

**SIGNIFICADO DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y EL USO DE LA PALABRA PROMEDIO
PARA LOS ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO DE UNA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA DE IBAGUÉ**

JHONY ALEXANDER RODRÍGUEZ CIFUENTES

**Trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en
Matemáticas**

**DIRECTORA
DICLENY CASTRO CARVAJAL
Magíster en Educación**

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ-TOLIMA
2018**



ACTA DE SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TRABAJOS DE GRADO

Fecha: 30 AGOSTO DE 2018
Hora: 4:30 P.M.
Lugar: SALA DE CONSEJO FACULTAD DE EDUCACION

Título del Trabajo: SIGNIFICADO DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y EL USO DE LA PALABRA PROMEDIO PARA LOS ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉSIMO DE UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE IBAQUE

Autor(es): JHONY ALEXANDER RODRIGUEZ Código 051150057012
CIFUENTES Código _____
Código _____

Asesor: DICLENY CASTRO CARVAJAL

		JURADO	
	Puntaje máximo	DAGOBERTO SALGADO	MIGUEL RODRIGUEZ
1. Informe Final (Máximo 80 Puntos)			
1.1 Cumplimiento de los objetivos del proyecto	15	15	15
1.2. Revisión Bibliográfica y cumplimiento de las normas de presentación.	5	4	4
1.3. Metodología Usada de acuerdo al tipo de trabajo	15	13	13
1.4. Interpretación y discusión de resultados.	25	24	24
1.5. Calidad del trabajo y aporte al conocimiento.	20	18	18
2. Sustentación Pública (Máximo 20 Puntos)			
2.1. Preparación, organización y presentación del material	4	4	4
2.2. Claridad en la exposición e interpretación de los resultados y conclusiones	10	10	10
2.3. Dominio del tema y precisión de las propuestas	6	6	6
Puntaje Final:		94	94

Calificación (Puntaje/20): Letras-Número 4,7 Concepto: MEZITOTIO

En constancia firman:

Nombre Jurado: DAGOBERTO SALGADO HORTA

Firma:

Nombre Asesor: _____

Firma:

Nombre Jurado: MIGUEL ARMANDO RODRIGUEZ M.

Firma:

Director de Programa: Edwin Bernal Castillo

Firma:

RESUMEN

La presente investigación, surge a partir de la preocupación por la ausencia de la estadística en el aula de matemáticas, situación que ha hecho que los estudiantes tengan un conocimiento mínimo sobre el área de estadística que tanta importancia debería tener en la actualidad tanto académicamente como para la formación de ciudadanos críticos. Por lo anterior, se buscaba evaluar a los estudiantes de una Institución Educativa con la finalidad de evaluar el significado adquirido por los estudiantes.

Se aplicó un instrumento de evaluación con 9 preguntas, a 148 estudiantes de grado 11°, para evaluar la comprensión conceptual y procedimental de la resolución de problemas que involucraran la media aritmética y su idea de promedio. Del total de estudiantes encuestados, se obtuvo una muestra intencional con un criterio de selección que diera a conocer algunas características sobre el significado personal adquirido por los estudiantes al finalizar su ciclo escolar y la comparación de estos resultados con los documentos oficiales que rigen las escuelas a nivel nacional. Las respuestas analizadas informan que los estudiantes tienen dificultades para conceptualizar sobre la media aritmética e interpretar un promedio.

Palabras clave: Media aritmética, promedio, significado personal y significado institucional.

ABSTRACT

The current research emerges from the concern of the lack of statistics in the math's classroom. This situation have done that the students have a minimum knowledge about statistics that should have a bigger importance nowadays both academically and a way to form critically minded citizens. For what a mentioned before, the objective was to evaluate the students of a school with the purpose of measuring the meaning acquired by the students.

It was applied an evaluation tool with 9 questions, to 148 students of 11° grade, to evaluate the conceptual and procedural comprehension of problem resolution that involves the "arithmetic mean" and their "idea of average". From the total of the students surveyed, it was gotten an intentional sample with a criterion of selection that show some characteristics about the personal meaning acquired by the students at the end of their school cycle and the comparison of this results with the official documents that rule the schools national level. The answers analyzed showed that students have difficulties to conceptualize about the "arithmetic mean" and their "idea of average".

Keywords: Arithmetic mean, average, personal meaning and institutional meaning.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. JUSTIFICACIÓN	15
2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	22
3. OBJETIVOS	24
3.1. OBJETIVO GENERAL	24
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
4. MARCO TEÓRICO	25
4.1. SIGNIFICADO PERSONAL E INSTITUCIONAL	25
4.1.1. Enfoque ontosemiótico	35
4.2. PROMEDIOS	42
4.2.1. Promedio Aritmético	47
4.2.1.1. Ventajas	47
4.2.1.2. Desventajas	48
4.2.2. La mediana	49
4.2.3. Moda o valor modal	49
4.2.4. Media geométrica	49
4.2.5. Media armónica	50
4.3. ERRORES Y DIFICULTADES	50
4.4. DOCUMENTOS CURRICULARES	59
4.4.1. Libros de texto como material curricular	68
4.5. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DEL OBJETO ESTADÍSTICO MEDIA ARITMÉTICA	70
4.5.1. Definiciones de media	71
4.5.1.1. Media como algoritmo	71

4.5.1.2. Media como promedio	71
4.5.2. Campos de problemas	71
4.5.2.1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizada en presencia de errores	72
4.5.2.2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme	72
4.5.2.3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dado, cuya distribución es aproximadamente simétrica.	72
4.5.2.4. Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población	72
4.5.2.5. Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas	72
4.5.3. Lenguajes	72
4.5.3.1. Lenguaje verbal	72
4.5.3.2. Lenguaje gráfico	74
4.5.4. Propiedades numéricas	75
4.5.4.1. La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio	75
4.5.4.2. La media no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos	75
4.5.4.3. En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos	75
4.5.4.4. La media se ve alterada por cualquier cambio en los datos	75
4.5.5. Propiedades algebraicas	75
4.5.5.1. El cálculo de la media no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado	76
4.5.5.2. La media no tiene elemento neutro ni simétrico	76
4.5.5.3. La media no tiene la propiedad asociativa para el caso general	76
4.5.5.4. La media es una operación conmutativa	76
4.5.5.5. La media conserva los cambios de origen y de escala	76
4.5.5.6. La media de la suma de 2 o más variables es igual a la suma de las medias de dichas variables	76
4.5.5.7. La media siempre existe en datos numéricos y es única	76
4.5.6. Propiedades estadísticas	76

4.5.6.1. La media es un representante del conjunto de datos	76
4.5.6.2. La media coincide con el centro del conjunto de datos	77
4.5.6.3. En distribuciones simétricas	77
4.5.6.4. La media es un estadístico poco resistente	77
4.5.6.5. La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es 0	77
4.5.6.6. La suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima	77
4.5.6.7. Para datos agrupados en intervalos, con alguno de ellos abierto, también es preferible la mediana a la media	77
4.5.6.8. Existen modas tanto para variables cuantitativas como cualitativas	77
4.5.6.9. En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media	77
4.5.7. Procedimientos de cálculo	78
4.5.7.1. Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados	78
4.5.7.2. Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias	78
4.5.7.3. Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clase	78
4.5.7.4. Cálculo de la media de manera gráfica	78
4.5.7.5. Cálculo de la media mediante calculadora u ordenador	79
4.5.7.6. Inversión del algoritmo del cálculo de la media	79
4.5.7.7. Construir una distribución a partir de una media dada	79
 5. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	 81
5.1. TIPO DE ESTUDIO	81
5.2. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN	83
5.3. PROCESO DE INVESTIGACIÓN	84
5.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	85
 6. PRESENTACIÓN DEL CUESTIONARIO	 86
 7. ANÁLISIS DE RESULTADOS	 90

7.1. DEFINICIÓN DE MEDIA	93
7.2. CAMPOS DE PROBLEMAS	106
7.3. PROPIEDADES NUMÉRICAS	111
7.4. PROPIEDADES ALGEBRAICAS	121
7.5. PROPIEDADES ESTADÍSTICAS	126
7.6. PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO	133
 8. CONCLUSIONES	 148
8.1. CONCLUSIONES ESPECÍFICAS	148
8.2. CONCLUSIONES GENERALES	151
8.3. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN FUTURA	152
 REFERENCIAS	 154
 ANEXO 1. CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN APLICADO A LOS ESTUDIANTES	 158

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Objetos y procesos primarios	41
Figura 2. Preferencia de helados de los estudiantes de 1A	63
Figura 3. Puntos lanzamiento dados	64
Figura 4. Datos encuesta	65
Figura 5. Actividad física	66
Figura 6. Frecuencias estanques	66
Figura 7. Diagrama rendimiento de los grupos	67
Figura 8. Revista científica	68
Figura 9. Diagrama de barras de la venta de bocadillos	88
Figura 10. Características del significado de la palabra promedio	90
Figura 11. Definición de media en el ítem 2	94
Figura 12. Definición de media en el ítem 2.1.	96
Figura 13. Definición de media en el ítem 4	97
Figura 14. Definición de media en el ítem 5	99
Figura 15. Definición de media en el Ítem 6	101
Figura 16. Definición de media en el ítem 7	102
Figura 17. Definición de media en el ítem 8	104
Figura 18. Campos de problemas en el ítem 2	106
Figura 19. Campos de problemas en el Ítem 3	108
Figura 20. Campos de problemas en el ítem 6	110
Figura 21. Propiedades numéricas en el ítem 2.1.	112
Figura 22. Propiedades numéricas en el ítem 4	114
Figura 23. Propiedades numéricas en el ítem 5	115
Figura 24. Propiedades numéricas en el ítem 6	117
Figura 25. Propiedades numéricas en el ítem 8	119
Figura 26. Propiedades algebraicas en el ítem 2	121
Figura 27. Propiedades algebraicas en el ítem 6	123
Figura 28. Propiedades algebraicas en el ítem 8	125
Figura 29. Propiedades estadísticas en el ítem 2	127

Figura 30. Propiedades estadísticas en el ítem 3	128
Figura 31. Propiedades estadísticas en el ítem 4	130
Figura 32. Propiedades estadísticas en el ítem 5	132
Figura 33. Procedimientos de cálculo en el ítem 2.1.	134
Figura 34. Procedimientos de cálculo en el ítem 4	136
Figura 35. Procedimientos de cálculo en el ítem 5	138
Figura 36. Procedimientos de cálculo en el ítem 6	140
Figura 37. Procedimientos de cálculo en el ítem 7	142
Figura 38. Procedimientos de cálculo en el ítem 8	143

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas referentes al promedio	62
Tabla 2. Conjunto de datos de las 100 mujeres	89
Tabla 3. Categorías de respuesta en el ítem 1	90
Tabla 4. Definición de media en el ítem 2	94
Tabla 5. Definición de media en el ítem 2.1	95
Tabla 6. Definición de media en el ítem 4	97
Tabla 7. Definición de media en el ítem 5	98
Tabla 8. Definición de media en el ítem 6	100
Tabla 9. Definición de media en el ítem 7	102
Tabla 10. Definición de media en el ítem 8	104
Tabla 11. Campos de problemas en el ítem 2	106
Tabla 12. Campos de problemas en el ítem 3	108
Tabla 13. Campos de problemas en el ítem 6	110
Tabla 14. Propiedades numéricas en el ítem 2.1	112
Tabla 15. Propiedades numéricas en el ítem 4	113
Tabla 16. Propiedades numéricas en el ítem 5	115
Tabla 17. Propiedades numéricas en el ítem 6	117
Tabla 18. Propiedades numéricas en el ítem 8	119
Tabla 19. Propiedades algebraicas en el ítem 2	121
Tabla 20. Propiedades algebraicas en el ítem 6	123
Tabla 21. Propiedades algebraicas en el ítem 8	124
Tabla 22. Propiedades estadísticas en el ítem 2	126
Tabla 23. Propiedades estadísticas en el ítem 3	128
Tabla 24. Propiedades estadísticas en el ítem 4	130
Tabla 25. Propiedades estadísticas en el ítem 5	131
Tabla 26. Procedimientos de cálculo en el ítem 2.1	134
Tabla 27. Procedimientos de cálculo en el ítem 4	136
Tabla 28. Procedimientos de cálculo en el ítem 5	138

Tabla 29. Procedimientos de cálculo en el ítem 6	139
Tabla 30. Procedimientos de cálculo en el ítem 7	141
Tabla 31. Procedimientos de cálculo en el ítem 8	143
Tabla 32. Una evaluación del significado personal de los estudiantes de grado undécimo frente a lo que proponen los Estándares Básicos de Competencia, en relación con la media aritmética	146

INTRODUCCIÓN

Desde la Ley General de Educación en Colombia, seguido de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias hasta los Derechos Básicos de Aprendizaje, todos emitidos por el Ministerio de Educación Nacional, soportan un marco legal de la enseñanza de las matemáticas en Colombia, donde se le considera a la estadística una asignatura que forma parte del área las matemáticas escolares. Esta forma de ver la estadística en la escuela, ha sido motivo para disminuir su enseñanza (en el peor de los casos, omitirla), contrario a la realidad que presenta el mundo, donde el crecimiento en su uso y conocimiento ha sido relevante.

Un concepto muy usual y fundamental en la enseñanza de la estadística, es el uso de la palabra promedio, término que aparece en los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas, en particular, para el pensamiento aleatorio, en el conjunto de grados desde cuarto y quinto de básica primaria, hasta décimo y undécimo. Además, hasta la gente del común la usa para dar un indicador de determinadas situaciones. En este sentido, se considera pertinente el estudio de su significado, en particular, para la media aritmética.

Interesados en darle el reconocimiento curricular, académico y cultural que se merece la estadística como ciencia, se ha tomado la escuela como punto de partida, ya que, desde allí, se puede orientar a las sociedades sobre la importancia y relevancia de la estadística en la cultura y en la sociedad. Asimismo, se deben generar importantes cambios en los diferentes documentos institucionales, donde se priorice la enseñanza de la estadística, para lograr un impacto mayor en todos los miembros de la comunidad escolar.

Aunque a través del pensamiento aleatorio se propone enseñar algunos contenidos básicos de la estadística en la básica primaria, secundaria y media, no se alcanzan las mínimas competencias para desarrollar pensamiento estadístico, situación que preocupa, en el sentido de no poder responder académicamente ni culturalmente a las

necesidades de este conocimiento. Por esta razón, se debe promover la enseñanza de la estadística, a los maestros en formación, para que ellos puedan transponer sus conocimientos en el aula, lo que se espera genere un cambio positivo en las competencias que adquieran los estudiantes sobre la estadística.

De manera general, se pretende diferenciar la naturaleza de la estadística de las matemáticas, con sus respectivos propósitos de estudio y de manera particular, interesa indagar por el conocimiento que tienen los estudiantes para calcular e interpretar la media aritmética como un promedio y las representaciones que usan para ello, porque es un concepto estadístico, pero toma aspectos de las matemáticas para su uso, lo que puede dar una idea clara sobre las diferencias que existe entre la estadística y las matemáticas.

Se estudiará en detalle la media aritmética desde el punto de vista teórico, desde el desarrollo curricular que podría estar influenciado por las definiciones que se presentan en algunos libros de texto, además de la evidencia o ausencia del desarrollo de los estándares básicos de competencia, en particular, para el pensamiento aleatorio. Asimismo, se describirán y analizarán las categorías abordadas en el cuestionario, a través de situaciones problémicas, interesados también en la interpretación que logran hacer los estudiantes, con la finalidad de mostrar los conocimientos que estos alcanzan durante su ciclo académico. Por lo tanto, se ha tomado el uso de este término desde diferentes perspectivas (gráfica, textual, matemática, etc.), con el fin de analizar si los estudiantes logran la comprensión del significado durante el desarrollo de su etapa escolar.

Se espera, con la presente investigación, aportar a la enseñanza de la estadística, avanzar en el reconocimiento que actualmente tiene en la sociedad, con el fin de lograr una cultura encaminada al uso de la estadística en su cotidianidad.

1. JUSTIFICACIÓN

Este proyecto, pretende justificar las razones por las cuales se hace necesaria la enseñanza de la estadística en el desarrollo curricular de las matemáticas escolares.

Durante el último tiempo, la estadística se ha vuelto un área de conocimiento importante para el ser humano en el mundo, por esta razón, en la actualidad, la estadística se ha incorporado, de forma generalizada, al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria (Batanero, 2000a, p. 41), con el ideal de formar ciudadanos con conocimientos básicos sobre estadística. Sin embargo, la importancia atribuida actualmente a la estadística en la enseñanza obligatoria, reconocida por la sociedad y por otras disciplinas, contrasta con la poca formación que sobre esta materia acostumbran tener los profesores en formación (Estrada, Batanero & Fortuny, 2004, p. 90).

En Colombia, a través de la Ley 115 y otras reformas educativas, se han dado herramientas a los docentes, por ejemplo, los lineamientos curriculares para cada área, los cuales son los puntos de partida para la elaboración de planes de área, proporcionando orientaciones y recomendaciones para cada planeación curricular (Cárdenas & Segovia, 2011, p. 23).

Desde los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998), se define a la probabilidad y la estadística como:

Ramas de las matemáticas que desarrollan procedimientos para cuantificar, proponen leyes para controlar y elaboran modelos para explicar situaciones que por presentar múltiples variables y de efectos impredecibles son consideradas como regidas por el azar, y por tanto denominadas aleatorias (p. 17).

Sin embargo, se tienen otras concepciones acerca de la estadística, algunos la definen como herramienta, otras definiciones como metodología en el análisis de la información y otras definiciones como ciencia.

En este trabajo, se tendrá en cuenta la definición de la estadística como ciencia, tal cual como la presenta Cabriá (1994):

La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final. (Citado por Batanero, 2001, p. 9).

La estadística como ciencia, tuvo su apogeo durante el siglo XX, porque ha pasado a considerarse una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental (Batanero, 2001, p. 7). La importancia que ha tenido la estadística, se ha visto reflejada en otras áreas de conocimiento, como método de investigación.

Los lineamientos curriculares de matemáticas presentan los conocimientos básicos a través de cinco tipos de pensamiento con su respectivo sistema, con el fin de diferenciar los conceptos y procedimientos que a su vez favorezcan los procesos de pensamiento y les permita desarrollar competencias para resolver problemas, conforme avanza en los niveles de grado.

Los Estándares Básicos de Competencias, están divididos en los cinco tipos de pensamiento propuestos desde los lineamientos (aleatorio, métrico, espacial, numérico y variacional), siendo el uso de la media aritmética uno de los conceptos más destacados en lo correspondiente al pensamiento aleatorio (aunque de manera implícita se encuentra en los pensamientos numérico y variacional) ya que aparece inmerso en cada

uno de los niveles de grados allí propuestos. Por esta razón, surge el interés en conocer si los estudiantes de grado undécimo han logrado los conocimientos mínimos sobre estadística (según lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas).

Holmes (1980) (como se citó en Batanero, 2000b), define algunas características relevantes sobre la importancia de la estadística, estas son:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados.
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. La estadística es indispensable en el estudio los fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio, y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones (Ottaviani, 1998).
- Ayuda a comprender otros temas del curriculum, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos (p. 2).

Si bien existen otras categorías, las anteriores conforman la base que sustenta el uso de la estadística de manera general. Debido a esto, la importancia de enseñar estadística cada día adquiere más relevancia (por todas sus ventajas), aunque se puede observar que la estadística recibe poca atención dentro de las clases de matemáticas (Mayén, 2009, p. 10).

Además, existe la tendencia de enseñar las matemáticas centradas en el contenido determinista, dejando para el final, la enseñanza de lo aleatorio. Tal vez por estas causas, no es de extrañar que los alumnos estén desmotivados y la estadística termine siendo una de las asignaturas menos populares para los estudiantes (Batanero, 2002, p. 11).

Al no tener la motivación necesaria sobre la estadística, es posible que se presente dificultad para la recepción, la comunicación e interpretación por parte de los estudiantes, respecto a la información estadística que presentan los medios de comunicación.

En la actualidad, la información está presente en todos los medios de comunicación, los cuales utilizan la estadística y sus herramientas para hacerla atractiva visualmente y sintética en su contenido, de tal manera que le interese al lector (Méndez, Vargas, Rendón & Esteban, 2013, p. 403). Por esta razón, se hace necesaria la creación de una cultura estadística, tal como lo propone también Guadalupe (2008) en la “Sexta Reunión de Expertos Gubernamentales en difusión de la información estadística” sobre cultura estadística:

La propuesta que se presenta sobre el desarrollo de una cultura estadística, para ser aplicada en los países de la Comunidad Andina, no pretende convertir a los futuros ciudadanos en “estadísticos aficionados”, puesto que la aplicación razonable y eficiente de la estadística para la resolución de problemas, requiere un amplio conocimiento de esta materia y es competencia de los estadísticos profesionales. Tampoco intenta capacitarlos en el cálculo y la representación gráfica, puesto que las computadoras hoy día resuelven este problema. Lo que pretende es

fortalecer una cultura estadística en la región, es decir, lograr en el largo plazo “Una sociedad estadísticamente culta (p. 8).

A continuación, se va a definir, qué se entiende por cultura estadística Gaal (cómo se citó en Batanero, 2002):

Se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (p. 4).

Desde la presente investigación, se busca resaltar que es en la cultura, en la sociedad, donde definimos quiénes somos y para dónde vamos, tal como lo citan (Equipo académico, 2009) “la realidad de la vida cotidiana es la suprema realidad, que ya existía antes de que yo naciera” (p. 1).

El propósito de este estudio, es mostrar como desde la cultura, tal como se afirma en (Equipo académico, 2009) “el proceso por el cual se llega a ser hombre se produce en una interrelación con un ambiente natural y humano, es decir con un orden cultural y social” (p. 5), se puede aportar significativamente a la adquisición de conocimiento. En este proceso de formación, utilizamos un lenguaje “cotidiano”, pero con palabras que tienen un concepto bastante complejo, aunque le damos un significado bastante sencillo (en la presente investigación, la palabra promedio está inmersa en esta situación).

La educación juega un papel fundamental en el desarrollo de la cultura, debido a que es la encargada de formar ciudadanos acordes a las exigencias de la sociedad. Es común escuchar el término alfabetización en nuestro entorno (ligado a conocimientos básicos de lectura y escritura), desconociendo la amplitud que tiene actualmente este concepto

en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, alfabetización biológica, alfabetización etológica, alfabetización emocional, alfabetización matemática, alfabetización geométrica, alfabetización arquitectónica... (García, 2009, p. 61).

A continuación, se presenta la definición de alfabetización para la UNESCO (citado en García, 2009):

Reafirma que la alfabetización para todos es la esencia de la educación básica para todos y que la creación de entornos y sociedades alfabetizados es esencial, para lograr los objetivos de erradicar la pobreza, reducir la mortalidad infantil, poner coto al crecimiento de la población, lograr la igualdad entre los géneros y lograr un desarrollo sostenible, la paz y la democracia (p. 55).

En la estadística también se está promoviendo el concepto de alfabetización estadística, empezando por los profesores en formación, debido a que, en contraste, la enseñanza de la estadística se ha centrado en la enseñanza de las técnicas y procedimientos; pero ha fallado al promover la comprensión y el razonamiento estadístico (Zapata, 2010, p. 99).

También se busca motivar a la transversalidad del currículo, ya que en la actualidad aún se evidencia una separación entre las humanidades y las ciencias, tal como lo afirma García (2009) “personalmente creo que ha sido esta perspectiva, de leer encadenado a los temas, de leer desde un solo campo de conocimiento, la riada que socavó la garganta que separó las “dos culturas”, las humanidades y las ciencias” (p. 61).

Se espera que los estudiantes logren la competencia comunicativa, que es usualmente el principal medio para expresar y comprender las ideas estadísticas, el medio por el cual los estudiantes construyen su conocimiento y el medio para procesar ideas (Zapata, 2010, p. 101); además, que el habla y la escritura se amalgaman en la actividad humana

contribuyendo a la estructura y la forma de las prácticas culturales y a la dignidad de la vida en la comunidad (García, 2009, p. 53).

Al llegar a la Universidad, los estudiantes llegan con vacíos de conocimiento, dificultando la labor de los profesores de estadística, que deben iniciar de cero la enseñanza de la estadística. El principal problema de esta situación, es que los docentes han de acelerar las explicaciones, suprimir las actividades prácticas y gran parte de las demostraciones o razonamientos que podrían llevar al alumno a comprender mejor la metodología de la estadística (Batanero, 2002, p. 11).

La necesidad de realizar esta investigación, surge a raíz de la problemática universitaria que se observa en la actualidad, por esta razón, el grado 11 es el apropiado para conocer qué significados tienen los estudiantes acerca de un concepto de la estadística (en este caso, específicamente sobre el promedio), porque tal como lo afirma Zapata (2010) “afortunadamente, se encontró que la trayectoria del razonamiento estadístico que siguen los estadísticos de profesión es diferente a la trayectoria que sigue la clase de estadística” (p. 98). En la clase de estadística, sólo se busca una “fundamentación teórica”, dejando a un lado la investigación y aplicación.

La estadística, es una de las áreas de conocimiento que más se utiliza en la actualidad, por su carácter interdisciplinario, por eso desde la escuela, se debería como fase exploratoria, evaluar la utilidad de la estadística en las diferentes ciencias, con la intención de obtener un diagnóstico sobre las ideas que tienen los estudiantes acerca de la estadística (Méndez et al., 2013, p. 404).

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Aunque la estadística está incluida en los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias de matemáticas, existen diagnósticos, como por ejemplo el de Cárdenas & Segovia (2011), realizado en la ciudad de Ibagué a los estudiantes de grado décimo en una Institución Educativa, sobre las dificultades que tienen estos estudiantes sobre la media aritmética. Estos diagnósticos, demuestran la ausencia del desarrollo de un currículo que le permita al estudiante desarrollar competencias en el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. Tarea que, por lo general, se le ha dejado al profesor de matemáticas, en el mejor de los casos.

