Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP

Carlos Roberto Torrente
Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais
Governador Valadares — MG, Brasil
mg03@obmep.org.br
0000-0002-6173-8338

Frederico da Silva Reis
Universidade Federal de Ouro Preto
Belo Horizonte — MG, Brasil
frederico.reis@ufop.edu.br
0000-0001-6087-6483

2238-0345

10.37001/ripem.v13i2.3384

Recebido • 15/02/2023
Aprovado • 20/04/2023
Publicado • 01/05/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo apresenta uma pesquisa que objetivou investigar a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração característicos do Pensamento Matemático Avançado (PMA), na resolução de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada a partir da análise das resoluções da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP, feitas por 5 alunos do Ensino Médio, medalhistas de ouro da Região dos Vales, localizados no interior de Minas Gerais. A análise evidenciou a mobilização dos seguintes processos característicos do PMA: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização e generalização. As conclusões da pesquisa apontam para a potencialização do desenvolvimento do PMA a partir da resolução de questões da OBMEP, especialmente, pela possibilidade de mobilização dos processos de modelação, sintetização e generalização em atividades matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar.

Palavras-chave*:* Pensamento Matemático Avançado. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Educação Matemática.

The mobilization of Advanced Mathematical Thinking processes in solving OBMEP questions

Abstract: This article presents research that aimed to investigate the mobilization of mental processes of representation and abstraction characteristic of Advanced Mathematical Thinking (AMT), in solving questions of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP). The research, qualitative in nature, was carried out based on the analysis of the resolutions of the test of 2nd stage of Level 3 of the 2021 edition of OBMEP, made by 5 high school students, gold medalists from the Valleys Region, located in the interior of Minas Gerais. The analysis evidenced the mobilization of the following mental processes characteristic of AMT: symbolic representation, change of representations and translation between them, visualization, modeling, synthesizing and generalization. The conclusions of the research point to the potential development of AMT from the resolution of OBMEP questions, especially by the possibility of mobilization of modeling, synthesizing and generalization processes in non-routine mathematical activities in everyday school routine.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking. Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad. Mathematics Education.

La movilización de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado en la resolución de las preguntas del OBMEP

Resumen: Este artículo presenta una investigación que tuvo como objetivo investigar la movilización de procesos mentales de representación y abstracción característicos del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), en la resolución de preguntas de la Olimpíada Brasileña de Matemática para Escuelas Públicas (OBMEP). La investigación, de naturaleza cualitativa, se realizó a partir del análisis de las resoluciones de la prueba de 2ª fase del Nivel 3 de la edición 2021 de la OBMEP, realizadas por 5 estudiantes de enseñanza media, medallistas de oro de la Región de los Valles, localizada en el interior de Minas Gerais. El análisis evidenció la movilización de los siguientes procesos mentales característicos de la PMA: representación simbólica, cambio de representaciones y traducción entre ellas, visualización, modelización, sintetización y generalización. Las conclusiones de la investigación apuntan al desarrollo potencial del PME mediante la resolución de las cuestiones del OBMEP, especialmente por la posibilidad de movilizar los procesos de modelización, sintetización y generalización en actividades matemáticas no rutinarias de la rutina escolar.

Palabras clave: Pensamiento Matemático Avanzado. Olimpiada Matemática de las Escuelas Públicas Brasileñas. Educación Matemática.

1 Introdução

A Matemática elementar é definida por Tall (1995, p. 61) como aquela que se inicia com as percepções e ações em objetos no mundo externo. Esses objetos são descritos e analisados conduzindo à classificação, contagem e diversas operações que correspondem a diferentes desenvolvimentos do processo matemático. Já Backendorf (2020, p. 29) afirma que, na Matemática elementar que corresponde à Matemática básica e envolve a Aritmética, a Geometria e a Álgebra, a descrição é construída a partir da experiência com os objetos.

No contexto do ensino, então, cabe questionar se a descrição e a análise de objetos são processos que se desenvolvem à medida em que se trabalha com uma Matemática mais avançada do ponto de vista dos conteúdos envolvidos.

A partir dessa perspectiva, Tall (1995) considera dois desenvolvimentos diferentes em relação à construção de estruturas de conhecimento no que tange a uma transição cognitiva do chamado Pensamento Matemático Elementar (PME) para o chamado Pensamento Matemático Avançado (PMA), partindo da percepção para a ação. Uma visão semelhante é defendida por Tall (2002) ao postular que muitas das atividades que ocorrem no ciclo completo de atividade do PMA também ocorrem na resolução de problemas da Matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é o fator que distingue o PMA do PME (Henriques, 2010, p. 16).

Já para Dreyfus (2002), existe uma relação entre o PME e o PMA exigido em processos mentais aplicados em conceitos formais da Matemática. Segundo Dreyfus (2002, p. 26), "não há distinção nítida entre muitos dos processos básicos e avançados do pensamento matemático, mas a Matemática avançada é mais centrada nas abstrações de definição e dedução".

A partir dessas relações, para analisarmos indícios do desenvolvimento das formas do pensamento matemático, especialmente, a forma avançada, precisamos compreender como os processos mentais são mobilizados no seu desenvolvimento (Dreyfus, 2002).

No presente artigo[1], pois, investigamos a mobilização de processos mentais característicos do PMA a partir de resoluções de questões da Olimpíada Brasileira de

[1] Este artigo compõe a dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, organizada em formato *multipaper*, escrita pelo primeiro autor e orientada pelo segundo autor.

Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), como delinearemos a seguir.

2 Sobre o Pensamento Matemático Avançado

O Pensamento Matemático Avançado (PMA) foi inicialmente apresentado e descrito na década de 1980, no decorrer do evento *The International Group for the Psychology of Mathmatics Education*, no qual objetivou-se a produção de uma obra com foco no PMA e, como consequência, foi criado o grupo chamado *Advanced Mathematical Thinking Group* (Almeida & Igliori, 2013).

Os pesquisadores Dreyfus (2002) e Tall (2002) são unânimes em afirmar que o PMA permeia a aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior.

De um lado, Dreyfus (2002) caracteriza o PMA por meio de uma série de processos mentais que ele classifica e caracteriza como processos de representação e de abstração, como detalharemos no próximo tópico.

Por outro lado, Tall (2002) afirma que o PMA envolve um ciclo de atividades a considerar desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova. O PMA envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para construir novas ideias que conduzem ao desenvolvimento e ampliação de um sistema crescente de teoremas estabelecidos (Tall, 1995, p. 63).

Cabe ressaltar que, segundo Tall (1995, p. 65), "o pensar em Matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas". Para ele, somos criativos, mas é bem depois do pensamento elementar que nos ocorre a abstração das coisas que aprendemos, ou seja, é nesse estágio que é exigido a abstração das propriedades de conceitos matemáticos. Baseando-nos na definição de Tall (1995), quando isso ocorre, o sujeito (aluno) é capaz de manipular as suas próprias definições conceituais produzidas, de forma abstrata, para desenvolver as relações lógicas dos conceitos que foram estudados anteriormente.

Já para Gray, Pinto, Pitta e Tall (1999), o termo PMA tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Os pesquisadores acrescentam, ainda, que esse termo também se aplica ao pensar dos alunos a quem lhes é apresentado definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção de um conceito (Henriques, 2010, p. 16).

3 Sobre os processos do Pensamento Matemático Avançado

Assim como não existe uma uniformidade na concepção e caracterização do PMA, também é possível verificarmos que seus pesquisadores apresentam uma diversidade de processos cuja interação está fortemente presente na construção do PMA.

No presente artigo, apresentaremos as ideias de Dreyfus (2002), para quem o PMA consiste na interação entre vários processos mentais, destacadamente, os processos de representação e de abstração. Sobre tais processos, Gereti e Savioli (2015) afirmam que

> os principais processos destacados por Dreyfus (2002) são os processos de representação e de abstração. Por meio de nossos estudos, entendemos que os processos de representação e de abstração são os mais globais, sendo constituídos por outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar,

> induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros. (Gereti & Savioli, 2015, p. 209)

Importante ressaltar que, para Dreyfus (2002), tais processos mentais podem ser encontrados tanto no PME quanto no PMA, indistinção assim retratada por Gereti e Savioli (2015):

> Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado e do Pensamento Matemático Elementar. Há tópicos da Matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados. O que distingue esses dois tipos de pensamentos é a complexidade como são tratados e gerenciados tais processos presentes em cada um deles. (Gereti & Savioli, 2015, p. 208)

Ainda segundo Dreyfus (2002), o desenvolvimento do PMA ocorre de modo gradual, a partir de interações que um sujeito realiza com atividades matemáticas, partindo de um PME para formas de pensamento cada vez mais complexas. Nesse sentido, os processos mentais que ocorrem na mente de um indivíduo são decorrentes de uma sequência de atividades, interagindo entre si e promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático. Dessa forma, o pesquisador afirma que os processos de representação e de abstração possibilitam ir de um tipo de pensamento para outro, por meio de certo "gerenciamento" dessa complexidade.

