UN SISTEMA ALTERNATIVO PARA LOS GRÁFICOS ALFA DE PEIRCE

JEFFERSON FERNANDO ZAMBRANO SÁNCHEZ
Código 0511-50282012

Trabajo de grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Director
ARNOLD OOSTRA
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ
2019

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
40 Años
Trabajando por el Tolima

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMATICAS

ACTA DE LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TRABAJO DE GRADO No. 02 DE 2019

SIENDO LAS 2:00pm DEL DIA 12 DE Abril DEL AÑO 2019 SE REUNIERON EN la sala de Didácticas de la Facultad de ciencias de la Educación EL JURADO CALIFICADOR DEL TRABAJO DE GRADO TITULADO: **"UN SISTEMA ALTERNATIVO PARA LOS GRÁFICOS ALFA DE PEIRCE"**

Presentado por: **JEFFERSON FERNANDO ZAMBRANO SÁNCHEZ** CÓDIGO: **051150282012**

Dirigido por el Profesor **ARNOLD OOSTRA**

CON EL FIN DE PRESENCIAR Y CALIFICAR LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA DEL MISMO. LA SUSTENTACIÓN SE HIZO EN PRESENCIA DEL SIGUIENTE AUDITORIO:

*ver lista anexa

LAS CALIFICACIONES OTORGADAS POR LOS MIEMBROS DEL JURADO A LA SUSTENTACIÓN SON LAS SIGUIENTES:

JURADO: **JOAQUIN GONZALES BORJA** CALIFICACIÓN 4.3

JURADO: **VICTOR EDUARDO MARIN COLORADO** CALIFICACION 4.5

CONCEPTO ________________ PROMEDIO 4.4

SIENDO LAS 3:34pm SE CERRÓ EL ACTO DE SUSTENTACIÓN.

EN CONSTANCIA SE FIRMA

JURADO Joaquin Gonzalez B
JOAQUIN GONZALES BORJA

JURADO
VICTOR EDUARDO MARIN COLORADO

DIRECTOR
HENRY PULIDO CABRERA

Dedicatoria

La culminación de este trabajo de grado es un gran orgullo, pues en él quedan plasmados muchos esfuerzos y momentos difíciles de espera y dedicación.

Este logro lo dedico a mis padres ***Marcos Tulio Zambrano*** *y* ***Cruz Dalia Sánchez*** *quienes me colaboraron hasta el final, a ellos mil bendiciones. Ojalá la vida me regale la oportunidad de compartir momentos de felicidad al lado de ellos, ya que no hay palabras que describan este sentimiento de gratitud y amor que me embarga.*

Agradecimientos

En primer lugar doy gracias a Dios por permitirme culminar esta hermosa carrera. En segundo lugar quiero agradecer a la Universidad del Tolima por permitirme ser parte de su comunidad académica.

Agradecimientos a Margarita Bocanegra por brindarme gran apoyo durante mi carrera, donde quiera que se encuentre espero que esté muy bien. Finalmente agradezco al maestro y docente Arnold Oostra por brindarme la oportunidad y apoyo incondicional para realizar este hermoso trabajo.

Tabla de Contenido

RESUMEN. En este proyecto se propone desarrollar un sistema alternativo para los gráficos Alfa de Peirce. Los objetos de este sistema se denominarán cadenas Alfa y en él se definirán reglas de transformación de carácter algebraico que permitan realizar, al igual que en los gráficos Alfa, cualquier demostración de manera gráfica. Finalmente se pretende demostrar la equivalencia entre el nuevo sistema y el sistema original de los gráficos Alfa.

PALABRAS CLAVES: Paridad, cadena Alfa, yuxtaposición, Alfabeto Alfa, Parentésis.

Objetivos

Objetivo general

- Desarrollar un sistema alternativo para los gráficos Alfa de Peirce con reglas de transformación algebraicas.

Objetivos específicos

1. Revisar material bibliográfico sobre: lógica proposicional, gráficos Alfa y equivalencias entre ellos.

2. Proponer todos los detalles técnicos de un sistema alternativo.

3. Demostrar la equivalencia de las reglas entre el sistema alternativo Alfa propuesto y los gráficos Alfa originales.

Introducción

La lógica se ha convertido en una materia de gran profundidad, amplitud y aplicación a otras ramas de las ciencias. Hace más de un siglo se lograron establecer fuertes relaciones sistemáticas entre la lógica y la matemática, ya que las teorías modernas en matemáticas hacen uso de inferencias y deducciones para resolver problemas a partir de axiomas.

El sistema de los *gráficos existenciales*, sin lugar a duda la obra maestra de Charles Sanders Peirce, fue creada con el propósito de representar conceptos generales mediante diagramas, establecer relaciones y formular conclusiones. Particularmente los diagramas son una forma muy peculiar de representar el funcionamiento de la mente humana. En estos gráficos el autor distinguió tres sistemas y los llamó Alfa, Beta y Gama. Los gráficos Alfa corresponden a la lógica proposicional, los Beta a la lógica de predicados y los Gama a otras lógicas más complejas. Este trabajo se centra en el primero de estos sistemas.

Con respecto a los gráficos Alfa de Peirce es bastante la literatura que puede ilustrar sobre este tema, véase por ejemplo: [4], [7], [9] y [10]. En varios de estos y otros trabajos se emprende la tarea de probar la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional clásica, por ejemplo [2] y [8]. Además cabe resaltar que se han desarrollado algunas equivalencias entre sistemas de lógica gráfica a la manera de Peirce con sistemas formales diferentes a la mencionada lógica clásica, veáse [3] y [5]. La mayor dificultad que se encuentra en la demostración de estas equivalencias es que las reglas de inferencia gráficas, llamadas por Peirce reglas de transformación, tienen un profundo contenido geométrico y se enuncian en términos de "áreas pares" y "áreas impares", terminología que no tiene ningún sentido en las formulaciones algebraicas.

En este orden de ideas, se plantea el problema de encontrar sistemas alternativos a los gráficos Alfa de Peirce, en los cuales las reglas se puedan enunciar de manera del todo algebraica. El trabajo presente está enmarcado en esa línea de investigación y pretende establecer la equivalencia entre los gráficos Alfa de Peirce y un nuevo sistema cuyos objetos se denominan cadenas Alfa, también dotado de reglas de transformación las cuales permiten hacer demostraciones gráficas.

En el primer capítulo se realiza una presentación de los gráficos Alfa a la manera de su creador, Charles Peirce. El material contenido en esta parte ya se puede considerar estándar y se basa en diferentes desarrollos similares que se pueden consultar en la bibliografía citada. En el capítulo 2 se introduce el sistema de las cadenas Alfa y en el último capítulo se demuestra de manera formal la equivalencia de los dos sistemas. Estos dos capítulos representan un avance significativo respecto a una propuesta anterior, contenida en el documento [2], de manera que este trabajo se puede estimar como un aporte original a la investigación en los gráficos existenciales.

Capítulo 1

Los gráficos Alfa de Peirce

Los gráficos existenciales fueron la obra maestra de Charles Sanders Peirce (1839-1914). En la actualidad los podemos considerar como una lógica de tablero, pues al escribir una proposición sobre el pizarrón se asume que ella es verdadera, y así, escribir varias cosas equivale a asumir su veracidad.

Por ejemplo, escribir

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1$$

significa afirmar que, en efecto, este límite especial existe y su valor es el que indica la igualdad. En este mismo sentido, escribir:

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - cos(t)}{t} = 0$$

significa afirmar que estos dos límites existen y toman los valores señalados.

Ahora bien, una manera muy utilizada para decir algo nuevo sobre una proposición, por ejemplo para resaltar su importancia, es encerrarla. En el contexto de la lógica clásica lo único importante o nuevo que se puede decir sobre una proposición es que ella es falsa. De esta manera, encerrar alguna proposición significará negarla.

Por ejemplo el siguiente diagrama

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1 - cos(t)}{t} = -1}$$

significa que no es cierto que ese límite cumple la igualdad escrita en el interior del cuadro.

En adelante, ya no se considerarán proposiciones específicas sino que estas se sustituirán con letras, por lo general mayúsculas.

Peirce no solo inventó este sistema de representación gráfica para la lógica proposicional, sino que también propuso reglas de inferencia gráficas que permiten realizar una auténtica lógica con estos dibujos. En este capítulo se hará una presentación de los gráficos Alfa en la menor brevedad: su construcción, las reglas de transformación y algunos ejemplos de deducción.

1.1 Construcción

Primero se presenta la definición formal de los gráficos Alfa.

Definición 1.1. Los *elementos* para construir los gráficos Alfa son:

- Una superficie plana ilimitada sobre la cual se dibujan los gráficos, llamada *hoja de aserción*;
- *Letras* proposicionales mayúsculas;
- Curvas llamadas *cortes*, cerradas en tanto vuelven sobre sí mismas y simples en tanto carecen de intersecciones.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{L}$ un conjunto no vacío de letras proposicionales. En el conjunto de los diagramas de la hoja de aserción se especifica el subconjunto de los *gráficos Alfa* en $\mathcal{L}$ mediante las cláusulas siguientes.