Si bien desde el siglo XX, la estadística ganó su reconocimiento como ciencia y cada vez más se convierte en el apoyo para el desarrollo de otras ciencias, actualmente en las escuelas es una asignatura que aún sigue en segundo plano (es decir, la estadística vive a la sombra de la matemática), esto debido a distintos factores tales como la formación que han tenido los educadores que actualmente ejercen su labor docente; además, la importancia que se le brindan a los pensamientos y sistemas matemáticos (pensamiento numérico, métrico, variacional y espacial) por encima del pensamiento aleatorio que como se mencionó anteriormente, tiene una importancia real y práctica en la actualidad. Por otra parte, culturalmente y como consecuencia de lo anterior, la estadística se ignora en la aplicación y en la interpretación, que debería hacer un ciudadano frente a la información de tipo económica, política y social que se le presenta, así mismo, su utilidad en varias áreas del conocimiento para entender el mundo en el que vive.

Planteado este contexto, el problema se formula de la siguiente manera: *¿Cuál es el significado de la media aritmética como promedio, para los estudiantes de undécimo grado de una Institución Educativa de Ibagué?*

Para responder a esta pregunta, se aplicará un cuestionario donde se aborden la media aritmética asumida como promedio, desde distintas formas de solución, que permita

evaluar y analizar los algoritmos, las definiciones, las propiedades y los argumentos sobre la media aritmética.

La idea central de esta propuesta de investigación, es mostrar un diagnóstico del significado y comprensión de la palabra promedio, en particular de la media aritmética, para los estudiantes de undécimo grado. De esta forma, se espera poder describir detalladamente los errores y dificultades desde el punto de vista del concepto, para definir, calcular, interpretar y usar la palabra promedio en relación con la media aritmética. En resumen, se estudiará la estructura conceptual de la media aritmética y la influencia cultural de acuerdo a los modos de uso de la palabra promedio, en situaciones y contexto.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

- Caracterizar el significado personal de los estudiantes de grado undécimo, sobre la media aritmética como promedio.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las características del significado personal de los estudiantes que tienen los estudiantes sobre el promedio.
- Identificar si hay diferencias en el significado personal de los estudiantes de grado undécimo, sobre la palabra promedio.
- Contrastar lo que proponen los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento aleatorio en los niveles de primero a once, en lo que se refiere a la media aritmética y lo que evidencia el significado personal de los estudiantes de grado undécimo.
- Describir los principales errores y dificultades que presentan los estudiantes de grado undécimo cuando se enfrentan a situaciones que involucran la media aritmética.

4. MARCO TEÓRICO

El desarrollo del marco teórico estará dividido en varias fases. La primera, refiere a “relación personal e institucional del objeto” (Chevallard, 1992, Citado por D'Amore & Godino, 2007, p. 208), esto con el propósito de reconocer los objetos de la estadística, sus significados y sus representaciones, en particular, para la media aritmética.

En segundo lugar, se va a estudiar las propiedades de los promedios, para conocer las características principales de cada uno (en su manera de calcularlos e interpretarlos).

La tercera categoría se centrará en los errores y dificultades que los estudiantes presentan a la hora de calcular la media aritmética y de su interpretación como promedio, en situaciones problemáticas.

Como cuarta categoría, se presentará el propósito cultural y académico que tiene la enseñanza y aprendizaje de la media aritmética, desde el marco legal, lo que proponen los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia en matemáticas en el pensamiento aleatorio y desde la necesidad de alfabetizar al ciudadano de hoy en conceptos tan usados, pero no siempre tan bien interpretados, como el promedio.

Por último, se estudiarán las categorías que se incluyeron en el cuestionario, en torno al concepto, propiedades y representación de la media aritmética en los distintos problemas que se plantearon.

4.1. SIGNIFICADO PERSONAL E INSTITUCIONAL

El significado, es una palabra que, aunque común en nuestro lenguaje, presenta un carácter complejo en su definición, por esta razón, es un tema central controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana (Godino & Batanero, 1994, p. 1). El significado surge de acuerdo al uso que

cada persona hace de las palabras, tal como lo afirman Ogden & Richards (1984), “sólo cuando un sujeto pensante hace uso de ellas, representan algo, o en un sentido, tienen significado” (p. 35). El contexto juega un papel fundamental en el significado de las palabras u oraciones, porque la influencia del entorno afecta directamente en lo que expresamos, tal como lo afirma Frazer (1909):

si pudiéramos abrir las cabezas y leer los pensamientos de dos hombres de la misma generación y del mismo país, pero ubicados en extremos opuestos de la escala intelectual, encontraríamos probablemente que sus mentes son tan diferentes como si pertenecieran a diferentes especies” (Citado por Ogden & Richards, 1984, p. 50).

Lo anterior, demuestra que el contexto juega un papel importante en el desarrollo de pensamientos en las distintas culturas. Desde las matemáticas, existen distintos tipos de representación, para la comprensión de los objetos matemáticos. Además, porque al utilizar un único tipo de representación, la significación del objeto matemático, puede estar limitada, tal como lo afirma Vergnaud (1990) “un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza” (Como se puede leer en Godino & Batanero, 1994, p. 12), debido a que sería un modelo de educación tradicional, donde predomina lo simbólico (definiciones). La utilización de distintos tipos de representación, puede conducir a un aprendizaje más apropiado de los conceptos matemáticos, debido a que, al emplear representaciones distintas a la definición típica de matemáticas, el proceso de enseñanza-aprendizaje será más efectivo.

Para Duval (1999), lo primero es que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación (p. 13). Además de eso, hay que reconocer la importancia de las situaciones en la consecución de conceptos matemáticos, tal como lo afirma Vergnaud (1990):

son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo” (Citado en Godino & Batanero, 1994, p. 12).

En el aula de matemáticas, la enseñanza a través de situaciones es algo muy poco común, porque los profesores (como se ha mencionado anteriormente), priorizan las definiciones, lo que conlleva a que el estudiante no se apropie de los conocimientos y mucho menos que pueda aplicarlos en situaciones reales.

Desde las matemáticas, estas situaciones se representan desde distintos sistemas, lo que puede ayudar en la comprensión de los objetos matemáticos, como se puede ver en Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, & Gorrochategui (2012):

En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. (p.30).

La importancia de la resolución de problemas en la utilización de los distintos sistemas de escritura, es relevante, a la hora de aplicar las distintas representaciones del objeto matemático en cuestión. Al respecto, Godino & Batanero (1994), afirman lo siguiente:

En la resolución de estos problemas matemáticos se precisa, por tanto, buscar dentro del campo de problemas lo esencial entre los distintos contextos, las relaciones con otras situaciones, problemas o

procedimientos; es también característica la actividad de simbolizar, formular, validar, generalizar, ...; en definitiva, y como describe Freudenthal (1991), matematizar (p. 8).

La matematización es una herramienta necesaria en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, porque es a través de este proceso, donde se encuentra una aplicabilidad a la matemática, lo que la vuelve más atractiva para las personas que no son muy receptivas con las matemáticas.

Desde la didáctica de las matemáticas, es necesario estudiar estos sistemas de escritura, como ayuda para el desarrollo de la investigación, tal como se realizó en Cobo (2003):

Otro punto que hemos analizado son los términos, símbolos y representaciones tabulares o gráficas empleadas en el tema. Este tipo de elementos de significado de un objeto matemático sirve para representar las definiciones y propiedades de dicho objeto, así como los problemas y datos (p. 119).

Por esta razón, es necesario estudiar las distintas representaciones de un objeto matemático, para no crear nociones parciales sobre este objeto, lo que influirá al mismo tiempo en la familiarización de otro tipo de lenguajes, por ejemplo, el de las imágenes, porque como se afirma en (Cobo & Batanero, 2004, p. 16) “en un mundo dominado por la imagen, sería quizás interesante que los alumnos lo usaran con este otro lenguaje”.

Lo anterior, se debe realizar con la finalidad de que las representaciones de los objetos y, en general, el lenguaje matemático evolucione para conseguir una mejor expresión de la funcionalidad, las propiedades y las relaciones del objeto matemático, así como favorecer la actividad procedimental en los registros semióticos (Pecharromán, 2013, p. 126). El uso de distintos lenguajes, puede contribuir en la familiarización de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

El aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales (Duval, 1999, p. 13). El privilegio que tiene las matemáticas, se debe a que es un proceso permanente en la vida de los individuos, porque desde las primeras etapas de la vida, de manera inconsciente, aprendemos matemáticas.

Uno de los aspectos que más llama la atención desde el aspecto cognitivo, es el significado, por esta razón, desde sus inicios, la didáctica de la matemática se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción (Godino & Batanero, 1994, p. 2).

Entender el significado de los alumnos, puede ser un paso importante para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje en el aula. Entonces, es importante reconocer, como en Cobo (2003), que “el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino compuesta y relativa a los contextos institucionales” (p. 39). Por lo tanto, es importante que el estudiante conozca el significado de los saberes, con los cuales interactúa constantemente, con el fin de que tenga claridad acerca de la naturaleza de dichos conocimientos (Betancourt, 2012, p. 30).

El adquirir el significado de un saber, puede contribuir de forma diferencial en la adquisición de saberes futuros, además de servir como motivación en la adquisición de estos conocimientos. Es importante reconocer, que los significados de un objeto matemático, se distribuyen en personales e institucionales, existiendo una relación directa entre ambos.

Para la adquisición del significado de un saber matemático, existe influencia de otros factores tanto personales como institucionales, como se afirma en D'Amore (2006) “la noción de “significado institucional y personal de los objetos matemáticos” implica a las de “práctica personal”, “sistema de prácticas personales”, “objeto personal (o mental)”, herramientas útiles para el estudio de la “cognición matemática individual”” (citando a

Godino & Batanero, 1994; 1998) (p. 180). Para cada uno de estos factores, existe un apartado similar para la versión institucional (D'Amore, 2006, p. 180).

Batanero (2000a) presenta una diferenciación existente entre significado institucional y personal “al considerar una cierta institución escolar, como la escuela primaria, el significado construido por un alumno particular, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada” (p. 6), por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático. Esta distinción es necesaria, porque a pesar de que ambos significados se relacionan, pueden existir divergencias entre uno y otro.

Ahora, se dará a conocer la definición de cada uno de los términos anteriormente mencionados, para tener una idea clara de qué es el significado institucional y personal de un objeto matemático.

El primer término a definir desde Cobo (2003) es el de *práctica personal*:

“Una práctica es personal cuando la realiza una persona, como, por ejemplo, en el caso de la presente investigación, se considerará que una práctica es personal cuando la realice un solo alumno” (p. 39).

Ahora, se va a definir lo que es el sistema de prácticas personales desde la propuesta de Godino & Batanero (1994):

Se dice que el sistema de prácticas personales es significativo (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (p. 9).

Ahora, se dará a conocer el significado de lo que es un objeto matemático, para esto, se tomará la definición de Pecharromán (2013):

Se entiende por objeto matemático como la acción o proceso que organiza o interpreta el contexto y su potencialidad y representa este resultado” (p. 123). Para que un objeto matemático exista, debe ser representado externamente, a través de la asociación de un signo o conjunto de signos, donde las causas de esta asociación forman parte de la creación del objeto matemático (p. 124).

En las matemáticas, al no tener objetos tangibles, las representaciones de sus objetos deben ser externas, es decir, a través de los lenguajes mencionados anteriormente.

La necesidad de representación externa, se debe a la existencia exclusivamente funcional y no material de los objetos matemáticos, que hace necesaria una representación externa o un signo que permita su expresión y su reconocimiento (Pecharromán, 2013, p. 124).

Para Godino & Batanero (1994), un objeto personal “es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (p. 12).

El objeto personal, es el resultado de todas las definiciones mencionadas en los párrafos previos, porque es a través del sistema de prácticas personales, que el individuo logra reflexionar sobre la representación de un objeto matemático a través de distintas representaciones.

Para Godino & Batanero (1994) la emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje (p. 12). La consecución del significado de un objeto matemático, puede ser alterada durante el proceso de formación de los individuos, porque el conocimiento es humano, es decir, mezclado con errores y prejuicios, por lo tanto, no hay fuentes últimas de conocimiento

(Rico, 1998, p. 73). Asimismo, estas alteraciones que se pueden producir en la adquisición de conocimientos, pueden también afectar el desarrollo histórico de un objeto matemático. Así mismo, Cobo (2003) expresa lo siguiente:

El conocimiento sobre cada objeto matemático (como la media aritmética) no ha sido siempre igual al actual, sino que se ha desarrollado lentamente a lo largo del tiempo, ya que a medida que se han ido resolviendo problemas progresivamente diferentes y más complejos, el objeto se desarrolla y completa en su significado (p. 39).

Aunque en las premisas anteriores, se ha hecho referencia a objetos matemáticos, es necesario hacer énfasis en que el objeto que es el eje de la investigación, es de naturaleza estadística (pero se toman aspectos importantes de los objetos matemáticos, por la relación que existe entre ambos). La necesidad de realizar esta diferenciación, es porque el conocimiento estadístico es algo más que capacidad de cálculo y conocimiento de definiciones (Batanero, 2002, p. 29), que son los elementos más utilizados en las matemáticas.

Desde la postura de Gutiérrez (1994) se define como un objeto estadístico al conjunto de individuos elegidos o generados por azar en el objeto de una investigación empírica (p. 52). Estas investigaciones empíricas necesitan ser modelizadas matemáticamente, pero la interpretación de esta modelización, es de naturaleza estadística, es decir, que cada objeto se puede individualizar, para ser interpretados de manera cuantitativa (Gutiérrez, 1994, p. 53).

Enseguida, se presenta la definición de significado personal y significado institucional, desde la postura de Godino, Batanero & Font (2007):

El significado personal es el resultado del pensamiento y la actividad individual al resolver una determinada clase de problemas. En cambio, el significado institucional es el resultado del diálogo y los convenios dentro

de una institución, como puede ser el sistema educativo (Citado en Molero del Río, 2017, p. 14).

Esto quiere decir, que el significado personal puede tener influencia por la clase de problemas presentados en el seno de una institución, lo que, a su vez, junto con otros significados personales, puede dar como resultado el significado institucional de un objeto matemático.

El objeto de estudio en el presente proyecto, es la *media aritmética*, por lo tanto, se tomará la definición de este objeto de la estadística, desde la propuesta de (D'Amore & Godino, 2007, p. 208): “el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional), para resolver un tipo de situaciones-problema en las cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos”

El presente proyecto, tiene como propósito analizar el significado personal del objeto estadístico “Media Aritmética” a través de distintos problemas que sugieren representaciones distintas y que, a su vez, genere una aproximación más eficiente a su significado institucional, por parte de los estudiantes encuestados.

Desde Ortiz & Foll (2011), se propone una definición del significado personal de la media aritmética:

El conjunto de prácticas que puede realizar el alumno en las que la media es fundamental (o no) para su realización, y 2) la configuración cognitiva que el alumno activa para realizar dichas prácticas. Las prácticas que realiza el alumno, en este caso, son la lectura del texto del problema y la producción de un texto como respuesta (p. 97).

Esta definición de lo que es el significado del objeto estadístico media aritmética, es el punto de referencia para las categorías presentadas más adelante.

Para el desarrollo de un objeto estadístico, deben interactuar distintas dimensiones, las cuales se proponen en Godino, Contreras, & Font (2006): “epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos)” (p. 4). En la presente investigación, el interés principal es la dimensión cognitiva, de donde se espera obtener una noción general de la dimensión epistémica, debido a que la evaluación será sobre el significado personal adquirido por los estudiantes, pero que dará una aproximación sobre el significado institucional.

Desde Cobo & Batanero (2004) se proponen unos niveles de desarrollo educativo en la adquisición del concepto de promedio. Estos son:

- Prepromedio: No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera de forma coloquial o en contextos cotidianos.
- Uso coloquial de la media: Interpretándolo como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado, pocos progresos en tareas complejas.
- Respuesta multiestructural: Se usan varias ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se es capaz de aplicarlo en situaciones complejas. Se producen errores en los algoritmos de cálculo o se confunden media, mediana y moda. Existen conflictos cognitivos entre el cálculo de la media y el concepto.
- Media como representante: Se asocia la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos

complejos y con frecuencia se prefieren usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.

- Aplicación en un contexto complejo: Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media, o calcula medias ponderadas (no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.

- Aplicación en dos o más contextos complejos. Además de lo anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos (p. 7).

En el instrumento de evaluación, hasta la aplicación en un contexto complejo, es decir, no se ha extendido a más de un contexto.

Las anteriores categorías, muestran las características ideales de significación personal, que son las que se espera adquieran los estudiantes al finalizar su ciclo escolar, el instrumento de evaluación, servirá para medir el nivel de cada uno de los estudiantes de la Institución que participa de la prueba. Para el desarrollo del instrumento, el punto de partida será el enfoque ontosemiótico (EOS), marco teórico que ha servido para el desarrollo de distintas investigaciones en educación matemática.

4.1.1. Enfoque ontosemiótico: El significado personal e institucional de un objeto matemático, puede presentar conflictos, debido a que la comprensión de este objeto, tiene influencia directa del propio conocimiento matemático (el cual puede ser deficiente por parte del “conocedor” de este objeto matemático), tal como lo afirma Godino (1996):

el problema de la comprensión está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva

sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?” (Citado por Batanero, 2000a, p. 2).

Si no existe interés en la solución de estos interrogantes, el modelo educativo será simple y poco significativo para los discentes.

Por lo tanto, es necesario adquirir herramientas como el recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas previamente establecidas, ya que son un componente necesario de la actividad matemática, y por tanto del aprendizaje (Godino et al., 2006, p. 35). Estas herramientas son el punto de partida para la adquisición de nuevos conocimientos, además de la apropiación de estos.

Para lograr la apropiación del significado institucional de referencia, será necesario en algún momento un tipo de patrón de interacción emisión-recepción, e incluso un patrón conductista (Godino et al., 2006, p. 45). Esto, debido a que los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo (D'Amore & Godino, 2007, p. 207).

Muchas de estas actividades, se convierten en necesidades culturales porque se vuelven requisito básico para pertenecer a una sociedad, por lo tanto, en muchos casos el proceso de instrucción debe ir acorde a las necesidades culturales. Asimismo, es válido reconocer que la complejidad del objeto matemático lleva a pensar no en un objeto unitario sino en un sistema complejo formado por partes o componentes (Rondero & Font, 2015, p. 30). Es importante tener en cuenta que el tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado

(Oviedo et al., 2012, p. 30), por lo tanto, es necesario usar distintos tipos de representación, para que el sesgo en el tratamiento de los objetos, sea acorde a las necesidades sociales.

Por lo anterior, la didáctica de las matemáticas debe asumir la responsabilidad de elaborar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, Font, & Whilhelmi, 2008, p. 26). En la asunción de esta responsabilidad, la didáctica de las matemáticas tiene muchas herramientas, una de estas, es la instrucción matemática.

La instrucción matemática juega un papel fundamental porque permite identificar fenómenos didácticos ligados a la implementación de los significados institucionales, identificación de conflictos semióticos, patrones de interacción didáctica y sus consecuencias en la génesis de los significados personales de los estudiantes (Godino et al., 2006, p. 5).

Dentro del proceso de instrucción matemática, el punto de partida son los elementos previos adquiridos por los estudiantes, con el fin de lograr la adquisición de nuevos conocimientos, es decir, existe una relación directa entre ellos, por lo tanto, están utilizando las funciones semióticas, como se afirma en (D'Amore & Godino, 2007, p. 210): “La función semiótica surge cuando entre dos objetos (ostensivos o no ostensivos) se establece una dependencia representacional o instrumental, donde uno de los objetos se pone en el lugar del otro o bien uno es usado por otro”.

Al existir las funciones semióticas, también pueden coexistir los conflictos semióticos, que son desde Godino et al. (2007), cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones (Citado por Rubio, Font & Planas, 2008, p. 174). El interés investigativo del presente proyecto, es conocer los conflictos semióticos de los estudiantes sobre el objeto matemático *media aritmética*, es decir, el conflicto semiótico de tipo cognitivo, que sucede cuando la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto (Rubio et al., 2008, p. 174).

En el proceso de instrucción matemática, entra en funcionamiento el enfoque ontosemiótico (EOS), también conocido como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), que ha mostrado en diversos trabajos su utilidad al analizar los conocimientos matemáticos, tanto institucionales como personales (Godino et al., 2006, p. 2).

Se conoce al EOS según Torres (2011) como un marco teórico que organiza, unifica y clarifica nociones de otras teorías, enfoques y modelos con el fin de describir e investigar, de forma holística, los procesos de aprender y enseñar matemáticas (p. 54). Para lograr esto, desde la postura del EOS se proponen tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que son: la epistemológica, la cognitiva e instruccional (Mayén, 2009 p. 17). Las anteriores dimensiones, son los tres ejes principales de investigación del EOS, la relación entre ellas, surge a partir de componentes particulares.

El EOS, se basa principalmente en cinco componentes particulares e interrelacionados, que describen partes complementarias de los procesos de enseñar y aprender matemáticas (Torres, 2011, p. 56). Estos cinco componentes, sirven para el estudio de sistemas didácticos en matemáticas.

Los cinco componentes anteriormente mencionados, aparecen de manera explícita en Godino et al. (2008):

1. Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes).

Este nivel de análisis:

- Se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso.
- Permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.
- Permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas (p. 29).

2. Procesos matemáticos y conflictos semióticos. En toda práctica se identifica un sujeto agente (institución o persona) y un medio en el que dicha práctica se realiza (que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el sujeto agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema es necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis se centra en los objetos y, sobre todo, procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también en los que emergen de ellas.

- La finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización (pp. 29-30).

3. Configuraciones y trayectorias didácticas. Este nivel de análisis:

- Contempla el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, puesto que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes.
- Se orienta, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas) (p. 30).

4. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.

Este nivel de análisis:

- Estudia la compleja trama de normas que soportan y condicionan las configuraciones didácticas, así como su articulación en trayectorias didácticas (según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica).
- Se intenta dar explicaciones plausibles del porqué un sistema didáctico funciona de una forma y no de otra (p. 30).

5. Idoneidad didáctica del proceso de estudio. Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo en un determinado sistema didáctico y por qué? La Didáctica de la Matemática debe aspirar además a la mejora del funcionamiento de estos sistemas, aportando una racionalidad axiológica o valorativa en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. Necesita, pues, criterios de “idoneidad” que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora (p. 30).

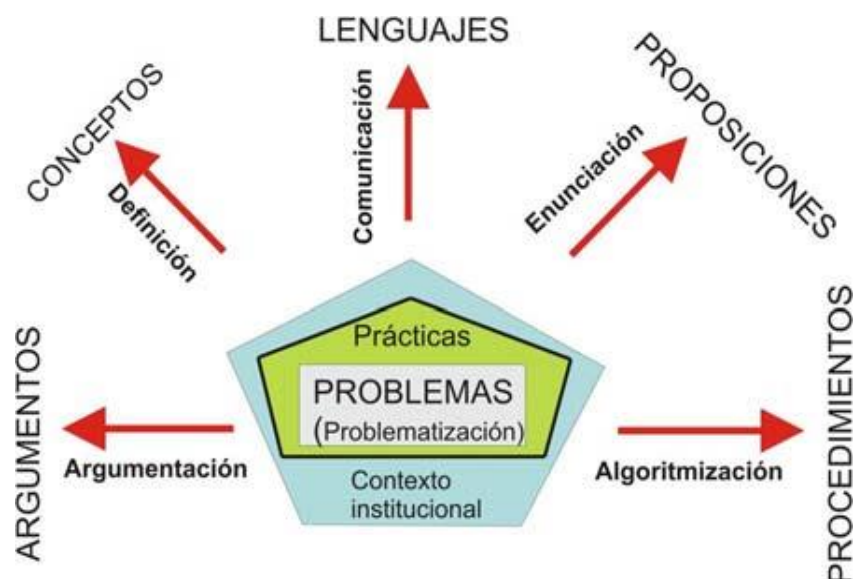
De los cinco componentes mencionados, en la presente investigación serán importantes los niveles 1 y 2, ya que es necesario conocer elementos previos de los estudiantes participantes, pero al mismo tiempo, los conflictos semióticos que se presentan sobre el objeto estadístico “media aritmética”.

Los aspectos que aquí compete analizar, son los tipos de objetos matemáticos (también conocidos como entidades primarias) propuestos en (D'Amore & Godino, 2007, p. 209):

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros).
- Situaciones (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios).
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- Conceptos (que son introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función).
- Propiedad o atributo de los objetos (como los enunciados sobre conceptos).
- Argumentos (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo).

El interés por analizar estos aspectos, es porque son las distintas formas de comprender un objeto matemático, es decir, adquirir un significado.

Figura 1. Objetos y procesos primarios.



Fuente: Godino et al. (2008)

Como se puede observar, aquí se nota bien cómo el punto de vista ontosemiótico se fija más en la cuestión del aprendizaje individual (D'Amore & Godino, 2007, p. 208), donde se podrá indagar de manera preliminar sobre el significado institucional.

La TFS proporciona un marco en el que es posible estudiar la articulación de las teorías mencionadas y analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico (Godino et al., 2006, p. 3).

En la TFS tanto docente como discente son fundamentales a la hora de adquirir conocimiento sobre un objeto estadístico, a través de los siguientes elementos, propuestos en Godino et al. (2006):

El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación (p. 27).

La adquisición de este conocimiento es un proceso que debe ser constante, donde es necesario que ambos personajes (docente y discente), cumplan sus roles; para que, el desarrollo de la clase sea más productivo para ambas partes.

A continuación, se van a describir los promedios más conocidos en la estadística, además, se dará una descripción general de cada uno (con la media aritmética, será más detallado).