Entretanto, Dreyfus (2002) dá um destaque especial para o processo de abstração, apontando-o como essencial para o desenvolvimento do PMA e afirma que, se um sujeito desenvolve a habilidade de, conscientemente, fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático e, assim, os processos de generalizar e sintetizar são desenvolvidos de forma simultânea. Para o pesquisador, a generalização é a derivação ou indução a partir de indicações, a fim de identificar pontos em comum e, desse modo, expandir domínios de validade, e a sintetização implica em combinar ou compor partes, de maneira que constituam um todo.

Para uma caracterização dos diversos processos de representação e de abstração, apresentamos o quadro a seguir, no qual Gereti e Savioli (2015) descrevem os processos do PMA, a partir de suas interpretações de Dreyfus (2002):

Quadro 1: Descrição dos Processos do PMA a partir de Dreyfus (2002)

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito / objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito / objeto matemático representado.
Representação Mental	A representação de um conceito / objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito / objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de Representações e Tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito / objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado / propriedade matemático(a) para

	outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto / processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura / teoria matemática que abrange suas características.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos / conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Fonte: Gereti e Savioli (2015, p. 211)

Ainda cabe destacar que, de acordo com Tall (2002), muitos dos processos do PMA já são encontrados em um nível mais elementar, entretanto, com algumas diferenças em nível de abstração formal. Assim, a importância de se identificar os processos do pensamento matemático ganha fôlego, não somente na caraterização desse pensamento em elementar ou avançado mas, principalmente, na transição entre os tipos de pensamento matemático.

4 Sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Abordaremos, de forma breve, um pouco de história e atualidades sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP[2]) uma vez que, na pesquisa aqui retratada, utilizaremos questões da OBMEP como fonte para nossa coleta de dados.

A OBMEP foi lançada oficialmente no dia 19 de maio de 2005, em Brasília – DF, sendo que sua 1ª edição contou a participação de mais de 10 milhões de alunos, colocando o Brasil como recordista mundial em número de participantes em competições científicas de Matemática e alçando a OBMEP à condição de um dos maiores eventos do gênero no mundo, superando em número de inscrições, por exemplo, a Olimpíada de Matemática realizada nos Estados Unidos da América que reunia, à época, cerca de 6 milhões de alunos a cada ano.

De 2005 até 2016, a OBMEP era direcionada especificamente às escolas públicas de todo o país. A partir de 2017, as escolas privadas passaram a ser convidadas a participar deste evento e, com isso, atualmente, a OBMEP é um projeto dirigido aos alunos das escolas públicas municipais, estaduais, federais e privadas.

A OBMEP é organizada pelo atual Ministério de Ciências, Tecnologia e Inovação (MCTI), em parceria com o Ministério de Educação e Cultura (MEC) e com o apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica da OBMEP que tem como objetivos: Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

[2] Uma abordagem mais completa pode ser encontrada em Torrente e Reis (2023).

As provas da OBMEP são realizadas em 3 níveis: Nível 1 (alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental), Nível 2 (alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Nível 3 (alunos do Ensino Médio). As provas dos Níveis 1, 2 e 3 são constituídas de 2 fases. Disputam a 1ª fase (prova com 20 questões fechadas) todos os alunos inscritos pelas escolas públicas e privadas e classificam-se para a 2ª fase (prova com 6 questões abertas), aproximadamente, 5% dos alunos inscritos pela escola em cada nível. Cabe a cada escola selecionar os alunos com melhor desempenho nas provas da 1ª fase que participarão da 2ª fase. Ao final, os alunos com os melhores desempenhos na 2ª fase são premiados com medalhas de ouro, prata ou bronze, de acordo com o quadro abaixo e, na condição de medalhistas da OBMEP, recebem Bolsas de Iniciação Científica Júnior do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq):

Quadro 2: Distribuição de Medalhas da OBMEP

Tipo de Escolas	Medalhas de Ouro	Medalhas de Prata	Medalhas de Bronze
Escolas Públicas	500	1500	4500
Escolas Privadas	75	225	675

Fonte: Site da OBMEP[3]

Também como consta no site da OBMEP, sua 16ª edição, realizada em 2021, teve 53.375 escolas inscritas e contou com a participação de 17.774.936 alunos de todo o Brasil. Particularmente, em Minas Gerais inscreveram-se 5.009 escolas e 1.796.147 alunos. Particularmente, a Região MG03 da OBMEP, conhecida como Região dos Vales, formada pelos Vales do Aço, Rio Doce, Mucuri e Jequitinhonha, localizados no interior do estado de Minas Gerais, contou com a participação de 888 escolas e 281.574 alunos, dos quais 15 alunos foram premiados com a medalha de ouro (3 no Nível 1, 7 no Nível 2 e 5 no Nível 3), além de 34 alunos premiados com a medalha de prata e 121 alunos premiados com a medalha de bronze.

5 Apresentando a pesquisa em seu contexto

Nossa pesquisa teve como objetivo central investigar a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração característicos do PMA, na resolução de questões da OBMEP.

A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada a partir da análise das resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP apresentadas pelos 5 alunos do Ensino Médio medalhistas de ouro da Região MG03 da OBMEP, como detalhamos anteriormente.

Para tanto, na condição de Coordenador Regional da OBMEP na Região MG03 desde 2005 (no caso, o primeiro autor), entramos em contato com a Direção Acadêmica da OBMEP (IMPA / SBM) que, prontamente, permitiu nosso acesso às provas resolvidas pelos alunos medalhistas de ouro de nossa região de coordenação, sob a condição de manutenção do sigilo em relação à identificação de tais alunos por nomes, escolas ou localidades. Assim, neste artigo, identificaremos os 5 alunos medalhistas de ouro simplesmente por A1, A2, A3, A4 e A5, sem nenhum tipo de distinção entre as notas obtidas por eles, nem mesmo sua identificação por gênero ou ano cursado no Ensino Médio.

Para descrição e análise, que faremos a seguir, selecionamos as 4 últimas questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP que, lembramos, foi composta por 6 questões abertas. A partir, então, de resoluções apresentadas pelos 5 alunos medalhistas de ouro

[3] Disponível em http://www.obmep.org.br; acesso em 19 nov. 2022.

aos diversos itens de tais questões, buscaremos identificar indícios de mobilização de processos de representação e de abstração, característicos do desenvolvimento do PMA.

6 Descrevendo e analisando a resolução de questões da OBMEP

A prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP deve ser realizada em 3 horas e 30 minutos, tempo considerado suficiente para que os alunos resolvam as 6 questões abertas, permitindo que eles não só apresentem uma resolução concisa, mas que também justifiquem suas escolhas e estratégias de resolução, especialmente, em questões que demandam tais justificativas.

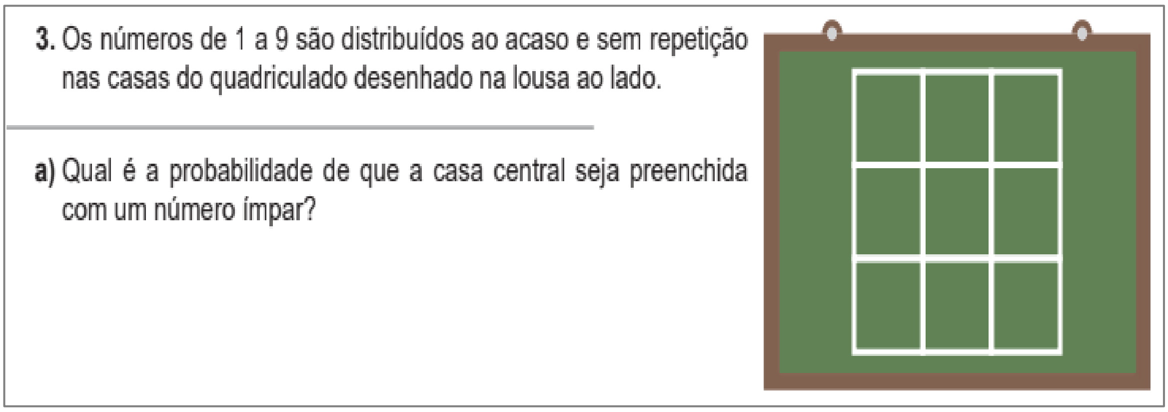
Destacamos que, dentre as competências e habilidades previstas na matriz da OBMEP, destaca-se o incentivo ao desenvolvimento de habilidades matemáticas como o pensamento lógico e a criatividade. A partir dessa premissa, então, acreditamos que a maioria das questões da prova exigem resoluções que podem levar os alunos a mobilizarem processos do PMA.

