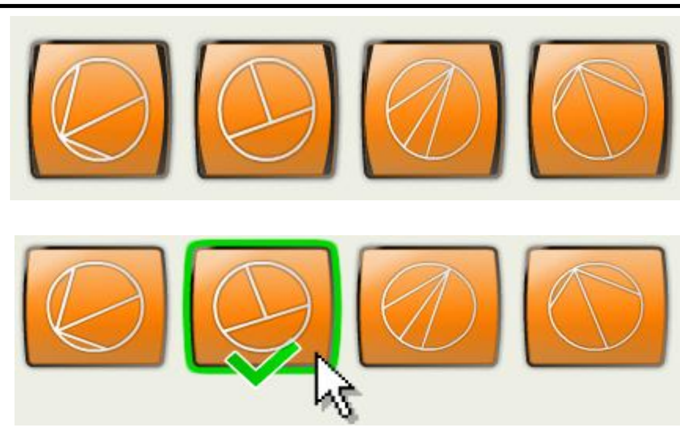
Fuente: El autor

De los 24 estudiantes solo uno de ellos escribe una ecuación que es acorde a la situación, "100X+2000= Y definiendo las dos variables, X como el número de paletas vendidas e Y como el sueldo de Carlos. Un 25% propone ecuaciones con un acercamiento a la ecuación adecuada y el 70,8% de ellos opta por dejar en blanco la hoja. Así como se ha analizado en preguntas anteriores, en esta parte de la expresión de la generalidad, para los estudiantes según nuestra experiencia con ellos, llegar a este punto representa un "nivel muy avanzado" que solo puede lograrse después de mucho estudio, o incluso piensan que solo lo resuelven solamente los profesores. La solución del "El problema del sueldo de Carlos" en las primeras preguntas mostró que los estudiantes pueden resolver situaciones particulares (aunque con algunas dificultades) pueden establecer relaciones entre las variables, pero no las verifican si son verdaderas o falsas respecto a la situación. Probablemente la falta de ejercitación en este tipo de problemas, o el uso de un aprendizaje instrumental los ha llevado a, primero mostrar desinterés por aportar soluciones a este tipo de problemas y segundo a tener falencias en la sintaxis matemática. Es necesario iniciar con ellos un trabajo de afianzamiento y enamoramiento por las matemáticas, llevar a ellos situaciones reales, y a partir de ellas darles la oportunidad de que expresen generalidades las escriban, reflexionen acerca de la veracidad de las mismas y que la puedan aplicar en diferentes contextos.

6.2.3 Descripción de las Actividades de Introducción y Formación del Concepto

Tabla 22. Actividad uno sobre el software Activa tu mente

<table>
<tr><td colspan="3">PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTVIDAD NÚMERO 1: ACTIVA TU MENTE</td></tr>
<tr><td colspan="3"> 
</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO GENERAL:
Generar un espacio que permita explorar el conocimiento algebraico implícito que poseen los niños por medio de un contexto conocido, sin necesidad de estar haciendo operaciones algebraicas, a la vez, demostrar que ellos desde antes de su formación en el álgebra elemental de grados superiores ya aplican procesos del pensamiento algebraico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD</td><td>TIEMPO: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="3">La actividad 1 llamada "activa tu mente" se presenta como un concurso en el cual participan los estudiantes en grupos formados por 4 personas, cada uno de los integrantes debe competir en una de las cuatro pruebas, el estudiante escogido por el grupo para representarlos en cada desafío pasa al frente del tablero, en el cual, se encuentra proyectado el juego, allí deberá escoger las opciones de respuesta siguiendo la regularidad presentada en cada una de las imágenes. Al finalizar cada prueba, el software muestra el puntaje obtenido por el participante quien le suma a los puntos del equipo. Así, con los cuatro estudiantes el equipo ganador es aquel que sume más puntos.</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO ESPECIFICO</td><td>INSTRUCCIÓN DEL DESAFÍO 1.1</td><td>TIEMPO</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificar regularidades y patrones de comportamiento a través del estudio de secuencias gráficas y numéricas</td><td>• Observe los siguientes cuadros e indique cuál de las formas debe completarlos.
• El estudiante tiene 01:30 minutos para contestar la mayor cantidad posible de preguntas.</td><td>20 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">EJEMPLO DEL DESAFIO 1.1</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

ESTANDARES	INSTRUCCIÓN DEL DESAFÍO 1.2	TIEMPO
• Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. • Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos	Observe los tres relojes e indique cuál de los cuatro relojes sigue la secuencia. El estudiante tiene 01:30 minutos para contestar la mayor cantidad posible de preguntas.	20 minutos
	EJEMPLO DEL DESAFIO 1.2	
		
PROCEDIMIENTOS	**INSTRUCCIÓN DEL DESAFÍO 1.3**	**TIEMPO**
Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones entre figuras. Utiliza herramientas del razonamiento lógico en la solución de secuencias.	¿Cuál de las tres fichas de domino debe colocar en el espacio vacío para conseguir una secuencia lógica? El estudiante tiene un minuto para contestar la mayor cantidad posible de preguntas.	20 minutos
	EJEMPLO DEL DESAFIO 1.3	
		
RECURSOS	**INSTRUCCIÓN DEL DESAFÍO 1.4**	**TIEMPO**
Video beam, Computador portátil, Programa digital activa tu mente	Señale la figura que considera intrusa, es decir, que no tiene las mismas características comunes de las otras. El estudiante tiene 01:30 minutos para contestar la mayor cantidad posible de preguntas.	20 minutos
	EJEMPLO DEL DESAFIO 1.4	
		

Fuente: El autor

EL MERCADO DE MI BARRIO

Doña rosa, la dueña del mercado, ha elaborado unas tablas que le dicen cuanto cobrar por determinados números de frutas vendidas. Por ejemplo, para la venta de manzanas tiene:

Número de manzanas	valor a cobrar ($)
1	300
2	600
3	900
4	1200
9	
10	
20	

- ✓ Escriba en la tabla el valor a pagar por 9, 10 y 20 manzanas.
- ✓ ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el siguiente espacio.

- ✓ ¿Qué números se tendrían en la tabla anterior si el precio de una manzana fuera $350?

¿Qué calculo debe hacer doña rosa para determinar el valor a cobrar a las personas que compren ciertos números de manzanas y bananos?

Tabla 23. Actividad dos sobre el mercado de mi barrio.

<table>
<tr><td colspan="2">PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTVIDAD NÚMERO 2: EL MERCADO DE MI BARRIO</td></tr>
<tr><td colspan="2">"OBJETIVO GENERAL:
Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 60 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se organizan los estudiantes en parejas para que así puedan discutir y apoyarse sobre el trabajo a realizar, se les entregan las dos hojas de la guía con las siguientes recomendaciones:
• Cada uno debe responder en su hoja
• Describir lo que van pensando (ideas, estrategias, etc.) a medida que avanzan en la actividad.
• Pueden utilizar para la descripción cualquier tipo de lenguaje (natural, gráficos, números, entre otros).
Al finalizar la actividad se tomarán entre 20 y 30 minutos para socializar y reflexionar con los estudiantes el trabajo realizado, se da un espacio a ellos para que justifiquen y argumenten las estrategias y los procedimientos que usaron para el desarrollo de cada pregunta.</td></tr>
<tr><td>ESTANDARES</td><td>PROCEDIMIENTOS</td></tr>
<tr><td>• Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos
• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
•Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).</td><td>•Noción y significado de la variable (como incognita y como número general).
• Reconocimiento de regularidades y patrones en situaciones de contexto matematico.
• uso y relación entre los lenguajes natural, numérico (tablas) y algebraico.</td></tr>
<tr><td>PREGUNTA N° 1</td><td>DESCRIPCIÓN</td></tr>
<tr><td>Escriba en la tabla el valor a pagar por 9, 10 y 20 manzanas.
<table><tr><th>Número de manzanas</th><th>valor a cobrar ($)</th></tr><tr><td>1</td><td>300</td></tr><tr><td>2</td><td>600</td></tr><tr><td>3</td><td>900</td></tr><tr><td>4</td><td>1200</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>20</td><td></td></tr></table></td><td>Para iniciar se debe representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada variable; para ello se construirá una tabla de dos columnas. En la primera se pondrá el número de manzanas y en la segunda el valor a cobrar ($). Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas de formación del patrón que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades:
Si se lee de manera vertical para pasar de 300 a 600 sumo 300, para pasar de 600 a 900 sumo 300, de 2700 a 3000 sumo 300, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón constante con primer término 300 y que se obtiene de sumarle 300 al número anterior.</td></tr>
</table>

PREGUNTA N° 2

¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el siguiente espacio.

DESCRIPCIÓN

Se busca que el estudiante describa por medio de un lenguaje natural la regularidad que encontró para hallar el valor a cobrar por la venta de cualquier número de manzanas como, por ejemplo:
"Al número de manzanas lo multiplicamos por trescientos (300) y encontramos el valor a pagar "

PREGUNTA N° 3

¿Qué números se tendrían en la tabla anterior si el precio de una manzana fuera $350?

Número de manzanas	Valor a cobrar
1	350
2	700
3	1050
9	
10	
20	

DESCRIPCIÓN

Los estudiantes deben construir una nueva tabla teniendo en cuenta el nuevo precio de cada manzana la cual, si se lee de manera vertical para pasar de 350 a 700 sumo 350, para pasar de 700 a 1050 sumo 350, de 3150 a 3500 sumo 350, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón constante con primer término 350 y que se obtiene de sumarle 350 al número anterior.

PREGUNTA N° 4

¿Qué calculo debe hacer doña rosa para determinar el valor a cobrar a las personas que compren ciertos números de manzanas y bananos?

Con esta pregunta se busca que el estudiante identifique la presencia de una variable adicional, dado que en la situación anterior se presentaban dos variables el número de manzanas y el valor a cobrar, en este caso se agrega la variable: número de bananos.
Una forma de realizar el cálculo que debe hacer doña rosa para determinar el valor a cobrar sería el siguiente:
"Al número de bananos lo multiplicamos por 100, a esto le agregamos el producto del número de manzanas por 300 y obtenemos el valor a pagar".

ACTIVIDAD ADAPTADA DE:

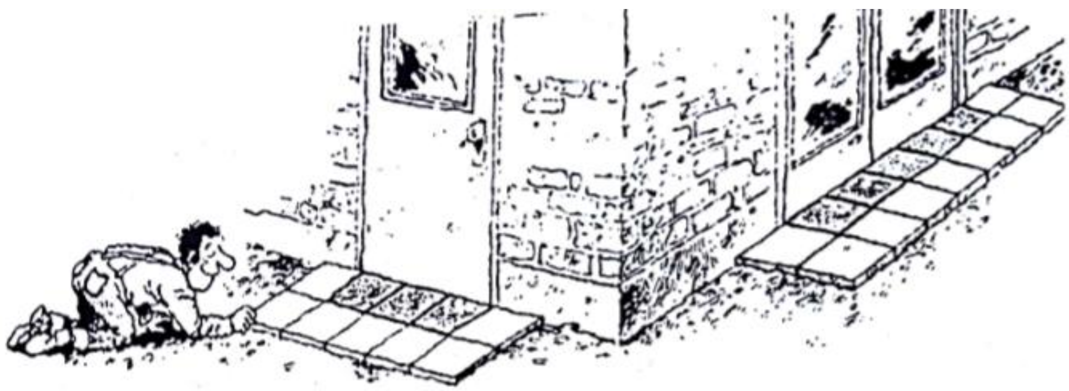
• Agudelo Valderrama, C (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

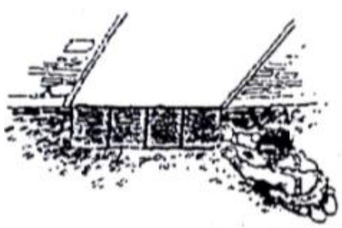
Fuente: El autor

6.3 EMBALDOSAR

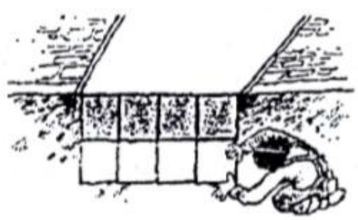
Nombre: ____ **Curso:** ______

Pedro es un constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización la Colina, utilizando baldosas negras y blancas.

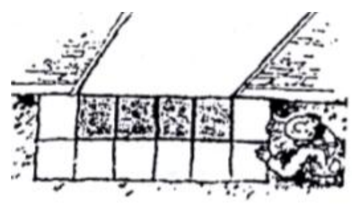




Pedro siempre empieza con una fila de baldosas negras.