4.2. PROMEDIOS

Los promedios, se han convertido en parte de nuestra cotidianidad como ciudadanos, por escaso que sea nuestro conocimiento de la aritmética, todos estamos acostumbrados con la idea de los promedios en fútbol, béisbol y bolos, etc (Moroney, 1968, p. 170), porque es un dato que resume la información de un conjunto de datos y la hace más atractiva para la comunidad, en una era donde la información está presente en todos los medios de comunicación, los cuales utilizan la estadística y sus herramientas para hacerla atractiva visualmente y sintética en su contenido, de tal manera que le interese al lector (Méndez et al., 2013, p. 403).

El uso de esta palabra en nuestra cultura, muchas veces no es el apropiado, esto, debido a que no existe otra palabra más ambigua en estadística (Ángel, 1995, p. 77), esto se debe a que es un término usado en contextos equivocados, por esta razón; es uno de los conceptos que más interés ha suscitado dentro de la investigación en estadística (Cobo, 2003, p. 7).

La palabra “promedio” es tan antigua como el principio de contar (Ángel, 1995, p. 77), es decir, ha estado inmersa en nuestra sociedad desde tiempos inmemorables, siendo un

término muy utilizado por todos, aunque indeterminado. Se dice generalmente que un valor promedio, intenta representar o resumir las características de un conjunto de valores (Bencardino, 2012, p. 93), otra definición de promedio es la utilizada por Ángel (1995) es la siguiente “cuando nos referimos a él, estamos tratando de dar un valor típico o representativo que identifique a todos los datos provenientes de una muestra o de una población” (p. 77).

El promedio, es calculado a través de las medidas de tendencia central, desde Mayén (2009), se propone una definición de estas medidas, muy similar a las de promedio propuestas anteriormente, “las medidas que describen un valor típico en un grupo de observaciones suelen llamarse medidas de tendencia central” (p. 13).

La enseñanza de la estadística, se promueve en los documentos emitidos por el Ministerio de Educación Nacional desde la educación básica primaria, pero la formación que tienen los docentes en formación en primaria sobre estadística, en especial sobre los promedios, es preocupante, igual como sucede en España, tal como lo afirman Godino, Batanero & Navas (1997):

estos resultados son preocupantes, por el papel que juegan los promedios no sólo dentro de la estadística, sino como fundamento de la formación de los mismos profesores en otras asignaturas de tipo metodológico o incluso de ciencias sociales o humanas, en que con frecuencia se usan estos conceptos (p. 1).

En la mayoría de los casos, el promedio es asumido como la media aritmética (operado como tal), pero muchas veces, estos datos no son reales, porque dan al lector una cifra carente de significado, puesto que no puede obtenerse de ella ni una sola deducción útil. (Moroney, 1968, p. 170). Por lo tanto, debemos tener claro que existen unos criterios definidos para calcular un promedio.

Para Ángel (1995), depende básicamente de los siguientes criterios:

- a. La forma de la distribución de la variable (simétrica, sesgada, multimodal, etc).
- b. El tipo de escala de medición utilizada para la representación de los datos (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).
- c. El objetivo de promedio. Si se trata de encontrar un valor representativo o un promedio para hacer inferencias.
- d. El tipo de variable por promediar (índices, tasas, promedios, velocidades, etc.) (p. 79).

A continuación, se va a describir de manera breve, cada uno de los criterios anteriores. Lo primero, será detallar la forma de distribución de la variable, desde lo propuesto por Bencardino (2012):

- Distribución simétrica: Cuando los valores de las frecuencias absolutas y relativas que toma la variable son equidistantes a un valor central. En este caso, la Media, la Mediana y Moda son iguales (p. 801).
- Distribución sesgada o asimétrica:
Se refiere a las distribuciones que no son simétricas con respecto a la ordenada central. Si una distribución unimodal tiene una “cola” más alargada hacia valores menores de la variable aleatoria, se dice que es asimétrica negativa (hacia la izquierda); en caso contrario, será de asimetría positiva (a la derecha) (p. 794).
- Distribución multimodal o plurimodal: Distribución de frecuencias con más de dos modas (p. 800).

Es de anotar, que existen otras distribuciones, pero no tienen relación con el objeto de estudio.

Para el tipo de escala de medición utilizada para la representación de los datos, se tendrá en cuenta lo propuesto por Stevens (1957); Cohen y Cohen (1975); Saris (1984) (Citados por Orlandoni, 2010):

- Escala nominal. En esta escala las unidades observacionales (UO) se agrupan en clases excluyentes según determinada propiedad, con lo que se define una partición sobre el conjunto de tales unidades. Los números se usan como identificadores o nombres. Cuando se estudia el desempleo de un país y se incluye la variable sexo, se codifica masculino como 1 y femenino como 2, por ejemplo; los números 1 y 2 representan categorías de datos: son simples identificadores y son completamente arbitrarios. La operación matemática permitida es el conteo (p. 245).
- Escala ordinal: Surge a partir de la operación de ordenamiento; en esta escala se habla de primero, segundo, tercero. No se sabe si quien obtiene el primer puesto está cerca o lejos del segundo puesto. Los valores de la escala representan categorías o grupos de pertenencia, con cierto orden asociado, pero no una cantidad mensurable. La escala ordinal tiene las propiedades de identidad y magnitud. Los números representan una cualidad que se está midiendo, y expresan si una observación tiene más de la cualidad medida que otra UO. La distancia entre puntos de la escala no es constante: no se puede determinar la distancia entre las categorías, sólo es interpretable el orden entre sus valores. Ejemplos: situación socioeconómica, nivel educativo (pp. 245- 246).
- Escala de intervalos. Esta escala representa magnitudes, con la propiedad de igualdad de la distancia entre puntos de escala de la misma amplitud. Aquí puede establecerse orden entre sus valores, hacerse comparaciones de igualdad, y medir la distancia existente entre cada valor de la escala. El valor cero de la escala no es absoluto, sino un cero arbitrario: no refleja ausencia de la magnitud medida, por lo que las operaciones aritméticas de multiplicación y división no son apropiadas.

Cumple con las propiedades de identidad, magnitud e igual distancia. La igual distancia entre puntos de la escala significa que puede saberse cuántas unidades de más tiene una UO comparada con otra, con relación a cierta característica analizada. Por ejemplo, en la escala de temperatura centígrada puede decirse que la distancia entre 25° y 30°C es la misma que la existente entre 20° y 25° C, pero no puede afirmarse que una temperatura de 40° C equivale al doble de 20° C en cuanto a intensidad de calor se refiere, debido a la ausencia de cero absolutos. Así, los valores numéricos en la escala de temperatura centígrada se pueden expresar en valores de la escala Fahrenheit mediante la ecuación $C=a+bF$ ($a= -17.778$; $b=5/9$) (p. 246).

- Escala de razón. Corresponde al nivel de medición más completo. Tiene las mismas propiedades que la escala intervalos, y además posee el cero absoluto. Aquí el valor cero no es arbitrario, pues representa la ausencia total de la magnitud que se está midiendo. Con esta escala se puede realizar cualquier operación lógica (ordenamiento, comparación) y aritmética. A iguales diferencias entre los números asignados corresponden iguales diferencias en el grado de atributo presente en el objeto de estudio. Ejemplos: longitud, peso, distancia, ingresos, precios (p. 246).

Debido a todos los criterios anteriormente mencionados, es necesario que existan distintos tipos de promedios para satisfacer cada una de estas condiciones, ya que sería insuficiente un sólo promedio que pueda sesgar (en algunos casos) la información a procesar.

Ahora, se va a describir los promedios más importantes desde la propuesta de Bencardino (2012), donde se dará especial importancia al promedio aritmético (donde a su vez se presentará otra definición), debido a que es el objeto de estudio en este trabajo, porque la media aritmética además de ser uno de los principales conceptos estadísticos,

tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria (Rodríguez & Cabrera, 2010, p. 39).

Para los demás promedios, se realizará una descripción general (cuando exista alguna fórmula general, también hará parte de la descripción).

4.2.1. Promedio Aritmético (\bar{x}): Es la *medida de posición* o *promedio* más conocida, la más utilizada y entendida por todos, por su gran estabilidad es la preferida en el muestreo, sus fórmulas admiten tratamiento algebraico (Bencardino, 2012, p. 93).

Para Batanero (2001) y Cobo (2003) la media aritmética es un problema que consiste en determinar, a partir de un conjunto de medidas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ la mejor estimación posible del verdadero valor X desconocido.

A continuación, se van a describir, las ventajas y desventajas que este tipo de promedio tiene:

4.2.1.1. Ventajas:

- El *promedio aritmético* (o media aritmética), es, en sí, la medida más entendida y la más utilizada. Es un valor tal, que si se calculara para un grupo en el cual todos los elementos fueran iguales, cada uno de ellos sería igual a su promedio aritmético, por lo cual podemos deducir que el promedio de n elementos, es un nuevo elemento formado, correspondiente a una parte $1/n$ de cada uno de los elementos originales.
- Esta medida se define mediante una ecuación matemática muy fácil de entender y algunas veces se puede obtener cuando no es posible calcular otros tipos de medidas de *tendencia central* o de *posición* y, aún en el caso de no conocerse los valores individuales de la serie, por ejemplo: si 10 familias consumen 20 litros de leche, el promedio aritmético será de 2 litros por familia.

- El promedio aritmético es extraordinariamente estable en el muestreo.
- Es altamente sensible a cualquier cambio en los datos de la distribución.
- Como ventaja final, se podrá anotar que es excepcionalmente adaptable cuando se trata de hacer cálculos matemáticos posteriores con él (p. 93).

4.2.1.2. Desventajas:

- Es muy sensible a valores muy pequeños o grandes, especialmente cuando estos últimos se encuentren incluidos en la distribución que se está estudiando, puede resultar en un promedio que no represente lo típico para el total del grupo.
- Cuando la distribución es marcadamente asimétrica, de tal forma que el *promedio aritmético*, la *mediana* y el *modo* difieran de forma apreciable, debe considerarse siempre la posibilidad de que el promedio aritmético pueda no ser el valor único representativo de la serie.
- Otro inconveniente o desventaja, es cuando la distribución tiene la forma de U, es decir, parabólica; éste corresponde a los valores menos comunes en la serie y, por tanto, puede darnos una idea irreal de la distribución (pp. 93, 94).

Después de conocer sus ventajas y desventajas, se procederá a describir la forma como se representa el promedio aritmético de manera general, tanto para datos no agrupados, como para datos agrupados.

- Para datos sin agrupar (sea “ x_i ” la clase, “ f_i ” la frecuencia de los x_i y “ n ” el total de la muestra):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ Donde } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{p. 94})$$

- Para datos agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} \text{ Donde } \bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{n} \quad (\text{p. 95})$$

4.2.2. La mediana (M_E): Se define como “aquel valor de la variable que supera a no más de la mitad de las observaciones, al mismo tiempo, es superado por no más de la mitad de las observaciones” en otras palabras, se puede definir como el “valor central” (p. 103).

- Para datos sin agrupar:

- a) *Número impar de observaciones.* Cuando ésta medida la aplicamos en los datos originales o sin agrupar, lo primero que se debe hacer, es ordenarlos de menor a mayor o de mayor a menor (p. 104).
- b) *Número par de observaciones.* En estos casos, encontramos dos valores en el centro de la serie, por tal razón, la mediana deberá ser el promedio de ellos (p. 104).

- Para datos agrupados (sea “ N_j ” la frecuencia acumulada, “ y_j ” la clase, y “ n ” la muestra):

- a) Variable discreta:

Cuando $N_{j-1} = n/2$ La mediana será igual a $M_e = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}$ (p. 104)

Cuando $N_{j-1} \leq n/2$ La mediana será igual a $M_e = y_j$ (p. 104)

- b) Variable continua:

Cuando $N_{j-1} = n/2$ La mediana será igual a $M_e = y'_{j-1}$ (p. 104)

Cuando $N_{j-1} \leq n/2$ La mediana será igual a $M_e = y'_{j-1} + c \left[\frac{n/2 - N_{j-1}}{n_j} \right]$ (p. 104)

4.2.3. Moda o valor modal (M_D): Se define como “el valor de la variable que más se repite” o “aquel valor que representa la máxima frecuencia”. Puede suceder que una distribución tenga *dos Modas*, en este caso se dice que la distribución es *bimodal*, en el caso que haya más de dos modas, se dice que es *plurimodal* o *multimodal* (p. 107).

4.2.4. Media geométrica (M_G): Se considera como una medida de posición o promedio, pudiendo utilizarse cualquiera de estos símbolos y el resultado obtenido deberá ser menor al de la *Media aritmética*.

La *Media geométrica* se define como “la raíz enésima del producto de los valores que toma la variable” (p. 112)

$$M_G = \sqrt[n]{\prod x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$M_G = \sqrt[n]{\prod x_i} = \prod x_i^{1/n} \Leftrightarrow \log M_G = \frac{\sum \log x_i}{n}$$

4.2.5. Media armónica (M_H): Este promedio, menos importante que los tres anteriores mencionados, se aplica en especial cuando la variable está dada en forma de tasas o cuando se trata calcular la velocidad media. Vale la pena decir, que esta medida les da gran importancia a aquellos valores pequeños de la variable, contrario a la media aritmética (p. 114).

$$M_H = \frac{n}{\sum \left[\frac{1}{x_i} \right]} \text{ o } M_H = \frac{N}{\sum \left[\frac{1}{x_i} \right]}$$

Después de describir de manera general cada uno de los promedios más usados en los análisis estadísticos, la siguiente sección será sobre los errores y dificultades de los alumnos a la hora de interpretar el promedio.

4.3. ERRORES Y DIFICULTADES

El error, es una problemática que ha tenido trascendencia en la historia de la humanidad, porque a través de los errores, se ha logrado la búsqueda de la verdad, tal como lo afirma Sócrates “el error ha tenido una importancia relevante en la búsqueda de la verdad, porque la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aun cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen” (Rico, 1998, p. 71). La búsqueda de la verdad no surge por simple intuición, sino que se debe estudiar el error a través de distintas herramientas.

Con estas herramientas, al estudiar el error, se observa que existen errores que se repiten, o que se producen regularidades, y asociaciones con variables propias de las tareas propuestas, de los sujetos o de las circunstancias presentes o pasadas (Batanero, 2001, p. 76). Al estudiar el error, se pueden analizar patrones que puedan influir significativamente en el proceso enseñanza-aprendizaje de la estadística.

La estadística es un área del conocimiento que cada día tiene más influencia en la sociedad.

La estadística ha hecho parte de la historia desde las primeras civilizaciones, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en civilizaciones como la china (aproximadamente 1000 años a. c.), sumeria y egipcia (Rodríguez, 2006, p. 15). Pero es en la actualidad donde más se ha notado su aplicabilidad en la vida cotidiana de los seres humanos, gracias a la necesidad de tener todo bajo control y satisfacer necesidades generales, ya que al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar en forma óptima estudios y experimentos y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Batanero, 2004, p. 27), nos hace más eficientes en la toma de decisiones.

Uno de los campos de aplicación de la estadística, es en los medios de comunicación, por lo que los jóvenes logran desarrollar habilidades por medio de la experiencia y la interacción (Betancourt, 2012, p. 14). Este campo de aplicación es muy importante, porque muchos aspectos cotidianos referentes a la estadística, se presentan a través de los medios de comunicación.

Pero la realidad de nuestra cultura es muy distinta a las exigencias sociales actual, debido a que es muy probable que los ciudadanos no posean las competencias básicas para interpretar informaciones presentadas de forma estadística, lo cual podría influir en cierta medida en el desarrollo social y económico del país (Betancourt, 2012, p. 13). Esta influencia va ligada directamente a los juicios o toma de decisiones, pero la experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no son fiables y puede llevar a confusión porque muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de los datos recogidos en forma adecuada (Rodríguez & Cabrera, 2010, p. 43).

En el proceso de enseñanza, como se afirma en Del Puerto, Minnaard, & Seminara (2006, p. 1), existen dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de

aprendizaje que se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje. La falta de conocimientos, afecta directamente la recepción de información de las personas.

Para que este aprendizaje sea más significativo, es necesario comprender lo planteado en los medios de comunicación, para ser ciudadanos críticos, por lo que la escuela debe cumplir un papel más importante, debido a que actualmente los alumnos llegan a la universidad con conocimientos casi nulos e intuiciones incorrectas sobre probabilidad, que les dificultarán la comprensión posterior de los conceptos de inferencia (Batanero, 2004, p. 31).

Al llegar con estos conocimientos casi nulos, su enfrentamiento con conceptos más complejos puede ser desfavorable para el estudiante. Por eso, es necesario que la enseñanza de la estadística en la escuela sea parte de la cultura escolar, para que se logre un cambio de lo que actualmente se promueve en la cultura.

En el aula, la situación no es nada alejada de la realidad actual, debido a las dificultades existentes en la enseñanza de la estadística, tal como lo afirma Mayén (2009):

En el mejor de los casos, la enseñanza de la estadística es un pretexto para aplicar otros temas matemáticos y ejercitar la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando el trabajo con datos reales y los aspectos de razonamiento estadístico (p. 11).

Esta forma de enseñar estadística, obliga al estudiante a retener la información indicada por el docente, por lo tanto, el alumno no puede asimilar el contenido en un tiempo tan limitado y sólo consigue un aprendizaje memorístico que será incapaz de aplicar en su futura vida profesional (Batanero, 2004, p. 35). El principal problema de la actual forma de enseñar estadística, es reflejado en el mediano y largo plazo, que es donde los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos en el aula.

Por esta razón, es necesario cambiar la forma de enseñar en el aula, para lograr que el estudiante sea capaz de relacionar los conceptos, ideas, leyes, proposiciones, etc. que dispone en su mapa cognitivo con las que se le están presentando como nuevas, por una forma significativa y no arbitraria o literal (Rojas & Ovejero, 2009, p. 54).

Pero para lograr esto, debe haber cambios en todo el sistema educativo, donde se promueva el desarrollo de habilidades de pensamiento, de comunicación, valores, una educación ambiental y la democracia y derechos humanos (Chan, 2009, p. 2). Todas estas habilidades, se pueden lograr si se identifican los errores que existen en el aula de clase de matemáticas.

Por lo tanto, el primer paso, es indagar por la enseñanza actual, a través de los saberes previos en la clase de matemáticas, que es donde actualmente se enseña estadística en el aula. Esta situación, invita al estudiante a aprender los conceptos de una forma y cuando estos mismos son presentados en otra área, no los comprende (Betancourt, 2012, p. 16).

Otra situación que sucede en el aula, es el papel del docente, debido a que, como indica Batanero (2000) nos encontramos con la paradoja de pedir a los profesores que impartan un nuevo contenido, para el que no todos han tenido una formación didáctica específica (Como se puede leer en Mayén, 2009, p. 9), también sucede que muchos profesores no se sienten cómodos con esta materia, la dejan como último tema y cuando es posible la omiten (Batanero, 2004, p. 32).

Todas estas situaciones, conllevan a que uno de los errores en el aprendizaje de la estadística (sobre todo en la educación superior, por la complejidad de los conceptos) sea que los alumnos no establecen la correspondencia esperada, porque un mismo término (por ejemplo “media”) se usa para referirse a diferentes conceptos (media de la muestra, media de la población). Esto produce dificultades y errores en el aprendizaje (Batanero, 2004, p. 31).

Esta realidad, se afirma en Betancourt (2012) “en algún porcentaje la responsabilidad de algunas de las dificultades que se presentan en el aula de clases y que pudieran impedir el adecuado aprendizaje de los conceptos, la tiene el docente” (p. 9). Estas dificultades de aula, afectan directamente en la toma de decisiones por parte de las personas. Esto a su vez, conlleva a que no se resuelvan completamente las dificultades intrínsecas de los conceptos estadísticos, ni se corrijan las intuiciones erróneas sobre la materia, que subyace en la toma de decisiones incorrectas en muchas situaciones aleatorias (Mayén, 2009, 11).

Otra problemática de importante relevancia en el aula de clases, es el sesgo que en algunos casos presentan los libros a la hora de plantear ejercicios, ante esta situación, el profesor que los usa debería mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto (Cobo & Batanero, 2004, p. 6). El contenido de estos libros, se centran principalmente en el área de conocimiento donde se desarrolla el curso (en el caso de la estadística, la clase de matemáticas), por lo tanto, el enfoque principal será en esta área.

Además de lo anterior, hay que sumarle que en nuestro país existe gran cantidad de problemas respecto a la educación en general, estos pueden ser desde dificultades económicas, sociales, didácticas, epistemológicas, hasta cognitivas (Betancourt, 2012, p. 12). Todas estas problemáticas, pueden conducir a la formación de conceptos erróneos en el aprendizaje. Es importante reconocer todos estos factores, porque como lo afirma Rico (1998):

Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, se debiera reconocer que los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables (p. 83).

Por lo tanto, el error es inevitable en el proceso enseñanza-aprendizaje, aunque al adquirir relevancia en la investigación, el porcentaje de error podría disminuir.

En el proceso de aprendizaje, el error ha sido importante objeto de estudio, debido a que actualmente el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje (Del Puerto et al., 2006, p. 2), esto debido a que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, (Rico, 1998, p. 75), ya que, pueden ser el punto de partida para que en el futuro el aprendizaje sea más significativo.

Radatz (1980) considera el análisis de errores como “una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático” (Citado en Batanero, Godino, Green, Holmes, & Vallecillos, 1994, p. 2); por lo tanto, es necesario incluir el estudio de los errores, en el estudio del *significado* en didáctica de las matemáticas.

En la enseñanza de la estadística el número de investigaciones en Colombia, es aún escaso, y sólo estamos comenzando a conocer las principales dificultades de los alumnos en los conceptos más importantes (Mayén, 2009, p. 9). Desde el cognitivismo, se sostiene que la mente del alumno no es una página en blanco: el alumno tiene un saber anterior (Del Puerto et al., 2006, p. 2); este saber anterior, puede ser fundamentado, o contener errores, lo que también puede influir en la producción de nuevos errores, porque como lo afirma Rico (1998) “los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente” (pp. 75-76).

Por esta razón, surge el interés en evaluar los saberes previos adquiridos por los estudiantes respecto del objeto estadístico *media aritmética*.

Para empezar, se hablará sobre las características propuestas por Mulhern (1989) la mayor parte de los investigadores y especialistas, señalan como características generales de los errores cometidos por los alumnos, las siguientes:

- a. Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
- b. Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
- c. Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
- d. Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan (Citado por Rico, 1998, p. 84).

Es importante reconocer estas características, porque la tendencia es a calificar los errores negativamente, pero no se toman en cuenta ninguno de estos aspectos que pueden influir en el mejoramiento de estas debilidades.

Es común observar errores de los estudiantes dentro de su proceso de aprendizaje, pero como se afirma en Del Puerto et al. (2006) “se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo” (p. 3).

Al detectar y analizar los errores y dificultades en los estudiantes, se pueden realizar cambios positivos en cada una de estas debilidades.

Brousseau distingue distintos obstáculos específicamente en la enseñanza de las matemáticas, estos son obstáculos de origen psicogenético, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen didáctico, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen epistemológico, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos (Del Puerto et al., 2006, p. 3). Estas dificultades, se pueden presentar por todas las problemáticas que se han mencionado anteriormente.

En el aula de clase, es difícil reconocer los procesos mentales de cada estudiante, por lo tanto sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas (Del Puerto et al., 2006, p. 4), una de estas manifestaciones, puede ser la evaluación, porque a partir de ahí se pueden sacar conclusiones sobre los conocimientos de los estudiantes, tal como lo afirma Mayén (2009) “la evaluación de los conocimientos y dificultades de los estudiantes es el primer paso para diseñar acciones didácticas encaminadas a superarlos” (p. 17).

De esta manera, es importante reconocer que el error ha dejado de ser algo a penalizar para convertirse en una fuente valiosa de información (Del Puerto et al., 2006, p. 7). En este caso, el análisis de errores será importante para poder evaluar el significado. Para el desarrollo de la presente investigación, se plantea un instrumento que evidencie los errores más comunes adquiridos por los estudiantes, porque como se afirma en Del Puerto et al. (2006):

la implementación de cuestionarios para detección de errores, y la posterior clasificación de los mismos con base en alguna de las categorizaciones vigentes, es una metodología que permite obtener una “radiografía” del estado de conocimiento de los alumnos y constituye una valiosa ayuda a la hora de reorganizar la práctica pedagógica (p. 5).

La detección de errores en la presente investigación, será a través de las distintas categorías de análisis presentes en cada pregunta planteada.

La media aritmética, es uno de esos conceptos que casi no se enseñan en la escuela, por esta razón, a la hora de evaluar los conocimientos, los estudiantes se deben a una falta del conocimiento básico necesario para una comprensión correcta de un concepto o procedimiento dado (Batanero et al, 1994, p. 3). Y aunque creemos, por ejemplo, que el cálculo de la media es un concepto sencillo, con frecuencia el algoritmo se aplica sin comprender su significado (Rojas & Ovejero, 2009, p. 59).

Uno de los errores más comunes a la hora de utilizar el concepto de la media aritmética, es el propuesto por Li y Shen (1992) quienes indican que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media (Batanero et al., 1994, p. 5). Este error, puede suceder porque los estudiantes, por lo general, resuelven ejercicios con datos aislados; por lo cual, a la hora de trabajar con datos agrupados, los errores se incrementan.

Otra problemática a la hora de utilizar la media aritmética, es que la enseñanza de los conceptos basada en la definición algorítmica y el cálculo, en colecciones de datos descontextualizados, no permite que el alumno llegue a una comprensión integral del concepto promedio (Bohórquez & Rivera, 2008, p. 4). Esta situación, promueve la no aplicación de los conceptos en entornos cotidianos y, por lo tanto, el aprendizaje no será significativo para los estudiantes.

Otro error a la hora de calcular la media aritmética, es el investigado por Campbell (1974) quien observa que:

Se tiende a situar la media en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los

extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos (Citado por Rodríguez, 2006, p. 20).