1. Cualquier porción de la hoja de aserción que se pueda rodear por un corte y que no contenga letras ni cortes es un gráfico Alfa;

2. Cualquier letra de $\mathcal{L}$, escrita sobre la hoja de aserción, es un gráfico Alfa;

$$A$$

3. Si A es un gráfico Alfa entonces el gráfico A rodeado por un corte que no toca a ningún gráfico y que solo contiene a A es un gráfico Alfa;

$$A$$

4. Si A, B son gráficos Alfa entonces la yuxtaposición sin contacto de A y B es un gráfico Alfa;

$$A \quad B$$

5. No hay más gráficos Alfa.

Definición 1.3. Un *gráfico Alfa* es cualquier diagrama sobre la hoja de aserción compuesto de una cantidad finita de letras y cortes. Los cortes no tocan las letras ni se tocan entre sí. Dos gráficos que se pueden deformar de manera continua el uno en el otro se consideran iguales.

Así por ejemplo los diagramas de Venn no son, en general, gráficos Alfa pues en ellos los diferentes círculos sí se cortan entre sí.

Definición 1.4. La *interpretación* de los gráficos Alfa está dada por las siguientes condiciones.

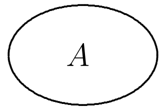
- *Escribir* una letra o un gráfico en la hoja de aserción significa afirmarlo;
- *Encerrar* una letra o un gráfico significa negarlo.

A continuación se presentan los gráficos Alfa de los conectivos más usados:

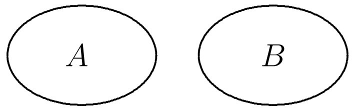
- A *y* B, que se simboliza $A \wedge B$:

$$A \quad B$$

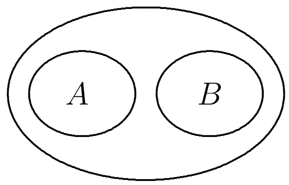
- *No A*, simbolizado $\neg A$:



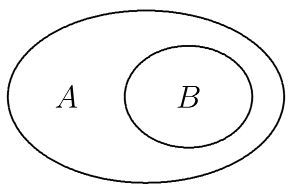
- *No A y no B*, es decir, *ni A ni B*:



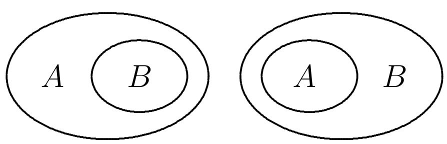
- *A o B*, que se simboliza $A \vee B$:



- *Si A entonces B*, es decir, *A implica B* lo cual se simboliza $A \to B$:



- *A si y solo si B*, simbolizado $A \leftrightarrow B$:



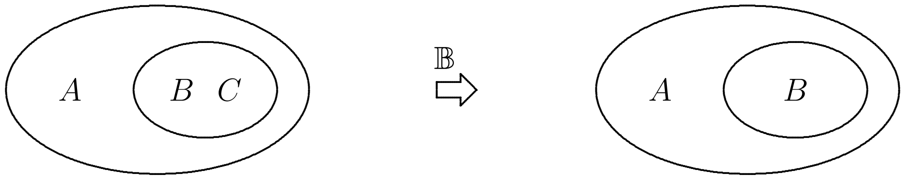
Definición 1.5. En un gráfico Alfa, un *área* es cualquiera de las porciones de la hoja limitadas por cortes. Un área es *par* o *impar* según la cantidad de cortes que la rodean.

1.2 Reglas de transformación

Las siguientes son las cinco reglas de inferencia gráfica, llamadas por Peirce reglas de transformación, que se permiten en los gráficos Alfa. En las deducciones, al pasar de un gráfico a otro se indicará la regla empleada mediante una pequeña flecha (que no hace parte de los gráficos) acompañada de la letra correspondiente.

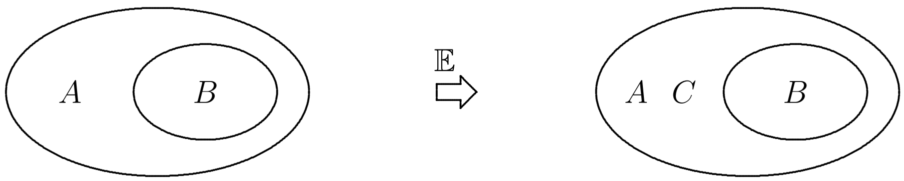
- **Borramiento** ($\mathbb{B}$)

  Está permitido borrar cualquier gráfico en un área par, por ejemplo:



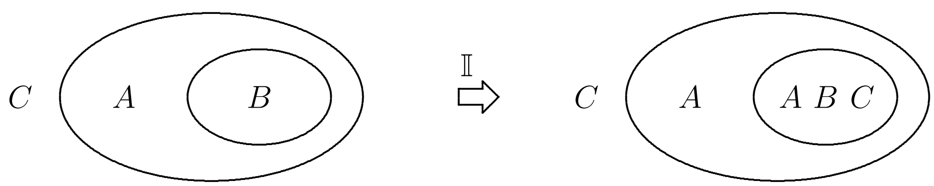
- **Escritura** ($\mathbb{E}$)

  Está permitido escribir cualquier gráfico en un área impar, por ejemplo:



- **Iteración** ($\mathbb{I}$)

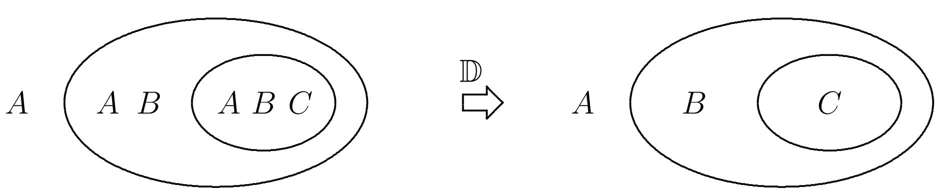
  Está permitido iterar (repetir) cualquier gráfico en su misma área, o en cortes en esa área que no forman parte del gráfico que se itera, por ejemplo:



  Cabe aclarar que la iteración se efectúa siempre hacia adentro.

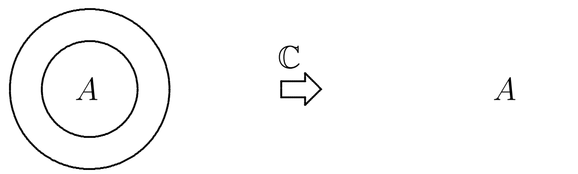
- **Desiteración** ($\mathbb{D}$)

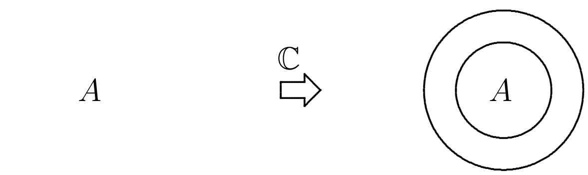
  Está permitido borrar cualquier gráfico que pudiera provenir de una iteración, por ejemplo:



- **Corte doble** ($\mathbb{C}$)

  Alrededor de cualquier gráfico, y en cualquier área, está permitido dibujar o borrar un *corte doble* que consiste en dos cortes, uno dentro del otro y sin letras ni cortes en el área comprendida entre las dos. Por ejemplo:





1.3 Deducción gráfica

Con las reglas presentadas en la sección anterior, es posible hacer demostraciones del todo gráficas para la lógica proposicional. Primero se define una relación de deducción gráfica.

Definición 1.6. Sean A, B gráficos Alfa. El gráfico A *se puede transformar* en el gráfico B, lo cual se denota

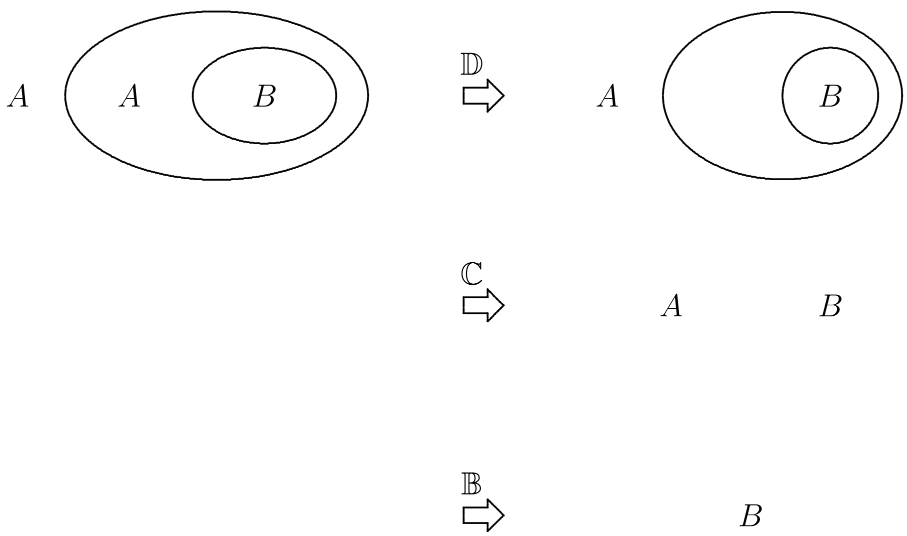
$$A \quad \Rightarrow \quad B,$$

si existe una sucesión finita de gráficos Alfa $G_1, G_2, \ldots, G_n$ con $G_1 = A$ y $G_n = B$ tal que cada gráfico G_i se obtiene del anterior G_{i-1} por la aplicación de alguna de las reglas de transformación.