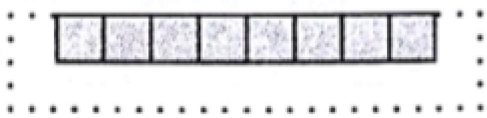


Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las baldosas negras.



Y luego pone 2 baldosas blancas en cada extremo para finalizar el embaldosado de la entrada.

- ¿Cuántas baldosas blancas usa pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras?



- ¿Cuántas baldosas blancas usa si empieza con:

a) ¿5 baldosas negras?
b) ¿9 baldosas negras?

Puede escribir sus respuestas a la pregunta 1 y 2 en la siguiente tabla

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

- Pedro empieza con 100 baldosas negras ¿cuántas baldosas blancas necesita? Escriba estos datos en la tabla anterior.

- ¿Puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conoce el número de baldosas negras?

- ¿Existe alguna regla que usa para encontrar el número de baldosas blancas? Escríbala.

- Para las entradas de las casas de la colina, piense en una forma de hallar el número de baldosas negras cuando se conoce el número de baldosas blancas.

- Idee otra forma de colocar (o combinar) tabletas de dos colores para embaldosar las entradas de las casas, y encuentre las reglas correspondientes para calcular el número de baldosas de cualquiera de los colores que escogió.

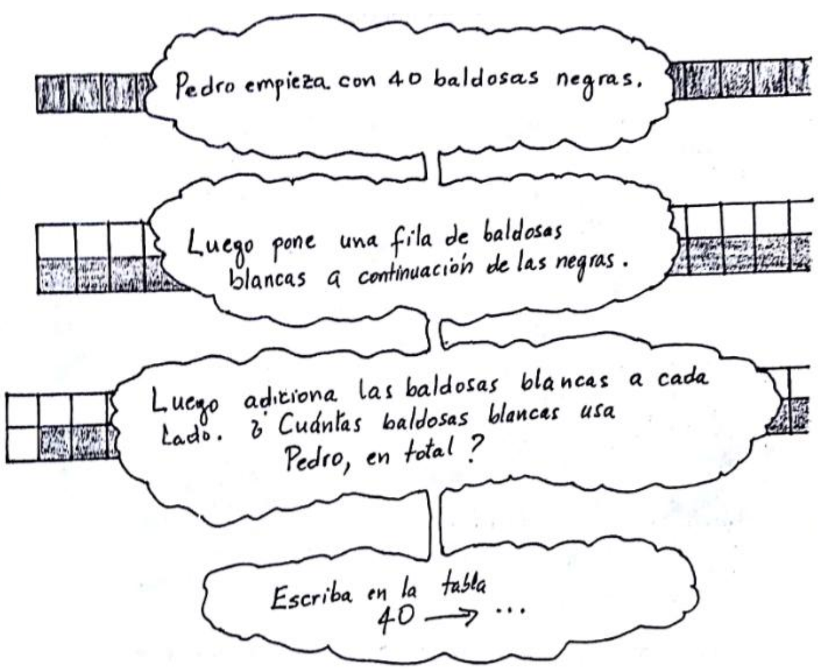
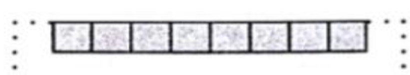


Tabla 24. Actividad tres sobre embaldosar.

<table>
<tr><td colspan="2">PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTVIDAD NÚMERO 3: A EMBALDOSAR</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO GENERAL:
Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se organizan los estudiantes en parejas para que así puedan discutir y apoyarse sobre el trabajo a realizar, se les entregan las dos hojas de la guía con las siguientes recomendaciones:
• Cada uno debe responder en su hoja
• Describir lo que van pensando (ideas, estrategias, etc.) a medida que avanzan en la actividad.
• Pueden utilizar para la descripción cualquier tipo de lenguaje (natural, gráficos, números, entre otros).
Al finalizar la actividad se tomarán entre 20 y 30 minutos para socializar y reflexionar con los estudiantes el trabajo realizado, se da un espacio a ellos para que justifiquen y argumenten las estrategias y los procedimientos que usaron para el desarrollo de cada pregunta.</td></tr>
<tr><td>ESTANDARES</td><td>PROCEDIMIENTOS</td></tr>
<tr><td>• Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos
• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
•Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).</td><td>•Noción y significado de la variable (como incognita y como número general).
• Reconocimiento de regularidades y patrones en situaciones de contexto matematico.
• uso y relación entre los lenguajes natural, numérico (tablas) y algebraico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTAS N° 1 y 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">✓ ¿Cuántas baldosas blancas usa pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras?

✓ ¿Cuántas baldosas blancas usa si empieza con:
a) ¿5 baldosas negras?
b) ¿9 baldosas negras?</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN

En estas preguntas se promueve el trabajo con casos particulares. Se pretende que el estudiante identifique la regularidad y formule conjeturas las cuales deben ser verificadas de algún modo. Por ejemplo, para embaldosar una fila de 8 baldosas negras se requieren 8 baldosas blancas en la parte inferior y otras 4 que estas repartidas, dos en cada lado, para un total de 12 baldosas blancas … (8+2+2=8+4=12)

PREGUNTAS N° 3, 4 y 5

•Puede escribir sus respuestas a la pregunta 1 y 2 en la siguiente tabla.
•¿cúantas baldosas usa pedro para 40 baldosas negras? Escriba en la tabla.
•Pedro empieza con 100 baldosas negras ¿cuántas baldosas blancas necesita? Escriba estos datos en la tabla anterior.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

DESCRIPCIÓN

El paso siguiente es representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada variable; para ello se construirá una tabla de dos columnas. En la primera se pondrá el número de baldosas negras y en la segunda el número de baldosas blancas.

Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas de formación del patrón que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades:

Si se lee de manera horizontal para pasar de 1 a 5 sumo 4, para pasar de 2 a 6 sumo 4, de 8 a 12 sumo 4, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón constante con primer término 5 y que se obtiene de sumarle 4 al número de baldosas negras.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9
6	10
7	11
8	12

<table>
<tr><th colspan="2">PREGUNTAS N° 6 y 7</th></tr>
<tr><td colspan="2">• ¿Puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conoce el número de baldosas negras? • ¿Existe alguna regla que usa para encontrar el número de baldosas blancas?</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="2">La intención de estas preguntas es que el estudiante logre organizar sus conjeturas y por medio de un lenguaje natural pueda describirle a su compañero la regla (pasos a seguir) que le permita encontrar el número de baldosas blancas que se requieren para embaldosar una fila de cualquier número baldosas negras; para después registrarla, por ejemplo:
“Al número de baldosas negras se le suma cuatro y obtenemos el número de baldosas blancas”</td></tr>
<tr><th>PREGUNTA N° 8</th><th>DESCRIPCIÓN</th></tr>
<tr><td>Para las entradas de las casas de la colina, piense en una forma de hallar el número de baldosas negras cuando se conoce el número de baldosas blancas.</td><td>Con la octava pregunta se pretende que el estudiante establezca la relación entre el número de baldosas blancas y el número de baldosas negras, de manera que plantee conjeturas, las pueda describir y verificar de alguna manera como por ejemplo: “Al número de baldosas blancas se le resta cuatro y obtenemos el número de baldosas negras”</td></tr>
<tr><th colspan="2">PREGUNTA N° 9</th></tr>
<tr><td colspan="2">Idee otra forma de colocar (o combinar) tabletas de dos colores para embaldosar las entradas de las casas, y encuentre las reglas correspondientes para calcular el número de baldosas de cualquiera de los colores que escogió.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="2">La última pregunta tiene como objetivo principal que el estudiante diseñe una nueva forma de embaldosar, si quiere con los mismos colores blancos y negros u otros, de manera que pueda repetir el ejercicio realizado inicialmente, pero enfocado a las nuevas características.</td></tr>
<tr><th colspan="2">ACTIVIDAD ADAPTADA DE:</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Agudelo Valderrama, C (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.</td></tr>
</table>

Fuente: El autor

6.4 CUADRADOS CON PALILLOS

Nombre: ____**Edad:** _________

- Construya un cuadrado utilizando un palillo a cada lado de la figura. Dibujar.

- Construya dos cuadrados que estén unidos por uno de sus lados utilizando un palillo a cada lado de la figura ¿Cuántos palillos necesitan? Dibujar.

- Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 3 cuadrados?

- Complete la siguiente tabla que relaciona el número de cuadrados con el número de palillos.

NÚMERO DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	7
NÚMERO DE PALILLOS							

- ¿Cuántos cuadrados se pueden construir con 46 palillos? Y ¿Cuántos con 97 palillos?

- ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 15 cuadrados? y ¿Cuántos para hacer 100?

- ¿Si sabes el número de cuadrados cómo puedes saber el número de palillos? Justifique.

- ¿Puede expresarlo mediante una expresión matemática de manera que sirva para hallar la cantidad de palillos que se necesitan para cualquier cantidad de cuadrados?

6.5 TRIANGULOS CON PALILLOS

- Construya un triángulo utilizando un palillo a cada lado de la figura. Realice el dibujo de la figura.

- Construya dos triángulos que estén unidos por uno de sus lados utilizando un palillo a cada lado de la figura ¿Cuántos palillos necesitan? Dibuje.

- Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 3 triángulos?

- Complete la siguiente tabla que relaciona el número de triángulos con el número de palillos.

NÚMERO DE TRIANGULOS	1	2	3		9		15	23	32
NÚMERO DE PALILLOS				13		25			

- ¿Cuántos triángulos se pueden construir con 41 palillos? Y ¿Cuántos con 106 palillos?

- ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 52 triángulos? Y ¿Cuántos para hacer 100?

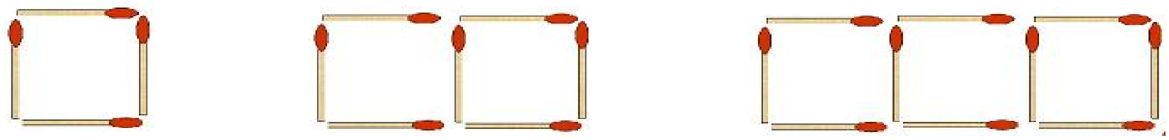
- ¿Si sabes el número de triángulos cómo puedes saber el número de palillos? Justifique.

- ¿Puede expresarlo mediante una expresión matemática de manera que sirva para hallar la cantidad de palillos que se necesitan para cualquier cantidad de triángulos?

Tabla 25. Actividad cuatro sobre cuadrados y triángulos con palillos.

<table>
<tr><td colspan="2">PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTVIDAD NÚMERO 4: CUADRADOS Y TRIÁNGULOS CON PALILLOS</td></tr>
<tr><td colspan="2"> </td></tr>
<tr><td colspan="2">"OBJETIVO GENERAL:
Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 120 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se organizan los estudiantes en parejas para que así puedan discutir y apoyarse sobre el trabajo a realizar, se les entregan las dos hojas de la guía y 20 palillos de madera con las siguientes recomendaciones:
• Cada uno debe responder en su hoja
• Describir lo que van pensando (ideas, estrategias, etc.) a medida que avanzan en la actividad.
• Pueden utilizar para la descripción cualquier tipo de lenguaje (natural, gráficos, números, entre otros).
Al finalizar la actividad se tomarán entre 20 y 30 minutos para socializar y reflexionar con los estudiantes el trabajo realizado, se da un espacio a ellos para que justifiquen y argumenten las estrategias y los procedimientos que usaron para el desarrollo de cada pregunta.</td></tr>
<tr><td>ESTANDARES</td><td>PROCEDIMIENTOS</td></tr>
<tr><td>• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
• Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
• Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.</td><td>•Noción y significado de la variable (como incognita y como número general).
• Reconocimiento de regularidades y patrones en situaciones de contexto matematico.
• uso y relación entre los lenguajes natural, numérico (tablas) y algebraico.
• Determinar una expresión general que represente la situación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Construya un cuadrado utilizando un palillo a cada lado de la figura. Dibujar.
• Construya dos cuadrados que estén unidos por uno de sus lados utilizando un palillo a cada lado de la figura ¿Cuántos palillos necesitan? Dibujar.
• Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cuántos palillos necesitas para hacer 3 cuadrados?</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN



PREGUNTAS

• Complete la siguiente tabla que relaciona el número de cuadrados con el número de palillos.

DESCRIPCIÓN

"Para iniciar se debe representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada variable; para ello se construirá una tabla de dos filas. En la primera se pondrá el número de cuadrados y en la segunda el número de palillos.
Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas que forman el patrón, que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades:
Si se lee de manera horizontal para pasar de 4 a 7 sumo 3, para pasar de 7 a 10 sumo 3, de 10 a 13 sumo 3, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón constante con primer término 4 y que se obtiene de sumarle 3 al número anterior.