En la sección de categorías, se hablará sobre los campos de problemas de la media aritmética, que serán una de las categorías en el análisis del instrumento de evaluación.

4.4. DOCUMENTOS CURRICULARES

En nuestro país, la enseñanza de la media aritmética (asumida como promedio) y de la estadística en general, se encuentra presente en todos los documentos oficiales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. El primero de ellos es el documento serie de Lineamientos Curriculares en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998), pero debido a su extensión, es muy difícil abarcar todos los conocimientos allí planteados, es decir, establecer un (único) currículo pretendido en el caso colombiano es imposible dada la amplitud de los lineamientos oficiales (MEN, 1998) y su falta de precisión en contenidos, que son poco descriptivos (Gómez, 2016, p. 1). Esta situación motivó la creación de otros documentos oficiales por parte del mismo Ministerio de Educación (2006, 2017), complementarios a los Lineamientos Curriculares.

Los lineamientos curriculares (MEN,1998), describen de manera general lo que actualmente se conoce como Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos.

Para empezar, se destaca la relevancia que la estadística empieza a tener en el desarrollo de las sociedades, como se describe a continuación:

“Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana” (p. 47).

Lo que conlleva a pensar que debe ser parte activa del proceso educativo desarrollado en las distintas Instituciones Educativas a nivel nacional. Esta relevancia que debería

tener el Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos, surge por la gran aplicabilidad que tiene la estadística en distintas ramas del conocimiento, algunas propuestas en el mismo documento “Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática” (p 47).

Los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) mencionan la importancia que tiene contextualizar la estadística en situaciones cotidianas para los estudiantes, como se afirma a continuación:

La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación, permita exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones (pp, 47-48).

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), cumplen la función de definir criterios claros y públicos referidos a la enseñanza mínima que deben recibir los estudiantes (Gómez, 2016). Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se encuentran distribuidos por “conjuntos de grados”, distribución enfocada en la flexibilidad del currículo para la comprensión de conocimientos “mínimos” y con la posibilidad de adquirir conceptos más avanzados. La definición del Ministerio de Educación (2006), para el conjunto de grados, es la siguiente:

Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a

undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, ojalá, a ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados (p. 76).

Para el pensamiento aleatorio, como se mencionó anteriormente, sus estándares se enfocan en desarrollar conocimientos básicos, en este caso, sobre estadística y probabilidad. En la siguiente tabla, se presentan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas donde tiene aparición o relación el promedio.

Tabla 1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas referentes al promedio.

Conjunto de grado	Estándares Básicos de Competencias
Primero a Tercero	Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
Cuarto y Quinto	Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.
Sexto y Séptimo	Uso medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
Octavo y Noveno	Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explico sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
Décimo y Undécimo	<ul style="list-style-type: none"> • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad). • Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).

Fuente: El autor

A partir de la anterior tabla, se puede observar la transversalidad del concepto de promedio y como se puede relacionar con otros tipos de pensamientos matemáticos. Asimismo, es importante reconocer que desde los documentos oficiales se reconoce a la media aritmética como promedio, (se ve de manera más específica en el estándar de cuarto a quinto), además de los libros de texto, como se podrá observar más adelante. Después de los Estándares Básicos de Aprendizaje, el Ministerio de Educación Nacional propone los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Este documento oficial tiene dos versiones oficiales (2015,2017). En el presente proyecto, la versión II (2017), servirá como apoyo en la construcción de documentos curriculares, debido a que presenta casos

particulares de la propuesta de los Estándares, por lo tanto; aparecen ejemplos del promedio (o que se relacionan con el mismo), como aparece a continuación:

- GRADO PRIMERO

Como bienvenida al año escolar se les va a brindar a los alumnos de 1A un helado. Se les pide que informen sobre cuáles son los sabores de su preferencia. Los niños con la ayuda de la profesora hacen una consulta y presentan el siguiente gráfico con los resultados obtenidos.

Figura 2. Preferencia de helados de los estudiantes de 1A



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

Escribe una frase sencilla para responder preguntas tales como: ¿cuántos niños prefieren el helado de sabor de fresa?, ¿cuántos de uva?, etc., y ¿cuántos helados se deben comprar en total?, ¿cuál es el sabor más escogido por los niños del curso 1A? (pp. 13-14)

- GRADO SEGUNDO

Cuatro estudiantes deciden jugar parqués con una sola ficha y con las siguientes reglas:

- a) En el primer turno se lanzará un solo dado y cada punto de este permitirá mover la ficha tres casillas.
- b) En el segundo turno se utilizarán dos dados y cada punto permitirá mover la ficha una casilla. Inicia el lanzamiento quien lidera el juego, luego quien vaya de segundo, de tercero, hasta lanzar quien esté en el último puesto.
- c) En los siguientes turnos se repite la primera regla y luego la segunda regla hasta terminar el juego. Se lanza en el orden que se definió en la segunda regla. Si al registrar (en su orden) cada lanzamiento en una tabla los resultados son:

Figura 3. Puntos lanzamiento dados



Jugadores	Puntos Lanzamiento 1	Puntos Lanzamiento 2
Andrés	5	8
Camilo	3	10
Juan José	1	11
Carlos	6	5

Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

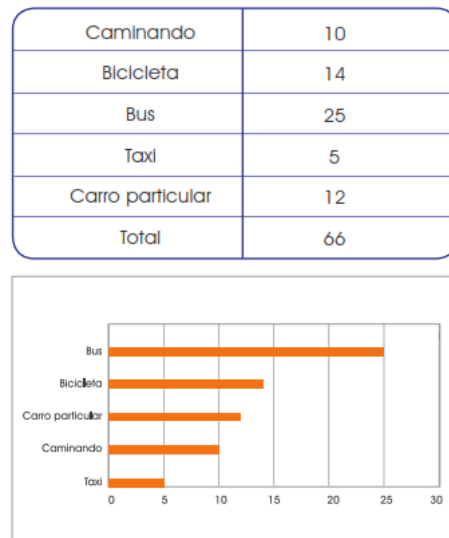
Determina el jugador que lidera el juego hasta el momento. Averigua la cantidad de puntos que debe obtener Camilo en el siguiente lanzamiento para liderar el juego después del tercer turno y propone una regla adicional para que sea Juan José quien lidere el juego después de los dos primeros turnos (pp 15-16).

- GRADO TERCERO

A partir de la lectura de la siguiente situación, identifica la información contenida en cada representación y propone títulos coherentes con una

posible pregunta de estudio. El director de la escuela hizo una encuesta y solicita a los alumnos su colaboración para que le propongan títulos adecuados para la tabla y el gráfico y que además escriban un informe corto con el análisis de los resultados (p. 2).

Figura 4. Datos encuesta



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

- GRADO QUINTO

Una campaña emprendida por el Ministerio de Salud y Protección Social para prevenir el aumento en los índices de obesidad y diabetes infantil y juvenil, sugiere que en promedio cada persona debe realizar 30 minutos diarios de una actividad física aeróbica de intensidad moderada (caminar, trotar, correr, nadar, montar en bicicleta, etc.), para evitar el sobrepeso. Se afirma que, para cumplir con la campaña, cada persona debe hacer exactamente 30 minutos de ejercicio diarios. Argumenta la validez de esta afirmación (p 43).

Figura 5. Actividad física



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

- GRADO SÉPTIMO

Un piscicultor tiene tres estanques en los que cultivan truchas, él quiere estimar el peso aproximado de las truchas en cada estanque para saber cómo va el crecimiento. Saca al azar de cada uno de los 3 estanques 50 truchas y las pesa. La información se presenta en las siguientes tablas:

Figura 6. Frecuencias estanques

ESTANQUE 1		ESTANQUE 2		ESTANQUE 3	
PESO DE LAS TRUCHAS (gr)	FRECUENCIA	PESO DE LAS TRUCHAS (gr)	FRECUENCIA	PESO DE LAS TRUCHAS (gr)	FRECUENCIA
451-470	8	451-470	7	451-470	4
471-490	18	471-490	12	471-490	5
491-510	12	491-510	18	491-510	8
511-530	9	511-530	8	511-530	18
531-550	3	531-550	5	531-550	15
TOTAL	50	TOTAL	50	TOTAL	50

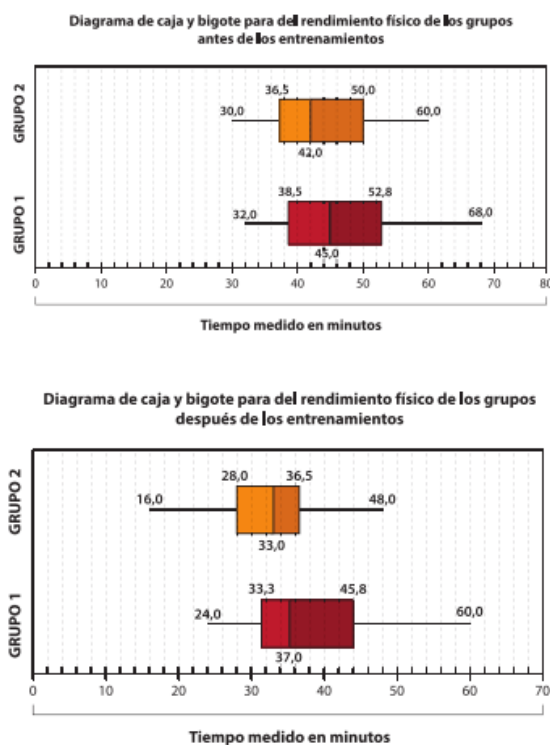
Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

Encuentra el peso aproximado de las truchas en cada estanque y compara el comportamiento para concluir sobre el estado de crecimiento de las truchas en cada estanque (p. 57).

- GRADO NOVENO

Responde la pregunta ¿cuál de los dos métodos es el más efectivo? usando los resultados obtenidos en un estudio realizado por el preparador físico de una escuela de fútbol en el que comparó los tiempos que se demoran, 60 jugadores, en realizar una actividad de resistencia física antes y después de realizar los entrenamientos alternativos. Se sabe que el preparador físico seleccionó al azar 30 estudiantes para conformar dos grupos y con cada grupo realizó un entrenamiento diferente (p. 72).

Figura 7. Diagrama rendimiento de los grupos



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

- GRADO UNDÉCIMO

Figura 8. Revista científica



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2017)

En un artículo de ciencias se afirma que: “los antropólogos y los paleontólogos usan las longitudes de los huesos fósiles largos como el fémur y el húmero para calcular la estatura del individuo en estudio”. Diseña y lleva a cabo un estudio estadístico para comprobar si se puede demostrar que existe una relación entre la estatura y la longitud de los huesos largos entre los seres humanos (p. 86).

Como se puede observar específicamente en el ejemplo del grado quinto, los DBA plantean para este curso, el promedio por persona, para referirse a la media nacional, es decir, se afirma la relación cultural de la media aritmética con el promedio.

4.4.1. Libros de texto como material curricular. Ahora, para dar solo unos ejemplos, se dará a conocer la propuesta de dos libros de texto de la Editorial Santillana, el primero será “Hipertexto Santillana Matemáticas 7” (2010) y el segundo será “Los caminos del saber matemáticas 7” (2013), ya que dan definiciones de la media aritmética (promedio), que sirven como referencia para el significado institucional de referencia:

El texto de Cifuentes & Salazar (2010), presenta la siguiente definición para la media aritmética:

La **media aritmética o promedio** es un dato que no necesariamente está en el conjunto de datos y que representa la característica predominante del grupo. La media es el punto de equilibrio del conjunto de datos.

Para el caso en que se considere una muestra, la media aritmética se simboliza como \bar{x} y para el conjunto de datos x_1, x_2, \dots, x_n se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Para el caso en el cual se considere una población, la media aritmética se simboliza μ y se calcula de la misma forma. La media es una medida que se ve afectada por el cambio significativo de un dato. Si existe un dato muy grande o muy pequeño con respecto a los demás, el valor de la media cambia significativamente. En otras palabras, la media es una medida sensible al cambio de un dato (p. 238).

Asimismo, se presenta la definición de media aritmética, según la propuesta de Ortiz et al. (2013):

La **media aritmética** también conocida como **promedio**, es una de las medidas más utilizadas para la caracterización de una variable. Se ubica en el centro de las observaciones.

- Si la media se calcula en una muestra se representa por \bar{x}
- Si la media se calcula en una población se representa por μ

La **media** de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ se calcula mediante la expresión (p. 260):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

De las anteriores definiciones, se pueden concluir algunos apartes de manera general:

- En nuestra cultura, la palabra promedio está arraigada al concepto de media aritmética, haciéndonos creer que significan lo mismo (cuando el promedio tiene un significado mucho más amplio).

- Los temas de estadística se encuentran ubicados en los últimos apartes de los libros, lo que puede dar a entender que no es la prioridad en el aula de clase, como se ha venido resaltando anteriormente.
- La media aritmética tiene una definición a partir de la fórmula general del cálculo, lo que conlleva a limitar la comprensión del significado de la media aritmética y la importancia de la misma.

Lo anterior, permite ver un panorama poco alentador de la enseñanza de la estadística en el aula de matemáticas, pues cuando no es que está ausente, se presenta de manera muy limitada, a través de símbolos que dicen mucho en cuanto a interpretación y significado se refiere.

A continuación, se van a definir las categorías teóricas que serán tenidas en cuenta en el instrumento de evaluación que se aplicará a los estudiantes de la Institución Educativa.

4.5. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DEL OBJETO ESTADÍSTICO MEDIA ARITMÉTICA

Para el análisis del instrumento de evaluación, se tomarán como referencia las categorías propuestas en Cobo (2003), Mayén (2009) y Molero del Río (2017), sobre el objeto estadístico media aritmética. Estas categorías, se basan en las entidades primarias que se han mencionado anteriormente.

Las categorías de análisis se distribuyen de la siguiente manera:

- Definiciones de media (DMi)
- Campos de problemas (CPi)
- Lenguaje verbal (V)
- Lenguaje gráfico (G)
- Propiedades numéricas (Ni)

- Propiedades algebraicas (A_i)
- Propiedades estadísticas (E_i), y
- Procedimientos de cálculo (P_i)

A continuación, se va a describir cada una de estas categorías de análisis del instrumento de evaluación, que serán necesarias para el análisis de resultados que se obtengan de los participantes.

4.5.1. Definiciones de media (DM): Desde la propuesta de Cobo (2003), se presentan dos definiciones para el término media aritmética. Los presentamos a continuación:

4.5.1.1. (DM1) Media como algoritmo. La media es la suma ponderada de cada uno los valores de la variable multiplicado por su frecuencia. Esta definición enfatiza el significado de la media como reparto equitativo y como mejor estimador de una cantidad desconocida, así como el algoritmo de cálculo, y presenta la media como una operación con los datos (p. 57).

4.5.1.2. (DM2) Media como promedio. La media es el promedio aritmético de un conjunto de datos. En esta definición se relaciona la media con otros promedios y se enfatiza su carácter de valor central (p. 58).

A continuación, presentamos los campos de problemas.

4.5.2. Campos de problemas (CP): Para entender lo que es un campo de problemas se tomará como referencia lo propuesto por Molero del Río (2017) “Un conjunto de problemas formará un campo, cuando todos ellos compartan soluciones y/o metodologías de resolución similares o relacionadas”.

Los métodos de solución de un problema planteado respecto al objeto estadística media aritmética, son similares sin importar la forma en que se presente, porque sus propiedades cumplen para cualquier tipo de problema planteado.

Los campos de problemas para el objeto estadístico media aritmética, son cinco, se presentan a continuación, desde la propuesta de Molero del Río (2017):

4.5.2.1. (CP1) Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizada en presencia de errores. Se usa la media en este caso por sus propiedades de buen estimador (estimador insesgado de mínima varianza) (p. 13).

4.5.2.2. (CP2) Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme. Algunos ejemplos son obtener la velocidad media durante un viaje, la calificación final de una asignatura evaluada mediante varios exámenes parciales, el salario medio de los empleados de una empresa.

4.5.2.3. (CP3) Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dado, cuya distribución es aproximadamente simétrica.

4.5.2.4. (CP4) Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población, para una variable con distribución aproximadamente simétrica.

4.5.2.5. (CP5) Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas. Este campo de problemas, no aparece en el instrumento de Cobo (2003), pero fue añadido en Mayén (2009) (Molero del Río, 2017, p. 14).

4.5.3. Lenguajes: En esta categoría, se tomará como base, la propuesta de Cobo (2003), para hablar de lenguaje verbal y lenguaje gráfico.

4.5.3.1. Lenguaje verbal: En la enseñanza de las matemáticas, para Rotherry (1980) (Citado por Cobo, 2003), existen tres categorías de palabras usadas en el contexto del aula, que, si no son aplicadas, pueden crear confusión a la hora de usar palabras desconocidas o descontextualizadas en la clase de matemáticas. Estas categorías son:

1. Palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Una de las características distintivas del discurso sobre las matemáticas es el uso generalizado del vocabulario técnico. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de matemáticas en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo (Pimm, 1987).

En esta categoría, se podría incluir la expresión medidas de posición central, variable estadística, efectivo, distribución de frecuencias, frecuencia absoluta y relativa, acumulada, escala (de ordenadas, de abscisas), histograma, diagrama de barras, gráfico de sectores, polígono acumulativo, gráficos de caja, gráficos de tallo y hojas, curva de distribución, gráfico de puntos, variables discretas, continuas, ordinales, cualitativas, par, impar, lineal, diagrama diferencial, intervalos de clase, extremos, marca de clase, clase modal, clase mediana, suma ponderada (p. 48).

2. Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos. Pimm (1987) indica que la mayor parte de las clases de matemáticas se desarrollan en una mezcla de lenguaje corriente y lenguaje matemático (es decir, usando términos ordinarios del lenguaje con un sentido matemático). A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos “del dialecto matemático” y los alumnos lo interpretan de acuerdo al lenguaje ordinario. Algunos de estos términos serían: media, mediana, moda, dispersión, datos, tendencia, población, máximo, carácter, ordenados, solución, valor, superior, inferior, pendiente, correspondencia, simétrica, desviación (a la media), media aritmética, valor medio, valor esperado, promedio (p. 48).

3. Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Se han encontrado los siguientes: central, variación, individuo,

creciente, decreciente, observaciones, clasificación, definido (bien, mal), amplitud, valor dominante, frecuente, fórmula (p. 48).

4.5.3.2. Lenguaje gráfico: Desde las propuestas de Sanz (1990) y Otte (1983) (Como se puede leer en Cobo, 2003), definen lo que es expresión gráfica y la relación entre texto e imagen, como se cita a continuación:

Sanz (1990) denomina con el término "expresiones gráficas" los pictogramas, fotografías, esquemas o diagramas usados en los libros de texto, es decir, todo lo que no sea expresión verbal o expresión simbólica específica del lenguaje matemático (p. 50).

Otte (1983) enfatiza en el equilibrio entre texto e imágenes, en el texto matemático y el contraste entre la proporción de texto y material visual en los libros de texto escolares y los escritos para el nivel universitario. La diversidad de imágenes en estos últimos es muy grande: tablas y gráficos, diagramas y fotografías. En esta diversidad de imágenes hay latente una variedad de intenciones y formas de trabajo implícitas y explícitas, convenciones y claves. Por ejemplo, se pueden codificar secuencias temporales y causales (p. 50).

En Molero del Río (2017), se proponen algunos tipos de gráficos estadísticos destacados:

- Conjuntos de datos aislados, presentados sin formato.
- Tablas de datos, como las tablas de frecuencias y de frecuencias acumuladas, las tablas de datos agrupados en intervalos, entre otras.
- Diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y polígonos de frecuencias acumuladas.
- Curvas de distribución.
- Recta numérica con los datos, para reforzar la idea de medida de tendencia central.

Ahora, se presentarán las definiciones de las propiedades de la media aritmética (numéricas, algebraicas y estadísticas), aunque no todas las categorías aparecen en el instrumento de evaluación, se presentará una definición de cada una de las propuestas presentadas en los documentos tomados como referentes. Para definir las propiedades, se tendrá en cuenta la propuesta de Molero del Río (2017).

4.5.4. Propiedades numéricas (N): Las propiedades numéricas se dividen en cuatro subcategorías, que se definirán a continuación:

4.5.4.1. (N1) La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio. La media estará comprendida entre los valores mínimo y máximo que tome dicha variable (p. 15).

4.5.4.2. (N2) La media no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos. Incluso, podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado. En ocasiones, la media puede ser un valor que no tenga sentido en el contexto planteado (p. 15).

4.5.4.3. (N3) En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos. Esta propiedad diferencia a la media de otras medidas de centralización, como son la mediana o la moda. Además, hay que tener en cuenta los valores nulos cuando aparece (p. 15).

4.5.4.4. (N4) La media se ve alterada por cualquier cambio en los datos. Cuando en una distribución algún valor es modificado su media puede cambiar. En el caso de que ese valor sea extremo y poco significativo, suprimirlo conllevará a un valor más significativo de la media (p. 15).

A continuación, se procederá a definir las propiedades algebraicas del objeto matemático media aritmética, desde lo propuesto por Molero del Río (2017).

4.5.5. Propiedades algebraicas (A): La media aritmética, posee características determinadas por sistemas algebraicos que funcionan en cualquier condición, estas son:

4.5.5.1. (A1) El cálculo de la media no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado, puesto que ésta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos. Es la traducción algebraica de la propiedad (N1) (p.15).

4.5.5.2. (A2) La media no tiene elemento neutro ni simétrico. Esta propiedad se deduce algebraicamente de la propiedad (N2) (p. 16).

4.5.5.3. (A3) La media no tiene la propiedad asociativa para el caso general. Si dividimos en partes un conjunto de datos y calculamos sus medias respectivas, no podemos deducir la media del conjunto total de datos (p. 16).

4.5.5.4. (A4) La media es una operación conmutativa. Dos ordenaciones distintas del conjunto de datos dan lugar al mismo valor de la media (p. 16).

4.5.5.5. (A5) La media conserva los cambios de origen y de escala. Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo valor, la media es también sumada, restada, multiplicada o dividida por esa misma constante. En consecuencia, la media hereda la misma unidad que los datos (p. 16).

4.5.5.6. (A6) La media de la suma de 2 o más variables es igual a la suma de las medias de dichas variables. Esta propiedad puede facilitar el cálculo de la media cuando dividimos una población en 2 o más subpoblaciones (p. 16).

4.5.5.7. (A7) La media siempre existe en datos numéricos y es única. La media siempre se puede calcular y, además, es única (p. 16).

4.5.6. Propiedades estadísticas (E): Las propiedades estadísticas de la media son aquellas que se deducen cuando la media se considera como resumen de los datos. Cobo (2003) indica las siguientes (Como se puede leer en Molero del Río 2017):

4.5.6.1. (E1) La media es un representante del conjunto de datos. La media proporciona información de todo el conjunto de datos, no de un dato en

concreto. Por ello se usa, por ejemplo, para comparar dos conjuntos de datos (p. 16).

4.5.6.2. (E2) La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de la gravedad. Esta propiedad se generaliza para datos bivariantes donde el punto con coordenadas las dos medias es el centro de gravedad de la distribución (p. 16).

4.5.6.3. (E3) En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales) (p 16).

4.5.6.4. (E4) La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente a los valores atípicos. Esta propiedad hace que utilicemos otras medidas de tendencia central, como la mediana o la moda, en aquellas ocasiones en las que aparecen valores atípicos, conocidos como “outliers” (p. 16).

4.5.6.5. (E5) La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es 0. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana (p. 17).

4.5.6.6. (E6) La suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima (p. 17).

4.5.6.7. (E7) Para datos agrupados en intervalos, con alguno de ellos abierto, también es preferible la mediana a la media. Existe la moda, pero no la media (p. 17).

4.5.6.8. (E8) Existen modas tanto para variables cuantitativas como cualitativas (p. 17).

4.5.6.9. (E9) En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media (p. 17).

A continuación, se procederá a describir los procedimientos de cálculo, propiedades que se encuentran en la mayoría de los ítems del instrumento de evaluación (exceptuando la P5), como en los anteriores casos, siguiendo la propuesta de Molero del Río (2017).

4.5.7. Procedimientos de cálculo (P): Los procedimientos de cálculo, son aquellos procesos realizados con la finalidad de solucionar un ejercicio, tal como lo dice Cobo & Batanero (2004) “cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de prácticas, que llega a convertir en rutinas con el tiempo” (Citado en Molero del Río, 2017, p. 17). Se analizarán los procedimientos de cálculo desde la postura de Molero del Río (2017):

4.5.7.1. (P1) Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados. Es la técnica más sencilla que deriva de aplicar la definición. La media se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número total de ellos. Por ejemplo:

$$\bar{x} = \frac{8+7+6+7}{4} = 7 \text{ (p. 17)}$$

4.5.7.2. (P2) Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias. La media se calcularía como la suma total de los productos entre cada valor de la variable en cuestión y su frecuencia relativa, $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i * f_i$. Equivalentemente, en términos de frecuencia absoluta sería $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$.

El cálculo de la media en este caso puede resultar más complejo ya que interviene la idea de ponderación (pp. 17-18).

4.5.7.3. (P3) Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clase. Si partimos de una situación en la que tenemos un gran número de datos, se recurrirá al cálculo de la media con los datos agrupados en intervalos (e_{i-1} , e_i). Para calcular la media usaremos como datos las marcas de clase, tomadas como el punto medio del intervalo, así como las frecuencias de cada clase f_i . La media entonces se calcula mediante el algoritmo anterior P2, cuyo valor ahora es aproximado.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{1,25*0+3,75*13+6,25*0+8,75*12}{0+13+0+12} = \frac{153,75}{25} = 6,15 \text{ (p. 18)}$$

4.5.7.4. (P4) Cálculo de la media de manera gráfica. Cuando trabajamos con variables discretas, conocidos sus valores x_i y sus frecuencias

relativas f_i , podemos intuir de manera aproximada el valor de la media aritmética mediante la observación de su representación gráfica, bien el diagrama de barras o bien el histograma (p. 18).