El mismo símbolo se utiliza para las fórmulas algebraicas cuando la demostración se realiza de manera gráfica, tal como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1.7. Demostración de la regla de inferencia *Modus Ponendo Ponens*:

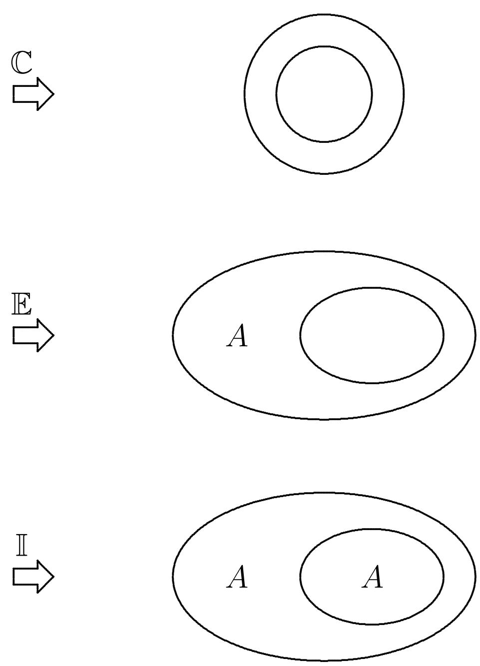
$$A, \quad A \to B \quad \Rightarrow \quad B.$$



Las deducciones sin premisas corresponden a las tautologías, y también se pueden demostrar mediante gráficos Alfa.

Ejemplo 1.8. Demostración sin premisas de la tautología:

$$\Rightarrow \qquad A \to A.$$



Definición 1.9. Sean A, B gráficos Alfa. Los gráficos A y B son *Alfa equivalentes*, lo cual se denota

$$A \quad \Longleftrightarrow \quad B,$$

si cada uno se puede transformar en el otro.

Por la regla de corte doble, los gráficos $\neg\neg A$ y A son Alfa equivalentes. Por otro lado, el gráfico de cualquier tautología es Alfa equivalente a la hoja vacía, pues cualquier gráfico se puede transformar en la hoja mediante un solo paso de borramiento.

El resultado siguiente, cuya prueba se omite aquí, se puede demostrar considerando cada una de las reglas. Véase por ejemplo [3], donde se prueba este hecho en detalle para otra lógica gráfica.

Teorema 1.10 (Teorema de contraposición)**.** *Supóngase que un gráfico A se puede transformar en el gráfico B. Entonces:*

- *Cualquier gráfico que contenga a A en un área* par *se puede transformar en el gráfico obtenido al sustituir A por B en el gráfico original;*

- *Cualquier gráfico que contenga a B en un área* impar *se puede transformar en el gráfico obtenido al sustituir B por A en el gráfico original.*

Corolario 1.11. *Supóngase que los gráficos A y B son Alfa equivalentes. Cualquier gráfico que contenga a A es Alfa equivalente al gráfico obtenido al sustituir A por B en el gráfico original.*

Capítulo 2

El sistema alternativo de cadenas Alfa

Con la experiencia de los trabajos anteriores [2] y [8] se hace evidente la conveniencia de un sistema similar a los gráficos existenciales Alfa y equivalente al mismo, pero que tenga algunas características algebraicas que permitan una traducción más inmediata a los sistemas tradicionales de la lógica proposicional.

De manera específica, se busca que en las reglas no aparezcan las referencias a "área par", "área impar", "en su área" o "hacia adentro". Un primer avance en ese sentido se obtuvo en el trabajo [2], así como en el documento [3] que hace referencia a una lógica diferente a la clásica. Pero además, ahora se busca que los gráficos mismos también se puedan expresar como fórmulas lineales.

2.1 Definición formal del sistema de cadenas Alfa

La construcción de las cadenas Alfa sigue los mismos pasos que la definición rigurosa de las fórmulas proposicionales, véase por ejemplo [1] y también [6]. Los elementos que se emplean en esta representación son letras proposicionales, una constante y paréntesis.

Definición 2.1. Un *alfabeto Alfa* es la unión disyunta de los tres conjuntos siguientes:

1. Un conjunto $\mathcal{L}$ de letras proposicionales;

2. El conjunto unitario $\{\top\}$ cuyo único elemento es constante;

3. El conjunto $\{(,)\}$ de los paréntesis.

Los elementos del conjunto $\mathcal{L}$, es decir, las letras proposicionales, se denotan p, q, r o bien $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ El alfabeto Alfa determinado por $\mathcal{L}$ se denota $A(\mathcal{L})$.

A partir del alfabeto $A(\mathcal{L})$ se construye el monoide $A(\mathcal{L})^*$ de las sucesiones finitas de elementos de $A(\mathcal{L})$. La sucesión vacía, que forma parte de este conjunto, se denota $\Box$. Estas sucesiones se combinan mediante yuxtaposición, que es una operación binaria asociativa, cancelativa y con elemento neutro $\Box$.

Definición 2.2. En el conjunto $A(\mathcal{L})^*$ de la sucesiones finitas de elementos del alfabeto $A(\mathcal{L})$ se especifica el subconjunto $C(\mathcal{L})$ de las *cadenas Alfa* en $\mathcal{L}$ mediante las siguientes cláusulas.

1. Las letras son cadenas Alfa, $\mathcal{L} \subseteq C(\mathcal{L})$;
2. La constante es una cadena Alfa, $\top \in C(\mathcal{L})$;
3. Si A es una cadena Alfa, entonces (A) también es una cadena Alfa;
4. Si A, B son cadenas Alfa, entonces la yuxtaposición AB también es una cadena Alfa;
5. No hay más cadenas.

En este punto vale la pena aclarar una diferencia con los gráficos Alfa. En ese sistema, por costumbre se utilizan las letras mayúsculas tanto para las letras proposicionales como para los gráficos en sí. En cambio en este sistema alternativo se hace la siguiente distinción: las letras proposicionales en tanto elementos de $\mathcal{L}$ se denotan con minúsculas, en cambio las cadenas Alfa se representan con letras mayúsculas. Así, por ejemplo, $A = (p)$, donde (p) es cadena Alfa mientras $p \in \mathcal{L}$ es una letra.

Ejemplo 2.3. Si $\mathcal{L} = \{p, q\}$, algunas cadenas Alfa de $C(\mathcal{L})$ son:

$$
\begin{array}{cccc}
p & q & pq & qp \\
(p) & p(q) & (p(q)) & (p)(q) \\
((p)(q)) & p((p)q) & \multicolumn{2}{c}{(p(q))((p)q)p(q)p} \\
(p\top) & (\top(p)) & & (\top)(p(q))\top
\end{array}
$$

La operación de yuxtaposición entre las sucesiones finitas es asociativa, así que no se requieren paréntesis en expresiones como ABA. Esto implica que a los paréntesis se les pueda dar un significado lógico.

Por la definición 2.2, de inmediato se tiene el resultado siguiente:

Teorema 2.4 (Inducción en cadenas)**.** *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad que se aplica a sucesiones finitas del alfabeto $A(\mathcal{L})$. Si se cumplen las condiciones:*

1. *Toda letra $p \in \mathcal{L}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;*

2. *La constante $\top$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;*

3. *Si A tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces (A) tiene la propiedad $\mathcal{P}$;*

4. *Si A, B tienen la propiedad $\mathcal{P}$ entonces AB tiene la propiedad $\mathcal{P}$*

entonces cualquier cadena Alfa de $C(\mathcal{L})$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Para esta demostración, dada cualquier sucesión finita $\lambda \in A(\mathcal{L})^*$ el número $N[\lambda]$ denota la cantidad de yuxtaposiciones más la cantidad de paréntesis izquierdos, sin repeticiones.

Ejemplo 2.5. Para algunos casos particulares se tiene:

$$\begin{aligned} &N[pp(q)p] = 3 + 1 = 4 \\ &N[p] = 0 + 0 = 0 \\ &N[(p(q))p] = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Demostración. Por inducción matemática completa sobre N.

Paso inicial: $N = 0$

Sea A una cadena Alfa tal que $N[A] = 0$. Por la definición 2.2 hay cuatro posibilidades, pero A no puede ser de la forma (B) pues entonces $N[A] \geq 1$, ni de la forma EF pues en tal caso también $N[A] \geq 1$. Luego quedan las opciones:

- Si $A = p$ es una letra, por hipótesis tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

- Si $A = \top$ es la constante, también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Paso inductivo: Supóngase válido para $N < k$ y se prueba para $N = k$, aquí $k > 0$.

Sea A una cadena Alfa tal que $N[A] = k > 0$.

Por definición hay cuatro posibilidades, pero A no puede ser letra ni constante (porque en ese caso $N = 0$) luego quedan dos opciones:

- Si $A = (B)$ para alguna cadena Alfa B, entonces $N[A] = N[(B)] = 1 + N[B]$, luego $k = 1 + N[B]$ de donde $N[B] = k - 1 < k$. Por hipótesis de inducción, B tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Pero entonces por hipótesis del teorema también (B) tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Como $(B) = A$, resulta que A tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

- Si $A = EF$ para ciertas cadenas Alfa E, F entonces se tiene $N[A] = N[EF] = N[E] + N[F] + 1$, de donde:

  * $N[E] \leq N[E] + N[F] < N[E] + N[F] + 1 = N[A] = k$
  * $N[F] \leq N[E] + N[F] < N[E] + N[F] + 1 = N[A] = k$

  Así $N[E] < k$ y $N[F] < k$, luego por hipótesis de inducción E y F tienen ambas la propiedad $\mathcal{P}$. Pero entonces por hipótesis del teorema también $EF = A$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$. $\square$

Con este método se pueden demostrar diversas propiedades de las cadenas.