NÚMERO DE CUADRADOS	1	2	3	4	5	6	7
NÚMERO DE PALILLOS	4	7	10	13	16	19	22

PREGUNTAS	DESCRIPCIÓN
¿Cuántos palillos necesitas para hacer 15 cuadrados? y ¿Cuántos para hacer 100?	En estas preguntas se promueve el trabajo con casos particulares. Se pretende que el estudiante identifique la regularidad y formule conjeturas las cuales deben ser verificadas de algún modo. Por ejemplo, para construir 15 cuadrados se requieren 46 palillos y para construir 100 cuadrados son necesarios 301 palillos.

PREGUNTAS

• ¿Si sabes el número de cuadrados cómo puedes saber el número de palillos? Justifique.
• ¿Puede expresarlo mediante una expresión matemática de manera que sirva para hallar la cantidad de palillos que se necesitan para cualquier cantidad de cuadrados?

DESCRIPCIÓN

Por ultimo se busca que el estudiante logre organizar sus conjeturas primero con un lenguaje natural, despues usando una mezcla de lenguaje natural con simbolos, para finalizar con un uso total de lenguaje matematico, con el cual describir la regla (pasos a seguir) que le permita encontrar el número de palillos que se requieren para construir cualquier número de cuadrados, por ejemplo:
"El número de cuadrados se multiplica por 3, a esto le sumamos 1 y obtenemos el número de palillos"
x = Número de cuadarados **y** = Número de palillos

$$3x + 1 = y$$

ACTIVIDAD ADAPTADA DE:

https://es.paperblog.com/solucion-al-reto-de-las-54-cerillas-y-los-cuadrados-3243669/

Fuente: El autor

6.6 PALMADAS

Una vez terminada la sesión grupal y hallada tus conclusiones, queremos que compartas a nosotros las respuestas a las siguientes preguntas. ESCRIBE TODO LO QUE PIENSAS.

EXPLORA:

Los nueve jugadores de un equipo de baloncesto chocan sus manos unos con otros antes de comenzar el partido. ¿Cuántas palmadas dan en total?

- busca una relación que guarde el número de palmadas, una expresión que tu determines como la adecuada para numeración más grande

- Justifica tu respuesta, expresando todo lo que piensas.

Diligencia la tabla

N° de jugadores	N° de palmadas
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Vale aclarar que la tabla es de tamaño mayor según el número de jugadores que se esté analizando, para nuestro caso solo hacemos una tabla de tamaño adecuado al aula de clase, como ejercicio propio puedes ampliar tu proceso en casa.

¿Ves algo matemático plasmado en tu respuesta?

si_____________ no____________

¿Podrías explicarlo?

¿Cuántas palmadas seria para 20 jugadores?

¿Por qué? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.

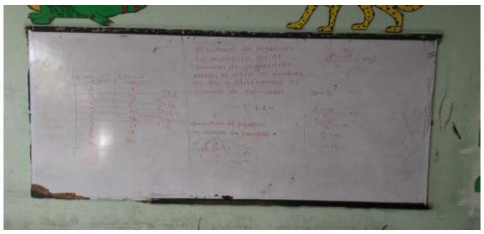
¿Cuántas palmadas seria para 50 jugadores?

¿Por qué? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.

Tabla 26. Actividad cinco sobre las palmadas

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV

ACTVIDAD NÚMERO 5: PALMADAS



OBJETIVO GENERAL:

Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.

DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 120 minutos

Se hacen grupos de 4 o 5 estudiantes, se da la instrucción:
“**los nueve jugadores de un equipo de baloncesto chocan sus manos unos con otros antes de comenzar el partido" ¿Cuántas palmadas dan en total?**

Se dice: “si una pareja como nosotros chocamos nuestras manos vemos que se realiza una palmada, cuantas harán dos personas, y si fueran tres…………”, después se les dice “pueden experimentar en sus grupos y dar una solución a valores más grandes”
Después de 20 minutos solicitamos que se ubiquen en sus puestos y les hacemos entrega de la guía de trabajo, antes de iniciar se les comunica “que expresen todo lo que en el momento de la interacción evidenciaron”.
Al finalizar la actividad se tomarán entre 20 y 30 minutos para socializar y reflexionar con los estudiantes el trabajo realizado, se da un espacio a ellos para que justifiquen y argumenten las estrategias y los procedimientos que usaron para el desarrollo de cada pregunta.

ESTANDARES	PROCEDIMIENTOS
• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros) • Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	•Noción y significado de la variable (como incognita y como número general). • Reconocimiento de regularidades y patrones en situaciones de contexto matematico. • uso y relación entre los lenguajes natural, numérico (tablas) y algebraico. • Determinar una expresión general que represente la situación.

PREGUNTAS
• Los nueve jugadores de un equipo de baloncesto chocan sus manos unos con otros antes de comenzar el partido. ¿Cuántas palmadas dan en total? • ¿Cuántas palmadas seria para 20 jugadores? ¿Por qué? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas. •¿Cuántas palmadas seria para 50 jugadores? ¿Por qué? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.

DESCRIPCIÓN
En estas preguntas se promueve el trabajo con casos particulares. Se pretende que el estudiante identifique la regularidad y formule conjeturas las cuales deben ser verificadas de algún modo. Por ejemplo, para 9 jugadores se dan un total de 36 palmadas, para 20 jugadores se dan un total de 190 palmadas y para 50 jugadores 1225 palmadas.

DESCRIPCIÓN

Lo siguiente es representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada variable; para ello se construirá una tabla de dos columnas. En la primera se pondrá el número de jugadores y en la segunda el número de palmadas.

Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas de formación del patrón que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades:

forma experimental

N° DE JUGADORES	N° DE PALMADAS
1	0
2	1
3	3
4	6
. . .	
n	

forma análitica

N° DE JUGADORES	N° DE PALMADAS
1	0
2	1+0
3	2+1
4	3+2+1
. . .	
n	

PREGUNTA

Diligencia la tabla

N° DE JUGADORES	N° DE PALMADAS
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

PREGUNTA
busca una relación que guarde el número de palmadas, una expresión que tu determines como la adecuada para numeración más grande. Justifica tu respuesta, expresando todo lo que piensas.

DESCRIPCIÓN

Por ultimo, se busca que el estudiante logre organizar sus conjeturas primero con un lenguaje natural, despues usando una mezcla de lenguaje natural con simbolos, para finalizar con un uso total de lenguaje matematico, con el cual describir la regla (pasos a seguir) que le permita encontrar el número de palmadas que se dan para cualquier número de jugadores, por ejemplo:

"El número de jugadores se multiplica por el número de jugadores menos uno, a esto lo dividimos entre dos y obtenemos el número de palmadas"

x = Número de jugadores **y** = Número de palmadas

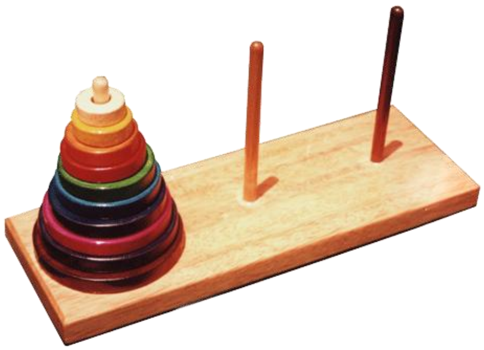
$$\frac{x(x-1)}{2} = y$$

ACTIVIDAD ADAPTADA DE:
• Ministerio de Educación Nacional, (2012). Proyecto Sé Matemáticas Edición Especial 5. Colombia.

Fuente: El autor

TORRES DE HANOI

Nombre: ____Edad: _________



- ✓ **¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar un (1) disco al tercer eje? justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.**

- ✓ **¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar seis (6) discos al tercer eje? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.**

- ✓ **Construya una tabla donde se relacionen el número de discos y el número de movimientos mínimos que encontró para trasladar los aros a otro eje. No pongas limite a la cantidad de discos**

- ✓ **¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar diez (10) discos al tercer eje? Justifica tu respuesta, escribe todo lo que piensas.**

- ✓ **Describa la estrategia que utilizo para encontrar la regularidad, escribe todo lo que piensas**

- ✓ **Puede escribir una expresión matemática que permita encontrar los movimientos que se necesitan para trasladar cualquier número de aros al tercer eje. Escribe todo lo que piensas.**

Tabla 27. Actividad seis sobre las torres de Hanói.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV

ACTVIDAD NÚMERO 6: TORRES DE HANOI

OBJETIVO GENERAL:

Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.

DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 120 minutos

Comenzaremos la actividad leyéndoles a los estudiantes la fantástica historia de las torres de hanoi, lectura que será realizada por el orientador. Con el fin de ilustrarlos e introducirlos al juego.
Después de la presentación de la historia el guía invitara a los estudiantes para que organicen grupos de trabajo de 3 personas y a cada grupo se les asignara el material (las torres de hanoi) con el cual van a realizar la actividad. Luego se les dará a conocer las características del material otorgado y procederá a dar explicación a las normas del juego. Además, en esta fase se les dará un espacio a los estudiantes para que interactúen con el juego sin que tengan que contar los movimientos que realicen.

Se les dará vía libre a los estudiantes para que en grupos empiecen a buscar las formas de dar soluciones a las preguntas propuestas en la actividad como, por ejemplo: cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar un disco al tercer eje, lo mismo se hará para cuando se tienen dos aros, cuando se tienen tres aros y así hasta llegar a 6 aros. Dando paso a la tabulación de los datos que ayudara a los estudiantes a organizarlos y observar la relación que existe entre los números de aros y los números de movimientos que se necesitan para trasladar los aros al tercer eje.

Luego el orientador generara una discusión en cuanto a los valores obtenidos por unos y otros, con el fin de aclarar cada una de las respectivas situaciones guiándolos a la búsqueda de la estrategia ganadora. Llegando por último a que los participantes logren detectar un patrón de comportamiento de la situación.

ESTANDARES	PROCEDIMIENTOS
• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros) • Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	•Noción y significado de la variable (como incognita y como número general). • Reconocimiento de regularidades y patrones en situaciones de contexto matematico. • uso y relación entre los lenguajes natural, numérico (tablas) y algebraico. • Determinar una expresión general que represente la situación.

PREGUNTAS

- ¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar un (1) disco al tercer eje?
- ¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar seis (6) discos al tercer eje?
- ¿Cuantos movimientos mínimos se necesitan para trasladar diez (10) discos al tercer eje?

DESCRIPCIÓN

En estas preguntas se promueve el trabajo con casos particulares. Se pretende que el estudiante identifique la regularidad y formule conjeturas las cuales deben ser verificadas de algún modo.
Por ejemplo, para trasladar un (1) disco se necesitan mínimo un movimiento, para trasladar 6 discos se necesitan un mínimo de 63 movimientos y para trasladar 10 discos son necesarios un mínimo de 1023 movimientos

EJEMPLO

NÚMERO DE DISCOS	NÚMERO DE MOVIMIENTOS MÍNIMOS	
1	1	+ 2
2	3	+ 4
3	7	+ 8
4	15	+ 16
5	31	
⋮		
10	1023	+ 1024
11	2047	

PREGUNTA

Construya una tabla donde se relacionen el número de discos y el número de movimientos mínimos que encontró para trasladar los aros a otro eje. No pongas límite a la cantidad de discos

DESCRIPCIÓN
Se pide construir una tabla que represente los valores numéricos correspondientes a cada variable; para ello se construirá una tabla de dos columnas. En la primera se pondrá el número de discos y en la segunda el número de movimientos mínimos. Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas de formación del patrón que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades como por ejemplo teniendo en cuenta la tabla anterior se puede ver: Si se lee verticalmente para pasar de 1 a 3 sumo 2, para pasar de 3 a 7 sumo 4, de 7 a 15 sumo 8, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón creciente con primer término 1 y que se obtiene de sumar las potencias de 2 con el número anterior.
PREGUNTAS
• Describa la estrategia que utilizo para encontrar la regularidad, escribe todo lo que piensas • Puede escribir una expresión matemática que permita encontrar los movimientos que se necesitan para trasladar cualquier número de aros al tercer eje. Escribe todo lo que piensas.
DESCRIPCIÓN
Por ultimo se busca que el estudiante logre organizar sus conjeturas primero con un lenguaje natural, despues usando una mezcla de lenguaje natural con simbolos, para finalizar con un uso total de lenguaje matematico, con el cual describir la regla (pasos a seguir) que le permita encontrar el número mínimo de movimientos que se necesitan para trasladar cualquier número de aros, por ejemplo: "El número dos lo elevamos al número de discos, a esto le restamos uno y encontramos el número de movimientos mínimos" **n** = Número de discos **m** = Número de movimientos mínimos $\mathbf{2^n - 1 = m}$
ACTIVIDAD ADAPTADA DE:
http://www.principia-malaga.com/backup21noviembre2011/pdf/hanoi.pdf

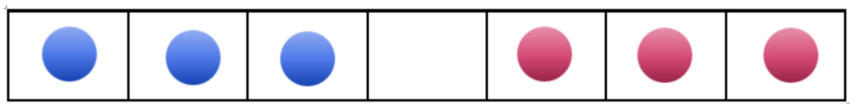
Fuente: El autor

6.7 SAPITOS SALTARINES

NOMBRE:

____***EDAD:***

____



Reglas del juego

- ✓ Sólo se pueden realizar dos movimientos, el salto y el paso:
  - **a.** El paso es mover la ficha de una casilla a otra.
  - **b.** El salto es mover la ficha por encima de otra.
- ✓ Solo se permite un movimiento por jugada.
- ✓ No se permite al saltar dos casillas.

1. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con una ficha de cada color?

2. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con dos fichas de cada color?

3. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con tres fichas de cada color?

4. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con cuatro fichas de cada color?

5. Complete la siguiente tabla:

FICHAS DE CADA COLOR	MÍNIMO DE MOVIMIENTOS
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

6. ¿Cómo le describirías a un compañero los pasos a seguir para trasladar las fichas de un lado al otro en la menor cantidad posible de movimientos? Puede utilizar símbolos, letras, números o el lenguaje que considere necesario.

7. ¿Cuántos movimientos se podrán realizar en un tablero con 24 fichas de cada color? ¿Cómo lo determinarías?

8. Describe el procedimiento que usarías para determinar el número de movimientos para cualquier número de fichas. Explícalo a los compañeros del curso.

Tabla 28. Actividad siete sobre los sapitos saltarines.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV

ACTVIDAD NÚMERO 7: SAPITOS SALTARINES

OBJETIVO GENERAL:

Resolver situaciones en distintos contextos relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la percepción hasta los procesos avanzados como la abstracción, modelización y la generalización.

DESARROLLO GENERAL DE LA ACTIVIDAD TIEMPO: 120 minutos

Este juego se realiza con fichas de dos colores diferentes. Se coloca igual número de fichas, a cada lado de un espacio libre. El objetivo es hallar la menor cantidad de movimientos que permitan intercambiar las posiciones de las fichas.

Las reglas del juego son:

• Mover una sola ficha al espacio inmediatamente vacío (paso)
• Saltar sobre solo una ficha a un espacio vacío situado inmediatamente después de esta.

El juego se presta para que los estudiantes manipulen las fichas y tengan que llevar un registro de los movimientos, por ende, podrán trabajar en parejas o individual, según sus preferencias, en el momento de crear la expresión general podrán unir a más compañeros para que se pueda nutrir el debate, para esta parte de la actividad podrán trabajar en grupos de cuatro estudiantes. La sesión de exposición de las propuestas de la expresión podrá extenderse para que sea evidente que pueden aparecer diversas expresiones que modelan esta situación. El maestro nuevamente será el moderador de los grupos, orientador de las inquietudes y podrá estar pasando por los grupos tomando nota, haciendo sugerencias y contribuyendo al desarrollo de la actividad.

ESTANDARES	PROCEDIMIENTOS
• Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros) • Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	• Conformar grupos de trabajo para la recolección, análisis y discusión de la información. • Uso y significado de la variable (como incógnita y como número general). • Identificar regularidades a partir de la observación y comparación de los datos de la tabla. • Determinar una expresión general que represente la situación.

PREGUNTAS

1. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con una ficha de cada color?
2. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con dos fichas de cada color?
3. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con tres fichas de cada color?
4. ¿Cuántos movimientos mínimos se podrán realizar en un tablero con cuatro fichas de cada color?

DESCRIPCIÓN

En estas preguntas se promueve el trabajo con casos particulares. Se pretende que el estudiante identifique la regularidad y formule conjeturas las cuales deben ser verificadas de algún modo.
Por ejemplo, para trasladar las fichas una de cada color se necesitan un minimo de 3 movimientos, para trasladar las fichas dos de cada color se necesitan un mininimo de 8 movimientos, para trasladar las fichas tres de cada color se necesitan un minimo de 15 movimientos y para trasladar las fichas 4 de cada color son necesarios un minimo de 24 movimientos

EJEMPLO

FICHAS DE CADA COLOR	NÚMERO DE MOVIMIENTOS MÍNIMOS
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63
8	80

5 7 9 11 13 15 17

2 2 2 2 2 2

PREGUNTA

5. Complete la siguiente tabla:

FICHAS DE CADA COLOR	MÍNIMO DE MOVIMIENTOS
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

DESCRIPCIÓN

Se pide completar la tabla en la cual se representan los valores numéricos correspondientes a las variables número de fichas de cada color y número de movimientos mínimos;
Del análisis de la tabla el lector podrá inferir diversas reglas de formación del patrón que le permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades, como por ejemplo teniendo en cuenta la tabla anterior se puede ver:
Si se lee verticalmente para pasar de 3 a 8 sumo 5, para pasar de 8 a 15 sumo 7, de 15 a 24 sumo 9, etc., de modo que el lector podrá describir el patrón numérico obtenido como un patrón creciente con primer término 3.

PREGUNTAS
8. Describe el procedimiento que usarías para determinar el número de movimientos para cualquier número de fichas. Explícalo a los compañeros del curso.

DESCRIPCIÓN

n=*Número de fichas de cada color*

m=*Número de movimientos mínimos*

1 ficha de cada color → 1+1+1=3 → 3(1) → (1+2)*1

2 fichas de cada color → 1+2+2+2+1=8 → 4(2) → (2+2)*2

3 fichas de cada color → 1+2+3+3+3+2+1=15 → 5(3) → (3+2)*3

4 fichas de cada color → 1+2+3+4+4+4+3+2+1=24 → 6(4) → (4+2)*4

n fichas de cada color → 1+2+3+4+…+n+n+n…+4+3+2+1= m → (n+2)*n

ACTIVIDAD ADAPTADA DE:

https://culturacientifica.com/2014/01/15/el-salto-de-la-rana-y-familia/

Fuente: El autor

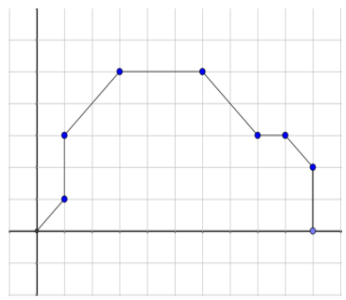
6.8 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN FINAL

Tabla 29. Análisis de la pregunta uno del instrumento de recolección de información final.

Fuente: El autor

PREGUNTA NÚMERO 1

Imagine que quiere dictar a su compañero el siguiente dibujo. Describa de forma lo más clara posible todos los pasos que tendría que seguir para dibujarlo igual.

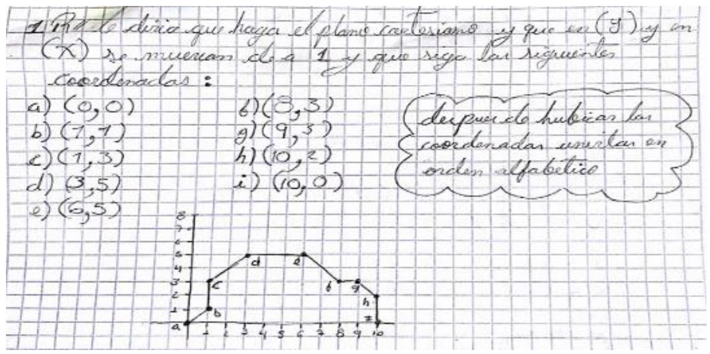


TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Describe la trayectoria de forma clara y coherente con el diagrama	15	62.5%	uso de lenguaje natural	4	26.7%
				coordenadas cartesianas formales	8	53.33%
				especie de coordenadas informales	3	20%
T.2	describe una trayectoria pero falta claridad y coherencia con el diagrama	7	29.16%	lenguaje natural	4	57.14%
				especie de coordenadas informales	3	42.85%
T.3	No responde	2	8.33%			

En comparación con lo encontrado en el instrumento de recolección de información inicial vemos como aumentó el porcentaje del 33.3 % a un 62.5% de los estudiantes que describen la trayectoria de forma clara y coherente con el diagrama, en donde resalta un mayor uso de coordenadas cartesianas formales para la descripción de la trayectoria.

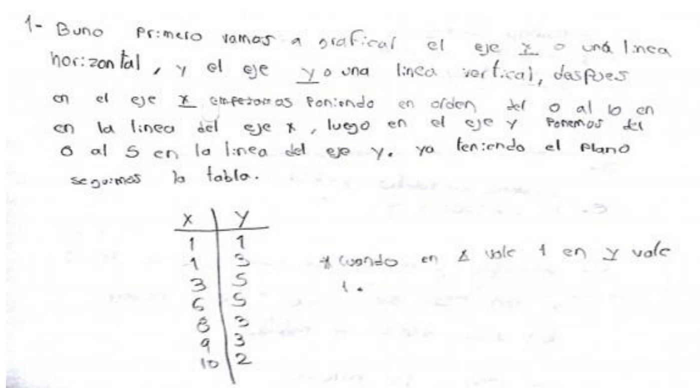
Es de destacar que en este instrumento de recolección de información final desaparece la categoría “falta coherencia con lo propuesto en la actividad”, además que el número de estudiantes que no responde pasa de 5 a 2 y el porcentaje de los que describen una trayectoria, pero falta claridad y coherencia con el diagrama disminuyo de un 41.6% a un 29.16%, lo cual muestra una mejor disposición y comprensión por parte de los alumnos a la hora de responder la prueba. A continuación, mostramos algunas respuestas de los participantes.

Figura 34. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta uno.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 35. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta uno.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Tabla 30. Análisis de la pregunta dos del instrumento de recolección de información final.

Fuente: El autor

<table>
<tr><th colspan="7">PREGUNTA NÚMERO 2</th></tr>
<tr><td colspan="7">Algunas veces los cálculos mentales pueden hacerse fácilmente si expresamos los números dados de otra forma; por ejemplo, al sumar los números 13 y 24, podemos hacerlo de la siguiente manera:

13 + 24 = 10 + 3 + 20 + 4 = 10 + 20 + 3 + 4 = 30 + 7 = 37

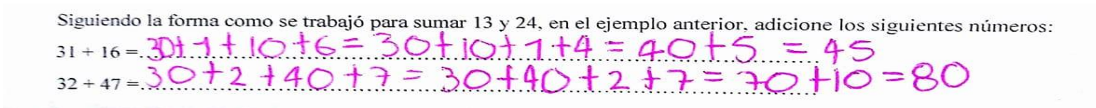
Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adicione los siguientes números:

31 + 16 =……………………………………………………………………………

32 + 49 =……………………………………………………………………………</td></tr>
<tr><th colspan="2">TIPO DE RESPUESTA</th><th>C.E</th><th>%</th><th>JUSTIFICACIÓN</th><th>C.E</th><th>%</th></tr>
<tr><td>T.1</td><td>Reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades</td><td>16</td><td>66.7%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">T.2</td><td rowspan="2">No reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">33.3%</td><td>Descompone según decenas y unidades pero no las agrupan</td><td>6</td><td>75%</td></tr>
<tr><td>No descomponen según la regularidad mostrada en el ejemplo</td><td>2</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>T.3</td><td>No responde</td><td>0</td><td>0,00%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

En esta pregunta al igual que en el instrumento de recolección de información inicial todos los estudiantes responden y se mantienen las mismas categorías, T.1 reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades, en la cual se pasó de un 20.82% a un 66.7% de los alumnos y T.2 no reconoce la regularidad de descomponer y agrupar el número según las decenas y unidades que disminuyó de un 79.16% a un 33.3%; aunque se siguen presentando casos en los que no llevan a cabo la actividad satisfactoriamente, se evidencia una mejoría en la identificación de la regularidad presente en la prueba por parte de los participantes.