4.5.7.5. (P5) Cálculo de la media mediante calculadora u ordenador. Para calcular la media mediante herramientas tecnológicas no es necesario conocer ni comprender el algoritmo de la media. Basta con introducir los datos de manera correcta, tanto los valores como las frecuencias. En el caso de la calculadora, sí que será necesario saber el manejo de la memoria de la propia herramienta (p. 18).

4.5.7.6. (P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media. En distintos contextos, se tiene la suerte de conocer la media de una distribución y todos sus valores excepto uno. Para su búsqueda es necesario el uso del algoritmo de la media despejando el valor de la siguiente forma.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i * f_i = x_i = n\bar{x} - \sum_{j \neq i}^n x_j * f_j$$

Por ejemplo: indica que calificación ha obtenido un alumno en el último examen teniendo en cuenta que sus notas son 8 y 9 y su nota media es 8 (pp. 18-19).

4.5.7.7. (P7) Construir una distribución a partir de una media dada. En este caso, el objetivo es buscar una distribución cuya media coincida con un valor previamente dado. Para encontrarla es necesaria conocer los distintos procedimientos de cálculo directo de la media. El caso más sencillo, es aquella distribución en la que todos los valores de los datos coinciden con la media dada. Como ejemplo: indica que 3 posibles calificaciones que ha obtenido un alumno en sus 3 exámenes teniendo en cuenta que su nota media es un 7 (p. 19).

A partir de las categorías mencionadas anteriormente, se realizará el análisis de las respuestas de los estudiantes de la Institución Educativa, que participan en este estudio, con el fin de evaluar su significado personal, y así concluir si los estudiantes han logrado

desarrollar competencias, en torno al concepto de la “media aritmética” como promedio, finalizar su plan de estudios de educación básica y media.

A continuación, se presenta el marco metodológico para el desarrollo de la investigación.

5. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

5.1. TIPO DE ESTUDIO

La presente investigación, es de carácter cualitativo y descriptivo. Cualitativa porque es interpretativa, referida al individuo, a lo subjetivo y particular, es de carácter social, entendida esta como un proceso orientado a conceptualizar la realidad con el fin de obtener información lo más exacta posible sobre algún fenómeno social específico, que contribuya a ampliar los conocimientos respecto a dicha realidad. En particular, la investigación en educación estadística, se considera social, por cuanto ésta se encuentra en las ciencias sociales y los tipos y métodos de investigación establecidos para ello se ajustan al trabajo realizado en esta disciplina. En este sentido, el fenómeno social que nos interesa estudiar de manera concreta, es el significado de la media aritmética como promedio.

Es descriptivo, porque interpreta los datos, específicos sobre las propiedades de un fenómeno sometido al análisis. Además de la obtención de datos y su tabulación correspondiente, se relaciona con conexiones y condiciones existentes, prácticas que tienen validez, opiniones de las personas, puntos de vista, actitudes que se mantienen y procesos en marcha (Dankhe, 1986, Citado en Camacho, 2003, p.). En nuestro caso, aplicaremos un cuestionario para determinar la comprensión que tienen los estudiantes de grado undécimo, de una institución educativa pública, sobre el significado de la media aritmética como promedio.

- Población

Para definir la población objeto de estudio, se tendrá en cuenta la delimitación propuesta por Hernández, Fernández y Baptista (2014) “un estudio no será mejor por tener una población más grande; la calidad de un trabajo investigativo estriba en delimitar claramente la población con base en el planteamiento del problema” (Como se puede

leer en Camacho, 2003, p. 78). Por lo anterior, y teniendo en cuenta la descripción del problema, la población objeto de estudio serán los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa “Carlos Lleras Restrepo” ubicada en el barrio El Salado, comuna 7, de la ciudad de Ibagué. La información se recolectó en cinco cursos de grado undécimo de la jornada mañana y jornada tarde. Esta institución se basa en el modelo pedagógico constructivista social dialogante.

Los estudiantes se ubican en estratos socioeconómicos 1 a 3, entre las edades 15 a 19 años, la infraestructura posee espacios que fomentan el desarrollo educativo del estudiante (biblioteca, sala de sistemas, sala de vídeo, televisor, video beam y espacios para el libre esparcimiento y recreación).

Para contextualizar la situación escolar, a continuación, se mostrará la misión y visión de la institución:

- Misión:

La Institución Educativa Técnica Carlos Lleras Restrepo ofrece a la comunidad una formación integral e incluyente, en los niveles de preescolar, básica, media, para niños, niñas, adolescentes, jóvenes, adultos y una formación técnica en las especialidades: Contabilización de Operaciones comerciales y Financieras, sistemas agropecuarios ecológicos, operadores Turísticos, Sistemas, Logística empresarial, articulados con la universidad del Tolima y el SENA que procuren el desarrollo social , comunitario del entorno y el liderazgo de sus estudiantes mediante el fortalecimiento de competencias ciudadanas y laborales que permitan el acceso al mundo del trabajo o la continuidad de sus estudios a nivel tecnológico o superior.

- Visión:

En el año 2020 la Institución Educativa Técnica Carlos Lleras Restrepo estará a la vanguardia de los procesos educativos técnicos y tecnológicos en sus

especialidades Contabilización de Operaciones comerciales y Financieras, sistemas agropecuarios ecológicos, Sistemas, Logística empresarial, siendo motor de desarrollo y transformación social de su entorno y liderando programas educativos de proyección a la comunidad con una excelente formación para el trabajo y el emprendimiento, con un proceso de permanente actualización y adecuación a las necesidades sociales.

- **Muestra Intencional**

El tipo de muestra en esta investigación es la *muestra intencional*, donde se tuvieron en cuenta los estudiantes de la jornada mañana y jornada tarde del grado undécimo que consta de 40 estudiantes entre 16 y 19 años. Se estableció aplicar el instrumento de evaluación en ambas jornadas en la Institución Educativa, con el propósito de evaluar conocimientos de los estudiantes de todo el grado 11°, para la jornada de la mañana, se desarrolló durante sesiones de clase en práctica tres, en cambio, para la jornada de la tarde, se solicitó el permiso del docente para la aplicación del instrumento. Asimismo, es importante recalcar que se solicitaron los respectivos permisos administrativos en las dos jornadas de la Institución Educativa.

En el programa de licenciatura en matemáticas se tiene organizada la práctica pedagógica en los cuatro últimos semestres con la siguiente estructura: practica uno (observación), práctica dos (básica secundaria), practica tres (media) y practica cuatro (básica primaria); debido al foco poblacional del trabajo, situada en el grado undécimo, se hizo la investigación teórica pertinente en el semestre de la práctica tres para poder aprovechar la práctica cuatro como escenario de la investigación de campo.

5.2. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

El alcance de la investigación será de carácter descriptivo, ya que el interés principal es describir la comprensión del concepto de media aritmética como promedio, de los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa “Carlos Lleras Restrepo”, de

la ciudad de Ibagué. El presente estudio se limita a la población de estudiantes de grado undécimo por las razones expuestas en la determinación de la población. Además, el estudio lo realizará un estudiante y no un grupo lo que indica restricciones de tiempo y recursos. Por otra parte, el estudio está condicionado a situaciones problemáticas que involucran solamente a la media aritmética.

5.3. PROCESO DE INVESTIGACIÓN

La selección de la muestra será de tipo no probabilístico desde la postura de Johnson (2014), Hernández-Sampieri et al. (2013) y Battaglia (2008b) “la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o los propósitos del investigador”. Se aplicó el cuestionario a un total de 148 estudiantes, 93 de la jornada mañana y 55 de la jornada tarde, luego para no afectar los resultados con la “no respuesta” se seleccionaron los cuestionarios que tenían todas las respuestas a los problemas planteados, para que posteriormente no afecte el análisis de las categorías preestablecidas en el marco teórico. Los estudiantes que cumplieron con el criterio de selección y hacen parte de la muestra, son en total 40.

Las categorías que se tendrán en cuenta para el análisis son: las definiciones, las propiedades, las representaciones, los campos de problemas y los procedimientos respecto a la media aritmética. A la luz de estas, serán analizadas las respuestas de los estudiantes en cada situación problemática y posteriormente se presentarán los resultados sobre el significado personal e institucional que tienen los estudiantes de grado undécimo cuando usan la palabra promedio y la comprensión del cálculo y la interpretación que hacen de la media aritmética.

5.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

El cuestionario que se utilizará para evaluar el significado que tienen los estudiantes, se tomó del trabajo de investigación de Cobo (2003) (quien hizo una recopilación de distintos documentos donde se proponen estos problemas).

Para evaluar las respuestas de los estudiantes, se tendrán en cuenta las categorías mencionadas en el marco teórico, las cuales se van a describir junto a cada ítem.

6. PRESENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

A continuación, se procederá a describir el cuestionario, el cual consta de nueve ítems (se le realizaron ligeras modificaciones de lenguaje debido al contexto):

Ítem 1:

“Si alguien le dice que está en el promedio de la clase, ¿qué significa para usted estar en el promedio de la clase?”

En esta pregunta, no se incluyen categorías de análisis, sino que simplemente se analizarán las respuestas de los estudiantes, similar al estudio de Cobo (2003) “Para esta cuestión, hemos considerado que son posibles respuestas a la misma cualquiera de las definiciones de los promedios que conocen los estudiantes, media, mediana o moda. Asimismo, consideramos que no contiene otros elementos de significado como cálculos, propiedades, etc., salvo las representaciones usadas que son de tipo verbal”.

Ítem 2:

“Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenos, qué significa para usted esta frase.”

En esta pregunta, se tendrán en cuenta las propiedades numéricas (N1 y N2), propiedades algebraicas (A1), propiedades estadísticas (E1), y los campos de problemas (CP2 y CP4), tal como se definieron en el marco teórico.

Ítem 2.1.:

“Se han elegido 10 familias ibaguereñas y el número promedio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por cada familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que el promedio de hijos en las diez familias sea 1.2?”

Debido a la relación de este ítem con el anterior, se analizarán las mismas categorías, pero adicionalmente se estudiarán los procedimientos de cálculo (P1, P5 y P6), tal como se puede ver en el marco teórico.

Ítem 3:

“Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensa eso?”

En esta pregunta, se toman en cuenta las propiedades estadísticas (E2 y E5), además de los campos de problemas (CP2).

Ítem 4:

“Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué?”

Las categorías usadas en este ítem son las propiedades numéricas (N1), propiedades estadísticas (E2 y E5) y los procedimientos de cálculo (P1, P5 Y P6).

Ítem 5:

“El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta.”

En este ítem, se encuentran inmersas las propiedades numéricas (N3), propiedades estadísticas (E1, E3 y E4) y de procedimientos de cálculo (P1).

Ítem 6:

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

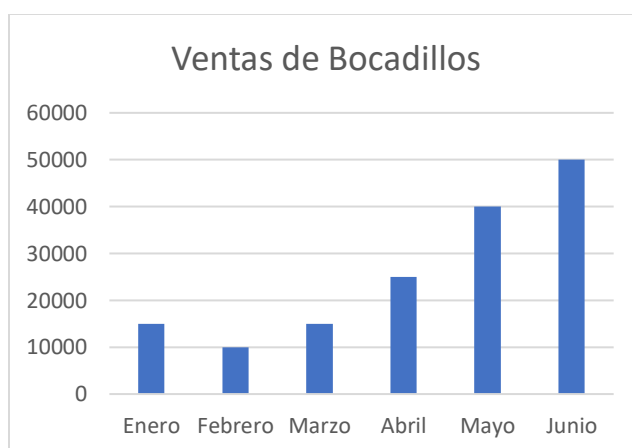
¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado.

En este ítem, encontramos las propiedades numéricas (N3 y N4), propiedades algebraicas (A2 y A4), también en los campos de problemas (CP4) y los procedimientos de cálculo (P1, P5 y P6), tal como se definieron en el marco teórico.

Ítem 7:

Observe en el siguiente diagrama de barras (ver la figura 1), las ventas de bocadillos de la empresa bocatta durante los primeros 6 meses del presente año:

Figura 9. Diagrama de barras de la venta de bocadillos



Fuente: Cobo (2003)

Calcule un valor aproximado del número promedio de bocadillos que se venden al mes. Se tendrán en cuenta para este ítem, los procedimientos de cálculo (P2 y P4).

Ítem 8:

El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres.

Tabla 2. Conjunto de datos de las 100 mujeres

Edad	Frecuencia
15-19	4
20-24	38
25-29	29
30-34	20
35-39	8
40-44	1
45-49	1

Fuente: Cobo (2003)

¿Cuál es la edad promedio de estas mujeres?

Para este ítem, se encuentran las propiedades numéricas (N2), propiedades algebraicas (A1), y los procedimientos de cálculo (P2 y P3).

7. ANÁLISIS DE RESULTADOS

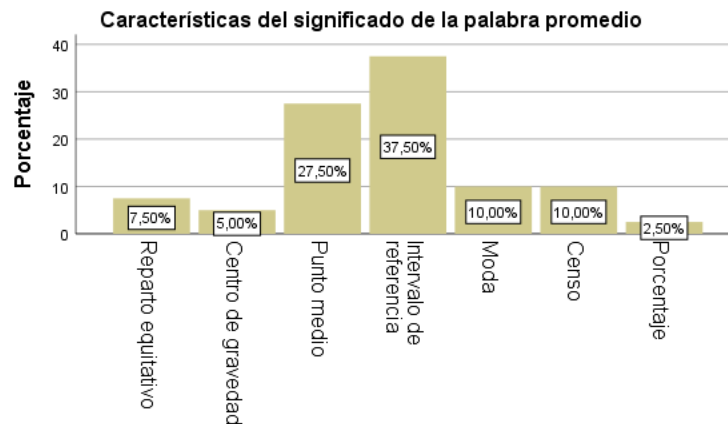
Para la pregunta N° 1 “Si alguien le dice que está en el promedio de la clase, ¿qué significa para usted estar en el promedio de la clase?”, se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 3. Categorías de respuesta en el ítem 1

	Frecuencia	Porcentaje
Reparto equitativo	3	7,5
Centro de gravedad	2	5,0
Punto medio	11	27,5
Intervalo de referencia	15	37,5
Válido Moda	4	10,0
Censo	4	10,0
Porcentaje	1	2,5
Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 10. Características del significado de la palabra promedio



Fuente: El autor

Lo que se puede observar a partir del gráfico anterior, es la relación que tienen los estudiantes con la palabra promedio, destacando las categorías punto medio e intervalo de referencia. A continuación, se realizará una breve descripción de cada categoría desde la propuesta del marco teórico.

La primera categoría “reparto equitativo”, hace referencia a repartir el total de los datos de manera equitativa, que es uno de los usos que tiene la media aritmética. En segundo lugar, la categoría centro de gravedad se refiere al punto de equilibrio de una balanza como se explica en Cobo (2003) “en particular los que usan la metáfora del punto de equilibrio de una balanza, para indicar la caracterización de la media como centro de gravedad de la distribución”, es decir, es el punto donde se estabiliza un conjunto de datos.

La tercera categoría llamada punto medio, se refiere a la relación que los estudiantes hacen de promedio con la mediana, es decir, con el centro de la distribución.

La cuarta categoría “Intervalos de referencia”, hace referencia a la separación por grupos del total de los datos, es decir se mira la amplitud de los mismos por escalas valorativas.

La quinta categoría, es la moda, es decir los estudiantes asumen la palabra promedio como el dato que más se repite.

La sexta categoría, se refiere al censo, ya que su enfoque es en hacer parte del conteo que va a ser encuestado.

La séptima categoría llamada porcentaje, porque se realiza una distribución de los datos basada en proporciones porcentuales.

Para empezar, es importante reconocer que, para todos los estudiantes la palabra promedio es un representante, aunque lo que representa es lo que varía (como se puede observar en las categorías antes mencionadas).

A continuación, se analizará con más detalles las categorías más representativas que se han encontrado en las respuestas de los estudiantes. Esto, con el fin de conocer las características de la comprensión de los estudiantes, acerca de la palabra promedio.

Para empezar, vamos a analizar la relación que se le da a la palabra promedio con el punto medio o centro, como se afirma en Moroney (1968) “Este promedio común está relacionado con la misma idea de medio o centro” (p. 171). Esto quiere decir, que culturalmente la palabra promedio ha estado incluida en nuestro lenguaje cotidiano asociada a la idea de punto medio, es decir, no se tiene en cuenta los términos del problema, para encontrar una forma de solucionarlo acorde a las necesidades del mismo, tal como aparece en Moroney (1968) “el tipo de promedio adecuado depende siempre de los términos del problema en curso”.

Esta relación que hacen los estudiantes con el punto medio, se puede relacionar con el concepto de mediana, el cual, en cualquier distribución, es el punto central que divide el conjunto de datos en dos partes iguales.

Respecto a la segunda categoría destacada, el intervalo de referencia, aunque se toma como un dato representativo, se está cometiendo el error de dividir en grupos un promedio, que representa el total de los datos, es decir “en un promedio se desprecia deliberadamente la identidad de los individuos sin importancia” (Moroney, 1968, p. 172). Lo anterior, demuestra que se tiene un significado personal sobre el promedio como representante, pero falta profundizar más sobre lo correspondiente a los colectivos, porque nos han educado con una idea falsa de promedios, ya que los falsos promedios se calculan con gran preocupación (Moroney, 1968, p. 170). Por lo tanto, es necesario cambiar la forma cómo se enseña el promedio, tomando como referencia los documentos oficiales emitidos por el Ministerio de Educación Nacional, y adecuando al entorno de las personas que van a adquirir un significado sobre este concepto.

Las siguientes preguntas a evaluar están relacionadas con las categorías de análisis presentadas en el marco teórico. Estas son las preguntas 2, 2.1, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Las categorías descritas en el marco teórico serán categorías orientadoras para analizar las respuestas de los estudiantes. Para ello se va a realizar el análisis de cada una de las preguntas del cuestionario, diferenciando las categorías de análisis.

Sin embargo, también se tendrán en cuenta algunas categorías complementarias que contribuyen al análisis de este estudio.

Una categoría complementaria se llamará “Otros errores” donde se describen errores durante el planteamiento de variables y/o desarrollo del problema.

Existe otra categoría complementaria llamada “Errores aritméticos” enfocada en aquellos estudiantes que presentan dificultad con los procedimientos aritméticos.

La tercera categoría complementaria es “No categorizable” donde se incluyen las respuestas de los estudiantes que no tienen relación con lo que se está preguntando, es decir, respuestas de los estudiantes de la muestra intencional que no se cumplen con las condiciones de las categorías planteadas en el marco teórico y no den respuesta coherente a la pregunta.

La primera categoría de análisis que se va a considerar, es la de definiciones de media, que tal como aparece en el marco teórico tiene dos subcategorías llamadas “Media como concepto” y “Media como algoritmo”, de las cuales hablamos a continuación.

7.1. DEFINICIÓN DE MEDIA

La definición de media, tiene incidencia en las preguntas 2, 2.1, 4, 5, 6, 7 y 8 del cuestionario de evaluación. A continuación, se empezará a describir cada una de las preguntas mencionadas.

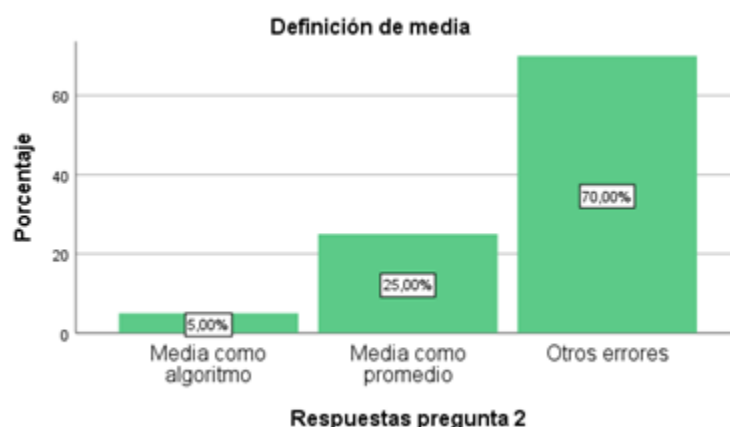
La pregunta N° 2, es la siguiente “Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenlos, qué significa para usted esta frase”. Sus resultados se presentan a continuación:

Tabla 4. Definición de media en el ítem 2

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	3	7,5
	Media como promedio	9	22,5
	Otros errores	28	70,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 11. Definición de media en el ítem 2



Fuente: El autor

En las definiciones de media, se puede observar que el 25% de los estudiantes asocian la definición de media con promedio, pero la mayoría de los estudiantes no logra identificar el algoritmo que representa la situación del problema.

Es importante destacar de esta pregunta, que la mayoría de estudiantes presentan dificultad para comprender el concepto de media, y lo asocian con la aproximación a los valores más cercanos en el conjunto numérico de los enteros.

Enseguida se va a presentar un ejemplo de cada categoría orientadora, para esta pregunta.

Una de las respuestas expresadas, como, por ejemplo, la del estudiante N° 29, acerca de la Media, fue la idea de promedio, cuando afirma que “Es un estudio que se realiza para saber cuál es el promedio aproximado a la cantidad de hijos que hay por cada familia, dando así el 1,2 un valor numérico a este promedio”. El total de estudiantes que cumplieron con la definición de media como promedio en este ítem, tomaron el valor 1,2 como una aproximación o como el valor de referencia por familia, es decir, identifican al promedio como un valor cuantitativo que representa a un grupo.

Un ejemplo de respuesta “Otros errores”, es el del estudiante N° 14 “Según el periódico que la mayoría de familias o según la moda en hijos es de 1 y 2”. Como se puede observar, se asume el número promedio como moda, con la aproximación a los números enteros más cercanos.

La pregunta N° 2.1 dice “Se han elegido 10 familias ibaguereñas y el número promedio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por cada familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que el promedio de hijos en las diez familias sea 1.2?” Sus resultados, se presentan a continuación:

Tabla 5. Definición de media en el ítem 2.1

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	22	55,0
	Otros errores	13	32,5
	Errores aritméticos	5	12,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 12. Definición de media en el ítem 2.1.



Fuente: El autor

Para esta segunda pregunta, se puede observar que los estudiantes en un 55% tienen idea del algoritmo de la media, es decir, han aplicado de manera correcta el algoritmo como solución al problema planteado. El porcentaje de estudiantes que han contestado con algún error no deja de ser importante para el análisis, ya que es cercano a la mitad de los estudiantes pertenecientes a la muestra objeto de estudio. El error que más se encontró para esta pregunta fue el de proponer resultados numéricos que no satisfacen las condiciones del problema.

Ahora, un ejemplo de cada categoría orientadora.

Un tipo de respuesta para la categoría Media como algoritmo, es la del estudiante N° 11 “ $4+1+0+2+1+2+0+1+1+0=12$; $12/10=1,2$. Se suman los 10 valores de las familias y tenía que dar 12 y se divide en 10”, quien asume valores particulares para los datos desconocidos.

Para la categoría “Otros errores”, un ejemplo de respuesta es el del estudiante N° 20 “ $10/8=1,25$ ”, quien hizo un cálculo incorrecto y sin un sentido coherente.

Ahora, vamos a presentar la pregunta N° 4, la cual dice así “Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado

es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué? Se presentan a continuación los resultados de la misma.

Tabla 6. Definición de media en el ítem 4

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	29	72,5
	Otros errores	7	17,5
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 13. Definición de media en el ítem 4



Fuente: El autor

En esta cuarta pregunta, se puede observar que los estudiantes en un 72,5% aplican de manera correcta el procedimiento de la media aritmética para la solución del problema, es decir, tienen idea del algoritmo para calcular la media. Asimismo, es importante reconocer el porcentaje de estudiantes que han respondido de manera incorrecta, que es igual al 27,5% (sumando las categorías Otros errores y Errores aritméticos) del total de los estudiantes.

Es importante que desde la escuela se intente reducir el porcentaje de estudiantes que presentan dificultad con situaciones como la presentada en el cuestionario de evaluación. El error más común que se ha encontrado en esta pregunta, ha sido el sumar los primeros

seis dígitos de manera consecutiva ($0+1+2+3+4+5$) lo que no satisface los requisitos de la pregunta y deja evidenciar una escasa idea de la variabilidad de los datos.

Enseguida se presentan ejemplos para cada categoría orientadora encontradas para esta pregunta.

Un ejemplo de respuesta para la Media como algoritmo, es el del estudiante N° 40 “ $(5+2+3+4+5+5)/6=24/6=4$ ”, quien acierta al tomar los números y calcular el promedio.

Un caso particular referente a la categoría “Otros errores” es el del estudiante N° 18 “ $0+1+2+3+4+5=15$; $15/5=2,15$ ” quien no asume que los números (datos) se pueden repetir para la realización del ejercicio, pero comprende el método de solución.

En los Errores aritméticos, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 17 “ $5+5+5+5+4=24$; $24/6=4$ ” ya que, en la realización de la suma, aunque es correcto sólo hace uso de cinco números y no de 6 como aparece en las condiciones iniciales del problema.

Ahora, se presentará la definición de media para la pregunta N° 5, la cual dice “El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta.” Ahora se presentarán los resultados de esta pregunta.

Tabla 7. Definición de media en el ítem 5

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	23	57,5
	Otros errores	14	35,0
	Errores aritméticos	3	7,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 14. Definición de media en el ítem 5



Fuente: El autor

Para este ítem, se puede observar que los estudiantes que han aplicado de manera correcta el algoritmo, sigue siendo mayor al porcentaje de estudiantes que han tenido algún error, pero para la pregunta N° 5, la diferencia entre estas dos grandes categorías (idea de promedio y o algoritmo) no es tan marcada como en preguntas anteriores, lo que significa que para problemas de características similares al propuesto, todavía se debe profundizar en los niveles escolares, a través de los estándares de competencias para el pensamiento aleatorio, para que la aplicación del algoritmo sea correcta y bien interpretada. El error más común encontrado en esta pregunta, fue el confundir la media con la moda, ya que el dato 19 se encontraba dos veces en los datos presentados, y este dato repetido fue un indicador para ellos.