Dentro dessa perspectiva, por meio da descrição dos diversos processos de representação e de abstração feita por Gereti e Savioli (2015) a partir de suas interpretações de Dreyfus (2002), apresentamos as resoluções apresentadas por 2 alunos, escolhidos dentre os 5 medalhistas de ouro, para as 4 últimas questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP, buscando identificar, justificadamente, indícios de processos mobilizados em cada um dos itens componentes das questões selecionadas.

Cabe observar que nossa escolha pelas 4 últimas questões se deu pelo fato de que, tradicionalmente, as 2 primeiras questões são consideradas mais simples do ponto de vista da resolução pelos alunos ainda que, certamente, também demandem a mobilização de processos mentais para a sua resolução.

A Questão 3 contemplou conteúdos de probabilidade, como apresentamos a seguir:

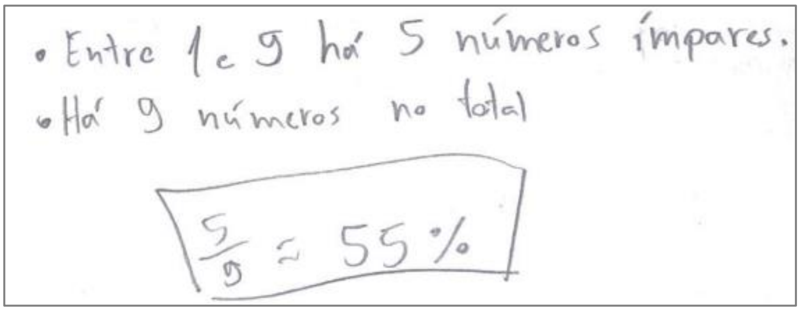
Figura 1: Enunciado da Questão 3 e do item 3.a


3. Os números de 1 a 9 são distribuídos ao acaso e sem repetição nas casas do quadriculado desenhado na lousa ao lado.

a) Qual é a probabilidade de que a casa central seja preenchida com um número ímpar?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 2: Registro escrito da resolução da Questão 3.a pelo aluno A1


• Entre 1 e 9 há 5 números ímpares.
• Há 9 números no total

$\frac{5}{9} \simeq 55\%$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 3: Registro escrito da resolução da Questão 3.a pelo aluno A4

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

$$\text{casos favoráveis} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = 5 \text{ casos favoráveis}$$

$$\text{casos possíveis} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = 9 \text{ casos possíveis}$$

$$\text{Probabilidade} = \frac{5}{9}$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

A resolução do aluno A1 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando transforma a representação fracionária da probabilidade para a representação percentual. Já a resolução do aluno A4 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza notações e símbolos característicos da teoria de conjuntos.

Figura 4: Enunciado do item 3.b

b) Qual é a probabilidade de que o quadriculado tenha uma coluna preenchida apenas com números pares?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 5: Registro escrito da resolução da Questão 3.b pelo aluno A3

Temos 4 números pares. A quantidade de colunas com apenas números
$3 \cdot A_4^3 = 72$. Note que a quantidade de arranjos foi multiplicada por 3, porque o quadriculado tem 3 colunas). E existem 6! de maneiras de se distribuir os outros números no quadriculado. E existem 9! de maneiras de se distribuir todos os números no quadriculado.

Assim a probabilidade de se distribuir esses números no quadriculado é, preenchendo uma coluna com apenas números pares é:

$$p = \frac{72 \cdot 6!}{9!} \rightarrow p = \frac{6!}{7!} \rightarrow \boxed{p = \frac{1}{7}}$$

A probabilidade encontrada é $\boxed{p = \frac{1}{7}}$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 6: Registro escrito da resolução da Questão 3.b pelo aluno A5

Casos favoráveis: • 1º coluna $= 4.3.2.6! \rightarrow 3.4.3.2.6!$
• 2ª e 3ª colunas são análogas a 1º $= 3.4!.6!$

Casos totais: 9!

Probabilidade: $\frac{C.F.}{C.T.} = \frac{3.4!\,\cancel{6!}}{9.8.7.\cancel{6!}} = \frac{\cancel{3}.4.3.2}{\cancel{9}.8.7} = \frac{1}{7}$

Fonte: Acervo da Pesquisa

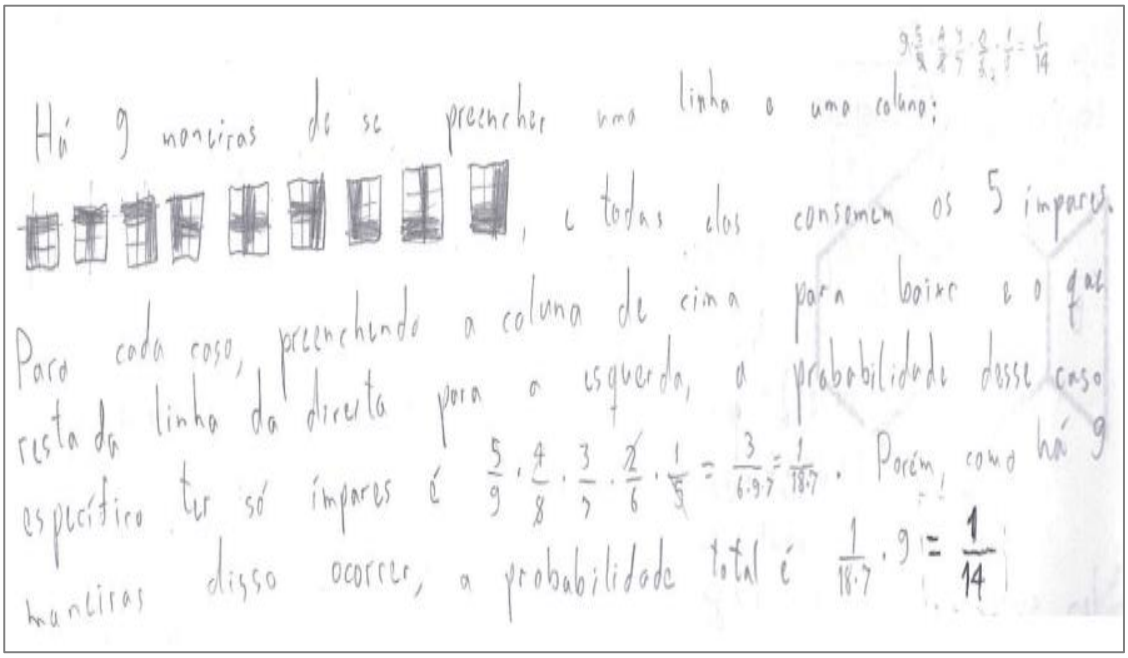
A resolução do aluno A3 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza notações simbólicas características de conceitos da análise combinatória e quando mobiliza uma composição desses conceitos para a resolução. Já a resolução do aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza diversas notações para o cálculo da probabilidade.

Figura 7: Enunciado do item 3.c

c) Qual é a probabilidade de que o quadriculado tenha uma linha e uma coluna preenchidas apenas com números ímpares?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 8: Registro escrito da resolução da Questão 3.c pelo aluno A2



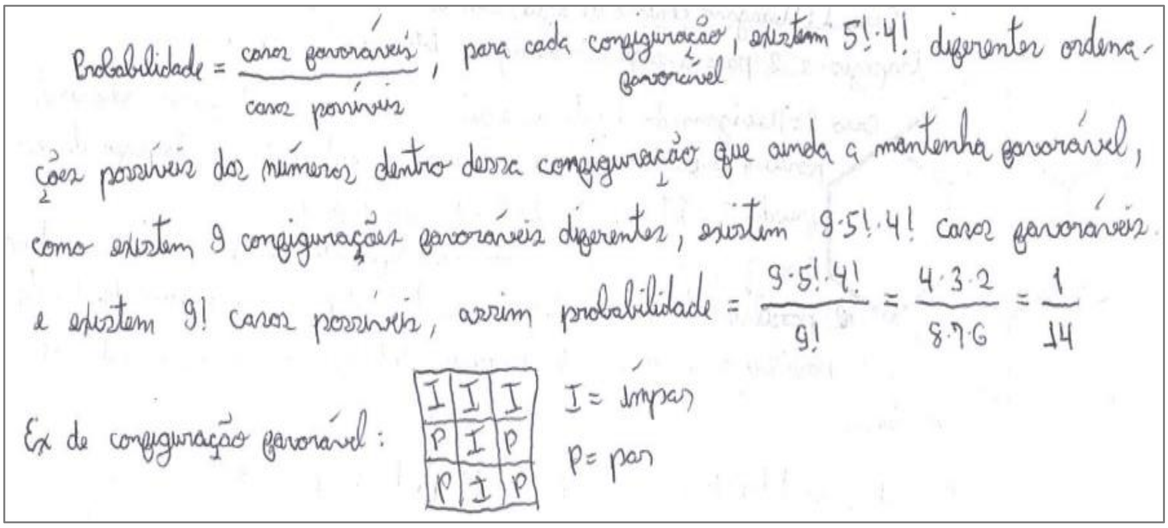
Há 9 maneiras de se preencher uma linha e uma coluna:

, e todas elas consomem os 5 ímpares.