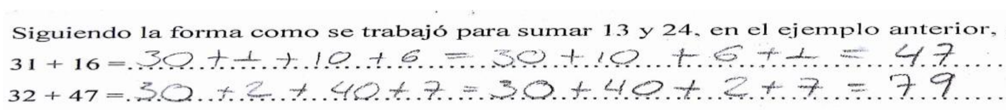
Figura 36. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta dos.


Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, adicione los siguientes números:
31 + 16 = 30+1+10+6=30+10+1+4=40+5 = 45
32 + 47 = 30+2+40+7=30+40+2+7=70+10=80

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En esta respuesta se observa que el estudiante realiza la descomposición en decenas y unidades como se muestra en el ejemplo de la actividad, pero, se equivoca en la primera cambiando el 6 por un cuatro y en la segunda, a la hora de realizar la suma de las unidades lo que tal vez sucedió por un descuido al momento de responderla.

Figura 37. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta dos.


Siguiendo la forma como se trabajó para sumar 13 y 24, en el ejemplo anterior, a
31 + 16 = 30+1+10+6 = 30+10 +6+1 = 47
32 + 47 = 30+2+40+7 = 30+40+2+7 = 79

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Aquí vemos como el estudiante responde de forma satisfactoria reconociendo tanto la descomposición en decenas y unidades como la agrupación de las mismas finalizando con la suma correcta de ellas.

Tabla 31. Análisis de la pregunta tres del instrumento de recolección de información final.

Fuente: El autor

PREGUNTA NÚMERO 3							
Exprese de forma matemática los siguientes enunciados: a) Un numero cualquiera…………………………………………………………… b) La suma de dos números distintos………………………………………………………… c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15………………………… d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……………………………							
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%	
a) Un numero cualquiera………………………………………………………………							
T.1	Construye una expresión de forma general	18	75%	uso de una letra	12	66.7%	
				mezcla lenguaje natural con el uso de letras	2	11.1%	
				usa dos o mas letras	4	22.2%	
T.2	No construye la expresión de forma general	6	25%	Utilizan números cardinales			
T.3	No responde	0					
b) La suma de dos números distintos……………………………………………………………							
T.1	Construye la expresión de forma general	17	70.8%	usando letras ejemplo: (x+y)	11	64.8%	
				usando letras y un caso particular	6	35.2%	
T.2	No construye la expresión de forma general	7	29.1%	Utilizan numeros cardinales	5	71.4%	
				combinan un numero cardinal con una letra ejemplo: (x+6)	2	28.6%	
T.3	No responde	0					
c) El doble de un número aumentado la mitad del mismo es igual a 15……………………………							
T.1	Construye una expresión coherente con la actividad	8	33.3%	2x+x/2=15	6	75%	
				2(6)+6/2=15	2	25%	
T.2	Construye una expresión no coherente con la actividad	12	50%	Utilizan numeros cardinales	3	25%	
				Uso de solo letras	5	41.7%	
				combinan numeros cardinales con letras	4	33.3%	
T.3	No responde	4	16.7%				
d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7……………………………							
T.1	Construye una expresión coherente con la actividad	7	29.16%	x/5+7	2	28.6%	
				x/5 = Y Y+7	3	42.9%	
				10 : 5 = 2 2+7	2	28.6%	
T.2	Construye una expresión no coherente con la actividad	14	58.3%	uso de números cardinales	5	35.8%	
				x/5 = y+7	7	50%	
				x/5 = 7; x/5=x+7	2	14.3%	
T.3	No responde	3	12.5%				

A partir de la tabla, en el literal “a” de la actividad se mantienen las mismas categorías T.1 construye una expresión de forma general, T.2 no construye la expresión de forma general y T.3 no responde; las cuales respecto a los resultados analizados en el instrumento de recolección de información inicial, se observa que todos los estudiantes responden a esta pregunta, en el que resalta un crecimiento en el porcentaje de los estudiantes que construyen una expresión de forma general el cual paso de un 37.5% a un 75%, destacándose el uso de una sola letra por encima del uso de 2 o más letras y de la mezcla entre letras y leguaje natural.

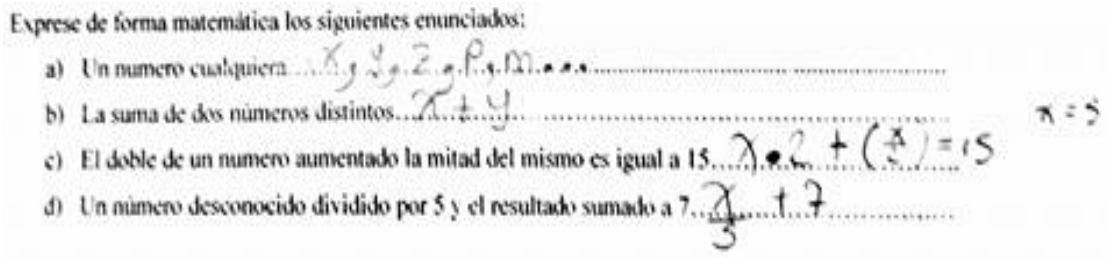
En cuanto al literal “b” también encontramos las categorías T.1, T.2 y T.3, pero sobresale la aparición de nuevas justificaciones tanto en T.1 en la que además de la justificación “usando letras ejemplo: (x+y)” aparece “usando letras y un caso particular” y en T.2 adicionalmente a “utilizan números cardinales” hallamos “combinan un número cardinal con una letra ejemplo: (x+6)”. En este se nota un cambio del 37.5% a un 70.8% en el T.1, en cuanto al tipo de respuesta T.2 disminuyó de un 62.5% a un 29.1%.

Siguiendo con el literal “c” en la que además de las presentes en el instrumento inicial aparecen nuevas justificaciones en T.1 “2(6)+6/2=15” y en T.2 “uso de solo letras”, en esta pregunta 4 estudiantes no responden y se presenta cambios favorables en T.1 pasando del 8.3% a un 33.3% y en T.2 de un 54.16% a un 50%; en donde los cambios más significativos se presentaron en T.1 y en T.3.

En el último literal “d” lo más destacado es que 7 estudiantes construyen una expresión coherente con la actividad mientras, que en el ejercicio de recolección de información inicial ninguno de los estudiantes logro construir una expresión coherente. De los siete, cinco lo hicieron de forma general y dos con un caso particular; y aunque el número de estudiantes que construyen una expresión no coherente con la actividad es casi igual en los dos instrumentos de recolección de información, es satisfactorio el cambio que se presentó de 9 a solo 3 alumnos que no respondieron a esta pregunta.

Las imágenes que se muestran a continuación son ejemplos de las respuestas que dieron dos estudiantes

Figura 38. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta tres.



Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera ... $x, y, z, P, m \ldots$

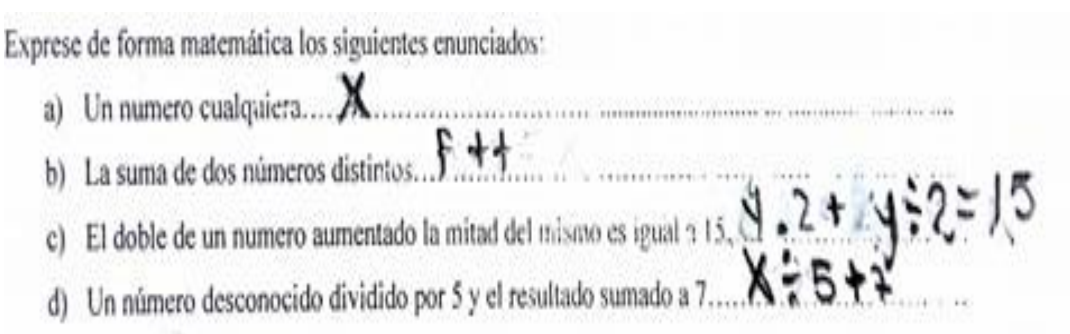
b) La suma de dos números distintos ... $x + y$ ... $x = 5$

c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15 ... $x \cdot 2 + \left(\frac{x}{2}\right) = 15$

d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7 ... $\frac{x}{5} + 7$

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 39. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta tres.



Exprese de forma matemática los siguientes enunciados:

a) Un numero cualquiera ... X

b) La suma de dos números distintos ... $f + t$

c) El doble de un numero aumentado la mitad del mismo es igual a 15 ... $y \cdot 2 + y \div 2 = 15$

d) Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7 ... $X \div 5 + 7$

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Tabla 32. Análisis de la pregunta cuatro del instrumento de recolección de información final.

PREGUNTA NÚMERO 4			
En la operación siguiente la nube en blanco representa un número cualquiera. Elige, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debe realizar con dicho número: $\cdot 2+3$ a) tome el número y multiplíquelo por 5. b) tome el número, multiplíquelo por 2 y súmale 3. c) tome el número, multiplíquelo por 2 más 3.			
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%
T.1	no confieren el valor riguroso de su escritura aritmética en cuanto a prioridad de operaciones	4	16.7%
T.2	comprende los signos en toda su magnitud y se expresa correctamente	17	70.8%
T.3	le falta rigor en la expresión, aunque distinga la prioridad de operaciones	3	12.5%
T.4	No responde		0%

Fuente: El autor

En la pregunta número 4 destacamos que todos los encuetados responden a la actividad, lo cual no sucedió en el instrumento inicial en el que tres no contestaron, también observamos que el número de estudiantes que no confieren el valor riguroso de su escritura aritmética en cuanto a prioridad de operaciones es el mismo en ambos instrumentos 4 alumnos, y por último, se presentó un incremento del 50% al 70.8% en los que comprenden los signos en toda su magnitud y se expresan correctamente.

Tabla 33. Análisis de la pregunta cinco del instrumento de recolección de información final.

PREGUNTA NÚMERO 5

5. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tener la letra. Si piensas que hay más de uno, escribe algunos de ellos.

a) x+2=2+x ______________________ **b)** 3+y=7 ______________________

c) x = x ______________________ **d)** 4+s ______________________

e) x+5=x+x ______________________ **f)** 3+a+a+a+10 ______________________

	TIPO DE RESPUESTA	C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
a) x+2=2+x						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	20	83.3%	asigna un solo valor	8	40%
				asigna dos o mas valores	12	60%
T.2	asigna valores no coherentes	4	16.7%			
T.3	No responde	0	0,00%			
b) 3+y=7						
T.1	asigna el valor correspondiente	21	87.5%			
T.2	asigna un valor que no corresponde	1	4.2%			
T.3	No responde	2	8.3%			
c) x=x						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	23	95.8%	asigna un solo valor	14	60.9%
				asigna dos o mas valores	9	39.1%
T.2	asigna valores no coherentes	0	0%			
T.3	No responde	1	4.2%			
d) 4+s						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	19	79.1%	asigna un solo valor	9	47.4%
				asigna dos o mas valores	10	52.6%
T.2	asigna valores no coherentes	0				
T.3	No responde	5	20.8%			
e) x+5=x+x						
T.1	asigna el valor correspondiente	9	37.5%			
T.2	asigna un valor que no corresponde	7	29.2%			
T.3	No responde	8	33.3%			
f) 3+a+a+a+10						
T.1	asigna uno o mas valores coherentes	15	62.5%	asigna un solo valor	3	20%
				asigna dos o mas valores	12	80%
T.2	asigna valores no coherentes	4	16.7%			
T.3	No responde	5	20.8%			

Fuente: El autor

En esta pregunta en los literales a, c, d, y f se presenta la variable como número general en los cuales se presentan tres tipos de respuestas las cuales son T.1 asigna uno o más valores coherentes, T.2 asigna valores no coherentes, y T.3 no responde.

En el literal “a” vemos que con respecto al instrumento inicial el cambio más significativo se presentó en la cantidad de estudiantes que no respondieron, debido a que en el instrumento final todos los encuestados respondieron y en el instrumento inicial 9 de los 24 alumnos no contestaron, a la vez podemos notar el cambio del 50% a un 83.3% de los que asignan uno o más valores coherentes con la actividad.

Para el literal “c” al igual que en el “a” el cambio más relevante fue que a excepción de un estudiante, todos contestaron a esta pregunta, mientras que en el instrumento inicial fueron 11 los que no respondieron, destaca también el aumento que se presentó en el número de estudiantes que asigna uno o más valores coherentes el cual paso de 54.2% a un 95.8% de los encuetados.

En cuanto al literal “d” vemos que en comparación con el test inicial el número de estudiantes que no responde cambio de 12 a 5 y el incremento de los que asignan uno o más valores coherentes se movió del 50% al 79.1%.