Ahora, se van a mostrar ejemplos de cada categoría orientadora.

Un tipo de respuesta en la categoría Media como algoritmo, es el del estudiante N° 5 “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=179$; $179/9=19,88$ ”, quien comprende que los números decimales también hacen parte del resultado de la operación.

Un ejemplo de respuesta de la categoría "Otros errores" es la del estudiante N° 15 “15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26” quien relaciona la media aritmética con la moda, ya que 19 es el dato que más se repite.

Un caso particular donde se encuentra Errores aritméticos, es la del estudiante N° 22: “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=279$; $279/9=31$ ”, quien, al realizar la suma, los cálculos son incorrectos.

A continuación, se presenta la pregunta N° 6 del cuestionario de evaluación “Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado”. Ahora, se presentan los resultados encontrados en esta pregunta.

Tabla 8. Definición de media en el ítem 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	32	80,0
	Otros errores	7	17,5
	Errores aritméticos	1	2,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 15. Definición de media en el Ítem 6



Fuente: El autor

En esta pregunta se observa que el 80% de los estudiantes han contestado de manera correcta la pregunta propuesta, de lo que se puede deducir que, para preguntas con características similares a las del problema planteado, el nivel de dificultad es sencillo para la mayoría de estudiantes. Para el porcentaje restante (20%), se encontró que el error más común en esta pregunta es el de confundir el número promedio con el número total (en las condiciones iniciales se habla del 11 como número promedio por persona y los estudiantes lo tomaron como el número de dulces a repartir).

Se presentan a continuación, ejemplos de cada categoría orientadora encontrados en esta pregunta.

Un ejemplo de respuesta de Media como algoritmo es el del estudiante N° 12: “ $10+10+13=33$; $33/3=11$; $33/4=8,25$ ” quien crea un caso particular acorde a la pregunta y la resuelve de manera correcta, además de comprender el cambio de respuesta al llegar el cuarto chico.

Un caso particular de la categoría “Otros errores” es la respuesta del estudiante N° 14 “ $3+6+2=11$; $11+0=11$ ” quien confunde el promedio con el total, lo que lleva a una confusión en la resolución del problema propuesto.

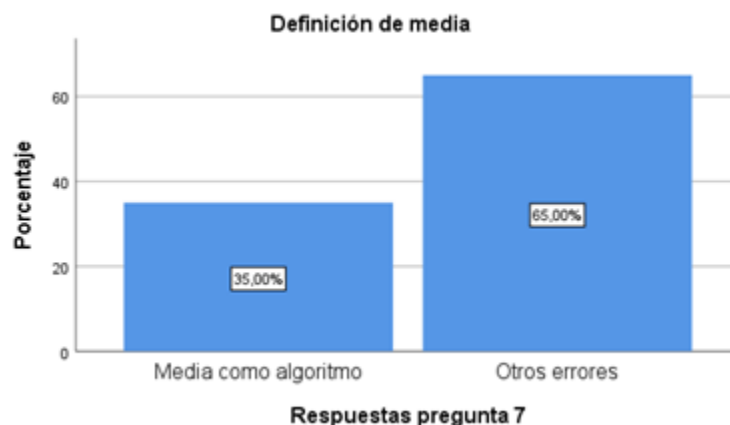
La pregunta N° 7 que se les presentó a los estudiantes en el cuestionario de evaluación, es la siguiente “Observe en el siguiente diagrama de barras, las ventas de bocadillos de la empresa bocatta durante los primeros 6 meses del presente año (figura 1). Calcule un valor aproximado del número promedio de bocadillos que se venden al mes”. Los resultados encontrados, fueron los siguientes.

Tabla 9. Definición de media en el ítem 7

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	14	35,0
	Otros errores	26	65,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 16. Definición de media en el ítem 7



Fuente: El autor

En este ítem, se puede observar que el porcentaje más alto de estudiantes se encuentra en la categoría “Otros errores”, lo que nos indica que los estudiantes presentan dificultad para resolver ejercicios de manera gráfica, en el sentido de relacionar las variables e identificar el promedio a partir de la información que le suministra un gráfico de barras.

De lo anterior, se puede indicar que es necesario reforzar situaciones que impliquen representaciones gráficas, debido a que presenta una dificultad alta en los estudiantes. En este caso, es útil recomendar las distintas representaciones de una misma situación para que el estudiante conjeture y pueda sacar conclusiones del fenómeno que esté analizando.

Se observa que el error más común encontrado en esta pregunta, es la confusión presentada por los estudiantes con la escritura de los decimales, ya que los estudiantes escribían por ejemplo 25,83; cuando el resultado correcto era 25.833,33; donde se evidencia un error aritmético, ya que, el desarrollo de las operaciones aritméticas ha sido correcto, pero el error se da en la mala escritura del resultado obtenido.

Enseguida se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

Un tipo de respuesta para la categoría Media como algoritmo, es la realizada por el estudiante N° 16 “ $15.000+25.000+10.000+15.000+40.000+50.000=155.000$ ”; $155.000/6=25.833,333$ ” quien realiza de manera correcta todos los procedimientos y comprende que los números decimales hacen parte del resultado.

Un ejemplo de respuesta de “Otros errores” es el del estudiante N° 13 “ $60.000+50.000+40.000+30.000+20.000+10.000=210.000$; $210.000/6=35.000$ ” quien realiza el procedimiento de forma correcta, pero los datos no se relacionan con los propuestos en la pregunta, sino con los valores que son límites de los rangos y que están explícitos en el eje vertical del gráfico.

La pregunta N° 8 presentada a los estudiantes en el instrumento de evaluación es la siguiente “El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres (Tabla 1). ¿Cuál es la edad promedio de estas mujeres?”. A continuación, se presentan los resultados de esta pregunta.

Tabla 10. Definición de media en el ítem 8

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media como algoritmo	8	20,0
	Otros errores	21	52,5
	Errores aritméticos	7	17,5
	No categorizable	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 17. Definición de media en el ítem 8



Fuente: El autor

En este ítem, se puede observar que el 80% de los estudiantes presentan algún tipo de dificultad para resolver esta pregunta, lo que permite ver problemas similares al propuesto en el instrumento de evaluación. Por lo tanto, es importante destacar que es necesario que problemas de este tipo sean enseñados en los niveles escolares de acuerdo a lo propuesto en los estándares de matemáticas, para fortalecer el uso de la media aritmética con datos ponderados y así lograr disminuir el alto porcentaje presentado actualmente para problemas de este tipo. El error más común encontrado para esta pregunta, fue la suma que realizaban los estudiantes de los límites de cada grupo de edades, sin tener en cuenta el uso de las frecuencias que tiene cada uno.

Ahora, se van a mostrar ejemplos de cada categoría orientadora.

Un tipo de respuesta para la categoría Media como algoritmo es la del estudiante N° 9
“ $[(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)]=2.685$; $2.685/100=26,85$ ”
quien realiza de forma correcta el procedimiento y al mismo tiempo reconoce que los números decimales hacen parte del resultado.

Un ejemplo de respuesta de la categoría “Otros errores” es la del estudiante N° 18
“ $(17*4)/100=0,68$; $(22*38)/100=8,36$; $(27*28)/100=7,56$; $(32*20)/100=6,4$;
 $(37*8)/100=2,46$; $(42*1)/100=0,42$; $(47*1)/100=0,47$ ” quien aplica el cálculo de la media aritmética para cada grupo de la distribución, es decir, presenta confusión a la hora de utilizar el procedimiento apropiado.

Un caso particular donde se presentan errores aritméticos en este problema, es el del estudiante N° 29

“ $[(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)]=2.658$; $2.658/100=26,58$ ”
quien aplica de manera correcta el procedimiento, pero los cálculos realizados son incorrectos.

Un tipo de respuesta para la categoría No categorizable es la del estudiante N° 33
“ $4*27=28$; $100/28=3,6$ ” quién realiza unos cálculos que no tienen ninguna relación con el problema planteado.

Para esta propiedad, se puede observar que los principales errores y dificultades presentados por los estudiantes fueron:

- La comprensión de la definición de media como promedio por parte de los estudiantes tiene un grado de dificultad mayor que la definición de media como algoritmo.
- En la media como algoritmo, las distribuciones agrupadas es la situación donde más se presentan errores y dificultades por parte de los estudiantes.

A continuación, se va a presentar la siguiente categoría de análisis presente en el marco teórico, llamada Campos de Problemas.

7.2. CAMPOS DE PROBLEMAS

El análisis que se presenta a continuación, será para los ítems 2, 3 y 6.

Para empezar, se presentan los resultados de la pregunta N° 2 “Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenlos, qué significa para usted esta frase”.

Tabla 11. Campos de problemas en el ítem 2

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media, reparto equitativo	11	27,5
	Media, valor probable	5	12,5
	Otros errores	24	60,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 18. Campos de problemas en el ítem 2



Fuente: El autor

Para esta pregunta, se observa que los estudiantes presentan nociones más cercanas a la media como reparto equitativo que a la posibilidad de dar un valor probable que pueda dar solución a la pregunta planteada. Asimismo, se debe analizar el porcentaje de estudiantes que han respondido con algún tipo de error, que es igual al 60% del total de estudiantes encuestados, porcentaje que debe tenerse en cuenta porque es mayor que la sumatoria de los dos porcentajes de respuestas correctas, lo que nos hace indicar que la mayoría de los estudiantes no logran identificar esta propiedad en situaciones similares a la pregunta propuesta.

Por lo tanto, es necesario que en el aula se apliquen problemas de este tipo para mejorar los resultados que se presentan actualmente. El error más común que se ha encontrado en esta pregunta, es la aproximación de los estudiantes de valores 1,2 a los valores enteros más próximos (1 y 2), pero no como valor probable sino como valor fijo.

A continuación, se va a presentar un ejemplo por cada categoría orientadora.

Un ejemplo de respuesta para Media, reparto equitativo es la respuesta del estudiante N° 12 “Por cada familia en Ibagué hay esa cantidad de hijos” que indica que se reparte el total de hijos en la cantidad presentada.

Para la media como valor probable, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 13 “Dice que las familias normalmente tienen 1 hijo o 2” donde se da un valor probable mas no se afirma que ese debe ser el resultado.

Para la categoría “Otros errores”, la respuesta del estudiante N° 27 “Que en Ibagué cada familia tiene de 1 a 2 hijos” ya que no se reparte de manera equitativa, sino que simplemente se aproxima el valor.

Para la pregunta N° 3 “Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o

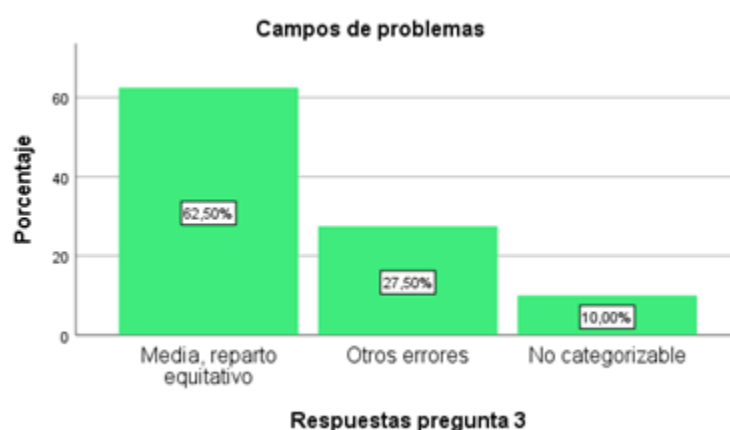
igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensa eso?” se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 12. Campos de problemas en el ítem 3

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media, reparto equitativo	25	62,5
	Otros errores	11	27,5
	No categorizable	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 19. Campos de problemas en el Ítem 3



Fuente: El autor

En esta pregunta, se puede observar que el porcentaje de estudiantes que han cumplido con el campo de problemas asociado a la pregunta propuesta, es mayor que el porcentaje de aquellos que presentan algún tipo de error, lo que indica que los estudiantes tienen nociones sobre la solución de problemas similares al propuesto en el instrumento de evaluación. Asimismo, es necesario resaltar que se debe seguir fortaleciendo la enseñanza de la media aritmética con situaciones similares a las del cuestionario de evaluación, para que el porcentaje de estudiantes que presentan

dificultades, disminuya. El error que más se presenta en esta pregunta, es el no reconocimiento de la cantidad de pizza dada y recibida entre las personas.

Enseguida se presenta un ejemplo de cada categoría orientadora.

Un ejemplo de respuesta para la categoría Media, reparto equitativo, es la del estudiante N° 18 “Yo pienso que es igual porque los que llevaron más harina le dieron la cantidad necesaria a los que llevaron menos para que las 4 pizzas quedaran iguales” donde se comprende que la cantidad compartida, es la misma cantidad recibida, para lograr ese reparto equitativo.

En la categoría “Otros errores” un ejemplo de respuesta, es la del estudiante N° 4 “Cantidad mayor porque por eso ofrecieron y regalaron más, le sobran de lo que había llevado y completaron a los que le faltaban” donde se observa que no se tiene la noción de reparto equitativo ya que indica que es mayor lo compartido que lo recibido.

En “No categorizable”, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 12 “No se sabe ya que en ningún momento se dijo la cantidad, simplemente se dijo que trajeran más y trajeron menos.” quien da una respuesta que no es coherente con lo que se pregunta.

En la pregunta N° 6 “Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado” se obtuvieron los siguientes resultados

Tabla 13. Campos de problemas en el ítem 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media, valor probable	33	82,5
	Otros errores	7	17,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 20. Campos de problemas en el ítem 6



Fuente: El autor

En esta pregunta, es importante observar que los estudiantes tienen una noción de valor probable para situaciones similares a la presentada en el instrumento de evaluación, ya que es notable la diferencia entre los estudiantes que tienen la noción de media como valor probable, de aquellos que no han adquirido este conocimiento para problemas de este tipo, lo cual es un buen indicador, porque significa que los estudiantes pueden resolver problemas cotidianos bajo estas condiciones.

Además, es importante indicar que se debe seguir fortaleciendo en el aula, la adquisición de los campos de problemas para situaciones problema como la propuesta. En esta pregunta, el error más común fue tomar el valor promedio, como valor final (es decir, el valor más probable, fue el resultado).

Ahora, un ejemplo de respuesta de cada categoría orientadora.

Para la Media como valor probable, se toma la respuesta del estudiante N° 22 “Lucía 11, Juan 11, Pablo 11” ya que es uno de los valores que cumple las condiciones del problema y puede ser una posibilidad de solución.

En la categoría “Otros errores” se presenta la respuesta del estudiante N° 15 “Lucía 7, Juan 2, Pablo 2”, ya que no es una distribución que satisfaga las condiciones propuestas en la pregunta.

De los campos de problemas, se han encontrado los siguientes errores y dificultades:

- Los estudiantes presentan una dificultad mayor en la solución de una pregunta cuando en el problema propuesto no se incluyen operaciones matemáticas, es decir, donde deben dar una descripción general.
- Los estudiantes cometen el error de aproximar valores decimales a valores enteros sin comprender el significado del valor decimal.

La siguiente propiedad que se va a presentar es Propiedades numéricas.

7.3. PROPIEDADES NUMÉRICAS

A continuación, se va a realizar el análisis del cuestionario de evaluación desde las propiedades numéricas. Los puntos del cuestionario de evaluación que se van a considerar son 2.1, 4, 5, 6 y 8.

Se presentan a continuación los resultados obtenidos en la pregunta N° 2.1. que dice “Se han elegido 10 familias ibaguereñas y el número promedio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por cada familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que el promedio de hijos en las diez familias sea 1.2?”

Tabla 14. Propiedades numéricas en el ítem 2.1

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Coincidencia con datos	21	52,5
	Otros errores	15	37,5
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 21. Propiedades numéricas en el ítem 2.1.



Fuente: El autor

En esta pregunta, se observa que el porcentaje de estudiantes que han logrado utilizar las propiedades numéricas, es del 52,5%, mayor que el de aquellos que presentan algún error (47,5%), pero no es una diferencia amplia, lo que indica que, en el uso de esta propiedad para problemas de este tipo, los estudiantes presentan cierto grado de dificultad para su solución. Por lo tanto, es necesario que desde la escuela se promuevan ejercicios donde el resultado del cálculo de la media aritmética, no coincida con los datos del conjunto numérico de partida. En este caso, el error más representativo ha sido igual al encontrado en la categoría Definiciones de media, el cual fue proponer resultados numéricos que no satisfacen las condiciones del problema.

Ahora, presentamos ejemplos de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría Coincidencia con datos, se toma en cuenta el estudiante N° 1 “ $4+1+1+1+1+1+1+1+1+0=12$; $12/10=1,2$ ” ya que aplica de manera correcta el procedimiento y comprende que el conjunto numérico del resultado es un número representativo.

Ahora, para la categoría "Otros errores" se toma el ejemplo el estudiante N° 18 “4,1,1,1,1,1,1,1,1,0” ya que no aplica el procedimiento, pero comprende los datos necesarios para hallar el resultado.

En la categoría Errores aritméticos, se tomará al estudiante N° 23 “ $1,2=10=12$; $12-5=7$ ” ya que calcula el resultado, pero sus procedimientos no son coherentes.

Ahora, se presentan los resultados de la pregunta N° 4 que se propone en el instrumento de evaluación “Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué?”

Tabla 15. Propiedades numéricas en el ítem 4

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Valor en el rango	30	75,0
	Otros errores	6	15,0
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 22. Propiedades numéricas en el ítem 4



Fuente: El autor

Para esta pregunta, el total de estudiantes que han contestado de manera acertada a la pregunta es de 75% del total de encuestados, lo que indica un nivel de aceptación alto de la propiedad para problemas de este tipo por parte de los estudiantes, aunque no deja de ser importante el porcentaje de estudiantes que presentan algún error en la solución del problema planteado (25%). Por lo anterior, es necesario promover la enseñanza de situaciones problema similares a la del problema propuesto, para que disminuya el porcentaje de estudiantes con algún tipo de dificultad. El error más común encontrado en esta pregunta, fue el sumar de manera consecutiva los primeros seis dígitos sin comprender las condiciones del problema.

Enseguida, se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría Valor en el rango, es la respuesta del estudiante N° 10 “ $5+4+4+4+4+3=24$; $24/6=4$ ”, quien encuentra los valores numéricos y comprueba que el resultado si puede existir entre números mayores y menores a él.

Un tipo de respuesta para la categoría "Otros errores" es la del estudiante N° 18 “ $0+2+2+3+4+5=16$; $16/6=4$,” ya que aplica de manera correcta el procedimiento, pero los datos que ha tomado en cuenta, no son coherentes con el resultado.

Para los Errores aritméticos, se toma como ejemplo el estudiante N° 39 “ $4+5+5+5+5=24$; $24/6=4$ ”, ya que se realiza la división en 6 datos, pero solamente se toman 5 en la suma.

En la pregunta N° 5 “El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta” se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 16. Propiedades numéricas en el ítem 5

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Intervienen todos los valores	27	67,5
	Otros errores	9	22,5
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 23. Propiedades numéricas en el ítem 5



Fuente: El autor

Para esta pregunta, se observa que los estudiantes comprenden la propiedad numérica para problemas similares al propuesto en el cuestionario de evaluación, sin embargo, el 32,5% de los estudiantes han presentado algún tipo de error, situación que nos indica que se debe seguir mejorando en los distintos niveles de enseñanza, proponiendo

situaciones problema similares a la propuesta en el instrumento de evaluación. El error que más se presenta en esta propiedad por parte de los estudiantes, es el de confundir la media aritmética con la moda.

A continuación, se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría “Intervienen todos los valores”, se toma como ejemplo el estudiante N° 5 “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=179$; $179/9=19,88$ ” quien usa todos los valores para la realización del ejercicio.

Un tipo de respuesta de la categoría “Otros errores”, es la del estudiante N° 14 “ $15=1$; $25=1$; $17=1$; $19=2$; $16=1$; $26=1$; $24=1$ ”, ya que, aunque usa todos los datos, su objetivo es calcular las repeticiones de cada dato mas no el cálculo de la media aritmética.

Una respuesta de la categoría *Errores aritméticos*, es la del estudiante N° 25 “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=279$; $279/9=31$ ”, quien realiza correctamente el procedimiento de la media aritmética, pero los cálculos manuales estuvieron erróneos.

Se presentan a continuación los resultados de la pregunta N° 6 “Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado”.

Tabla 17. Propiedades numéricas en el ítem 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Intervienen todos los valores	6	15,0
	Cambios al cambiar un dato	26	65,0
	Otros errores	8	20,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 24. Propiedades numéricas en el ítem 6



Fuente: El autor

Para esta categoría, se diferenciaron los estudiantes que únicamente calcularon la suma de los valores, de aquellos que incluyeron el cuarto chico, por eso surgen las categorías “Intervienen todos los valores” y “Cambios al cambiar un dato” (los estudiantes que únicamente calcularon el promedio de los tres estudiantes, hacen parte de la categoría Intervienen todos los valores. En la categoría *Cambios al cambiar un dato*, están aquellos estudiantes que calcularon el promedio de los tres estudiantes, además de realizar el cálculo incluyendo el cuarto chico, es decir, la segunda parte del problema).

Con lo anterior, se debe reconocer que el porcentaje de estudiantes que han contestado de manera positiva la pregunta, sumando estas categorías es bastante alto, un total del

80% total de estudiantes encuestados, lo que nos indica que los estudiantes comprenden esta propiedad en problemas de este tipo. En el porcentaje restante, se encuentran los estudiantes que presentan un tipo de error, que no deja de ser importante debido a que se espera que el porcentaje de estudiantes con dificultades sea mínimo. Por lo tanto, se debe seguir fomentando desde la escuela la enseñanza de esta propiedad a través de situaciones similares a la presentada en el cuestionario de evaluación. El error más frecuente encontrado en esta pregunta ha sido el tomar el número 11 como número total y no como número promedio.

Ahora, se presentan ejemplos de respuesta de las categorías orientadoras.

En la categoría Intervienen todos los valores, se presenta la respuesta del estudiante N° 18 " $11+11+11=33$; $33/3=11$ " quien usa los valores requeridos para el cálculo del promedio y aplica el procedimiento de forma correcta.

Un ejemplo para la categoría Cambios al cambiar un dato, es el del estudiante N° 7 " $11+11+11=33$; $33/3=11$. $11+11+11+0=33$; $33/4=8,2$ " quien usa correctamente todos los valores, incluido el del cuarto chico.

Para la categoría "Otros errores", se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 15 " $7+2+2+0=11$ " donde realiza una suma de los datos, que no tiene relación con lo propuesto.

Ahora, se presentan los resultados de la pregunta N° 8 "El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres (Tabla 1). ¿Cuál es la edad promedio de estas mujeres?"

Tabla 18. Propiedades numéricas en el ítem 8

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Coincidencia con datos	8	20,0
	Otros errores	27	67,5
	No categorizable	1	2,5
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 25. Propiedades numéricas en el ítem 8



Fuente: El autor

En esta pregunta se puede observar que el grado de dificultad en esta pregunta es alto, de acuerdo a los porcentajes obtenidos de las respuestas de los estudiantes, ya que el 80% del total de estudiantes presentan algún tipo de error, lo que indica que se debe dar prioridad a la enseñanza de la media aritmética a través de situaciones similares a la propuesta en el instrumento de evaluación, que les permita reconocer las propiedades numéricas de la media aritmética. El error más repetitivo encontrado en esta pregunta, es el de dar como dato más representativo, el intervalo que más se repite en las 100 mujeres.

A continuación, se presentan ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Un ejemplo de la categoría Coincidencia con datos, es la del estudiante N° 30 “ $[(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)]=2.685$; $2.685/100=26,85$ ” quien aplica correctamente el procedimiento y el resultado de la operación, es un número que no coincide con el conjunto numérico de los datos.

Para la categoría "Otros errores" se tomará como ejemplo la respuesta del estudiante N° 23 “ $(17*4)=68$, $(22*38)=836$, $(27*28)=756$, $(32*20)=640$, $(37*8)=296$, $(42*1)=42$, $(47*1)=47$ ” quien realiza la multiplicación correcta, pero el proceso queda inconcluso.

En la categoría “No categorizable”, la respuesta del estudiante N° 15 “38”, la cual no tiene ninguna relación con el problema planteado.

Como ejemplo de la categoría *Errores aritméticos*, se toma la respuesta del estudiante N° 22 “ $[(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)]=2.658$; $2.658/100=26,58$ ” quien aplica correctamente el procedimiento, pero los cálculos manuales son incorrectos.

En esta propiedad, las dificultades encontradas, de acuerdo a las respuestas de los estudiantes, fueron las siguientes:

- Cuando los datos que se presentan a los estudiantes están distribuidos a través de intervalos (como en el ítem 8), la posibilidad de responder adecuadamente en los estudiantes, es mucho menor que si los datos son aislados.
- Cuando el problema propuesto usa números decimales, los estudiantes presentan confusión a la hora de operar los mismos, lo que conlleva a respuestas erróneas en algunos casos.

Ahora, se va a presentar el análisis del cuestionario, desde la categoría de análisis Propiedades algebraicas.

7.4. PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Esta categoría de análisis tiene presencia en el instrumento de evaluación en los ítems 2, 6 y 8.

La pregunta N° 2 del cuestionario de evaluación, dice lo siguiente “Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenlos, qué significa para usted esta frase”. Los resultados para esta pregunta, se presentan a continuación:

Tabla 19. Propiedades algebraicas en el ítem 2

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Operación interna	11	27,5
	Otros errores	29	72,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 26. Propiedades algebraicas en el ítem 2



Fuente: El autor

En esta pregunta, el 72,5% de los estudiantes que han contestado con algún error, es mayor que el porcentaje de aquellos que lo han hecho de manera acertada. Lo anterior,

indica que los estudiantes no adquieren la propiedad de operación interna en situaciones particulares similares a la propuesta en el instrumento de evaluación.