Ejemplo 2.6. Toda cadena Alfa tiene alguna letra o constante. En particular, ( ) no es una cadena y la palabra vacía $\square$ tampoco es una cadena Alfa.

En efecto, sea $S[\lambda]$ la cantidad de letras más la de constantes que tiene la sucesión finita λ (sin repeticiones), se debe probar que $S[A] > 0$ para cada cadena Alfa $A \in C(\mathcal{L})$.

1. Si $p \in \mathcal{L}$ es una letra, entonces $S[p] = 1 > 0$.

2. $S[\top] = 1 > 0$.

3. Si $S[A] > 0$ entonces $S[(A)] = S[A] > 0$.

4. Si $S[A] > 0$ y $S[B] > 0$, entonces $S[AB] = S[A] + S[B] > 0$.

Ejemplo 2.7. Toda cadena Alfa tiene tantos paréntesis izquierdos como derechos.

Sea $I[\lambda]$ la cantidad de paréntesis izquierdos de λ y $D[\lambda]$ la cantidad de paréntesis derechos de λ. Se debe probar que $I[A] = D[A]$ para cada cadena Alfa $A \in C(\mathcal{L})$.

Como contraejemplo se nota que $(p(q)$ no es una cadena Alfa, pues $I[(p(q)] = 2 > D[(p(q)] = 1$.

Los pasos inductivos:

1. Si $p \in \mathcal{L}$ es una letra, entonces $I[p] = 0$ y $D[p] = 0$, luego $I[p] = D[p]$.
2. De igual manera $I[\top] = 0$ y $D[\top] = 0$, luego $I[\top] = D[\top]$.
3. Si A satisface $I[A] = D[B]$ entonces $I[(A)] = 1 + I[A] = 1 + D[A] = D[(A)]$.
4. Si A, B satisfacen $I[A] = D[A]$ e $I[B] = D[B]$, entonces $I[AB] = I[A] + I[B] = D[A] + D[B] = D[AB]$.

El significado básico que se asigna a las cadenas Alfa es similar a los gráficos Alfa: escribir significa afirmar y encerrar en paréntesis significa negar. Esto se puede formalizar por inducción en fórmulas como sigue.

Definición 2.8. Las cadenas Alfa se interpretan como sigue:

1. Una letra p se interpreta como la afirmación de la proposición p;
2. La constante $\top$ se interpreta como la proposición siempre verdadera (o tautología);
3. Si A es una cadena Alfa, entonces (A) se interpreta como la negación de A;
4. Si A, B son cadenas Alfa, entonces la yuxtaposición AB se interpreta como la conjunción de A y B.

Ejemplo 2.9. Los conectivos básicos en el nuevo sistema de cadenas Alfa, se pueden describir como sigue:

no A	$\neg A$	(A)
A y B	$A \wedge B$	AB
A o B	$A \vee B$	$((A)(B))$
si A entonces B	$A \to B$	$(A(B))$

A partir de estos conectivos básicos se puede representar cualquier fórmula proposicional como una cadena Alfa.

2.2 Reglas de transformación para el sistema de cadenas Alfa

Para el sistema de cadenas Alfa se adoptan ciertas reglas de inferencia. Las primeras son reglas elementales y se denotarán con letras $\mathcal{A}$, luego se definirán algunas más complejas denominadas "superreglas" y se denotarán con letras $\mathcal{B}$.

Definición 2.10. En el conjunto $C(\mathcal{L})$ de las cadenas Alfa se definen las siguientes *reglas de transformación*, válidas para cada $A, B \in C(\mathcal{L})$.

$\mathcal{A}_1$. $AB \Rightarrow BA$

$\mathcal{A}_2$. $AB \Rightarrow A$

$\mathcal{A}_3$. $A \Rightarrow \top$

$\mathcal{A}_4$. $A \Rightarrow AA$

$\mathcal{A}_5$. $A(AB) \Rightarrow A(B)$

$\mathcal{A}_6$. $A \Rightarrow ((A))$

$\mathcal{A}_7$. $((A)) \Rightarrow A$

Las reglas $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ corresponden a la de borramiento en gráficos; la regla $\mathcal{A}_4$ es de iteración y la $\mathcal{A}_5$ de desiteración; por fin, las reglas $\mathcal{A}_6$ y $\mathcal{A}_7$ corresponden al corte doble.

A partir de aquí se define la relación de deducción entre cadenas como entre los gráficos.

Definición 2.11. Sean $A, B \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa. La cadena A *se puede transformar* en la cadena B, lo cual se denota

$$A \Rrightarrow B,$$

si existe una sucesión finita de cadenas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ con $C_1 = A$ y $C_n = B$ tal que cada cadena C_i se obtiene de la anterior C_{i-1} por la aplicación de alguna de las reglas de transformación $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_7$.

Si bien la regla $\mathcal{A}_2$ solo permite cancelar o borrar a la derecha, no es difícil probar la correspondiente regla a la izquierda.

Ejemplo 2.12. $AB \Rrightarrow B$

En efecto, por $\mathcal{A}_1$ se tiene que $AB \Rightarrow BA$ y por $\mathcal{A}_2$ se tiene que $BA \Rightarrow B$. Esto se puede simbolizar como sigue:

$$AB \overset{\mathcal{A}_1}{\Rightarrow} BA \overset{\mathcal{A}_2}{\Rightarrow} B$$

Ejemplo 2.13. En este contexto, la regla *Modus Ponendo Ponens* corresponde a la transformación $A(A(B)) \Rrightarrow B$.

$$A(A(B)) \overset{\mathcal{A}_5}{\Rightarrow} A((B)) \overset{\mathcal{A}_1}{\Rightarrow} ((B))A \overset{\mathcal{A}_2}{\Rightarrow} ((B)) \overset{\mathcal{A}_7}{\Rightarrow} B$$

En esta prueba se habría podido omitir un paso, utilizando el ejemplo anterior.

Afirmación 2.14. *La relación $\Rrightarrow$ es reflexiva y transitiva en el conjunto $C(\mathcal{L})$, esto es, para cada $A, B, C \in C(\mathcal{L})$ se tiene:*

i) $A \Rrightarrow A$;

ii) *Si* $A \Rrightarrow B$ *y* $B \Rrightarrow C$ *entonces* $A \Rrightarrow C$.

Demostración.

i) Puesto que $A \overset{\mathcal{A}_4}{\Rightarrow} AA \overset{\mathcal{A}_2}{\Rightarrow} A$, se concluye $A \Rrightarrow A$.

ii) Como $A \Rrightarrow B$, existen $C_1, C_2, \ldots, C_n \in C(\mathcal{L})$ con $C_1 = A$, $C_n = B$ y $C_{i-1} \Rightarrow C_i$ para cada i; como $B \Rrightarrow C$, existen $D_1, D_2, \ldots, D_m \in C(\mathcal{L})$ con $D_1 = B$, $D_m = C$ y $D_{j-1} \Rightarrow D_j$ para cada j. Ahora, puesto que $C_n = D_1 = B$, existe la sucesión $C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n = D_1, D_2, \ldots, D_m$ con $C_1 = A$, $D_m = C$ y $C_{i-1} \Rightarrow C_i$, $D_{i-1} \Rightarrow D_i$ para cada i. Es decir, $A \Rrightarrow C$. $\square$

Ahora se definen las "superreglas" para la relación $\Rrightarrow$ como sigue.

Definición 2.15. En el conjunto preordenado $\big(C(\mathcal{L}), \Rrightarrow\big)$ de las cadenas Alfa se establecen las siguientes condiciones adicionales, válidas para cada $A, B, C \in C(\mathcal{L})$.

$\mathcal{B}_1$. Si $A \Rrightarrow B$ entonces $AC \Rrightarrow BC$;

$\mathcal{B}_2$. Si $A \Rrightarrow B$ entonces $(B) \Rrightarrow (A)$.

Ejemplo 2.16. Si $A \Rrightarrow B$ entonces $CA \Rrightarrow CB$.

En efecto, si $A \Rrightarrow B$ entonces por $\mathcal{B}_1$ se sigue $AC \Rrightarrow BC$, de donde

$$CA \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} AC \Rrightarrow BC \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} CB$$

y de esta manera $CA \Rrightarrow CB$.

Ejemplo 2.17. Si $A \Rrightarrow B$ entonces $(C(A)) \Rrightarrow (C(B))$.

Pues si $A \Rrightarrow B$, por $\mathcal{B}_2$ se sigue $(B) \Rrightarrow (A)$; luego, por el ejemplo 2.16, se tiene $C(B) \Rrightarrow C(A)$; finalmente, de nuevo por $\mathcal{B}_2$, es $(C(A)) \Rrightarrow (C(B))$.

Ejemplo 2.18. *Modus Tollendo Tollens*: $(A(B))(B) \Rrightarrow (A)$.