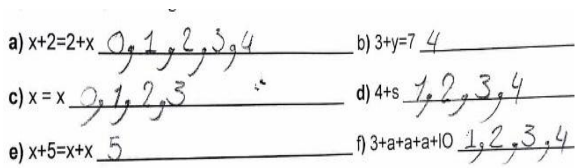
Siguiendo con el literal “f” en el cual se presentaron cambios significativos en los tres tipos de respuesta, en el T.1 se pasó de un 25% a un 62.5%, en T.2 disminuyó del 29.2% al 16.7% y el total de estudiantes que no respondieron cambio de 11 a 5 con respecto al instrumento inicial.

A hora bien, en los literales b y e se presenta el uso de la variable como incógnita específica, en los cuales se muestran tres tipos de respuestas las cuales son T.1 asigna el valor correspondiente, T.2 asigna un valor que no corresponde y T.3 no responde. Para los cuales en el literal “b” se presentaron cambios con respecto al test inicial solamente en T.1 que paso del 58.3% al 87.5% Y en T.2 que cambio del 37.5% al 8.3%. Por último, en el literal “e” hubo cambios tanto en T.1 que paso del 8.3% al 37.5%, en

T.2 que bajo del 41.7% al 29.2% y en T.3 que disminuyó del 50% al 33.3%, estos datos permiten inferir que los estudiantes lograron una mejor interpretación y compresión de los usos de la variable como número general y como incógnita específica.

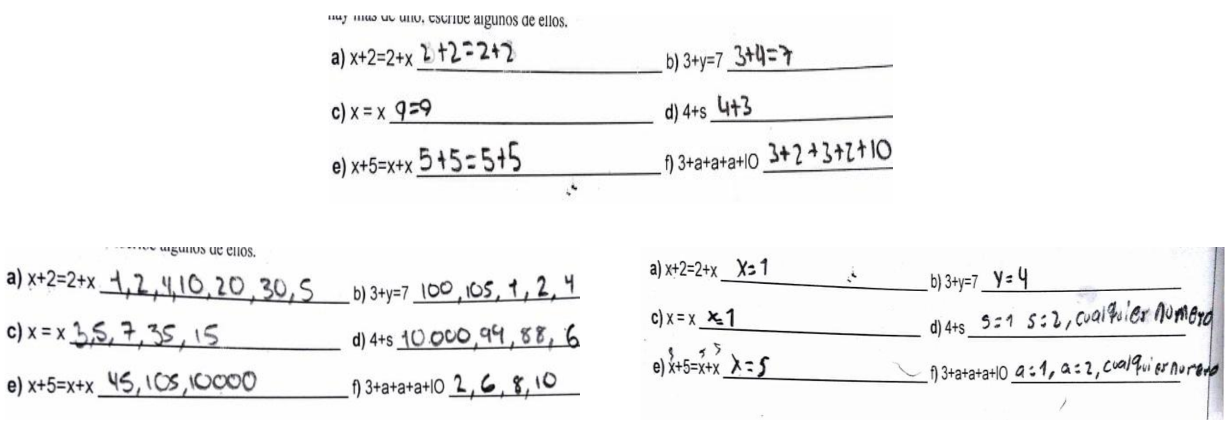
A continuación, a modo de ejemplo mostramos las respuestas de 4 estudiantes a la pregunta descrita anteriormente.

Figura 40. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta cinco.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 41. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta cinco.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

En el primer ejemplo se puede apreciar que el alumno asigna varios números a las variables en los literales a, c, d y f, lo cual permite deducir que él ha logrado Interpretar la letra como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor, característica clave en el uso de la variable como número general como lo describe (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005). Ahora para los literales b y e asocia un único valor para las letras x e y de manera correcta, evidenciando que reconoce en la situación la presencia de algo desconocido, interpreta la letra como la representación de un valor específico, sustituye y determina el valor desconocido que satisface la ecuación, las cuales son características del uso de la variable como incógnita específica.

En los otros ejemplos vemos como los estudiantes en algunos casos o asignan un solo valor o variaos para los literales a, c, d y f y como solo uno de ellos no encuentra el valor correcto para los literales b y e y les asigna distintos valores que no satisfacen las ecuaciones.

Tabla 34. Análisis de la pregunta seis del instrumento de recolección de información final.

PREGUNTA NÚMERO 6

Observe la siguiente tabla:

Entrada	Salida
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	
7	
8	

TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
• Descubra la relación que se da entre los números de la entrada y salida para completar la tabla.						
T.1	Completa la tabla siguiendo la regularidad	17	70.8%	20, 23, 26		
T.2	Completa la tabla sin seguir la regularidad	7	29.2%	19, 22, 25		
T.3	No responde	0	0,00%			
• Explique qué relación existe entre cada pareja de números de la tabla.						
T.1	explican una relación	22	91.2%	Encuentra relacion entre los datos de la "entrada y salida" (El número de la entrada se multiplica por tres y se le suma dos)	8	36.4%
				falta coherencia entre la explicación y los datos que escriben en la tabla	3	13.6%
				Identifica una regularidad en solo un lado de la tabla (se suman de a 3)	11	50%
T.2	No responde	2	8.3%			
• ¿Puede expresarla mediante una operación de manera que sirva para todos estos ejemplos y otros que sigan la misma relación?						
T.1	identifica la relacion entre las variables y expresan la operación de manera general	9	37.5%	n.3 + 2 y 3x + 2		
T.2	no identifica la relcion expresando una operación de manera particular	2	8.3%	1+4= 5 ; 2+6=8		
T.3	identifica la regularidad de la salida y expresa la operación de forma particular	6	25%	17 + 3		
T.4	describen una expresion general no coherente con la regularidad	2	8.3%	X+3=Y, 2x-2=y		
T.5	No responde	5	20.8%			

Fuente: El autor

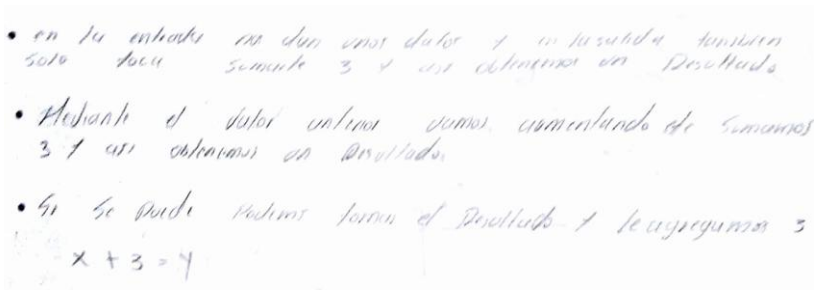
Para la pregunta número 6, en el primer inciso se mantienen las mismas categorías T.1 “completa la tabla siguiendo la regularidad”, en la que se presentó un incremento con respecto al test inicial del 58.3% al 70.8%, T.2 “completa la tabla sin seguir la regularidad” la cual se muestra un cambio del 12.5% al 29.2%, y en el que se evidencio una gran variación fue en T.3 ya que en el test final todos los estudiantes respondieron mientras que en el inicial de los 24 encuestados no contestaron 7.

En cuanto al segundo inciso, en él se hacen presentes dos categorías los que explican una relación y los que no responden. Para los que explican una relación se han organizado en tres subcategorías, la primera “encuentra relación entre los datos de la entrada y salida” en la cual se pasó de 1 a 8 estudiantes, la segunda “falta coherencia entre la explicación y los datos que escriben en la tabla” en la que hubo un cambio de 4 a 3 alumnos y la tercera “Identifica una regularidad en solo un lado de la tabla” en esta de 15 estudiantes pasaron a 11, todo lo anterior teniendo como referencia el instrumento de recolección de información inicial, al igual que en los que no responden que de 4 pasaron a 2 de los encuestados.

Por último, en el tercer inciso destacamos la presencia de 2 categorías adicionales a las encontradas en el test inicial las cuales son “no identifica la relación expresando una operación de manera particular” y “identifica la regularidad de la salida y expresa la operación de forma particular” en el cual se han repartido el 8.3% y el 25% respectivamente.

En cuanto a las categorías “Identifica la relación entre las variables y expresan la operación de manera general” se muestra un crecimiento del 8.33% al 37.5%, y de “describen una expresión general no coherente con la regularidad” los porcentajes disminuyeron de un 37.5% a un 8.3% de los participantes. Por último, en el instrumento inicial el 54.16% de los estudiantes no contestaron, mientras que en el instrumento final bajo al 20.8% del total de los encuestados.

Figura 42. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta seis.

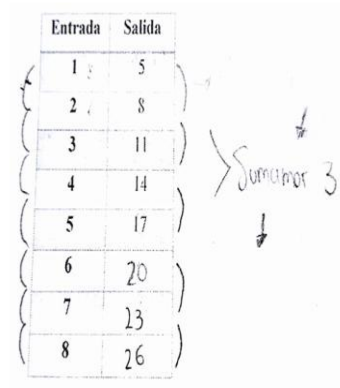


• en la entrada nos dan unos datos y en la salida tambien solo toca sumarle 3 y asi obtenemos un Resultado

• Mediante el dato anterior vamos aumentando de sumamos 3 y asi obtenemos un Resultado

• Si se puede podemos tomar el Resultado y le agregamos 3

$x + 3 = y$

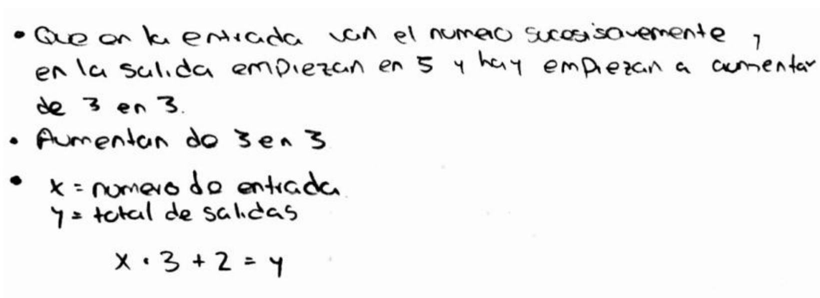


Entrada	Salida
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20
7	23
8	26

Sumamos 3

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 43. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta seis.

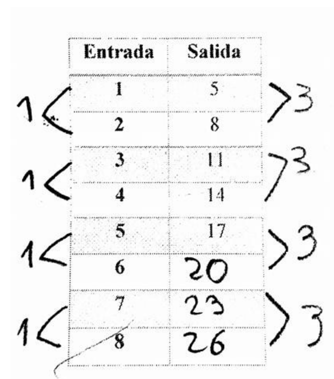


• Que en la entrada van el numero sucesivamente 1 en la salida empiezan en 5 y hay empiezan a aumentar de 3 en 3.

• Aumentan de 3 en 3

• x = numero de entrada
y = total de salidas

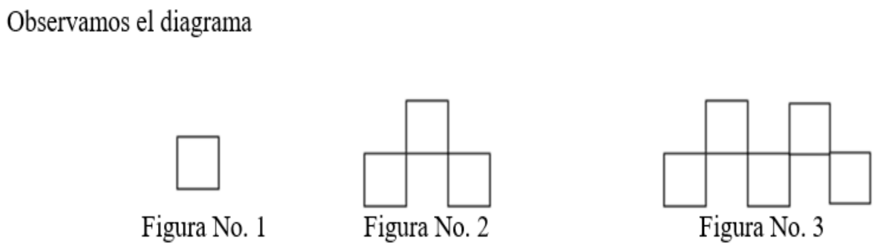
$x \cdot 3 + 2 = y$



Entrada	Salida
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20
7	23
8	26

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Tabla 35. Análisis de la pregunta siete del instrumento de recolección de información final.

PREGUNTA NÚMERO 7						
						
• Dibuje la Figura No. 4.						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Dibuja la figura numero 4 siguiendo la regularidad	21	87.5%			
T.2	Dibuja la figura numero 4 pero no sigue la regularidad	3	12.5%			
T.3	No responde	0	0,00%			

Fuente: El autor

Continuando con el análisis del instrumento de recolección de información final llegamos a la pregunta número 7 la cual está constituida por seis incisos, de los cuales el primero está representado por la tabla anterior en la que se muestra que los 24 estudiantes dibujaron la figura número cuatro, 21 de ellos siguiendo la regularidad, mientras que los otros tres dibujan una figura que no sigue la regularidad.

En cuanto a la comparación entre lo encontrado en el instrumento inicial y el final, vemos como se presentó un crecimiento del 70.3% al 87.5% en el tipo de respuesta T.1 y una disminución del 16.7% al 12.5% y del 12.5% al 0% en los tipos de respuesta T.2 y T.3 respectivamente.

Tabla 36. Análisis de la pregunta siete enciso B del instrumento de recolección de información final.