Para cada caso, preenchendo a coluna de cima para baixo e o que resta da linha da direita para a esquerda, a probabilidade desse caso específico ter só ímpares é $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{6 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{1}{18 \cdot 7}$. Porém, como há 9 maneiras disso ocorrer, a probabilidade total é $\frac{1}{18 \cdot 7} \cdot 9 = \frac{1}{14}$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 9: Registro escrito da resolução da Questão 3.c pelo aluno A4



Probabilidade = $\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$, para cada configuração favorável, existem $5! \cdot 4!$ diferentes ordenações possíveis dos números dentro dessa configuração que ainda a mantenha favorável, como existem 9 configurações favoráveis diferentes, existem $9 \cdot 5! \cdot 4!$ casos favoráveis e existem $9!$ casos possíveis, assim probabilidade $= \frac{9 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{14}$

Ex de configuração favorável:

I	I	I
P	I	P
P	I	P

I = ímpar

P = par

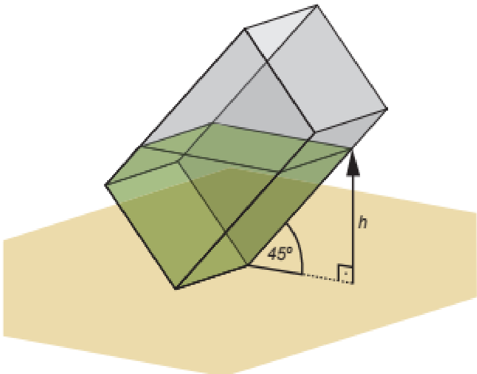
Fonte: Acervo da Pesquisa

A resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando utiliza representações gráficas para intuir e representar os casos prováveis. Já a resolução do aluno A4 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza uma combinação de cálculos e mobiliza conceitos combinatórios para a resolução.

A Questão 4 contemplou conteúdos de geometria espacial, como apresentamos a seguir:

Figura 10: Enunciado da Questão 4 e do item 4.a

4. Uma lata medindo 20 cm × 10 cm × 10 cm, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura *h* em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.



a) Qual é o volume total da lata?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 11: Registro escrito da resolução da Questão 4.a pelo aluno A1

Basta multiplicar os lados:
$20 cm \cdot 10 cm \cdot 10 cm = 2000 cm^3 = 2$ Litros.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 12: Registro escrito da resolução da Questão 4.a pelo aluno A2

O volume total é comprimento $\times$ altura $\times$ largura
$= 10 \times 20 \times 10 = 2000 cm^3$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

A resolução do aluno A1 evidencia, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização*, especialmente, quando faz uma conversão entre medidas de diferentes sistemas e quando inter-relaciona um cálculo operacional para a resolução. Já a resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando representa por extenso a fórmula para o cálculo do volume.

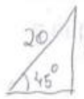
Figura 13: Enunciado do item 4.b

b) Explique por que a altura máxima que o líquido vai atingir é $10\sqrt{2}$ cm e calcule o volume de líquido na lata quando essa altura é atingida.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 14: Registro escrito da resolução da Questão 4.b pelo aluno A3

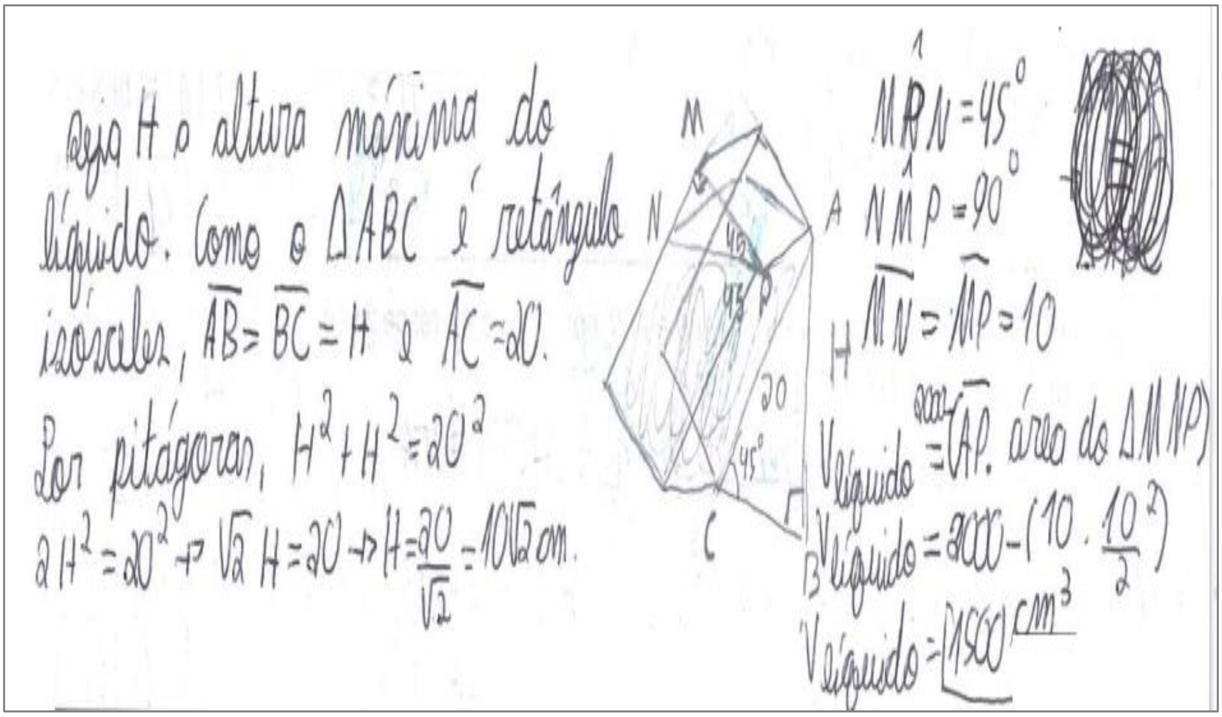
Como pode-se ver na figura, é formado um triângulo retângulo com um ângulo de 45°, assim a hipotenusa deste triângulo é a distância entre o fundo da lata até a superfície do líquido (distância medida sobre a face da lata). A altura máxima que o líquido pode assumir, é quando essa hipotenusa é igual ao lado maior da lata. Assim temos:



$\frac{h}{20} = \text{sen } 45° \rightarrow \frac{h}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{h = 10\sqrt{2}}$. Quando isso ocorre, a parte vazia da lata ganha a forma de um prisma de base triangular e altura igual a 10. A base triangular é um triângulo isosceles retangulo com lados medindo 10, 10 e $10\sqrt{2}$. Logo o volume da parte vazia é $V_v = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2} \Rightarrow V_v = 500 cm^3$.
Então o volume do líquido nessa situação é $V - V_v \Rightarrow 2000 - 500 = 1500 cm^3$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

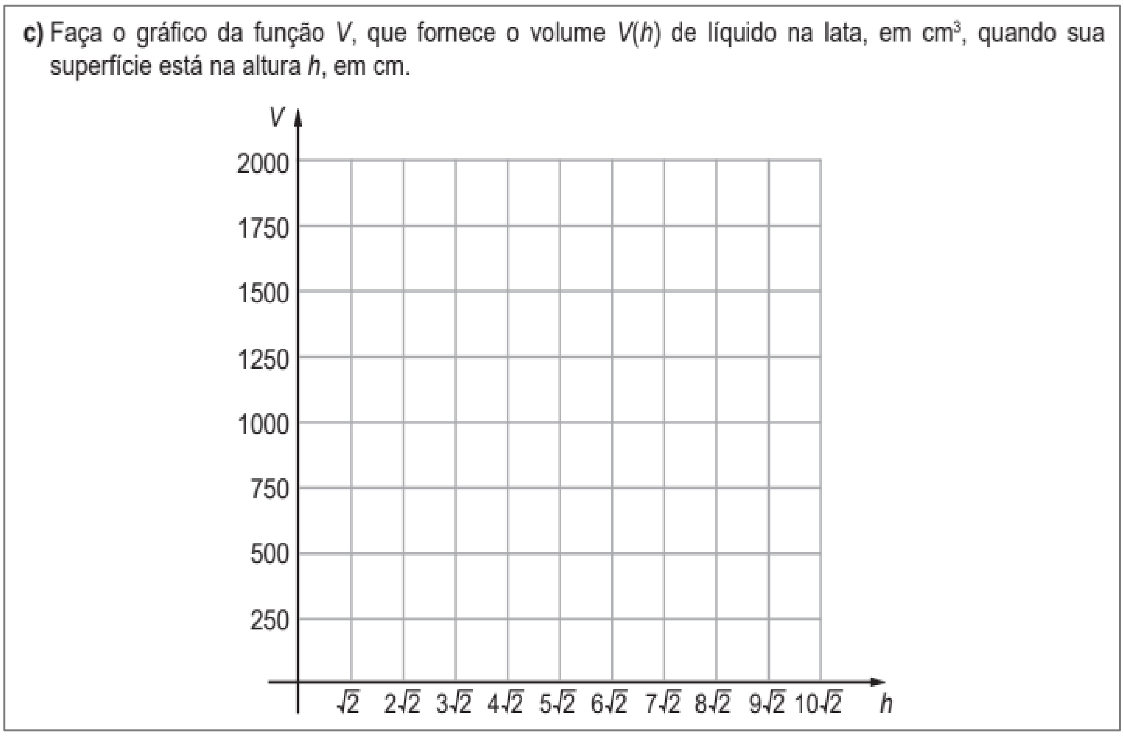
Figura 15: Registro escrito da resolução da Questão 4.b pelo aluno A5



Fonte: Acervo da Pesquisa

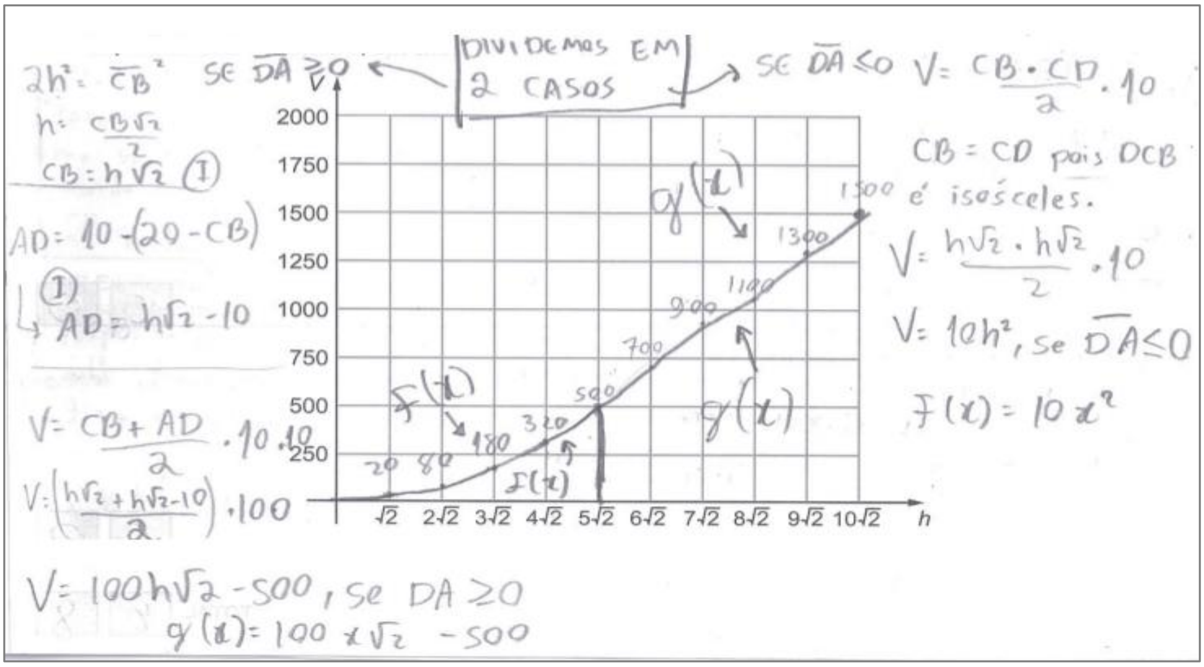
A resolução do aluno A3 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza representações algébricas para o cálculo do volume e quando inter-relaciona um cálculo trigonométrico para a resolução. Já a resolução do aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza notações e resultados características da geometria plana.

Figura 16: Enunciado do item 4.c



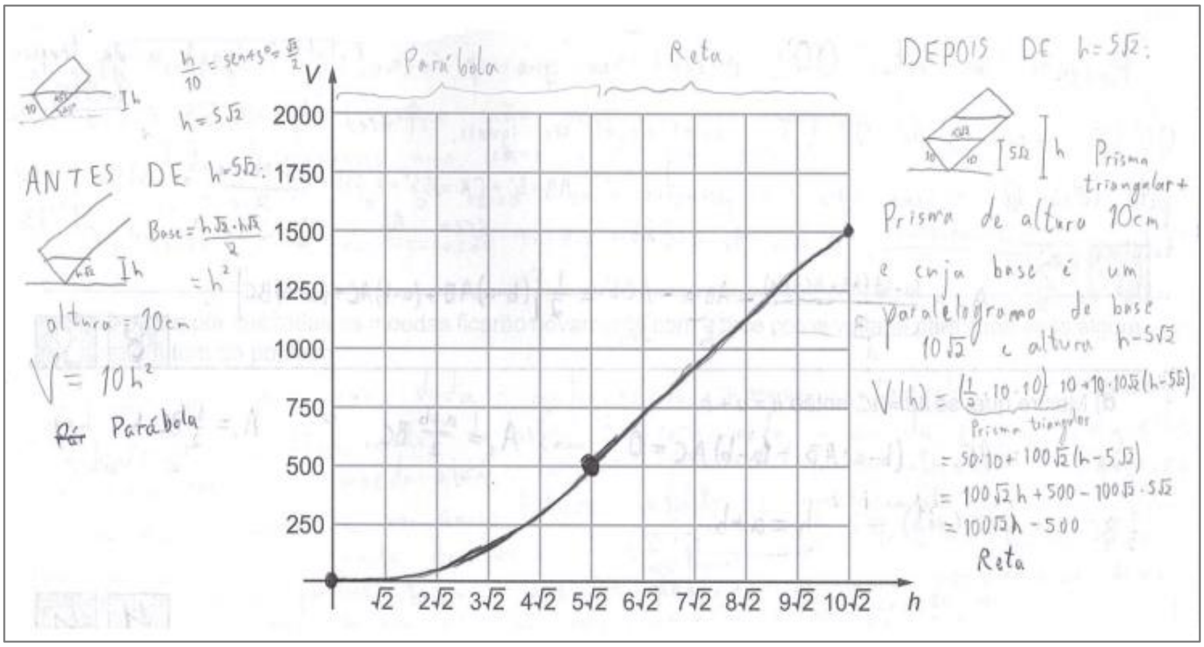
Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 17: Registro escrito da resolução da Questão 4.c pelo aluno A1



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 18: Registro escrito da resolução da Questão 4.c pelo aluno A2



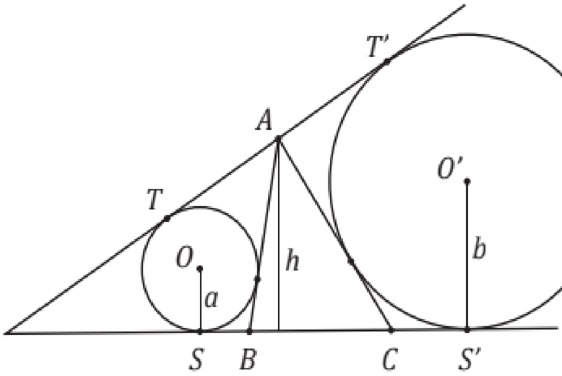
Fonte: Acervo da Pesquisa

As resoluções dos alunos A1 e A2 evidenciam, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas, e modelação*, especialmente, quando representam graficamente o volume em função da altura e quando modelam as expressões algébricas para as sentenças que definem tal função. Adicionalmente, a resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *sintetização*, especialmente, quando inter-relaciona as expressões algébricas para as sentenças que definem a função modelada com os conceitos geométricos de parábola e reta característicos tanto da álgebra, se identificados como gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º grau, como também da geometria analítica, se formalizados como lugares geométricos.