Como $(B)A \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} A(B)$, por $\mathcal{B}_2$ se tiene $(A(B)) \Rrightarrow ((B)A)$ luego por $\mathcal{B}_1$ es $(A(B))(B) \Rrightarrow ((B)A)(B)$. Por otro lado

$$((B)A)(B) \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} (B)((B)A) \overset{\mathcal{A}_5}{\Rrightarrow} (B)(A) \Rrightarrow (A),$$

el último paso por el ejemplo 2.12. Por transitividad, se obtiene el resultado buscado.

Ejemplo 2.19. Implicación contrarrecíproca: $((A)((B))) \Rrightarrow (B(A))$.

Como $B \overset{\mathcal{A}_6}{\Rrightarrow} ((B))$, por $\mathcal{B}_1$ se tiene $B(A) \Rrightarrow ((B))(A)$; como $((B))(A) \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} (A)((B))$, por transitividad resulta $B(A) \Rrightarrow (A)((B))$. Finalmente, por $\mathcal{B}_2$ es $((A)((B))) \Rrightarrow (B(A))$.

2.3 Equivalencia de cadenas

En esta sección se profundiza en la relación de deducción entre cadenas.

Definición 2.20. Sean $A, B \in C(\mathcal{L})$. Las cadenas A, B son *equivalentes*, lo cual se denota

$$A \equiv B,$$

si $A \Rrightarrow B$ y $B \Rrightarrow A$.

Afirmación 2.21. *La relación $\equiv$ es de equivalencia en el conjunto $C(\mathcal{L})$, esto es, para cada $A, B, C \in C(\mathcal{L})$ se tiene:*

i) $A \equiv A$;

ii) Si $A \equiv B$ entonces $B \equiv A$;

iii) Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$ entonces $A \equiv C$.

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la afirmación 2.14 y la definición anterior. $\square$

Ejemplo 2.22. $AB \equiv BA$

Pues $AB \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} BA$ y $BA \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} AB$.

Ejemplo 2.23. $AA \equiv A$

Pues $AA \overset{\mathcal{A}_2}{\Rrightarrow} A$ y $A \overset{\mathcal{A}_4}{\Rrightarrow} AA$.

Ejemplo 2.24. $A \equiv ((A))$

Evidente por $\mathcal{A}_6$ y $\mathcal{A}_7$.

Ejemplo 2.25. $A \equiv A\top$

Por un lado se tiene $A \overset{\mathcal{A}_3}{\Rrightarrow} \top$, luego por el ejemplo 2.16 es $AA \Rrightarrow A\top$ lo cual junto con $A \overset{\mathcal{A}_4}{\Rrightarrow} AA$ arroja $A \Rrightarrow A\top$ por transitividad. Por otra parte $A\top \overset{\mathcal{A}_2}{\Rrightarrow} A$.

Ejemplo 2.26. $A(AB) \equiv A(B)$

En una dirección se tiene $A(AB) \overset{\mathcal{A}_5}{\Rrightarrow} A(B)$. En la otra, por el ejemplo 2.12 se tiene $AB \Rrightarrow B$ luego por $\mathcal{B}_2$ es $(B) \Rrightarrow (AB)$, y por el ejemplo 2.16 resulta $A(B) \Rrightarrow A(AB)$.

Afirmación 2.27. *Sean $A, B, C \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa arbitrarias.*

i) Si $A \equiv B$ entonces $AC \equiv BC$;

ii) Si $A \equiv B$ entonces $CA \equiv CB$;

iii) Si $A \equiv B$ entonces $(A) \equiv (B)$.

Demostración.

i) Si $A \Rrightarrow B$ y $B \Rrightarrow A$ entonces por $\mathcal{B}_1$ se tiene $AC \Rrightarrow BC$ y $BC \Rrightarrow AC$, es decir, $AC \equiv BC$.

ii) Basta aplicar el ejemplo 2.22 al numeral (*i*), teniendo en cuenta que esta es una relación de equivalencia.

iii) Si $A \Rrightarrow B$ y $B \Rrightarrow A$ entonces por $\mathcal{B}_2$ se tiene $(B) \Rrightarrow (A)$ y $(A) \Rrightarrow (B)$ respectivamente, es decir, $(A) \equiv (B)$. $\square$

Siguen algunos ejemplos adicionales.

Ejemplo 2.28. *Modus Tollendo Ponens*: $((A)(B))(A) \Rrightarrow B$.

En efecto,

$$((A)(B))(A) \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} (A)((A)(B)) \overset{\mathcal{A}_5}{\Rrightarrow} (A)((B)) \Rrightarrow ((B)) \overset{\mathcal{A}_7}{\Rrightarrow} B,$$

el penúltimo paso es por el ejemplo 2.12.

El otro caso de *Modus Tollendo Ponens*, $((A)(B))(B) \Rrightarrow A$, se puede probar aplicando el resultado (*iii*) de la afirmación 2.27 a la equivalencia $(A)(B) \equiv (B)(A)$, lo cual reduce este caso nuevo al anterior.

Ejemplo 2.29. $A((B)C) \equiv A((AB)C)$ y $A(B(C)) \equiv A(B(AC))$.

Por el ejemplo 2.26 se tiene $A((B)C) \equiv A(A(B)C)$; por el mismo ejemplo para el caso $A(B) \equiv A(AB)$ y por la afirmación 2.27 resulta $A(A(B)C) \equiv A(A(AB)C)$; una vez más por el ejemplo 2.26 es $A(A(AB)C) \equiv A((AB)C)$. Por la propiedad transitiva se concluye $A((B)C) \equiv A((AB)C)$.

Para la otra equivalencia basta aplicar de manera adecuada el ejemplo 2.22 y la afirmación 2.27, a fin de reducirla al caso probado.

Ejemplo 2.30. $(A(B))((A)(B)) \Rrightarrow B$

Por los ejemplos 2.29 y 2.12 se tiene

$$(A(B))((A)(B)) \quad \Rrightarrow \quad (A(B))(((A(B))A)(B)) \quad \Rrightarrow \quad (((A(B))A)(B)).$$

Ahora por el ejemplo 2.13 es $(A(B))A \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} A(A(B)) \Rrightarrow B$ de donde por $\mathcal{B}_2$ se obtiene $(B) \Rrightarrow ((A(B))A)$. Ahora, por $\mathcal{B}_1$, $(B) \overset{\mathcal{A}_4}{\Rrightarrow} (B)(B) \Rrightarrow ((A(B))A)(B)$ de manera que, de nuevo por $\mathcal{B}_2$,

$$(((A(B))A)(B)) \quad \Rrightarrow \quad ((B)) \quad \overset{\mathcal{A}_7}{\Rrightarrow} \quad B$$

y el resultado buscado se obtiene por la propiedad transitiva.

Ejemplo 2.31. $(A(C))(B(C))((A)(B)) \Rrightarrow C$

Por los ejemplos 2.29 y 2.12 se tiene $(B(C))((A)(B)) \Rrightarrow (B(C))((A)((B(C))B)) \Rrightarrow ((A)((B(C))B))$. Ahora por el ejemplo 2.13 es $(B(C))B \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} B(B(C)) \Rrightarrow C$, luego por

$\mathcal{B}_2$ se sigue $(C) \Rrightarrow ((B(C))B)$, por el ejemplo 2.16 es $(A)(C) \Rrightarrow (A)((B(C))B)$ y de nuevo por $\mathcal{B}_2$ se concluye $((A)((B(C))B)) \Rrightarrow ((A)(C))$.

Por la propiedad transitiva, hasta aquí se tiene $(B(C))((A)(B)) \Rrightarrow ((A)(C))$, de donde $(A(C))(B(C))((A)(B)) \Rrightarrow (A(C))((A)(C))$ por el ejemplo 2.16. Ahora por el ejemplo 2.30 se tiene $(A(C))((A)(C)) \Rrightarrow C$ y de esta manera $(A(C))(B(C))((A)(B)) \Rrightarrow C$.

Ejemplo 2.32. $(B)(A(B))((A)(C)) \Rrightarrow C$

Por el ejemplo 2.18 se tiene $(B)(A(B)) \overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow} (A(B))(B) \Rrightarrow (A)$, de donde por $\mathcal{B}_1$

$$(B)(A(B))((A)(C)) \;\Rrightarrow\; (A)((A)(C)) \;\overset{\mathcal{A}_1}{\Rrightarrow}\; ((A)(C))(A) \;\Rrightarrow\; C,$$

el último paso por el ejemplo 2.28.

Para concluir este capítulo se desarrolla el ejemplo 1.8 (sin premisas) en el contexto de las cadenas Alfa.