Fuente: El autor

TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 7?						
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	20	83.3%	colocando el número 13	14	70%
				utilizando el grafico	6	30%
T.2	encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	4	16.7%			
T.3	No responde	0	0,00%			

En el inciso que continua encontramos que se mantienen las mismas tipologías de respuestas y sus justificaciones en las que se evidencia un crecimiento del 41.7% al 83.3% en los estudiantes que encuentran el número de cuadrados de la figura según la regularidad presentada, y un bajón del 37.5% al 16.7% en los que encuentran el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada, finalizando con un claro cambio en los estudiantes que no responden el cual paso de 5 a 0.

Tabla 37. Análisis de la pregunta siete inciso C del instrumento de recolección de información final.

TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?						
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	16	66.7%	colocando el número 25	12	75%
				utilizando el grafico	4	25%
T.2	encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	6	25%			
T.3	No responde	2	8.3%			

Fuente: El autor

En el tercer inciso se presentaron cambios en los tres tipos de respuestas, un aumento del 41.7% al 66.7% en los que encuentran el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada, una reducción del 45.8% al 25% en los que encuentran el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada, y en cuanto a los estudiantes que no respondieron en el instrumento inicial fueron 3 y en el instrumento final solo 2 no lo hicieron.

Tabla 38. Análisis de la pregunta siete inciso D del instrumento de recolección de información final.

• ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Encuentra el número de cuadrados de la figura según la regularidad planteada	13	54.2%			
T.2	encuentra el número de cuadrados de la figura que no corresponde a la regularidad planteada	8	33.3%			
T.3	No responde	3	12.5%			

Fuente: El autor

En este cuarto inciso al igual que en el anterior no se presentaron cambios en las categorías establecidas en donde del 29.2% subió al 54.2% en el T.1, del 54.2% se presentó un bajón al 33.3% en los estudiantes que se encuentran en T.2, en esta pregunta fueron 3 los que no respondieron mientras que en el test inicial fueron 4.

Tabla 39. Análisis de la pregunta siete inciso E del instrumento de recolección de información final

• ¿Cómo hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100?						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Justifican el procedimiento para hallar el número de cuadrados de la figura	20	83.3%	Multiplica el número 100 por 2 y al resultado le resta 1	6	
				Suman el numero de cuadrados de parte inferior de la figura con los cuadrados de la parte superior	7	
				identificando que los cuadrados aumentan de dos en dos	3	
				sumando el numero de la figura con su antecesor	1	
				falta de coherencia entre la justificación y la actividad	3	
T.2	No responde	4	16.7%			

Fuente: El autor

Para este quinto inciso vemos solo dos tipos de respuestas la T.1 “justifican el procedimiento para hallar el número de cuadrados de la figura” en la que de un 66.7% subió en el test final a un 83.3% y el número de estudiantes que no responden bajo la mitad de 8 a 4.

Tabla 40. Análisis de la pregunta siete inciso F del instrumento de recolección de información final.

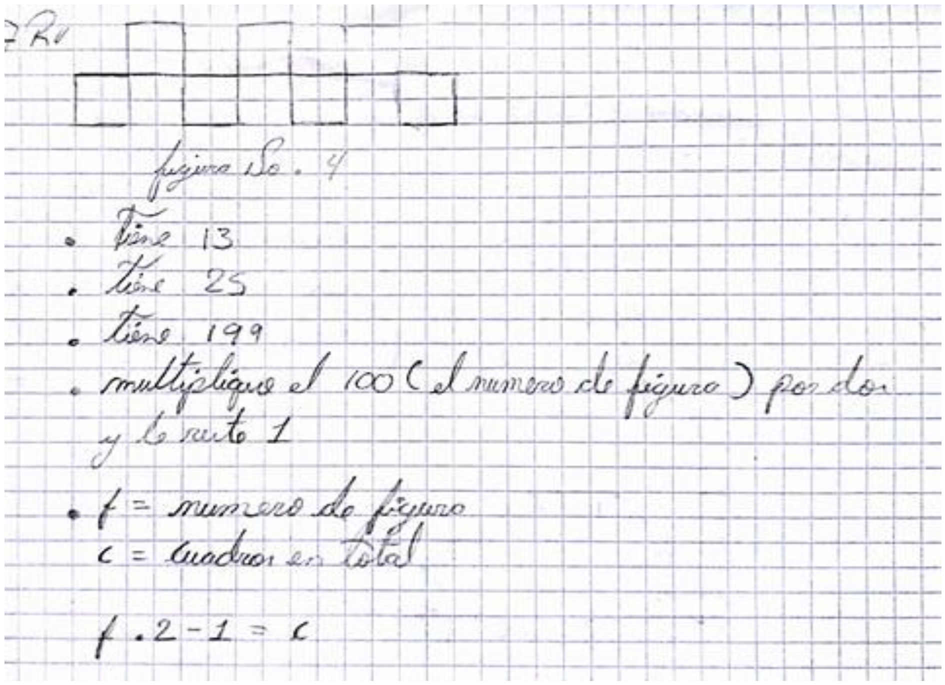
• ¿Puede expresarlo mediante una operación de manera que sirva para hallar el número de cuadrados para cualquier número de figura?						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Expresan la operación de manera general	15	62.5%	coherente con la secuencia (n.2-1);(x.2-1); x+(x-1)	12	80%
				no coherente con la secuencia (x+y); (2x); (2xn=+1)	3	20%
T.2	Expresan la operación con un ejemplo particular	3	12.5%	coherente con la secuencia (100+99=199)	2	66.7%
				no coherente con la secuencia	1	33.3%
T.3	No responde	5	20.8%			
T.4	La operación que proponen no determina el numero de cuadrados para cualquier figura	1	4.16%			

Fuente: El autor

Finalizando con la pregunta número 7 nos encontramos con el inciso seis en el que aparecen dos tipos de respuestas adicionales a las encontradas en el instrumento de recolección de información inicial las cuales son “expresan la operación con un ejemplo particular” y “la operación que proponen no determina el número de cuadrados para cualquier figura” en las que se reparten el 12.5% y el 4.16% del total de los participantes.

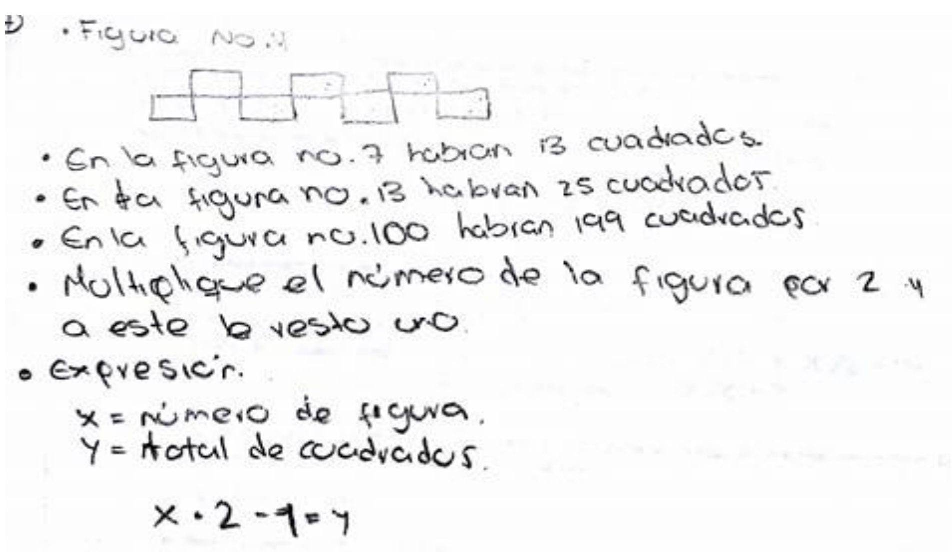
En cuanto a las tipologías “expresan la operación de manera general” y no responden el cambio fue de un 37.5% a un 62.5 % y de un 62.5% a un 20.8% respectivamente. A continuación, algunos ejemplos de las respuestas que dan los alumnos.

Figura 44. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta siete.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 45. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta siete.



Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Tabla 41. Análisis de la pregunta ocho del instrumento de recolección de información final.

<table>
<tr><th colspan="7">PREGUNTA NÚMERO 8</th></tr>
<tr><td colspan="7">Carlos trabaja los Domingos vendiendo paletas en los alrededores de la plaza de Bolívar. Su patrona le paga $ 2000 al día, como básico, por hacer ese trabajo, más $100 por cada paleta que venda.

a. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?
b. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?
c. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?
d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera</td></tr>
<tr><td colspan="7">a. Si Carlos vende 5 paletas ¿Cuánto se gana en ese día? ¿y si vende 23?</td></tr>
<tr><th colspan="2">TIPO DE RESPUESTA</th><th>C.E</th><th>%</th><th>JUSTIFICACIÓN</th><th>C.E</th><th>%</th></tr>
<tr><td>T.1</td><td>Responde corectamente las dos</td><td>19</td><td>79.2%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">T.2</td><td rowspan="2">Responde corectamente solo una</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">8.3%</td><td>2500</td><td>1</td><td>50%</td></tr>
<tr><td>4300</td><td>1</td><td>50%</td></tr>
<tr><td>T.3</td><td>Responde de forma incorecta las dos</td><td>1</td><td>4.2%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>T.4</td><td>No responde</td><td>2</td><td>8.3%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fuente: El autor

Llegamos así a la pregunta número 8, la última del instrumento de recolección de información final que está dividida en 5 literales, en donde la tabla anterior nos muestra los resultados encontrados en el literal “a” en el que comparado con el test inicial se presentan los mismos tipos de respuestas presentando cambios en todos ellos, en T.1 un incremento del 50% al 79.2%, en T.2 disminuyó del 12.5% al 8.3% de los estudiantes encuestados, en T.3 bajo del 12.5% al 4.2%, en donde solo 2 alumnos no contestaron, mientras que en el test inicial el número de participantes que no contestaron fue de 6.

Tabla 42. Análisis de la pregunta ocho inciso B del instrumento de recolección de información final

b. ¿Cuántas paletas debe vender Carlos para ganarse $ 6000 en un domingo?						
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Responde correctamente	20	83.3%			
T.2	Responde incorrectamente	2	8.3%			
T.3	No responde	2	8.3%			

Fuente: El autor

Para el literal "b" observamos que tampoco se presentaron cambios en los tipos de respuestas, pero, se observa un cambio significativo en comparación con el instrumento inicial debido a que el porcentaje de los estudiantes que responden correctamente subió del 45.8% al 83.3%, además el porcentaje que respondieron incorrectamente bajo del 20.8% a solamente el 8.3% del total de los encuestados y por último, no responden 2 estudiantes mientras que en el test inicial fueron 8 alumnos los que no contestaron.

Tabla 43. Análisis de la pregunta ocho inciso C del instrumento de recolección de información final.

c. Si Carlos se ganó $13500 en un domingo ¿cuántas paletas vendió?						
TIPO DE RESPUESTA		C.E	%	JUSTIFICACIÓN	C.E	%
T.1	Responde de forma correcta	19	79.2%			
T.2	Responde de forma incorrecta	3	12.5%			
T.3	No responde	2	8.3%			

Fuente: El autor

Continuando con el literal "c" en el que al igual que los dos anteriores no se presentan cambios en las tipologías de respuestas, pero, que también muestra un cambio favorable debido a que el porcentaje de estudiantes que responden de forma correcta se elevó del

33.3% al 79.2%, en cuanto al porcentaje de los que responden de forma incorrecta bajo del 20.8% al 12.5%, y los estudiantes que no contestaron a este disminuyó del 45.8% a únicamente el 8.3% del total de los participantes.

Tabla 44. Análisis de la pregunta ocho inciso D del instrumento de recolección de información final.

d. ¿Cuánto puede ganar Carlos en un domingo?						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Identifica la relación entre el número de paletas y el sueldo de carlos (lo exoresa en forma general)	16	66.7%	Depende del numero de paletas que venda	9	56.25%
				2000 fijos más 100 multiplicado por el número de paletas que venda	7	43.75%
T.2	asignan un valor númerico (ejemplo particular)	3	12.5%	2000	1	33.3%
				13.500, 19.500, 11.500, entre otros.	2	66.7%
T.3	No responde	5	20.8%			

Fuente: El autor

En este literal no encontramos diferentes tipos de respuestas, aunque si aparece una nueva justificación en T.2 con respecto a la prueba inicial en el que uno de los estudiantes al ser preguntado ¿Cuánto se puede ganar Carlos en un domingo? contesto 2000 haciendo referencia al básico que recibe Carlos por salir a vender las paletas. Adicional a esto, vemos que el cambio más significativo se presentó en la cantidad de alumnos que no respondieron el cual se redujo de 13 a 5, en cuanto a los tipos de respuesta T.1 y T.2 los cambios fueron del 41.7% al 66.7% y de un 4.2% al 12.5% respectivamente.