A Questão 5 contemplou conteúdos de geometria plana, como apresentamos a seguir:

Figura 19: Enunciado da Questão 5 e do item 5.a

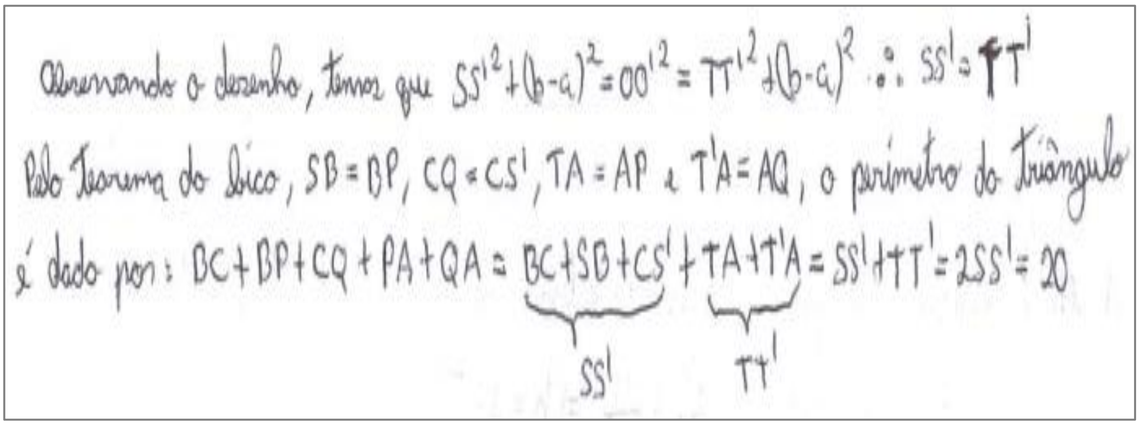
5. Na figura, as circunferências de raios a e b, centradas em O e O', são tangentes aos lados do ângulo em S e T e em S' e T', respectivamente. Elas também tangenciam os lados AB e AC de um triângulo ABC, em que A pertence a TT' e BC está contido em SS'. Esse triângulo ABC tem altura h relativa à base BC.



a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando $SS' = 10$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 20: Registro escrito da resolução da Questão 5.a pelo aluno A4

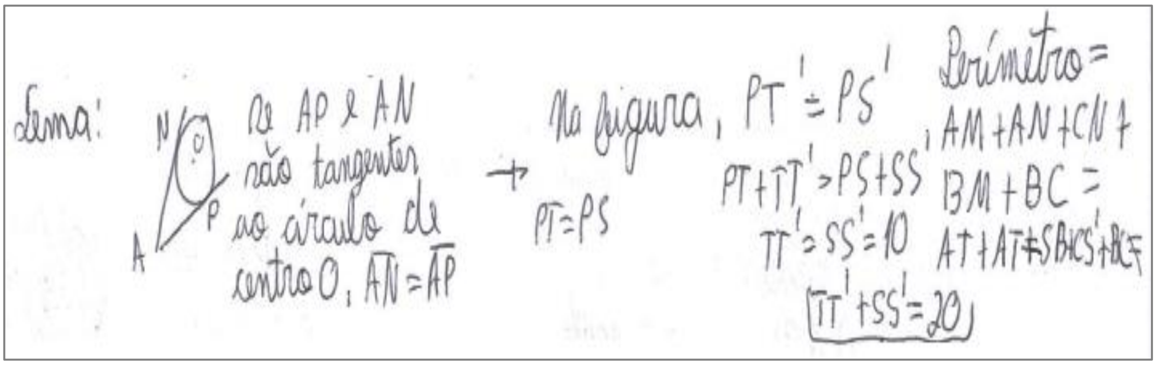


Observando o desenho, temos que $SS'^2+(b-a)^2=OO'^2=TT'^2+(b-a)^2 \therefore SS'=TT'$

Pelo Teorema do Bico, $SB = BP$, $CQ = CS'$, $TA = AP$ e $T'A = AQ$, o perímetro do triângulo é dado por: $BC+BP+CQ+PA+QA = \underbrace{BC+SB+CS'}_{SS'}+\underbrace{TA+T'A}_{TT'} = SS'+TT' = 2SS' = 20$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 21: Registro escrito da resolução da Questão 5.a pelo aluno A5



Lema: Se AP e AN são tangentes ao círculo de centro O, $\overline{AN}=\overline{AP}$ → Na figura, $PT' = PS'$, $PT=PS$

$PT+TT' = PS+SS'$

$TT' = SS' = 10$

$\boxed{TT'+SS' = 20}$

Perímetro = $AM+AN+CN+BM+BC = AT+AT'+SB+CS'+BC$

Fonte: Acervo da Pesquisa

As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utilizam notações e símbolos característicos da geometria plana e quando mobilizam um resultado específico para a resolução. Entretanto, há que se diferenciar que o aluno A4 utiliza esse resultado como um teorema já conhecido (teorema do "bico"), enquanto o aluno A5 enuncia um lema a ser utilizado na resolução que, obviamente, equivale ao teorema do "bico".

Figura 22: Enunciado do item 5.b

b) Denote as áreas dos triângulos *ABC*, *ABO* e *ACO'* por A_1, A_2 e A_3, respectivamente. Explique por que a área do hexágono *OSS'O'T'T* é dada por $A_1 + 2A_2 + 2A_3$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 23: Registro escrito da resolução da Questão 5.b pelo aluno A2

É fácil ver, pelo teorema do bico, que a área de ATO é igual à de AOD e que a de SOB é igual à de BOD. Assim, a área de OSBAT $= A(OSB) + A(OBD) + A(ODA) + A(ATO) = 2(A(OBD) + A(ODA)) = 2A_2$. Similarmente, $A(CS'O'T'A) = 2A_3$. Assim, a área total é $A_1 + 2A_2 + 2A_3$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 24: Registro escrito da resolução da Questão 5.b pelo aluno A5

Denote $\#XYZ$ como a área do ΔXYZ.

$A_2 = \frac{\overline{AB} . a}{2} \rightarrow A_2 = \frac{(\overline{AM} + \overline{MB}) a}{2} = \frac{a . AT}{2} + \frac{a . SB}{2} = \#OSB + \#OTA$

Analogamente, $A_3 = \#CS'O' + \#ATO'$. Área hexágono $= A_1 + A_2 + A_3 + \#OSB + \#OTA + \#CS'O' + \#ATO'$
$= A_1 + 2A_2 + 2A_3$

Fonte: Acervo da Pesquisa

A resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza notações e símbolos característicos da geometria plana e quando mobiliza um resultado específico para a resolução, como um teorema já conhecido (teorema do "bico"), além da noção de equivalência de áreas. Já o aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando utiliza um símbolo "próprio" para denotar área e quando introduz um novo ponto (ponto M) na resolução, além daqueles apresentados no enunciado.

Figura 25: Enunciado do item 5.c

c) Mostre que a área do triângulo ABC é $A_1 = \frac{1}{2}[(b-a)\cdot AB + (a-b)\cdot AC + (a+b)\cdot BC]$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 26: Registro escrito da resolução da Questão 5.c pelo aluno A4

Área OSS'OTT' $= S_1$

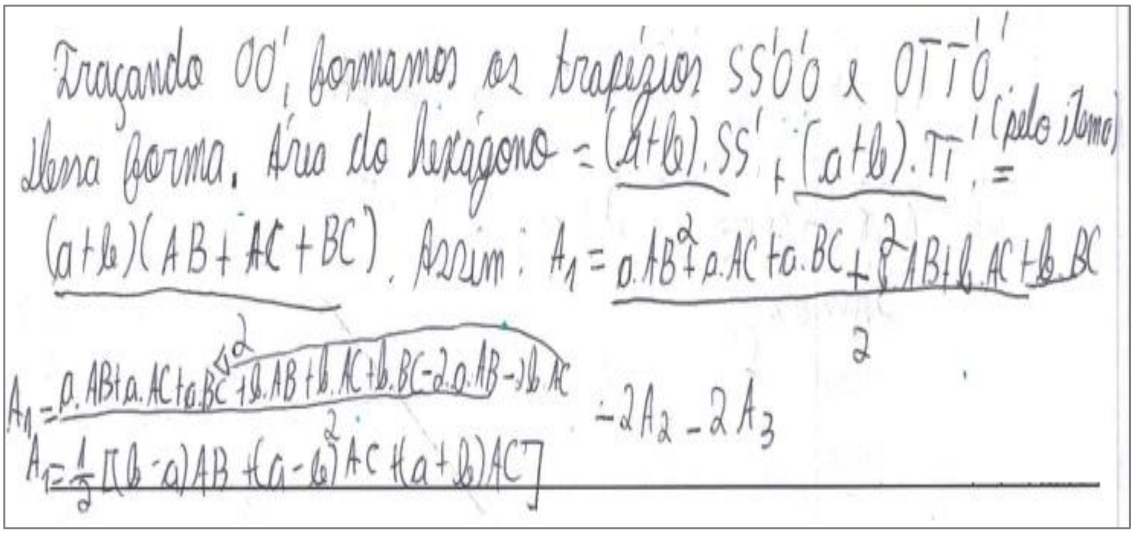
Pela fórmula demonstrada no item B: temos que: $A_1 = S_1 - 2A_2 - 2A_3$. Podemos demonstrar que:

(*) $S_1 = SS' \cdot a \cdot 2 + \frac{SS'(b-a)}{2} \cdot 2 = SS'(a+b)$. Também temos que $A_2 = \frac{AB \cdot a}{2}$ e $A_3 = \frac{AC \cdot b}{2}$, pelo resultado do item a, temos que: $2SS' = AB + AC + BC \Rightarrow SS' = \frac{AB+AC+BC}{2}$. Substituindo esse valor em (*) e posteriormente na fórmula de A_1, temos: $A_1 = \frac{AB+AC+BC}{2}(a+b) - 2\cdot\frac{AB \cdot a}{2} - 2\cdot\frac{AC \cdot b}{2}$

$$= \frac{AB}{2}(a+b) - AB \cdot a + \frac{AC(a+b)}{2} - AC \cdot b + \frac{BC}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left[(b-a)AB + (a-b)AC + (a+b)BC\right]$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 27: Registro escrito da resolução da Questão 5.c pelo aluno A5



Traçando OO', formamos os trapézios SS'O'O e OTT'O'. Desta forma, Área do hexágono $= \frac{(a+b).SS'}{2} + \frac{(a+b).TT'}{2}$ (pelo item) $= \frac{(a+b)(AB+AC+BC)}{2}$. Assim: $A_1 = \frac{a.AB + a.AC + a.BC + b.AB + b.AC + b.BC}{2}$

$A_1 = \frac{a.AB + a.AC + a.BC + b.AB + b.AC + b.BC - 2a.AB - 2b.AC}{2} - 2A_2 - 2A_3$

$A_1 = \frac{1}{2}[(b-a)AB + (a-b)AC + (a+b)AC]$

Fonte: Acervo da Pesquisa

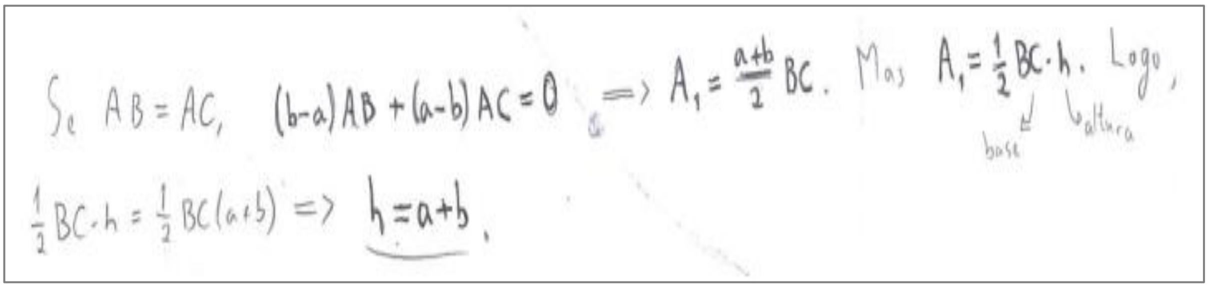
As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *generalização*, especialmente, quando utilizam resultados validados em itens anteriores para a demonstração solicitada. Nesse caso, os resultados obtidos e utilizados nos itens anteriores podem ser pensados como "casos particulares" que possuem características e propriedades comuns com aquelas exploradas na resolução, especialmente, a decomposição de áreas para a obtenção da área solicitada.

Figura 28: Enunciado do item 5.d

d) Mostre que, se $AB = AC$, então $h = a + b$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 29: Registro escrito da resolução da Questão 5.d pelo aluno A2



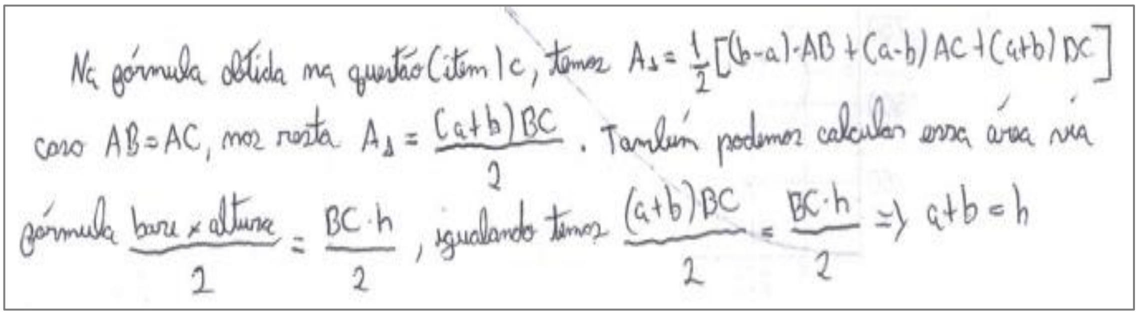
Se $AB = AC$, $(b-a)AB + (a-b)AC = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{a+b}{2}BC$. Mas $A_1 = \frac{1}{2}BC \cdot h$. Logo,

base altura

$\frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}BC(a+b) \Rightarrow h = a+b$.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 30: Registro escrito da resolução da Questão 5.d pelo aluno A4



Na fórmula obtida na questão (item) c, temos $A_1 = \frac{1}{2}[(b-a) \cdot AB + (a-b)AC + (a+b)BC]$ caso $AB = AC$, nos resta $A_1 = \frac{(a+b)BC}{2}$. Também podemos calcular essa área via fórmula $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2}$, igualando temos $\frac{(a+b)BC}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow a+b = h$

Fonte: Acervo da Pesquisa

As resoluções dos alunos A2 e A4 evidenciam, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando retiram as informações da figura do enunciado e as representações simbólicas que os demais itens demandaram para a resolução, como já esperado nesse tipo de questão em que todos os itens remetem à figura do enunciado. Adicionalmente, o aluno A4 utiliza o resultado obtido para a área do triângulo no item anterior, porém, particularizando-o de acordo com a condição imposta na hipótese levantada para a demonstração solicitada.

A Questão 6 contemplou conteúdos de análise combinatória, como apresentamos a seguir:

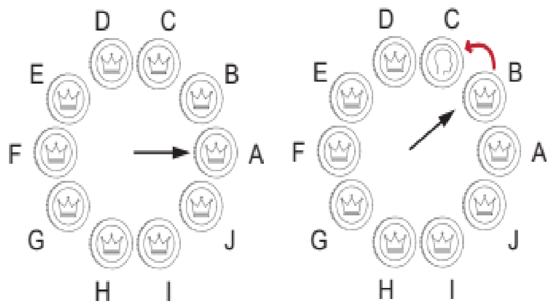
Figura 31: Enunciado da Questão 6 e do item 6.a

6. Em cada uma das dez posições marcadas com as letras de A a J na figura abaixo, é colocada uma moeda. Inicialmente, todas as dez moedas são colocadas com a face coroa voltada para cima e um ponteiro aponta para a posição A. Esse ponteiro começa a se movimentar no sentido anti-horário, saltando de uma posição para a outra mais próxima.

Após cada salto,

- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face cara para cima, nada acontece;
- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face coroa para cima, deve-se, então, virar a moeda seguinte.

Por exemplo, após o primeiro salto, o ponteiro aponta para a posição B (coroa) e a moeda na posição C é virada, ficando com a face cara para cima.



a) Como ficarão as moedas nas posições C e D logo após o segundo salto do ponteiro?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 32: Registro escrito da resolução da Questão 6.a pelo aluno A2

Após o segundo salto, a seta cairá em C, que é cara. Logo, C e D permanecerão sendo cara e coroa, respectivamente.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 33: Registro escrito da resolução da Questão 6.a pelo aluno A3

No segundo salto o ponteiro irá apontar para a moeda C, como ela é cara, nada aconteceu. Assim a moeda C continua sendo cara e a moeda D continua sendo coroa.

Fonte: Acervo da Pesquisa

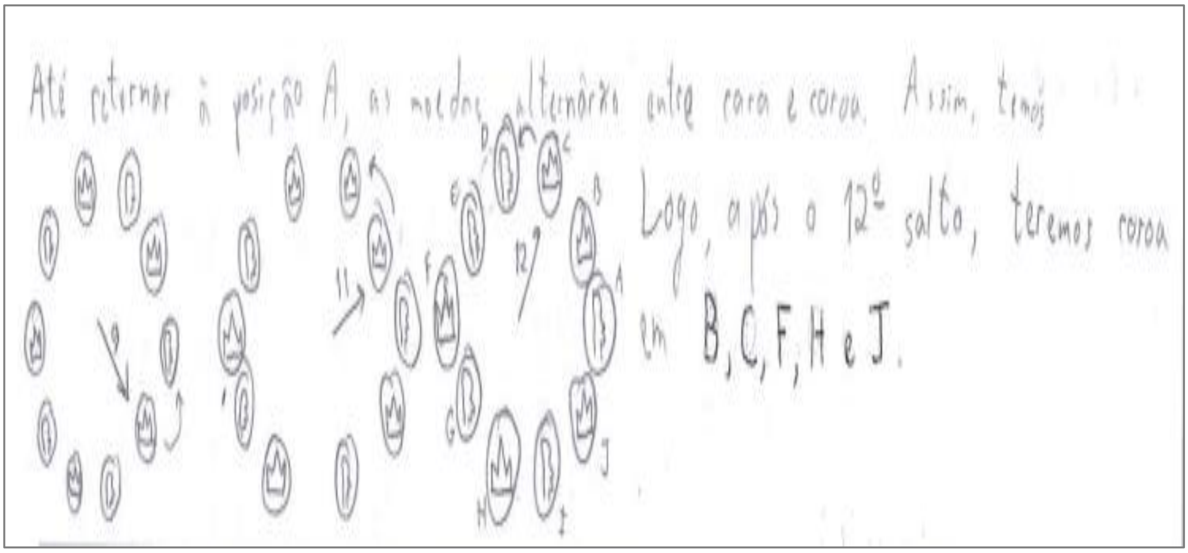
As resoluções dos alunos A2 e A3 evidenciam, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando demonstram compreensão das informações fornecidas no enunciado que os leva a intuírem as posições das moedas, como solicitado. Observamos, ainda, que ambos optaram por uma resolução mais discursiva, destacadamente, sem a utilização de notações características de análise combinatória e probabilidade (tais como Ca e Co ou C e K).