Ejemplo 2.33. $\top \Rrightarrow (A(A))$

Por el ejemplo 2.25 se tiene $A \equiv A\top$, luego por la afirmación 2.27 resulta $(A) \equiv (A\top)$ y $A(A) \equiv A(A\top)$. En estas condiciones se tiene

$$A(A) \quad \Rrightarrow \quad A(A\top) \quad \overset{\mathcal{A}_5}{\Rrightarrow} \quad A(\top) \quad \Rrightarrow \quad (\top),$$

el último paso por el ejemplo 2.12. Ahora por $\mathcal{B}_2$ se sigue $((\top)) \Rrightarrow (A(A))$ y, finalmente,

$$\top \quad \overset{\mathcal{A}_6}{\Rrightarrow} \quad ((\top)) \quad \Rrightarrow \quad (A(A)).$$

Capítulo 3

Correspondencia entre los sistemas

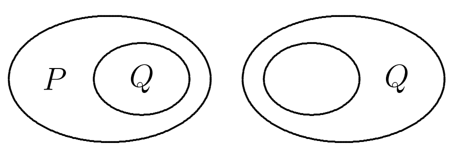
En este capítulo se establece la equivalencia formal entre el sistema alternativo de las cadenas Alfa y los gráficos existenciales Alfa originales de Peirce.

3.1 De las cadenas a los gráficos

De manera informal, cualquier cadena Alfa se puede ver como un gráfico existencial. Para ello basta, por un lado, cerrar las parejas de paréntesis formando un corte continuo; y por el otro, borrar las letras $\top$ dejando el espacio vacío. Por ejemplo, la cadena Alfa

$$(p(q))((\top)q)$$

da lugar al siguiente gráfico Alfa:



Más aún, toda deducción entre cadenas es válida si se las mira como gráficos, con lo cual se pone en correspondencia estas dos lógicas gráficas.

Las anteriores ideas intuitivas se formalizan mediante una función $\mathcal{G}$ "de gráficos", definida del conjunto de las cadenas en el de los gráficos, que además resulta compatible con las relaciones de deducción.

Definición 3.1. La función $\mathcal{G}$ del conjunto $C(\mathcal{L})$ de las cadenas Alfa en el conjunto de los gráficos Alfa en $\mathcal{L}$ se define por inducción en cadenas como sigue.

1. $\mathcal{G}[p] = P$ para cada letra $p \in \mathcal{L}$;

2. $\mathcal{G}[\top]$ es una porción vacía de la hoja de aserción;

3. $\mathcal{G}[(A)] = \mathcal{G}[A]$;

4. $\mathcal{G}[AB] = \mathcal{G}[A]\ \mathcal{G}[B]$.

Ejemplo 3.2. Aplicando la definición formal al ejemplo dado al comienzo se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}[(p(q))((\top)q)] &= \mathcal{G}[(p(q))]\ \mathcal{G}[((\top)q)] \\
&= \mathcal{G}[p(q)] \quad \mathcal{G}[(\top)q] \\
&= \mathcal{G}[p]\mathcal{G}[(q)] \quad \mathcal{G}[(\top)]\mathcal{G}[q] \\
&= P\ \mathcal{G}[q] \quad \mathcal{G}[\top]\ Q \\
&= P\ Q \quad \ Q
\end{aligned}
$$

Para probar la compatibilidad de las relaciones de deducción en los dos sistemas, es preciso demostrar todas las reglas del sistema Alfa alternativo mediante las reglas de transformación Alfa de Peirce. A continuación se realizarán las pruebas en cada uno de los casos.

Afirmación 3.3. *Para gráficos Alfa A, B arbitrarios se tienen las siguientes deducciones gráficas.*

1. $AB \Rightarrow BA$
2. $AB \Rightarrow A$
3. $A \Rightarrow$ *(la hoja vacía)*
4. $A \Rightarrow AA$
5. $A\ AB \Rightarrow A\ B$

6. $A \Rightarrow A$

7. $A \Rightarrow A$

Demostración.

1. Esta transformación se tiene de manera trivial porque, como gráficos Alfa, AB y BA son iguales.

2. y *3.* Estas deducciones se logran cada una en un solo paso, aplicando la regla de borramiento.

4. Se obtiene en un paso, por iteración.

5. Se deduce en un solo paso, por desiteración.

6. y *7.* Estas deducciones son inmediatas por la regla de corte doble. □

Afirmación 3.4. *Para gráficos Alfa A, B arbitrarios se tiene:*

1. *Si* $A \Rightarrow B$ *entonces* $AC \Rightarrow BC$;
2. *Si* $A \Rightarrow B$ *entonces* $B \Rightarrow A$.

Nótese que (*2*) es la esencia del teorema de contraposición (teorema 1.10).

Demostración.

1. Es evidente que cualquier transformación que se efectúe sobre el gráfico A (o los gráficos siguientes en la deducción) cuando este gráfico está solo en la hoja, también puede realizarse si en la hoja está dibujado el gráfico C. El resultado es el mismo, solo que está acompañado del gráfico C.

2. Si en algún paso de la deducción original se ha realizado un borramiento en área par, al encerrar todos los gráficos de la sucesión en un corte esa área es impar y se puede dibujar el gráfico eliminado; si en algún paso original se ha insertado un gráfico por escritura en área impar, al encerrar todos los gráficos esa área es par y se puede borrar ese gráfico. Por otro lado, las reglas de iteración, desiteración y corte doble todas son invertibles, así que cualquier aplicación de ellas se puede revertir en el sentido contrario. □

Con esto se llega al resultado siguiente.

Teorema 3.5. *Sean $A, B \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa. Si en el sistema alternativo se tiene*

$$A \Rrightarrow B$$

entonces en el sistema de los gráficos existenciales Alfa se tiene:

$$\mathcal{G}[A] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}[B].$$

Demostración. Si $A \Rrightarrow B$, por las afirmaciones 3.3 y 3.4 cada uno de los pasos dados en la deducción se puede realizar en las imágenes por $\mathcal{G}$ mediante las reglas de transformación Alfa, con lo cual toda la demostración se puede replicar allí.

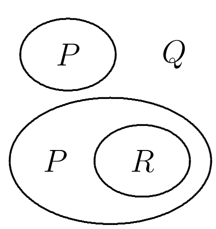
Por ejemplo, si en la deducción del sistema alternativo se dio el paso $C_1C_2 \Rrightarrow C_2C_1$, entonces por la definición y por (*1*) de la afirmación 3.3 es $\mathcal{G}[C_1C_2] = \mathcal{G}[C_1]\,\mathcal{G}[C_2] \;\Rightarrow\; \mathcal{G}[C_2]\,\mathcal{G}[C_1] = \mathcal{G}[C_2C_1]$. Y así para todas las reglas $\mathcal{A}_i$.

Por otro lado, si en la deducción se pasó de $C_1 \Rrightarrow C_2$ a $(C_2) \Rrightarrow (C_1)$, entonces mediante un argumento inductivo se supone $\mathcal{G}[C_1] \;\Rightarrow\; \mathcal{G}[C_2]$, y entonces por la definición y por (*2*) de la afirmación 3.4 se tiene $\mathcal{G}[(C_2)] = \mathcal{G}[C_2] \;\Rightarrow\; \mathcal{G}[C_1] = \mathcal{G}[(C_1)]$. Así para ambas reglas $\mathcal{B}_j$.

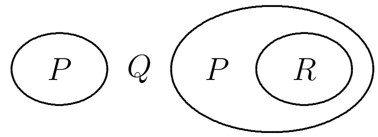
De esta manera se puede concluir $\mathcal{G}[A] \;\Rightarrow\; \mathcal{G}[B]$. □

3.2 De los gráficos a las cadenas

En la dirección contraria, ahora a cada gráfico se debe asociar una cadena. Esta traducción es más difícil pues primero se debe pasar de un gráfico bidimensional a una sucesión lineal ordenando todas las letras y los cortes vacíos en una sola línea recta. En general, esto se puede hacer de varias maneras, lo cual trae consigo el problema de elegir una imagen entre muchas posibles. Luego, los cortes se sustituyen por paréntesis y los cortes vacíos, si los hay, se deben llenar con letras $\top$. Por ejemplo, dado el gráfico Alfa



este se puede “linealizar” de diferentes maneras, por ejemplo



lo cual da lugar a la cadena $(p)q(p(r))$.

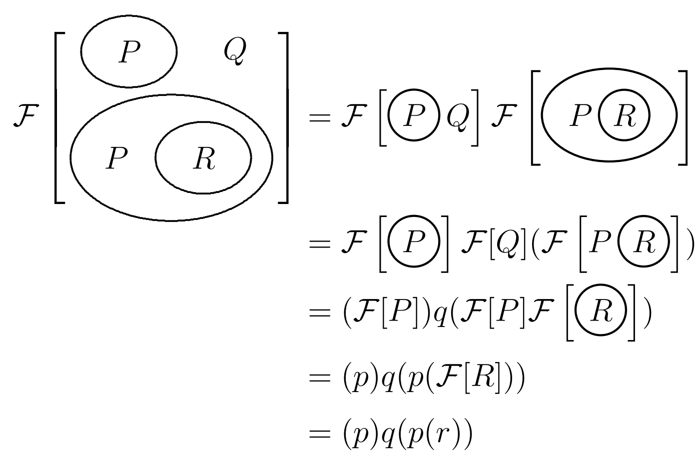
El proceso mostrado arriba se formaliza con una función $\mathcal{F}$ “de cadenas” que es, en realidad, una función de elección.

Definición 3.6. La función $\mathcal{F}$ del conjunto de los gráficos Alfa en $\mathcal{L}$ en el conjunto $C(\mathcal{L})$ de las cadenas Alfa se define por inducción en gráficos como sigue.