Tabla 45. Análisis de la pregunta ocho inciso E del instrumento de recolección de información final.

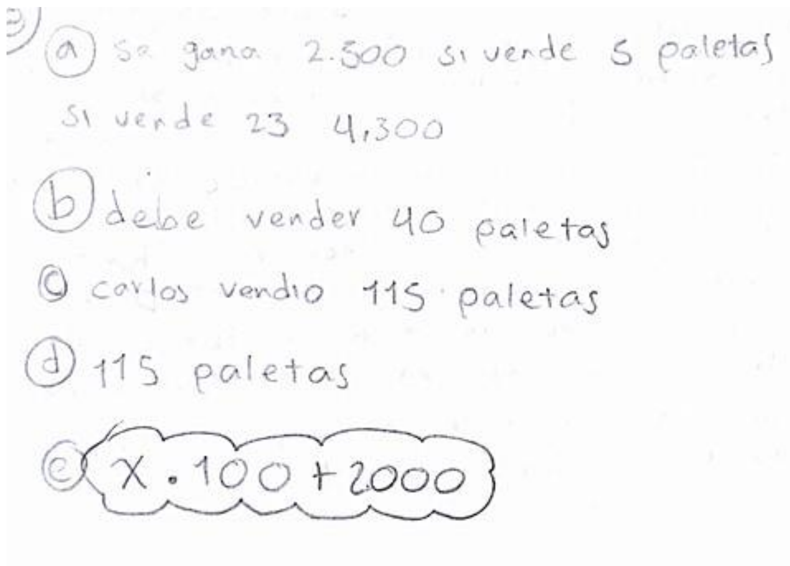
e. Construya una expresión que permita hallar el sueldo de Carlos en un domingo cualquiera						
TIPO DE RESPUESTA		**C.E**	**%**	**JUSTIFICACIÓN**	**C.E**	**%**
T.1	Construye una expresion que representa la relacion entre las variables	10	41.7%	100 x + 2000 = y		
T.2	Construye una expresion que no representa la relacion entre las variables	9	37.5%	x.100 +2000	3	33.3%
				100x+2000=x	1	11.1%
				x+2000=y	1	11.1%
				n. 100 +2000	2	22.2%
				20.100=2000+2000=4000	1	11.1%
				pues se puede sumar o multiplicar	1	11.1%
T.3	No responde	5	20.8%			

Fuente: El autor

Para finalizar el análisis del instrumento de recolección de información final llegamos al literal “e” en el que no se presentan cambios en los tipos de respuestas, pero si aparecen 2 nuevas justificaciones en T.2 las cuales son n100+2000 y “pues se puede sumar o multiplicar” en las que se encuentran 2 y 1 estudiante respectivamente.

En este literal vemos un cambio fuerte en el número de estudiantes que no respondieron ya que en el instrumento inicial son 17 alumnos los que no contestan mientras que en el instrumento final únicamente fueron 5 de los encuestados, por otra parte, notamos el aumento que se presentó en los que construyen una expresión que representa la relación entre las variables que fue del 4.2% al 41.7% lo cual es muy significativo, y el cambio que se evidencio en los que construyen una expresión que no representa la relación entre las variables que paso del 25% al 37.5%.

Figura 46. Ejemplo uno de las respuestas a la pregunta ocho.


8)

a) se gana 2.500 si vende 5 paletas

si vende 23 4,300

b) debe vender 40 paletas

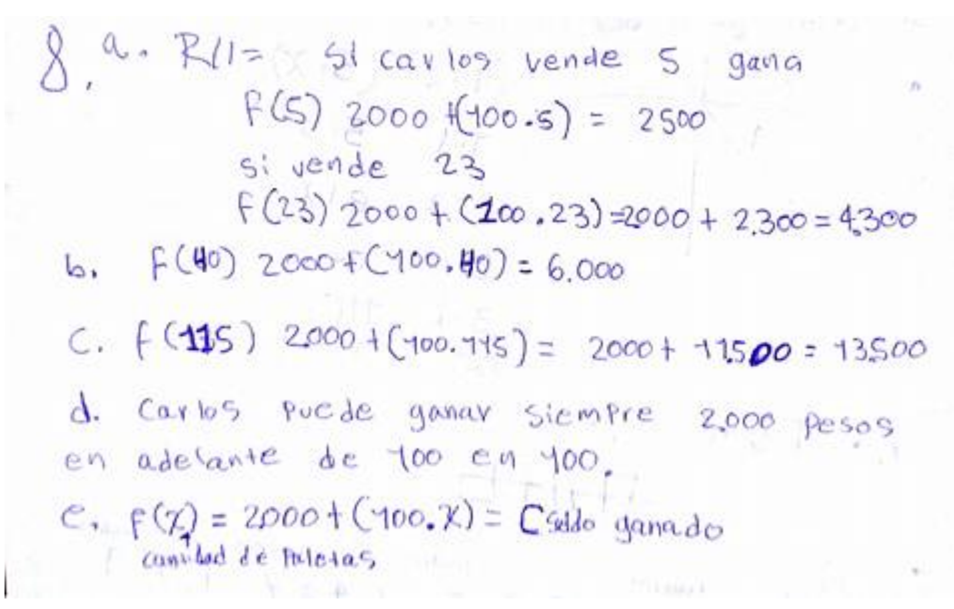
c) carlos vendio 115 paletas

d) 115 paletas

e) X . 100 + 2000

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

Figura 47. Ejemplo dos de las respuestas a la pregunta ocho.


8. a. R/ = Si carlos vende 5 gana

$f(5)$ 2000 + (100 . 5) = 2500

si vende 23

$f(23)$ 2000 + (100 . 23) = 2000 + 2.300 = 4.300

b. $f(40)$ 2000 + (100 . 40) = 6.000

c. $f(115)$ 2.000 + (100 . 115) = 2000 + 11.500 = 13.500

d. Carlos puede ganar siempre 2.000 pesos en adelante de 100 en 100.

e. $f(x)$ = 2000 + (100 . x) = C saldo ganado

cantidad de paletas

Fuente: Estudiantes Instituto Técnico Benjamín Herrera, (2017)

7. CONCLUSIONES

Como fue claro desde el inicio uno de los objetivos principales del proyecto fue el diseño y aplicación de una propuesta didáctica que posibilitara el mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de la variable como número general y el hecho de iniciar la propuesta con la indagación de los presaberes de los estudiantes fue un componente determinante para el buen resultado de este trabajo.

Para la construcción y aplicación de una unidad didáctica, es importante considerar aspectos como el contexto en el cual se encuentran los estudiantes, la organización del tiempo, el uso de diferentes estrategias didácticas; teniendo en cuenta la relación que existe entre los conocimientos previos del estudiante y sus procesos de formación, para lograr un aprendizaje con comprensión y significado.

El trabajo con regularidades y patrones conlleva a procesos de generalización, es decir, identificar características y propiedades a partir de la observación y de la experimentación en distintos contextos numéricos y geométricos, a realizar conjeturas, a simbolizarlas para después demostrarlas y aplicarlas en diferentes situaciones.

Con la experiencia adquirida en el diseño y aplicación de actividades como las expuestas en este trabajo, podemos concluir que los jóvenes poseen muchas destrezas, que les permite identificar características y crear estrategias para resolver situaciones problema, por tanto, son competentes de realizar actividades como estas y que tan solo dependen de las orientaciones del profesor. Por lo tanto, la estrategia didáctica presentada aquí está al alcance de los niños.

RECOMENDACIONES

Teniendo en consideración lo alcanzado en el presente proyecto tanto para los estudiantes que participaron en el, en cuanto a la construcción del concepto de la variable como número general, como para los investigadores al corroborar que las situaciones que involucran el reconocimiento de regularidades y patrones se presentan como una buena estrategia para fortalecer conceptos algebraicos e inducir al educando al pensamiento algebraico; la experiencia derivada de las actividades desarrolladas y de las teorías que respaldan el tema de nuestra investigación, es de vital importancia motivar a los estudiantes a realizar acciones sobre los objetos matemáticos y sus representaciones, observando los elementos que varían como los que no varían en las situaciones plantadas, que conduzcan a los estudiantes a mejorar su razonamiento y la compresión sobre los conceptos matemáticos.

La secuencia didáctica puede estar sujeta a los cambios necesarios para el enriquecimiento de la labor docente dependiendo de las dificultades y concepciones que tengan los estudiantes sobre el reconocimiento de patrones y regularidades para llegar a la construcción del concepto de variable como número general, como del contexto donde se mueve el estudiante y del currículo que la institución educativa maneje, debido al enfoque pedagógico que utilice. Pero los cambios deben estar sujetos a los niveles que sugiera La unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa expuesta por (Moreira, 2011).

REFERENCIAS

Agudelo Valderrama, C (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico.* Tunja: universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). *Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar, Revista EMA,* 10(2)- 10(3), 375-412.

Agudelo-Valderrama, C. (2007). *La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza, Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación,* 5(1), 43-62.

Artacho, A. (2015). *Solución al reto de las 54 cerillas y los cuadrados. España, Matematicascercanas.com.* Recuperado de https://matematicascercanas.com/sobre-el-blog-y-su-autor/

Ausubel, D. P., Novak, J. D. & Hanesian, H. (1989). *Psicología cognitiva. Un punto de vista cognoscitivo.* Méjico. Trillas.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor (NFER-Nelson: Windsor).

Booth, L. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra*. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Cuaderno de cultura científica. (2014). *El salto de la rana, y familia*. Bilbao, España. Recuperado de: https://culturacientifica.com/2014/01/15/el-salto-de-la-rana-y-familia/

Giordan, A. (1996). *¿Cómo ir más allá de los modelos constructivistas?.* La utilización didáctica de las concepciones de los estudiantes. Investigación en la Escuela, 28, 7-22.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Síntesis N º 33. España.

Grupo Pretexto. (1999). *Transición aritmética álgebra.* 2 Ed., Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Kieran, C. (1989). *The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective*. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. E. (1980). *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children.* Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London.

Küchemann, D. (1981). *Algebra.* Children's understanding of mathematics. London: John Murray.

Martínez, J. R. (2004). *Concepción de aprendizaje, metacognición y cambio conceptual en estudiantes universitarios de psicología*. Universidad de Barcelona. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=3417

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra*. Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer.

Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. & Gowar, N. (2014). *Raíces del algebra y rutas hacia el álgebra*. Ibagué. Universidad del Tolima.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2002). *Estándares curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana y ciencias naturales y educación ambiental para la educación preescolar, básica y media*. Recuperado de: www.mineducacion.gov.co

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Y Ciudadanas, 46–95.

Moreira, M. A. (2011). *Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas – UEPS.* Aprendizaje Significativa en Revista. Porto Alegre. v. 1, n. 2, 43-63.

Osborne, R. J. & Witrock, M.C. (1983). *Learning science: A generative process.* Science Education, 67, 489-508.

Rodrigo M. J.; Rodríguez A. & Marrero J. (1993). *Las teorías implícitas: Una aproximación al conocimiento cotidiano.* Primera edición. Madrid: Visor.

Skemp, R. (1978). *Relational understanding and instrumental understanding*. Arithmetic Teacher 26(3), 9-15.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Madrid: Morata

Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). *First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable.* En Annie Selden, Ed Dubinsky, Guershon Harel y Fernando

Hitt (eds.), CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 12. Research in Collegiate Mathematics Education V, American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America, vol. V, 1-29

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental.* Una propuesta alternativa. Trillas: México.

Universidad del Tolima	**PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS** **AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL**	Página **1** de **3**
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

Ronald Andres Cabrera Montealegre	con C.C N°	1.110.476.108
Carlos Andres Castillo Morales	con C.C N°	1.110.538454
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar X

No Autorizar **Motivo**: ____________________

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			

Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 *"…Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro"*. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Título completo: PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL BASADA EN EL MODELO 3UV

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): __________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): __________

- Artículo publicado en revista: __________

- Capítulo publicado en libro: __________

- Conferencia a la que se presentó: __________

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **18** Mes: **MAYO** Año: **2018**

Autores:		Firma		
Nombre:	Ronald Andres Cabrera Montealegre		C.C.	1.110.476.108
Nombre:	Carlos Andres Castillo Morales	Carlos Castillo.	C.C.	1.110.538454
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.