Por lo tanto, se hace necesario promover la enseñanza de la media aritmética a través de situaciones que no involucren el uso del algoritmo, es decir, promover la generalización de problemas particulares. El error más representativo para esta pregunta, igual que en la categoría de definición de media, es la confusión de los estudiantes entre media y moda.

A continuación, ejemplos de respuesta para cada categoría orientadora.

Un modelo de respuesta en la categoría “Operación interna” es la del estudiante N° 8 “Pues que cogieron todos los menores de edad, hijos de ibaguereños, los sumaron y los dividieron por el número total de familias, es decir, por ejemplo: 300 hijos para 200 familias”, donde a través del ejemplo está tratando de generalizar el problema propuesto.

Un ejemplo de respuesta para la categoría “Otros errores” es la del estudiante N° 19 “Para Ibagué el número de hijos es dos, que lo debido sean 1,2 ya que puede darle lo necesario y es más cómodo tener, educar y responder por 1 o 2 hijos que por más de 2 ya que hay más dificultad a la hora de responder”, debido a que aproxima al valor entero más próximo, modificando el contexto de la pregunta planteada.

La pregunta N° 6 presentada en el cuestionario de evaluación, es la siguiente “Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado”. Se presentan a continuación los resultados de esta pregunta.

Tabla 20. Propiedades algebraicas en el ítem 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	No elemento neutro	26	65,0
	Otros errores	12	30,0
	No categorizable	2	5,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 27. Propiedades algebraicas en el ítem 6



Fuente: El autor

Para esta pregunta, se observa que el 65% de estudiantes reconocen la propiedad algebraica en esta pregunta, sin embargo, el 35% han contestado con algún error.

De lo anterior, se puede concluir que, aunque el porcentaje de respuestas acertadas es alto, se debe tratar de disminuir el porcentaje de los estudiantes que presentan algún error, ya que no todos los estudiantes están comprendiendo la propiedad que aparece en la pregunta propuesta. El error más frecuente encontrado en esta pregunta fue la omisión del cuarto chico, lo cual era el factor principal para cumplir la propiedad. Enseguida, ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Un ejemplo de respuesta para “No elemento neutro”, es la del estudiante N° 13 “ $11+11+11=33$; $33/3=11$ Promedio 11. $11+11+11+0=33$; $33/4=8,25$ ”, quien, al observar la inclusión de un nuevo dato, realiza de manera correcta el nuevo cálculo.

Un modelo de respuesta "Otros errores" es del estudiante N° 9 “ $11+11+11=33$; $33/3=11$. $15+15+14+0=44$; $44/4=11$.”, ya que, aunque incluye el nuevo dato, el resultado del promedio no cambia, es decir, no comprende la propiedad del problema.

Un caso particular de la categoría “No categorizable”, es el del estudiante N° 34 “Lucía 4, Juan 4, Pablo 3”, ya que su respuesta, no tiene ninguna relación con la categoría evaluada en esta pregunta.

Ahora, se realizará el análisis de la pregunta N° 8, la cual dice así “El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres” (Tabla 1).

Tabla 21. Propiedades algebraicas en el ítem 8

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Operación interna	12	30,0
	Otros errores	24	60,0
	No categorizable	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 28. Propiedades algebraicas en el ítem 8



Fuente: El autor

De esta pregunta, se observa que el 70% de los estudiantes presentan una dificultad alta en la comprensión de la propiedad en situaciones similares a la presentada, y solo un 30% de los estudiantes logran identificar la propiedad. El error más común encontrado en esta pregunta ha sido el mismo que en la categoría Definición de media, el cual fue sumar los límites de cada grupo de edades, procedimiento que no es correcto para la solución del ejercicio.

Enseguida, se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría Operación interna para esta pregunta es la del estudiante N° 16 “[$(17 \cdot 4) + (22 \cdot 38) + (27 \cdot 28) + (32 \cdot 20) + (37 \cdot 8) + (42 \cdot 1) + (47 \cdot 1)$]=2.685; $2.685/100=26,85$ ” quien usó los números decimales como parte del resultado.

Un modelo de respuesta, "Otros errores" es la del estudiante N° 7 “El promedio es de 20-24”, el cual confunde el concepto de media aritmética con el de moda.

Un ejemplo de respuesta “No categorizable”, es la del estudiante N° 15 “38”, el cual es un número que no tiene relación con el problema propuesto.

Para la categoría Propiedades algebraicas, las dificultades encontradas en los estudiantes fueron:

- La categoría que más dificultad presentó en los estudiantes, fue la de Operación interna (como se observa en los ítems donde aparece esta propiedad). Por lo tanto, es importante que esta propiedad tenga más trascendencia en la escuela, para que los estudiantes fortalezcan y amplíen su significado sobre la media aritmética.
- En problemas descriptivos (por ejemplo, la pregunta 2), se presenta el porcentaje más alto de estudiantes con deficiencias, lo que demuestra el carácter numérico que tienen las matemáticas en la escuela.

A continuación, se va a presentar el respectivo análisis de las Propiedades estadísticas.

7.5. PROPIEDADES ESTADÍSTICAS

Las preguntas del instrumento de evaluación que se van a considerar para el análisis de las propiedades son la N°2, 3, 4 y 5.

Para empezar, la pregunta N°2 “Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenlos, qué significa para usted esta frase” presenta los siguientes resultados.

Tabla 22. Propiedades estadísticas en el ítem 2

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Representantes de un colectivo	11	27,5
	Otros errores	29	72,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 29. Propiedades estadísticas en el ítem 2



Fuente: El autor

De los datos recolectados, en esta pregunta se puede concluir que los estudiantes no logran comprender el significado estadístico de la media para situaciones problema, similares a la propuesta en el instrumento de evaluación, ya que el 72,5% los estudiantes que presentan algún tipo de error, una diferencia bastante notoria de aquellos que han reconocido la propiedad (27,5%). El error que más se encuentra en esta pregunta, ha sido el confundir la media con los valores más próximos al número representativo.

Ahora, se presentan algunos ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Un ejemplo de respuesta en la categoría Representantes de un colectivo, es la del estudiante N° 5 “Que aproximadamente por familia hay 1,2 hijos en Ibagué”, es decir, comprende que el número es la representación del colectivo.

En la categoría "Otros errores" un ejemplo de respuesta es la del estudiante N° 39 “Que podría ser los hijos que muchas familias tienen es el mayor porcentaje de hijos por familia” ya que confunde el promedio con un porcentaje.

Ahora se presentan los resultados de la pregunta N° 3 “Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina

regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensa eso?” que son los siguientes.

Tabla 23. Propiedades estadísticas en el ítem 3

	Frecuencia	Porcentaje
Media, centro de gravedad	10	25,0
Suma desviaciones a la media	14	35,0
Válido	Otros errores	10
	No categorizable	6
	Total	40
		100,0

Fuente: El autor

Figura 30. Propiedades estadísticas en el ítem 3



Fuente: El autor

Se observa en esta pregunta, la diversidad de respuestas encontradas, pero la diferencia de respuestas entre los estudiantes que han contestado de manera correcta (60%), no es muy distante de aquellos que presentaron algún error en sus respuestas (40%). La categoría más representativa en respuestas correctas, fue la de Suma de desviaciones a la media (35%), seguida de Media, centro de gravedad (25%). Es necesario observar

el porcentaje de estudiantes que han contestado con algún error, ya que es importante disminuir esa cantidad de estudiantes y para esto, es necesario que la escuela priorice la enseñanza de estos contenidos. El error que más se observa en los estudiantes, en este problema, ha sido el no comprender la relación de igualdad que existe entre los que dan y los que reciben.

Enseguida, ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Un tipo de respuesta de la categoría Media, centro de gravedad, es la del estudiante N° 25 “Fue igual, porque no va a disminuir la harina al pasarse del uno al otro”, es decir que la media es el punto donde se equilibran los pesos mayores y menores.

Para la categoría, Suma desviaciones a la media, se toma la respuesta del estudiante N° 30 “Igual porque la harina recibida fue la misma regalada”, ya que la diferencia entre unos y otros, se equilibra en la media aritmética.

En la categoría "Otros errores" se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 9 “Menor porque sería para completar esa pizza, sería necesario otro poco de harina, no mucha porque esencialmente es para que todas queden de igual tamaño.” Ya que pretende equilibrar el peso de los datos, pero el sentido de desviación no es el correcto.

Un ejemplo para “No categorizable”, es la respuesta del estudiante N° 34 “Si no se cuenta con una balanza o algo para medir pueden tener más o menos harina que los demás. Pero si lo tienen ya podrían repartir equitativamente a cada uno” ya que es una respuesta que no tiene relación con la pregunta planteada en el problema.

Ahora, se presenta la pregunta N° 4 “Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué?” para realizar el análisis respectivo.

Tabla 24. Propiedades estadísticas en el ítem 4

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Suma desviaciones a la media	32	80,0
	Otros errores	4	10,0
	Errores aritméticos	4	10,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 31. Propiedades estadísticas en el ítem 4



Fuente: El autor

En esta pregunta, se observa que el 80% de los estudiantes cumplen con la propiedad estadística presente en este ítem, lo que indica que los estudiantes adquieren la propiedad estadística con datos numéricos, al equilibrar el valor de la media aritmética con valores superiores e inferiores al resultado final. El porcentaje restante de estudiantes (20%), presentan algún tipo de error en la solución del ejercicio. Es necesario seguir fortaleciendo la enseñanza de la media aritmética a través de situaciones similares a la propuesta, para que el porcentaje sea cada vez menor. El error más común encontrado en esta pregunta, fue el sumar los seis primeros dígitos ($0+1+2+3+4+5$), sin comprender lo que se propone en el ejercicio.

Ahora, ejemplos de respuestas de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría Suma desviaciones a la media, es la respuesta del estudiante N° 13 “ $5+4+4+3+4+4=24$; $24/6=4$ ” donde se comprende que, si hay términos mayores y menores al resultado de la media, la desviación entre ellos será ese valor representativo.

En la categoría "Otros errores" se toma como ejemplo el estudiante N° 23 “ $4+4+4+4+4+4=24$; $24/6=4$ ” porque a pesar de aplicar bien el procedimiento, no cumple con las condiciones iniciales del problema.

Para los “Errores aritméticos”, el ejemplo será la respuesta del estudiante 7 “ $4+5+5+5+5=24$; $24/6=4$ ” porque, aunque el procedimiento y las condiciones están presentes en la pregunta, el procedimiento se realiza con datos incompletos.

Ahora, se presentan los resultados de la pregunta N° 5 “El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta”.

Tabla 25. Propiedades estadísticas en el ítem 5

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Representantes de un colectivo	22	55,0
	Otros errores	6	15,0
	Errores aritméticos	12	30,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 32. Propiedades estadísticas en el ítem 5



Fuente: El autor

Se observa en esta pregunta que la diferencia entre estudiantes que comprenden la propiedad (55%) y los que presentan algún tipo de error (45%) no es muy marcada, lo que indica que los estudiantes aún deben mejorar en la comprensión de esta propiedad para situaciones similares a la propuesta en el instrumento de evaluación. El error más común presente en las respuestas a esta pregunta, ha sido confundir la media con la moda.

Enseguida, algunos ejemplos de cada categoría orientadora.

Un ejemplo para la categoría “Representantes de un colectivo”, es la respuesta del estudiante N° 16 “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=179$; $179/9=19,88$. El peso promedio es 19,8 porque se suman todos los números y se divide entre 9 que son todos los valores sumados” que comprende el valor decimal como representativo del conjunto de datos.

Para la categoría "Otros errores" se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 34 “19 k” quien confunde el proceso para calcular la media y la reemplaza por el valor más común.

En la categoría “Errores aritméticos” se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 18 “ $15+25+17+19+16+26+18+19+24=179$; $179/9=19$; Aproximación 20” quien realiza el cálculo requerido, pero centra sus resultados en valores enteros.

En la categoría “Propiedades estadísticas”, se encontraron las siguientes dificultades en los estudiantes:

- Las preguntas de carácter descriptivo son las que más presentan dificultades en los estudiantes. Por lo tanto, es necesario equiparar la enseñanza de métodos numéricos con métodos descriptivos.
- En la categoría Representantes de un colectivo, es donde se observa más respuestas incorrectas por parte de los estudiantes.

La siguiente categoría de análisis que se va a presentar es la de Procedimientos de cálculo.

7.6. PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

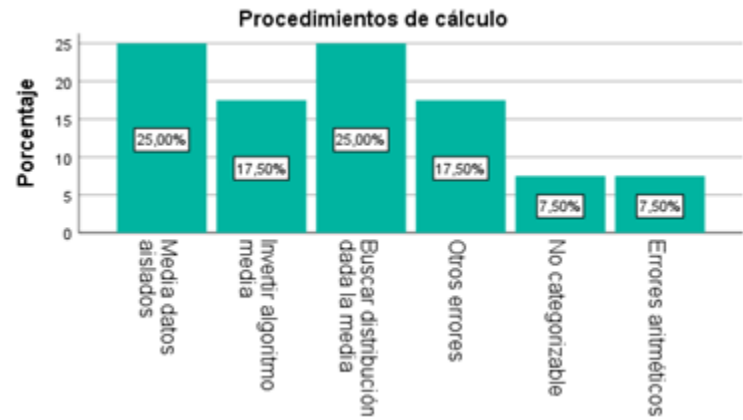
La categoría de análisis se presenta en los siguientes ítems: 2.1, 4, 5, 6, 7 y 8. La primera pregunta a analizar, es la 2.1, que se presenta a continuación “Se han elegido 10 familias ibaguereñas y el número promedio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por cada familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que el promedio de hijos en las diez familias sea 1.2?”

Tabla 26. Procedimientos de cálculo en el ítem 2.1

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media datos aislados	10	25,0
	Invertir algoritmo media	7	17,5
	Buscar distribución dada la media	10	25,0
	Otros errores	7	17,5
	No categorizable	3	7,5
	Errores aritméticos	3	7,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 33. Procedimientos de cálculo en el ítem 2.1.



Fuente: El autor

Se puede observar en esta pregunta que el 67,5% de los estudiantes han respondido de manera correcta a la pregunta propuesta, siendo el cálculo de datos aislados y la búsqueda de una distribución dada la media, las más destacadas con un 25% del total de los encuestados cada una. Los estudiantes que han presentado algún error en sus respuestas, es el 32,5%, porcentaje que no puede ser despreciado, porque es un índice alto de estudiantes que no comprendieron la propiedad presente en la pregunta.

Por lo tanto, es necesario reforzar y afianzar estas propiedades para problemas similares al que se propuso en el cuestionario de evaluación y poder disminuir la cantidad de estudiantes que no lograron identificar esta propiedad. El error que más se presenta en esta pregunta, es el dividir el número de familias entre el número 8 ($10/8$), cálculo que es incorrecto de acuerdo a las condiciones iniciales del problema.

A continuación, se presentan ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Un ejemplo de respuesta para la categoría Media datos aislados, es la del estudiante N° 1 “ $4+1+1+1+1+1+1+1+1+0=12$; $12/10=1,2$ ” ya que únicamente hace el procedimiento tradicional de cálculo de la media.

Para la categoría Invertir algoritmo de la media, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 30 “García=4, Pérez=1/5. $1,2*10=12$; $12-5=7$ ” que calcula el dato faltante a través de la inversión del algoritmo.

En la categoría “Buscar distribución dada la media”, la respuesta del estudiante N° 13 será el ejemplo “Tenemos 2 familias las cuales suman 5 hijos, si usamos la lógica para que el promedio sea correcto, tendrían que tener 7 familias un hijo por lo menos y una no tener hijos” donde se crea una distribución a partir de los datos faltantes.

La categoría "Otros errores" se toma la respuesta del estudiante N° 24: “ $10/8=1,25$ ” quien realiza un procedimiento que no se relaciona con los procedimientos de la media aritmética.

En las respuestas “No categorizables”, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 39 “Se podría decir que el porcentaje que hay entre familias sería entre 2 y 3” ya que no realiza procedimiento alguno.

Un ejemplo para la categoría “Errores aritméticos”, es la respuesta del estudiante 28 “ $1,2=12$; $12-5=7$ ” quien toma los datos correctos, pero el cálculo no es coherente.

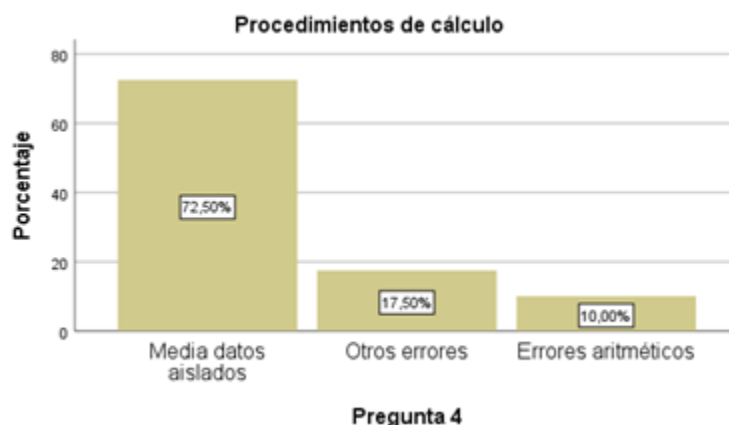
A continuación, se presenta la pregunta N° 4 que dice “Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué?”. A continuación, se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 27. Procedimientos de cálculo en el ítem 4

	Frecuencia	Porcentaje
Media datos aislados	29	72,5
Otros errores	7	17,5
Errores aritméticos	4	10,0
Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 34. Procedimientos de cálculo en el ítem 4



Fuente: El autor

En esta pregunta, se observa que el 72,5% de los estudiantes responden de manera correcta al problema propuesto, todos ellos lo hacen a través de la suma de datos aislados, a pesar de existir otras formas de solución, lo que denota las preferencias que tienen los estudiantes en el momento de solucionar un ejercicio a través de procedimientos de cálculo.

Por lo anterior, es importante motivar al uso de distintas soluciones a problemas numéricos, es decir, que el cálculo de datos aislados no sea el único método de solución de ejercicios que involucren la media aritmética. Asimismo, es importante reducir el porcentaje de estudiantes que responden de manera incorrecta, ya que en este momento es del 27,5% del total de los estudiantes encuestados. El error más frecuente en esta pregunta ha sido la suma de los seis primeros dígitos sin comprender las condiciones del problema.

A continuación, se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

En la categoría “Media datos aislados”, se toma la respuesta del estudiante N° 4 “ $5+5+5+5+2+2=24$; $24/6=4$ ” quien realiza un cálculo manual como solución a lo preguntado.

Para la categoría “Otros errores”, se toma la respuesta del estudiante N° 18 “ $5+4=9$; $9/6=1,5$ ” quien realiza cálculos que no se relacionan con las condiciones iniciales del problema.

Como ejemplo de la categoría “Errores aritméticos”, se toma la respuesta del estudiante N° 39 “ $4+5+5+5+5=24$; $24/6=4$ ” quien, en el momento de plantear la suma, sólo toma cinco dígitos, para después realizar la división en 6.

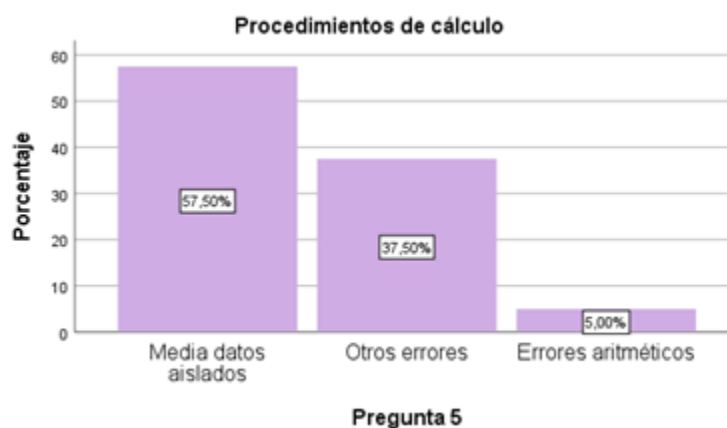
A continuación, se presentan los resultados de la pregunta N° 5 “El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta”.

Tabla 28. Procedimientos de cálculo en el ítem 5

	Frecuencia	Porcentaje
Media datos aislados	23	57,5
Otros errores	15	37,5
Errores aritméticos	2	5,0
Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 35. Procedimientos de cálculo en el ítem 5



Fuente: El autor

Se observa en esta pregunta que la diferencia entre el porcentaje de estudiantes que han cumplido con la propiedad, que son el 57,5% del total de los encuestados, no es muy amplia de aquellos que presentan algún tipo de error, el 42,5% restante.

Lo anterior, indica que es necesario afianzar el uso de datos aislados cuando el resultado es un número decimal, es decir, no hace parte del conjunto numérico de salida. Por lo tanto, se deben proponer más situaciones de este tipo, para que el porcentaje de estudiantes que presentan dificultades, disminuya. El error más frecuente que se ha encontrado, es el confundir la media con la moda, tomando el número 19 como dato representativo.

A continuación, se presentan ejemplos de cada categoría orientadora.

En la categoría Media datos aislados, se toma la respuesta del estudiante N° 1 “15+25+17+19+16+26+18+19+24=179; 179/9=19,88”. En este caso, se aplica correctamente el procedimiento.

Para la categoría "Otros errores", el ejemplo es la respuesta del estudiante N° 22 “15+25+17+19+16+26+18+19+24=179; 179/9=19”. En esta respuesta, el estudiante aproxima al valor entero 19, lo que es un error de comprensión de la media aritmética. Como ejemplo para la categoría “Errores aritméticos”, se toma la respuesta del estudiante N° 13 “15+25+17+19+16+26+18+19+24=279; 279/9=31” donde se aplica el procedimiento con errores en la suma, lo que afecta el resultado final.

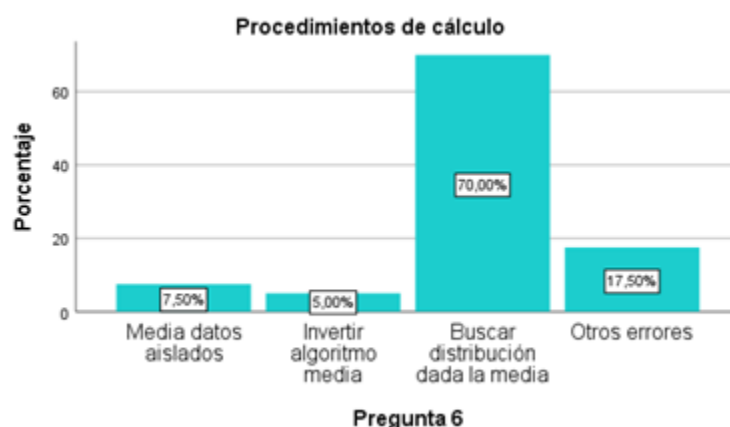
Ahora, se presentan los resultados de la pregunta 6 “Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno? Lucía _____ Juan _____ Pablo _____
¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado”.

Tabla 29. Procedimientos de cálculo en el ítem 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media datos aislados	3	7,5
	Invertir algoritmo media	2	5,0
	Buscar distribución dada la media	28	70,0
	Otros errores	7	17,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 36. Procedimientos de cálculo en el ítem 6



Fuente: El autor

En esta pregunta se observa que el 82,5% del total de estudiantes identificaron la propiedad “Buscar una distribución dada la media” lo que indica que, para preguntas como la propuesta en el instrumento de evaluación, los estudiantes tienen un grado de aceptación alto, lo que denota avances en la escuela en situaciones numéricas con resultados pertenecientes al mismo conjunto numérico de partida. Es importante seguir en la tarea de disminuir el porcentaje actual del 17,5% de estudiantes que presentan errores en preguntas como la que se les presentó en el instrumento de evaluación. El error que más se ha encontrado en esta pregunta ha sido tomar el número promedio (11) como número total.

Ahora, se presentan ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Se toma como ejemplo para “Media datos aislados”, la respuesta del estudiante N° 13 “ $11+11+11=33$; $33/3=11$ Promedio 11. $11+11+11+0=33$; $33/4=8,25$ ” ya que el estudiante únicamente realiza la suma de los datos que satisfacen las condiciones iniciales del problema.

En la categoría “Invertir algoritmo de la media”, se toma la respuesta del estudiante N° 15 “ $11*3=33$; $10+11+12=33/3=11$; $10+11+12=33/4=8,25$ ” donde el primer paso para solucionar el problema planteado fue realizar la inversión del algoritmo.

Como ejemplo de la categoría “Buscar distribución dada la media” está la respuesta del estudiante N° 25 “Lucía once, Juan once, Pablo once; No es la única posibilidad: Lucía puede traer 20 dulces, Juan 10 y Pablo 3. El promedio sigue siendo once. $33/4=8,25$. El nuevo promedio con los cuatro chicos es de 8,25” donde se da una distribución correcta acorde a lo planteado.

El ejemplo de la categoría "Otros errores", ha sido la respuesta del estudiante N° 15 “ $7+2+2+0=11$ ” quien confunde el número promedio con el número total.