1. $\mathcal{F}[$ *porción vacía de la hoja de aserción* $] = \top$;
2. $\mathcal{F}[P] = p$ para cada letra $P \in \mathcal{L}$;
3. $\mathcal{F}\left[\textcircled{A}\right] = (\mathcal{F}[A])$;
4. $\mathcal{F}[A\,B] = \mathcal{F}[A]\mathcal{F}[B]$ (en algún orden).

Respecto a la cláusula (1), solo es necesario aplicarla cuando el gráfico a traducir es toda la hoja vacía, o cuando hay un corte vacío.

Ejemplo 3.7. Aplicando esta definición al ejemplo informal del comienzo de sección se tiene:



Ahora es necesario demostrar las reglas de transformación Alfa de Peirce en el sistema alternativo de las cadenas. Por ejemplo, es claro que las reglas $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$, complementadas con el ejemplo 2.12, permiten borrar cualquier “subcadena” que no está rodeada por paréntesis. Para poder extender esta regla a cadenas encerradas por cualquier cantidad par de paréntesis, que sería la regla de borramiento Alfa en cadenas, se requiere una versión del teorema de contraposición.

Definición 3.8. Sean $A, B, C \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa tales que C contiene alguna copia de la cadena A. La cadena que se obtiene de C al sustituir esa cadena A por B se denota $C[B/A]$.

Ejemplo 3.9. Sean $A = (p(q))$ y $B = (r)(p)$, entonces para $C = (p)(r(p(q))q)(r(s))$ se tiene $C[B/A] = (p)(r(r)(p)q)(r(s))$.

Lema 3.10. *Sean $A, B \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa tales que $A \Rrightarrow B$.*

- *Para cualquier cadena Alfa C que contenga a A rodeada por una cantidad* par *de paréntesis se tiene $C \Rrightarrow C[B/A]$;*
- *Para cualquier cadena Alfa C que contenga a B rodeada por una cantidad* impar *de paréntesis se tiene $C \Rrightarrow C[A/B]$.*

Demostración. Una prueba del todo formal requiere un complicado argumento inductivo, similar a algunas demostraciones en [3]. La idea intuitiva detrás de esa inducción es un empleo cuidadoso de las reglas $\mathcal{B}_j$ como se indica a continuación.

Si A está rodeada por cero paréntesis, se tiene $C = XAY$ para ciertas cadenas X, Y. De la hipótesis $A \Rrightarrow B$, por $\mathcal{B}_1$ se sigue $AY \Rrightarrow BY$, y luego por el ejemplo 2.16 se obtiene $XAY \Rrightarrow XBY$, esto es, $C = XAY \Rrightarrow XBY = C[B/A]$.

Si B está rodeada por un paréntesis, se tiene $C = W(XBY)Z$ para ciertas cadenas W, X, Y, Z. Como en el caso anterior, de la hipótesis se sigue $XAY \Rrightarrow XBY$ luego por $\mathcal{B}_2$ se tiene $(XBY) \Rrightarrow (XAY)$ y así, de nuevo como en el caso anterior, $C = W(XBY)Z \Rrightarrow W(XAY)Z = C[A/B]$.

Si A está rodeada por dos paréntesis, se tiene $C = U(W(XAY)Z)V$. Como en el caso precedente, de la hipótesis se sigue $W(XBY)Z \Rrightarrow W(XAY)Z$ luego por $\mathcal{B}_2$ se tiene $(W(XAY)Z) \Rrightarrow (W(XBY)Z)$ y, como en el primer caso, $C = U(W(XAY)Z)V \Rrightarrow U(W(XBY)Z)V = C[B/A]$.

Y así sucesivamente. □

Corolario 3.11. *Supóngase que las cadenas Alfa* $A, B \in C(\mathcal{L})$ *son equivalentes, esto es* $A \equiv B$. *Para cualquier cadena Alfa* C *que contenga a* A *se tiene* $C \equiv C[B/A]$.

Demostración. Si A está rodeada por una cantidad par de paréntesis en C entonces de $A \Rrightarrow B$ se sigue $C \Rrightarrow C[B/A]$ por el lema 3.10; por otro lado, B está rodeada por una cantidad par de paréntesis en $C[B/A]$ luego de $B \Rrightarrow A$ por el mismo lema se sigue $C[B/A] \Rrightarrow C$. En conclusión, $C \equiv C[B/A]$.

La prueba del caso impar es simétrica a la anterior. □

Ahora se procede a probar las reglas, aunque en un orden diferente.

Afirmación 3.12 (Corte doble para cadenas)**.** *Alrededor de cualquier cadena contenida en otra se puede añadir o quitar un par de paréntesis.*

De manera simbólica, en este caso, si la cadena A está contenida en C entonces se tiene:

$$C \equiv C[((A))/A]$$

Demostración. Por el ejemplo 2.24 es $A \equiv ((A))$, y basta aplicar el corolario 3.11. □

Afirmación 3.13 (Borramiento para cadenas)**.** *Cualquier cadena contenida en otra y rodeada por una cantidad par de paréntesis se puede eliminar. Si no queda cadena alguna entre los paréntesis que la rodean directamente, allí se escribe la constante* $\top$.

Demostración. Por el ejemplo 2.12 se tiene $AB \Rrightarrow B$; por la regla $\mathcal{A}_2$ se tiene $BA \Rrightarrow B$; por fin, por la regla $\mathcal{A}_3$ es $A \Rrightarrow \top$. Luego, por contraposición (lema 3.10), estas transformaciones se pueden realizar en cualquier caso rodeado por una cantidad par de paréntesis. □

Afirmación 3.14 (Escritura para cadenas)**.** *A una cadena contenida en otra y rodeada por una cantidad impar de paréntesis se puede añadir cualquier otra cadena. Si la constante* $\top$ *aparece rodeada por una cantidad impar de paréntesis, se puede sustituir por cualquier cadena.*

Demostración. Igual que en la prueba de la afirmación 3.13 se tiene $AB \Rrightarrow B$, $BA \Rrightarrow B$ y $A \Rrightarrow \top$. Luego, por contraposición, estas transformaciones se pueden realizar en sentido inverso en cualquier caso rodeado por una cantidad impar de paréntesis. □

Respecto a las reglas de iteración y desiteración, la idea consiste en repetir una cadena A "al interior" de otra cadena adyacente S, lo cual se puede precisar escribiendo la cadena A "al lado" de alguna cadena B contenida en S, o lo que es lo mismo, sustituyendo B por AB al interior de S.

Lema 3.15. *Sean $A, B, S \in C(\mathcal{L})$ cadenas Alfa tales que S contiene la cadena B. En tales condiciones se tiene:*

$$AS \equiv AS[AB/B].$$

Los otros casos posibles, que son $AS \equiv AS[BA/B]$, $SA \equiv S[AB/B]A$ y $SA \equiv S[BA/B]A$, se demuestran de manera similar.

Demostración. De nuevo, una prueba del todo formal requiere un argumento inductivo. La idea intuitiva detrás de esa inducción es un empleo cuidadoso de las reglas como se indica a continuación.

Si B está rodeada por cero paréntesis, se tiene $S = XBY$ para ciertas cadenas X, Y. Por el ejemplo 2.23 se tiene $A \equiv AA$ de donde, por la afirmación 2.27, es $AX \equiv AAX$. Pero $AX \equiv XA$ por el ejemplo 2.22, luego de nuevo por la afirmación 2.27 se obtiene $AAX \equiv AXA$. Por transitividad $AX \equiv AXA$ y una vez más por la afirmación 2.27 resulta $AS = AXBY \equiv AXABY = AS[AB/B]$.

Si B está rodeada por un paréntesis, se tiene $S = W(XBY)Z$ para ciertas cadenas W, X, Y, Z. Por el caso anterior se tiene $AW(XBY) \equiv AWA(XBY)$ y por el ejemplo 2.26 es $A(XBY) \equiv A(AXBY)$, de donde por la afirmación 2.27 se obtiene $AWA(XBY) \equiv AWA(AXBY)$. Ahora por un lado, aplicando de nuevo el caso anterior se tiene $AWA(AXBY) \equiv AW(AXBY)$ de donde por transitividad $AW(XBY) \equiv AW(AXBY)$; y por otro, como en la prueba anterior, $AXBY \equiv XABY$ de donde $(AXBY) \equiv (XABY)$ y también $AW(AXBY) \equiv AW(XABY)$. Así $AW(XBY) \equiv AW(XABY)$ y, por la afirmación 2.27, se obtiene $AS = AW(XBY)Z \equiv AW(XABY)Z = AS[AB/B]$.

Si B está rodeada por dos paréntesis, se tiene $S = U(W(XBY)Z)V$. Por el caso precedente, $AU(W(XBY)Z)V \equiv AU(WA(XBY)Z)V$; por una adaptación (o caso particular) del mismo se tiene $A(XBY) \equiv A(XABY)$, de donde $AU(WA(XBY)Z)V \equiv AU(WA(XABY)Z)V$; aplicando de nuevo caso anterior es $AU(WA(XABY)Z)V \equiv AU(W(XABY)Z)V$. Combinando estas tres equivalencias por transitividad, resulta $AS = AU(W(XBY)Z)V \equiv AU(W(XABY)Z)V = AS[AB/B]$.

Y así sucesivamente. $\square$

Afirmación 3.16 (Iteración para cadenas)**.** *Una cadena contenida en otra se puede iterar (repetir) en cualquier cadena que se encuentre a su lado en la original, sin importar la cantidad de paréntesis que rodea la copia en esa otra cadena.*

De manera simbólica, en este caso, si las cadenas A y S están contenidas y adyacentes en la cadena C, y a su vez B está en el interior de S, entonces se tiene:

$$C \equiv C[AS[AB/B]/AS]$$

Demostración. Esto es consecuencia directa del lema 3.15 y el corolario 3.11. $\square$

Afirmación 3.17 (Desiteración para cadenas)**.** *Cualquier cadena contenida en otra y que pudiera obtenerse por la afirmación 3.16 se puede eliminar.*

Demostración. Basta observar que en la prueba anterior se tiene una equivalencia. $\square$

Probadas todas las reglas de transformación en el contexto de las cadenas, se llega al resultado siguiente.

Teorema 3.18. *Sean A, B gráficos Alfa en el conjunto de letras $\mathcal{L}$. Si en el sistema de los gráficos existenciales Alfa se tiene*

$$A \quad \Longrightarrow \quad B$$

entonces en el sistema alternativo de las cadenas Alfa se tiene:

$$\mathcal{F}[A] \Rrightarrow \mathcal{F}[B].$$

Demostración. Si el gráfico A se puede transformar en el gráfico B, por definición existe una sucesión finita de gráficos Alfa $G_1, G_2, \ldots, G_n$ con $G_1 = A$ y $G_n = B$ tal que cada gráfico G_i se obtiene del anterior G_{i-1} por la aplicación de alguna de las reglas de transformación. Por las afirmaciones precedentes, cada uno de los pasos dados en la deducción gráfica se puede realizar en las imágenes por $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F}[G_{i-1}] \Rrightarrow \mathcal{F}[G_i]$. Por transitividad se puede concluir $\mathcal{F}[A] \Rrightarrow \mathcal{F}[B]$. $\square$

3.3 Equivalencia

Los resultados de las secciones precedentes demuestran que cada sistema se puede interpretar en el otro mediante las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, no solo los objetos sino también las relaciones de deducción respectivas. Para establecer la equivalencia plena de los sistemas solo falta probar el carácter biyectivo de las correspondencias, lo cual equivale a mostrar que las dos compuestas $\mathcal{FG}$ y $\mathcal{GF}$ son las funciones idénticas. Como se puede esperar, tal biyectividad no es estricta en ambos casos sino "módulo equivalencia".

Afirmación 3.19. *Si A es un gráfico Alfa entonces*

$$\mathcal{GF}[A] = A.$$

Demostración. Por "inducción en gráficos Alfa".

1. Si A es una porción vacía de la hoja de aserción entonces $\mathcal{F}[A] = \top$ y $\mathcal{GF}[A] = \mathcal{G}[\mathcal{F}[A]] = \mathcal{G}[\top]$ es de nuevo la hoja vacía, luego $\mathcal{GF}[A] = A$.
2. Si $P \in \mathcal{L}$ es una letra entonces $\mathcal{GF}[P] = \mathcal{G}[\mathcal{F}[P]] = \mathcal{G}[p] = P$.
3. Suponiendo $\mathcal{GF}[A] = A$, se tiene $\mathcal{GF}\left[A \right] = \mathcal{G}[(\mathcal{F}[A])] = \mathcal{GF}[A] = A$.
4. Suponiendo $\mathcal{GF}[A] = A$ y $\mathcal{GF}[B] = B$, se tiene $\mathcal{GF}[AB] = \mathcal{G}\big[\mathcal{F}[A]\mathcal{F}[B]\big] = \mathcal{GF}[A]\,\mathcal{GF}[B] = AB$ o bien $\mathcal{GF}[AB] = \mathcal{G}\big[\mathcal{F}[B]\mathcal{F}[A]\big] = \mathcal{GF}[B]\,\mathcal{GF}[A] = BA$. Como los gráficos AB y BA son iguales, en ambos casos $\mathcal{GF}[AB] = AB$. □

Corolario 3.20. *Si A es un gráfico Alfa entonces*

$$\mathcal{GF}[A] \quad \Longleftrightarrow \quad A.$$

Demostración. Evidente porque la relación de equivalencia es reflexiva. □

Afirmación 3.21. *Si $A \in C(\mathcal{L})$ es una cadena Alfa entonces*

$$\mathcal{FG}[A] \equiv A.$$

Demostración. Por inducción en cadenas.

1. Si $p \in \mathcal{L}$ es una letra entonces $\mathcal{FG}[p] = \mathcal{F}[P] = p$, de donde $\mathcal{FG}[p] \equiv p$.

2. $\mathcal{F}\mathcal{G}[\top] = \mathcal{F}[$ *porción vacía de la hoja* $] = \top$, de donde $\mathcal{F}\mathcal{G}[\top] \equiv \top$.

3. Si $\mathcal{F}\mathcal{G}[A] \equiv A$ entonces $\mathcal{F}\mathcal{G}[(A)] = \mathcal{F}\left[\mathcal{G}[A] \right] = (\mathcal{F}\mathcal{G}[A])$. Por la afirmación 2.27, de la hipótesis de inducción se tiene $(\mathcal{F}\mathcal{G}[A]) \equiv (A)$, luego $\mathcal{F}\mathcal{G}[(A)] \equiv (A)$.

4. Si $\mathcal{F}\mathcal{G}[A] \equiv A$ y $\mathcal{F}\mathcal{G}[B] \equiv B$ entonces $\mathcal{F}\mathcal{G}[AB] = \mathcal{F}[\mathcal{G}[A]\,\mathcal{G}[B]] = \mathcal{F}\mathcal{G}[A]\mathcal{F}\mathcal{G}[B]$ o bien $\mathcal{F}\mathcal{G}[AB] = \mathcal{F}\mathcal{G}[B]\mathcal{F}\mathcal{G}[A]$. Por la afirmación 2.27 y el ejemplo 2.22, de la hipótesis de inducción se tiene $\mathcal{F}\mathcal{G}[A]\mathcal{F}\mathcal{G}[B] \equiv AB$ y $\mathcal{F}\mathcal{G}[B]\mathcal{F}\mathcal{G}[A] \equiv BA \equiv AB$, luego en ambos casos $\mathcal{F}\mathcal{G}[AB] \equiv AB$. $\square$

Así concluye la demostración formal de la equivalencia entre los gráficos Alfa de Peirce y el sistema alternativo de cadenas Alfa propuesto en este trabajo.

Conclusiones

El resultado principal de este trabajo es la construcción de un sistema alternativo para los gráficos existenciales Alfa con las características siguientes:

- Los objetos ya no son estrictamente bidimensionales sino que se trata de sucesiones finitas o “cadenas” de letras y paréntesis.
- No se requieren conectivos, solo un símbolo constante que evita los espacios vacíos.
- Aunque se requieren más reglas de transformación que en la presentación original, en el sistema alternativo estas son puramente algebraicas y no hacen referencia alguna a los conceptos de “paridad” o “interior”.

El sistema introducido en este trabajo constituye un *eslabón perdido* en el camino de la equivalencia entre los gráficos Alfa y las presentaciones tradicionales de la lógica proposicional. En efecto, la traducción del sistema alternativo a la presentación axiomática del cálculo proposicional clásico parece sencilla y la demostración de las reglas alternativas en la lógica tradicional es inmediata. Sin embargo, los detalles de esa segunda etapa del proceso se dejan para investigaciones futuras.

Bibliografía

[1] Caicedo, Xavier, *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Una empresa docente, 1990.

[2] Fuentes, Daniel, *Cálculo de secuentes y gráficos existenciales Alfa: Dos construcciones equivalentes para la lógica proposicional*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística). Ibagué: Universidad del Tolima, 2014.

[3] Gómez, Andrea, *Gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística). Ibagué: Universidad del Tolima, 2013.

[4] Martínez, Yorladys, *Un modelo real para los gráficos Alfa*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística). Ibagué: Universidad del Tolima, 2014.

[5] Oostra, Arnold, "Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista". *Cuadernos de Sistemática Peirceana* **2** (2010), 25-60.

[6] Oostra, Arnold, *Notas de lógica matemática*. Inédito. Ibagué: Universidad del Tolima, 2018.

[7] Roberts, Don D., *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton, 1973.

[8] Taboada, Jorge y Rodríguez, Danilo, *Una demostración de la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística). Ibagué: Universidad del Tolima, 2010.

[9] Zalamea, Fernando, *Los gráficos existenciales peirceanos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2010.

[10] Zeman, J. Jay, *The Graphical Logic of C.S. Peirce*. Chicago: University of Chicago, 1964.

Los autores:

Nombre Completo	Identificación N°
ZAMBRANO SÁNCHEZ JEFFERSON FERNANDO	1110534481

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar X

No Autorizar ☐ **Motivo**: **Si no autoriza la publicación explicar el motivo.**

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado **X**

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "*…Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*". El**

artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo:	**UN SISTEMA ALTERNATIVO PARA LOS GRÁFICOS ALFA DE PEIRCE**
Trabajo de grado presentado para optar al título de:	**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el día 26 del mes de junio del año 2019.

Nombre Completo	Firma	Identificación N°.
JEFFERSO FERNANDO ZAMBRANO SANCHEZ		1110534481

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.