Figura 34: Enunciado do item 6.b

b) Em quais posições as moedas ficarão com as faces coroa para cima após o décimo segundo salto?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 35: Registro escrito da resolução da Questão 6.b pelo aluno A2



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 36: Registro escrito da resolução da Questão 6.b pelo aluno A3

Como as moedas estão ficando com as faces coroa pra cima apenas a cada duas casas, até o décimo salto, as casas com a face coroa pra cima serão: B, D, F, H e J. No décimo primeiro salto o ponteiro para em B que é coroa, e a moeda C vira e torna-se coroa. No décimo segundo salto o ponteiro para em C que é coroa, e vira D que se torna cara. Assim após o décimo segundo salto as moedas que ficarão com as faces coroa voltadas pra cima são: B, C, F, H e J.

Fonte: Acervo da Pesquisa

As resoluções dos alunos A2 e A3 evidenciam, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando utilizam a intuição para a previsão das posições das moedas nos saltos anteriores ao 12º salto do ponteiro. Observamos, ainda, que o aluno A2 utiliza representações gráficas para representar tais saltos, enquanto o aluno A3 opta por continuar apresentando uma resolução mais discursiva.

Figura 37: Enunciado do item 6.c

c) Explique por que nunca todas as moedas ficarão com a face cara voltada para cima.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 38: Registro escrito da resolução da Questão 6.c pelo aluno A4

Como a cada salto, somente mudamos a face de uma única moeda, para que todas fiquem
no máximo
Ca = Cara, Co = Coroa
com a face cara para cima, em um momento teríamos 9 faces cara e 1 face coroa, porém, não se vira nenhuma moeda ao ponteiro saltar para uma face cara, e ao saltar para a única face coroa presente na mesa, esse irá virar a moeda logo a sua frente, fazendo com que essa se torne coroa. Logo, nunca teremos as 10 moedas com a face cara voltada para cima.
↳ Assim, é impossível passar da configuração 9Ca, 1Co para 10 Ca

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 39: Registro escrito da resolução da Questão 6.c pelo aluno A5

Suponha, por absurdo, que todas as moedas ficassem com cara para cima. Na posição inicial, há moedas com coroa para cima. Então, haverá uma última moeda X a ser virada (para cara). Mas para que isso aconteça, a moeda anterior a X precisa apresentar coroa, absurdo, uma vez que X é a última moeda coroa.

Fonte: Acervo da Pesquisa

As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *generalização e sintetização*, especialmente, quando utilizam estratégias de recorrência e indução para construir a explicação solicitada e quando combinam argumentos lógicos num encadeamento que culmina com tal construção. Destacadamente, o aluno A5 utiliza a demonstração por absurdo (ou por contradição) como forma de validar sua argumentação explicativa.

Figura 40: Enunciado do item 6.d

d) Explique por que todas as moedas ficarão novamente com a face coroa voltada para cima após algum salto futuro do ponteiro.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 41: Registro escrito da resolução da Questão 6.d pelo aluno A2

Perceba que, para uma dada configuração, sabemos exatamente a posterior e a anterior – se a moeda antes da seta for cara, nada mudou da última para essa, e se fosse coroa, a moeda atual teria sido invertida). Portanto, toda configuração tem um único passado e um único futuro, infinito e perfeitamente conhecido. Porém, como há um número finito de posições ($\underset{(\text{seta})}{10} \cdot \underset{(\text{moedas})}{2^{10}}$), após $10 \cdot 2^{10} + 1$ saltos, pelo princípio da casa dos pombos, teremos que ter passado por uma configuração duas vezes, ou seja, estamos em um ciclo. Como esse é um ciclo, a configuração inicial é atingível.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Excepcionalmente, para o item 6.d, apresentamos apenas a resolução do aluno A2, único a resolver (corretamente) tal item. Tal resolução evidencia, destacadamente, indícios de *generalização e sintetização*, especialmente, quando utiliza estratégias de recorrência, partindo de um caso particular para validar o caso enunciado e quando mobiliza uma combinação de cálculos e princípios combinatórios para sustentar a argumentação delineada. Destacadamente, o aluno A2 utiliza o princípio da casa dos pombos de forma fundamental na conclusão da explicação solicitada.

7 Considerações Finais

Na perspectiva dos pesquisadores Dreyfus (2002) e Tall (2002) de que o PMA permeia os processos de ensino e de aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que se manifestam com maior intensidade nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior, nossa pesquisa objetivou investigar a mobilização de processos mentais característicos do PMA a partir de resoluções de questões da OBMEP, particularmente, de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição realizada em 2021.

Nesse contexto, adotamos como referencial teórico-bibliográfico que serviu como "contraste" em nossa análise das resoluções de questões, a caracterização do PMA feita por Dreyfus (2002), por meio de uma série de processos mentais classificados como processos de representação e de abstração, assim concebidos como processos globais e descritos sob a forma de outros processos a eles associados por Gereti e Savioli (2015).

À guisa de conclusão, observarmos que, apesar de não termos feito destaques particulares, entendemos que em todas as resoluções aqui apresentadas, assim como nas resoluções de questões de Matemática, de modo geral, podemos evidenciar indícios de *representação mental, mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando os alunos necessitam ler o enunciado de cada questão, relacioná-lo a um conjunto de representações concretas que possuem sobre os conceitos envolvidos, retirar as informações do enunciado e traduzi-las em uma linguagem matemática, para que possam resolver os itens propostos.

Outrossim, no conjunto das 27 resoluções dos 14 itens das 4 questões selecionadas e, aqui, descritas e analisadas, foram evidenciados, de forma destacada, indícios de: *representação simbólica* (em 11 resoluções), *mudança de representações e tradução entre elas* (em 7 resoluções), *visualização* (em 5 resoluções), *modelação* (em 2 resoluções), *sintetização* (em 11 resoluções) *e generalização* (em 5 resoluções).

Há que se considerar que os processos de *representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, e visualização* são mobilizados nas resoluções de questões de Matemática, de modo geral, porquanto parece-nos natural que as questões da OBMEP propiciem tal mobilização, ainda que algumas representações e traduções descritas mereçam destaque por sua elaboração mais avançada.

Entretanto, entendemos que os processos de *modelação, sintetização e generalização* que foram mobilizados em resoluções de determinados itens revelam um alto potencial das questões da OBMEP para o desenvolvimento do PMA. Inicialmente, por permitirem aos alunos a interação com uma sequência de atividades matemáticas, partindo de um pensamento matemático mais elementar para formas de pensamento mais complexas promovendo, assim, o desenvolvimento do pensamento matemático. Sequencialmente, por algumas questões possibilitarem o desafio da abstração, processo essencial para o desenvolvimento do PMA, contribuindo para a habilidade dos alunos fazerem abstrações a partir de situações matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar. Finalmente, por outras questões, ainda que poucas, demandarem a mobilização dos processos de sintetização e generalização de forma simultânea, contribuindo para que os alunos alcancem um nível avançado de pensamento matemático.

Por fim, ressaltamos que o incentivo ao desenvolvimento de habilidades matemáticas como o pensamento lógico e a criatividade, uma das premissas da OBMEP, deve ser considerado por todos os atores dos cenários educacional e acadêmico da Educação Matemática e, nesse contexto, deve ganhar relevância cada vez maior a investigação sobre a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração para o desenvolvimento do PMA.

Referências

Almeida, M. V. & Igliori, S. B. C. (2013). Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(3), 718-734.

Backendorf, V. R. (2020) *O processo da abstração reflexionante na construção do conceito de Integral Dupla com a utilização de Matemática Dinâmica*. 127f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (2a ed., pp. 25-41). Dordrecht, NE: Kluwer Academic Publishers.

Gereti, L. C. V. & Savioli, A. M. P. D. (2015). Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. *Bolema*, *29*(51), 206-222.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 111-133.

Henriques, A. C. C. B. (2010). O *Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação*. 462f. Tese (Doutorado em

Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa, PT.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: L. Meira & D. Carraher (Eds.). *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 61-75). Recife, PE: Universidade Federal de Pernambuco.

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (2a ed., pp. 3-21). Dordrecht, NE: Kluwer Academic Publishers.

Torrente, C. R. & Reis, F. S. (2023). Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no Brasil. *Revemop*, 5, 1-22.