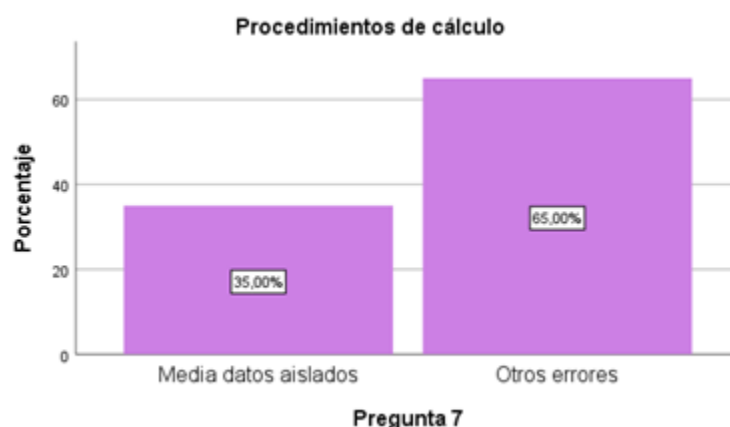
Ahora, se presentan los resultados obtenidos en la pregunta N° 7 “Observe en el siguiente diagrama de barras (ver la figura 1), las ventas de bocadillos de la empresa bocatta durante los primeros 6 meses del presente año. Calcule un valor aproximado del número promedio de bocadillos que se venden al mes”.

Tabla 30. Procedimientos de cálculo en el ítem 7

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media datos aislados	14	35,0
	Otros errores	26	65,0
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 37. Procedimientos de cálculo en el ítem 7



Fuente: El autor

Se observa para esta pregunta que el 65%, de los estudiantes que presentan errores el cual es bastante alto respecto del total de estudiantes que contestaron de manera correcta, es decir, el 35% del total de los encuestados. Lo anterior indica que los estudiantes en preguntas relacionadas con gráficas y con resultados decimales, presentan cierta dificultad en su solución. Asimismo, es necesario resaltar que ningún estudiante dio un valor aproximado del gráfico sin aplicar algún procedimiento, es decir, los estudiantes no adquieren la propiedad P4 (Cálculo gráfico de la media).

Por lo tanto, es necesario que a los estudiantes se les oriente con ejemplos gráficos (pictogramas, de barras, circulares, etc.) para que comprendan situaciones problema distintas a los conocidos ejemplos numéricos y así ampliar la comprensión de contenidos estadísticos. En esta pregunta, el error que más se repite por parte de los estudiantes es la escritura de los números decimales, debido a que se escribe, por ejemplo, 25,83; cuando el resultado aproximado correcto es 25.833,33.

Enseguida se presentan ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

En la categoría “Media datos aislados”, se toma la respuesta del estudiante N° 9: “6 meses por un total de 155.000 bocadillos; Dividido $155.000/6=25.833,33$ ” quien describe la primera parte del procedimiento y realiza el cálculo en la segunda”.

El ejemplo para la categoría “Otros errores”, es la respuesta del estudiante N° 20 “ $15.000+10.000+15.000+25.000+40.000+50.000=155.000$; $155.000/6=25,83\dots$ ”

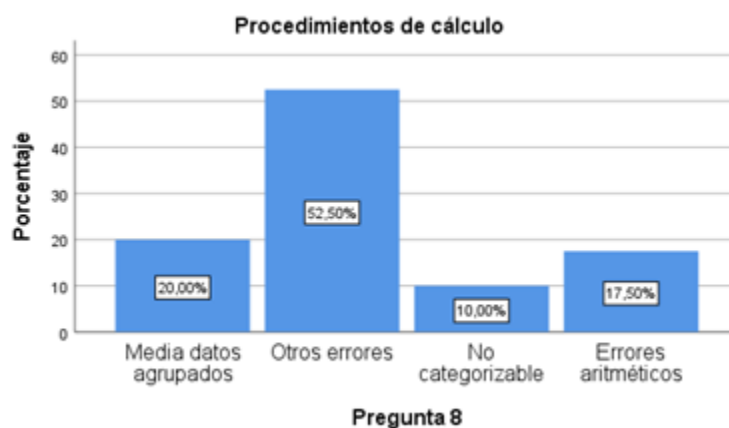
A continuación, se presentan los resultados de la pregunta N° 8 “El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres (Tabla 1). ¿Cuál es la edad promedio de estas mujeres?”

Tabla 31. Procedimientos de cálculo en el ítem 8

		Frecuencia	Porcentaje
Válido	Media datos agrupados	8	20,0
	Otros errores	21	52,5
	No categorizable	4	10,0
	Errores aritméticos	7	17,5
	Total	40	100,0

Fuente: El autor

Figura 38. Procedimientos de cálculo en el ítem 8



Fuente: El autor

Para esta pregunta se observa que el 80% de los de estudiantes encuestados, está dentro de las categorías de errores, lo que indica grandes deficiencias por parte de los

estudiantes con problemas de media ponderada. En esta pregunta, es donde existe una diferencia más amplia de estudiantes con respuestas incorrectas respecto del porcentaje de estudiantes que lo hacen de manera correcta, lo que demuestra que es la aplicación de la media aritmética con más debilidades por parte de los estudiantes.

Por lo anterior, es importante que se fomente la enseñanza de la media aritmética a través de datos agrupados, con la finalidad de disminuir el alto porcentaje de estudiantes que se observa con estas debilidades. El error más recurrente encontrado en esta pregunta, ha sido el sumar los límites de cada pareja de límites, procedimiento incorrecto para la solución del problema propuesto.

Ahora, se presentan ejemplos de respuesta de cada categoría orientadora.

Para la categoría Media datos agrupados, se toma la respuesta del estudiante N° 30 “[$(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)$]=26,85”, quien aplica correctamente el procedimiento para el cálculo de la media.

Se toma para la categoría “Otros errores”, la respuesta del estudiante N° 3 “El promedio de la edad sería de 28 a 30 años dando en resultado mayor a 28 años” quien confunde el cálculo de la media con un intervalo que no es correcto.

Un ejemplo de respuesta “No categorizable”, es la respuesta del estudiante N° 35 “4 años * 7 = 28; $100/28=3,6$ ” quien realiza una serie de cálculos que no se relacionan con las condiciones del problema.

En “Errores aritméticos”, se toma como ejemplo la respuesta del estudiante N° 29 “[$(17*4)+(22*38)+(27*28)+(32*20)+(37*8)+(42*1)+(47*1)$]=2.658; $2.658/100=26,58$ ” quien realiza una suma incorrecta y por ende los cálculos posteriores también serán incorrectos.

Para la categoría “Procedimientos de cálculo”, las dificultades más notorias observadas en las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes:

- Los estudiantes presentan dificultad para leer gráficas, lo que demuestra que sólo se promueve la enseñanza a través de métodos numéricos.
- Cuando el problema propuesto es a través de una tabla con datos agrupados, el nivel de dificultad para la solución del ejercicio es mucho mayor que para cualquier otro tipo de problema que incluya procedimientos de cálculo.

Ahora, se presenta una tabla donde se contrastan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas con el significado personal adquirido por los estudiantes.

Tabla 32. Una evaluación del significado personal de los estudiantes de grado undécimo frente a lo que proponen los Estándares Básicos de Competencia, en relación con la media aritmética.

Pensamiento Aleatorio Nivel o Conjuntos de Grado	Estándares de Competencias Relacionados con la Media Aritmética	Evaluación desde el Significado Personal de los Estudiantes, acerca de la media aritmética como promedio, al terminar el grado Once
Primero a tercero	Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos	Los estudiantes no logran explicar la media como promedio en contextos complejos.
Cuarto a quinto	Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican	Los estudiantes prefieren usar las características visuales de los gráficos y hacer lectura literal, pero se les dificulta interpretar el promedio a partir de la gráfica.
Sexto a Séptimo	Uso medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos	Usa la suma y la división para describir la media en situaciones sencillas, pero no es capaz de aplicarla en situaciones complejas.
Octavo a Noveno	Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explico sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.	No logra diferenciar la media de la moda, algunos estudiantes creen que se refiere a lo mismo.
Décimo y Once	Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)	Se evidencia un conflicto cognitivo entre el cálculo de la media y su concepto. Se evidencia dificultad para identificar la media en situaciones problemáticas, pues solo lo pueden hacer para datos aislados. Confunden la media con la moda. Se les dificulta usar e interpretar la media

ponderada, no tienen clara la idea de distribución.

Algunos estudiantes son capaces de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media o calcula medias ponderadas, pero no las dos cosas a la vez.

Confunden número promedio con número total.

Algunos no conciben que los datos se puedan repetir, otros no conciben al cero como un dato.

La mayoría coincide en definir la media como un valor cuantitativo que representa a un grupo.

La mayoría de los estudiantes se refiere al promedio como un punto medio, como un punto de referencia dentro de un grupo.

Fuente: El autor

Después de este análisis de las respuestas de los estudiantes, se procederá a presentar las conclusiones y proyecciones de la propuesta de investigación actual.

8. CONCLUSIONES

8.1. CONCLUSIONES ESPECÍFICAS

Con relación al *primer objetivo*: Identificar las características del significado personal de los estudiantes que tienen los estudiantes sobre el promedio.

Las respuestas de los estudiantes giraron en torno a las siguientes apreciaciones, cuando se referían al promedio.

- Promedio es como estar al mismo nivel, es estar dentro del punto de referencia.
- Es un nivel intermedio
- Son los límites que nos mide
- Es estar dentro de la mayoría
- El promedio es como la moda
- Es un punto medio
- Significa estar estable (ni más, ni menos)
- Es estar en determinado rango
- Es un porcentaje
- Es la mitad
- Es un nivel estadístico
- Es un ponderado
- Es un nivel medio o general
- Es estar dentro de lo normal, ni es lo mejor, ni es lo peor

Lo anterior, permite ver la subjetividad que los estudiantes tienen frente al término promedio y que está directamente relacionado con el uso que ellos han hecho de esta palabra. Estas concepciones podrían estar afectando la representación mental que los estudiantes hacen para comprender el concepto.

Con relación *al segundo objetivo*: Identificar si hay diferencias en el significado personal de los estudiantes de grado undécimo, sobre la palabra promedio.

El significado personal de los estudiantes participantes de este estudio, permite ver que, en la mayoría, hay tendencia a relacionar el promedio como punto medio y como punto de referencia y que sus apreciaciones están directamente relacionadas con la experiencia que han tenido a través del lenguaje cotidiano y la necesidad de usarlo para conocer las notas que describen su rendimiento académico. Sin embargo, preocupa que esta idea esté generalizada para los estudiantes y que no se estén desarrollando las competencias a nivel conceptual y de resolución de problemas que permitan usar adecuadamente el término promedio.

En general, se observan diferencias en las respuestas obtenidas por los estudiantes, pero de esa variedad de respuestas, destacan las categorías de respuesta mencionadas en el párrafo anterior.

Con relación *al tercer Objetivo*: Contrastar lo que proponen los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el pensamiento aleatorio en los niveles de primero a once, en lo que se refiere a la media aritmética y lo que evidencia el significado personal de los estudiantes de grado undécimo.

En este contraste se pudo ver que el panorama no es muy alentador en lo que se refiere a las competencias y procesos de pensamiento que un estudiante de grado once debe haber alcanzado, según lo establecen los documentos curriculares del Ministerio de Educación, para que logre resolver problemas que involucren conceptos de la estadística, como por ejemplo, la representación e interpretación de un gráfico, el uso de la media aritmética para resolver problemas, utilizar e interpretar adecuadamente la media aritmética y diferenciarla de otras medidas de tendencia central.

El significado institucional supone que el estudiante logra dominios conceptuales para resolver otros problemas, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

El significado institucional es el resultado del diálogo y los convenios dentro de una institución, como puede ser el sistema educativo. Pues este diálogo no se evidenció en las características encontradas en el significado personal de los participantes. Se puede concluir, que la enseñanza de la estadística aún no logra incluirse de manera explícita y diferenciada en el área de matemáticas.

Con relación al *cuarto objetivo*: Describir los principales errores y dificultades que presentan los estudiantes de grado undécimo cuando se enfrentan a situaciones que involucren la media aritmética. Se encontró lo siguiente:

- Los principales errores se centraron en los de tipo aritmético, de procedimiento para calcular la media aritmética, errores en los algoritmos, errores para calcular la media a partir de datos agrupados y errores al interpretar los promedios con números decimales.
- Las principales dificultades reflejadas por los estudiantes participantes en este estudio, tenían que ver con usar la idea de promedio en contextos cotidianos, medianamente logran describir la media aritmética en situaciones sencillas, pero no lo hacen para situaciones complejas; confunden las medidas de tendencia central, en particular la media y la moda. Tampoco logran invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media; tienen dificultad para calcular medias ponderadas y no logran identificar e interpretar el promedio a partir de la representación gráfica o de tablas de datos agrupados.

8.2. CONCLUSIONES GENERALES

Respecto a la interpretación de la *media como concepto*.

- Uno de los conceptos que más interés ha producido dentro de la investigación en educación estadística, son los promedios, sobre cuya comprensión y cálculo se han realizado diversas investigaciones que describen errores y dificultades.
- Los conceptos encontrados en las respuestas de los estudiantes, permiten identificar un elemento del significado de promedio.
- En la sociedad actual, cualquier ciudadano se encontrará con información en los medios de comunicación, entre ellos el concepto de promedio.
- Hay variedad de conceptos sobre un mismo término, en este caso nos estamos refiriendo al promedio, que podría estar influenciado por los libros de texto y la manera como el profesor administra el currículo en matemáticas en particular para la enseñanza del pensamiento aleatorio.
- El significado del término promedio, estaría muy relacionado con la capacidad de relacionar las proposiciones del enunciado en relación a los contextos, de lo contrario los estudiantes tienden a asumirlo como un cálculo más en matemáticas.
- Poder identificar la comprensión de los estudiantes sobre el término promedio, nos permite encontrar posibles dificultades frente a un significado de referencia.
- Por mucho tiempo ha sido utilizado el cálculo de la media aritmética, para solucionar otros problemas de las matemáticas, interesados más por su algoritmo y para estimaciones, y no por su concepto o su significado, esto se pudo evidenciar en las respuestas de los encuestados.
- La comprensión de un concepto no puede reducirse a conocer las definiciones y propiedades, sino a reconocer los problemas donde debe emplearse, las notaciones y palabras con que lo denotamos y en general todas sus representaciones, habilidad en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto y capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones de problemas.
- Igual que afirma Batanero, Godino y Navas (1997) que la comprensión de los estudiantes frente al concepto de media aritmética, está más orientada por el algoritmo, influenciado

esto por la manera en que aparecen en los textos usados por el profesor, se pudo ver en este trabajo.

- La conclusión a la que llegan Batanero y otros (citado por Cobo, 2003, p. 72), es que la aproximación al estudio de los estadísticos de posición central basada en la definición algorítmica y el cálculo en colecciones de datos descontextualizados no permite que los alumnos lleguen a una comprensión integral del concepto de promedio.
- El análisis cualitativo de los elementos de significado usados por los alumnos en sus respuestas abiertas permite analizar con detalle la comprensión y dificultades particulares de cada una de las situaciones problemáticas planteadas y los elementos de significado requeridos para su resolución.
- No se puede esperar que, enseñando, por ejemplo, a los estudiantes a calcular los promedios puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente el promedio en situaciones problemáticas sencillas. Es asimismo necesario que los estudiantes adquieran capacidad de expresión simbólica y gráfica y de argumentación, si queremos ayudarles a que sean personas estadísticamente competentes (Cobo, 2003).
- El significado del concepto de promedio, se puede ver favorecido en la medida que se enseñe a través de situaciones problemáticas, de tal manera que puedan reconocer los datos de manera más explícita en un contexto.

8.3. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN FUTURA

Es importante que se desarrollen más investigaciones acerca de la presente propuesta, porque la cantidad de investigaciones realizadas en la región es muy escasa para la importancia que tiene el objeto estadístico media aritmética y la estadística en general.

Con la aplicación del instrumento de evaluación, se reconoce la necesidad de seguir fortaleciendo la enseñanza de conceptos estadísticos en el aula de clases, debido a que los estudiantes culminan su plan de estudios sin tener clara variedad de conceptos estadísticos importantes en su vida cotidiana, en este caso la media aritmética y la interpretación de los promedios. Asimismo, es necesario que los conceptos que

actualmente se orientan, se expandan a otros procesos de pensamiento, es decir, que los procedimientos de cálculo no sean exclusivamente numéricos, porque eso conlleva a que los estudiantes no adquieran las capacidades para solucionar problemas en otros contextos.

Asimismo, es importante que, desde las distintas licenciaturas, también se repliquen las necesidades presentadas en el aula, porque en las clases de estadística también se prioriza el desarrollo de cálculos numéricos, con algunas gráficas complementarias, pero sin la lectura comprensiva de las mismas. Lo anterior, porque es a través de los docentes en formación que se puede cambiar el modelo que actualmente se aplica en las escuelas y que podría estar excluyendo a la estadística del plan de estudios de la educación básica y media.

REFERENCIAS

- Ángel , J. (1995). La correcta utilización de los promedios. *EAFIT*, 77-86.
- Batanero, C. (2000a). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 41-58.
- Batanero, C. (2000b). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 2-13.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Batanero, C. (2002). Presente y Futuro de la Educación Estadística. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 27-37.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., & Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales (Traducción). *Internation Journal of Mathematics*, 527-547.
- Bencardino, C. M. (2012). *Estadística y muestreo*. Bogotá: Ecoe Ediciones.
- Betancourt, A. F. (2012). *Caracterización de algunas dificultades que presentan los docentes de básica secundaria, en la enseñanza de las medidas de tendencia central*. Cali: Tesis de maestría.
- Bohórquez, C. A., & Rivera, V. (2008). Dificultades en el aprendizaje del objeto matemático media aritmética. 1-10.
- Camacho, B. (2003). Metodología de la Investigación Científica. Tunja: UPTC.
- Cárdenas, I. N., & Segovia, L. D. (2011). *Media Aritmética: Dificultades en los alumnos del grado décimo*. Ibagué: Tesis de maestría.
- Chan, C. M. (2009). *Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad*. Mérida: Universidad Autónoma de Yucatán.
- Cifuentes, J., & Salazar, F. (2010). *Hipertexto Santillana Matemáticas 7*. Bogotá: Santillana.
- Cobo, B. (2003). *Significados de la medida de posición central para los estudiantes de secundaria*. Granada: Tesis Doctoral.

- Cobo, B., & Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 5-18.
- D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 191-218.
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-13.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Equipo, académico. Reseña crítica de “La construcción social de la realidad”, de Berger, Peter y Luckmann, Thomas, La Bisagra, 2009. ProQuest Ebook Central, <http://ebookcentral.proquest.com/lib/tolimasp/detail.action?docID=3195493>.
- Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, 89-111.
- García, J. (2009). LAS FORMAS DE LA ALFABETIZACIÓN CULTURAL EN LA SOCIEDAD DE LA INFORMACIÓN. *Teoría de la educación. Educación y cultura en la sociedad de la información*, 49-75.
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 325-355.
- Godino, J., Batanero, C., & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. *Versión ampliada del trabajo publicado en H. Salmerón (Ed.), VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa (pp. 310-304), 1997*, 1-10.
- Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 39-88.
- Godino, J., Font, V., & Whilhelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 25-48.

- Gómez, E. (2016). Estadística y probabilidad en el currículo colombiano para educación básica y media. *XXVI Simposio Internacional de Estadística 2016*, 1-5.
- Guadalupe, L. (2008). *Desarrollo de una cultura estadística para los países Andinos*. Lima.
- Gutiérrez, S. (1994). La estadística y la lógica del conocimiento científico. En S. Gutiérrez Cabria, *Filosofía de la estadística* (págs. 40-70). Valencia: Cultura Universitaria Popular.
- Mayén, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Granada: Universidad de Granada.
- Méndez, D. F., Vargas, L., Rendón, P. A., & Esteban, P. V. (2013). Una experiencia de la cultura estadística en grado 5° de básica primaria. *Educación científica y tecnológica*, 402-406.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá D.C.: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar ! En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46-95). Bogotá: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Molero del Río, A. J. (2017). *Comprensión del concepto de media aritmética en los estudiantes de educación secundaria obligatoria*. Granada: Tesis de maestría.
- Moroney, M. J. (1968). Promedio y dispersión. En J. R. Newman, *Sigma. El mundo de las matemáticas. Tomo 3* (págs. 169-186). Grijalbo.
- Ogden, C. K., & Richards, I. A. (1984). *El significado del significado. Traducción de Eduardo Prieto*. Barcelona: Paidós.
- Orlandoni, G. (2010). Escalas de medición en estadística. *Telos*, 243-247.
- Ortiz, J. J., & Foll, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática*, 91-109.

- Ortiz, L. G., Ramírez, M., Joya, A. D., Celi, V., Acosta, M. L., Perdomo, A. C., . . . Gamboa, J. G. (2013). *Los caminos del saber matemáticas 7*. Bogotá: Santillana.
- Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Aula Universitaria*, 29-36.
- Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y significado. *Enseñanza de las ciencias*, 121-134.
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez, *Educación Matemática* (págs. 69-108). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Rodríguez, C., & Cabrera, A. (2010). La desventaja de la media aritmética: cómo tratarla en clases. *Números*, 39-44.
- Rodríguez, M. I. (2006). Dificultades en el significado y la comprensión de conceptos estadísticos elementales y de probabilidad. *Premisa*, 13-22.
- Rojas, I. R., & Ovejero, D. (2009). Errores cometidos por los alumnos en la asignatura estadística y biometría de la carrera de ingeniería agronómica, Universidad Nacional de Catamarca. *Revista del CIZAS*, 53-75.
- Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las ciencias*, 29-49.
- Rubio, N., Font, V., & Planas, N. (2008). *Análisis didáctico, una mirada desde el enfoque ontosemiótico*. Lima: III Coloquio Internacional sobre la enseñanza de la Matemática.
- Torres, W. (2011). El enfoque ontosemiótico para la investigación en educación matemática: Una reflexión crítica. *Cuaderno de investigación en la educación*, 54-69.
- Zapata, L. (2010). ¿CÓMO CONTRIBUIR A LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA? *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 98-106.

ANEXO 1. CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN APLICADO A LOS ESTUDIANTES



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

Apellidos y Nombres: _____ Grado: _____ Género: _____ Edad: _____
Educativa _____

La siguiente actividad es un ejercicio académico y por ello sus respuestas son muy valiosas para los autores. La actividad tiene una finalidad investigativa, por lo tanto, no influirá en sus calificaciones.

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente cada situación o problema y resuélvalo, según crea es la forma correcta.
- En cada caso, debe escribir una **justificación de su respuesta**.
- Escribir con letra legible y sin tachones.

Muchas gracias por su colaboración.

1. Si alguien le dice que está en el promedio de la clase, ¿qué significa para usted estar en el promedio de la clase?

Justifique su respuesta:

2. Un periódico dice que el número promedio de hijos por familia en Ibagué es 1.2 hijos por familia. Explíquenos, qué significa para usted esta frase.

Justifique su respuesta:

- 2.1. Se han elegido 10 familias ibaguereñas y el número promedio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por cada familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que el promedio de hijos en las diez familias sea 1.2?

Realice aquí el proceso:

Justifique su respuesta:

3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensa eso?

Justifique su respuesta:

4. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Le parece posible? ¿Por qué?

Realice aquí el proceso:

Justifique su respuesta:

5. El peso en kilos de nueve niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuánto es el peso promedio de los nueve niños? Razone la respuesta.

Realice aquí el proceso:

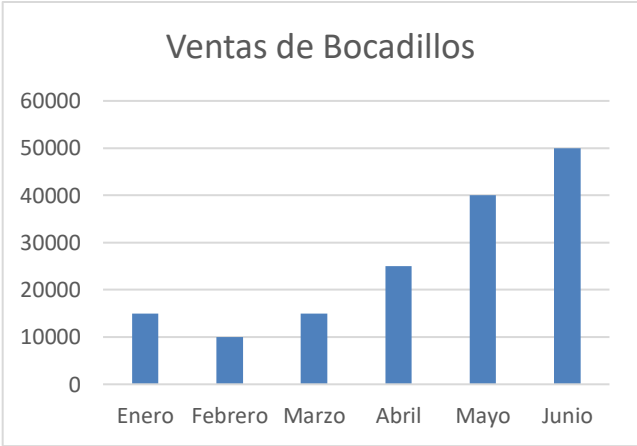
Justifique su respuesta:

6. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan en promedio 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?
Lucía _____ Juan _____ Pablo _____
¿Es la única posibilidad? Explique cómo ha obtenido sus resultados. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora el promedio de caramelos por chico? Explique su resultado.

Realice aquí el proceso:

Justifique su respuesta:

7. Observe en el siguiente diagrama de barras (ver la figura 1), las ventas de bocadillos de la empresa bocatta durante los primeros 6 meses del presente año:



(Figura 1)

Calcule un valor aproximado del número promedio de bocadillos que se venden al mes.

Realice aquí el proceso:

8. El siguiente conjunto de datos, muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres.

<i>edad</i>	<i>frecuencia</i>
<i>15-19</i>	<i>4</i>
<i>20-24</i>	<i>38</i>
<i>25-29</i>	<i>28</i>
<i>30-34</i>	<i>20</i>
<i>35-39</i>	<i>8</i>
<i>40-44</i>	<i>1</i>
<i>45-49</i>	<i>1</i>

(Tabla 1)

¿Cuál es la edad promedio de estas mujeres?

Realice aquí el proceso:

Justifique su respuesta:

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

Jhony Alexander Rodríguez Cifuentes	con C.C N°	1.110'555.802
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar

☒

No Autorizar

☐

Motivo:

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	<input checked="" type="checkbox"/>	Artículo	<input type="checkbox"/>	Proyecto de Investigación	<input type="checkbox"/>
Libro	<input type="checkbox"/>	Parte de libro	<input type="checkbox"/>	Documento de conferencia	<input type="checkbox"/>
Patente	<input type="checkbox"/>	Informe técnico	<input type="checkbox"/>		
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					<input type="checkbox"/>

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que, con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 2 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “...**Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable**” y 37 “...**Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro**”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “**los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores**” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo: SIGNIFICADO DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y EL USO DE LA PALABRA PROMEDIO PARA LOS ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO DE UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE IBAGUÉ

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Artículo publicado en revista:

- Capítulo publicado en libro:

- Conferencia a la que se presentó:
