

## Análise da compreensão de professores de Matemática sobre as características visuais de figuras geométricas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais

**Fernanda Andréa Fernandes Silva**

Instituto Federal da Paraíba

Cajazeiras, PB — Brasil

✉ [fernanda.silva@ifpb.edu.br](mailto:fernanda.silva@ifpb.edu.br)

 0000-0002-2347-2372

**Francisco Aureliano Vidal**

Instituto Federal da Paraíba

Cajazeiras, PB — Brasil

✉ [francisco.vidal@ifpb.edu.br](mailto:francisco.vidal@ifpb.edu.br)

 0000-0002-1825-0097

**Emilson Afonso de Carvalho Filho**

Instituto Federal da Paraíba

Cajazeiras, PB — Brasil

✉ [carvalho.afonso@academico.ifpb.edu.br](mailto:carvalho.afonso@academico.ifpb.edu.br)

 0000-0003-0700-6280



2238-0345 

10.37001/ripem.v13i2.3728 

Recebido • 02/06/2023

Aprovado • 22/07/2023

Publicado • 30/08/2023

Editor • Gilberto Januario 

**Resumo:** Este estudo teve como objetivo analisar a compreensão de professores de Matemática quanto a influência das características visuais das figuras geométricas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais. Para isso, alicerçou-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e nos Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros de representações semióticas, figura geométrica e frações, dos números racionais. De abordagem qualitativa, foi realizada uma entrevista semiestruturada com docentes de Matemática da rede de ensino estadual e municipal de Cajazeiras (PB), utilizando um instrumento de pesquisa envolvendo conversões entre os registros de representações semiótica, figuras geométricas e frações, dos números racionais. Foram observados erros nas conversões envolvendo os graus 2, 4, 5 e 6 de não congruência semântica. Conclui-se que houve desprezo de características visuais importantes das figuras geométricas para ser estabelecida a relação parte-todo e escrita da fração, devido a influência do procedimento da dupla contagem.

**Palavras-chave:** Números Racionais. Graus de Não Congruência Semântica. Relação Parte-Todo. Figura Geométrica.

### Analysis of Mathematics teachers' understanding of the visual characteristics of geometric figures to establish the part-whole relationship of rational numbers

**Abstract:** This study aimed to analyze the understanding of Mathematics teachers regarding the influence of the visual characteristics of geometric figures in establishing the part-whole relationship of rational numbers. To this end, it was based on the Theory of Registers of Semiotic Representations and the Degrees of semantic non-congruence in conversions between registers of semiotic representations, geometric figures and fractions, of rational numbers. With a qualitative approach, a semi-structured interview was carried out with mathematics teachers from the state and municipal education network of Cajazeiras (PB), using a research instrument involving conversions between records of semiotic representations, geometric figures and fractions, of rational numbers. Errors were observed in conversions involving degrees 2, 4, 5

and 6 of semantic non-congruence. It is concluded that there was disregard for important visual characteristics of geometric figures to establish the part-whole relationship and writing of the fraction, due to the influence of the double counting procedure.

**Keywords:** Rational Numbers. Degrees of Semantic Non-Congruence. Part-Whole Relationship. Geometric Figure.

## **Análisis de la comprensión de los profesores de Matemáticas sobre las características visuales de las figuras geométricas para establecer la relación parte-todo de los números racionales**

**Resumen:** Este estudio tuvo como objetivo analizar la comprensión de los profesores de Matemáticas sobre la influencia de las características visuales de las figuras geométricas en el establecimiento de la relación parte-todo de los números racionales. Para ello se basó en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas y los Grados de incongruencia semántica en conversiones entre registros de representaciones semióticas, figuras geométricas y fracciones, de números racionales. Con enfoque cualitativo, se realizó una entrevista semiestructurada a profesores de Matemáticas de la red educativa estatal y municipal de Cajazeiras (PB), utilizando un instrumento de investigación que involucra conversiones entre registros de representaciones semióticas, figuras geométricas y fracciones, de números racionales. Se observaron errores en conversiones que involucraban los grados 2, 4, 5 y 6 de no congruencia semántica. Se concluye que se despreciaron características visuales importantes de las figuras geométricas para establecer la relación parte-todo y escritura de la fracción, debido a la influencia del procedimiento de doble cómputo.

**Palabras clave:** Números Racionales. Grados de no Congruencia Semántica. Relación Parte-Todo. Figura Geométrica.

### **1 Introdução**

A relação parte-todo dos números racionais é trabalhada na escola a partir do 4º ano dos anos iniciais, prioritariamente, por meio de figuras geométricas planas explícitas ou implicitamente particionadas em partes ou subfiguras de áreas congruentes. Desta forma, conceitos como, quanto maior o número de partes menor a área de cada parte, o esgotamento do todo em partes congruentes e a relação entre as partes de uma figura geométrica podem ser trabalhadas a partir desta relação.

O estabelecimento da relação parte-todo na figura geométrica é condição essencial para encontrar a fração, com significado parte-todo dos números racionais. Pois, a figura geométrica ao ser particionada em 'n' partes de mesma área, cada parte será equivalente a fração '1/n', e a representação fracionária correspondente a quantidade de partes pintadas/tomadas, 'm', desta figura em relação ao seu total de partes 'n', será 'm/n', sendo  $n \neq 0$ .

Entretanto, estabelecer a relação parte-todo na figura geométrica plana e escrever a fração que representa o número racional representado na figura nem sempre é evidente. Visto que, de acordo com Silva (2018), diferentes tipos de figuras geométricas bidimensionais podem transparecer em maior ou menor grau de visualização a relação parte-todo a ser estabelecida, e conseqüentemente, a fração correspondente. Pois, nesse caso há de se relacionar representações semióticas de sistemas semióticos distintos, o da figura geométrica e o da fração, estando, portanto, sujeita ao fenômeno da não congruência semântica, descrito por Duval (2011).

Para o referido autor, a não congruência semântica diz respeito ao quanto transparecem

ou não as unidades de sentido<sup>1</sup> das representações semióticas que devem entrar em correspondência para que a transformação entre os sistemas semióticos seja realizada, influenciando no custo cognitivo a ser empregado em transformações deste tipo, denominadas de conversões.

Desta forma, Silva (2018) propôs seis graus de não congruência semântica nas transformações entre as figuras geométricas e as frações que representam números racionais, indicando que estes devem ser trabalhados em sala de aula para que os sujeitos possam lidar não apenas com figuras geométricas que apresentam o particionamento completo em áreas congruentes, adequadas ao procedimento da dupla contagem<sup>2</sup>. Mas também com aquelas que necessitam serem utilizados tratamentos figurais, por não apresentarem um particionamento completo explícito e que levam os sujeitos a construir conceitos e ideias, tais como, a necessidade de se determinar uma unidade-parte de área para comparar a área das subfiguras na figura inicial, a congruência entre as áreas das subfiguras, a relação entre quanto maior o número de subfiguras, menor a área de cada uma delas, entre outros.

Entretanto, Oliveira (2021) ao analisar o livro didático dos 6º e 7º anos dos anos finais do Ensino Fundamental, verificou que as coleções pesquisadas apresentavam um índice superior a 80% de figuras geométricas totalmente particionadas, utilizadas em questões que necessitavam o estabelecimento da relação parte-todo e a transformação para frações, e que, portanto, se adequam ao procedimento da dupla contagem.

Além disso, Silva (2018) aponta para o uso indiscriminado do procedimento da dupla contagem entre os 381 sujeitos pesquisados que pertenciam ao 6º, 9º anos dos anos finais do Ensino Fundamental e 1º e 3º anos do Ensino Médio de escolas públicas do município de Maceió (AL). Ao solicitar a esses a escrita fracionária correspondente a parte pintada da figura geométrica dada, mesmo nos casos que requeriam tratamento figural para que as subfiguras do inteiro inicial tivessem áreas explicitamente congruentes, o procedimento da dupla contagem era utilizado sem que fosse adequado à situação da figura geométrica inicial. Portanto, levando a erros e ao uso do ‘procedimento pelo procedimento’.

Para a autora, esses resultados podem estar revelando a ausência do trabalho em sala de aula envolvendo grande parte das figuras geométricas do estudo, principalmente aquelas que necessitam de tratamento na figura geométrica inicial. Portanto, neste trabalho, buscou-se responder a seguinte pergunta de pesquisa: os professores de Matemática compreendem que existem distintos tipos de figuras geométricas que podem apresentar características diferentes para que seja visualizada a relação parte-todo dos números racionais e realizada a conversão para o Registro Simbólico Fracionário - RSF? E ainda, identificam todos os elementos figurais necessários para estabelecer esta relação e realizar a conversão para o RSF?

Por consequência, esta pesquisa teve como objetivo analisar a compreensão dos professores que lecionam Matemática quanto à influência das características visuais das figuras geométricas nas conversões entre o registro geométrico bidimensional — RGBim<sup>3</sup> e o RSF dos números racionais.

A presente produção é um recorte de um projeto de pesquisa desenvolvido no Programa

<sup>1</sup> Duval (2016) afirma que o conteúdo das representações semióticas é organizado em unidades de sentido que possuem diversos níveis de organização, como no caso de uma frase na língua natural. A frase é composta de palavras, que se organizam em sintagmas nominais e verbais.

<sup>2</sup> O procedimento da dupla contagem é aquele em que para ser escrita a fração a partir da relação parte-todo a ser estabelecida na figura geométrica, conta-se o número de partes ou subfiguras que foram pintadas para encontrar o numerador da fração e o número de partes ou subfiguras que foi dividida a figura geométrica para chegar ao denominador da fração.

<sup>3</sup> O Registro Geométrico Bidimensional — RGBim dos números racionais foi cunhado por Silva (2018) como sendo aquele que contém as figuras geométricas próprias para se trabalhar a relação parte-todo dos números racionais.

Institucional Voluntário de Iniciação Científica (PIVIC), ofertado pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus Cajazeiras. Sendo caracterizada como de abordagem qualitativa e quanto ao objetivo, de cunho exploratório. Inicialmente, houve um levantamento do perfil dos professores participantes por intermédio da aplicação de um questionário no Google Forms, e logo após, uma entrevista semiestruturada via Google Meet com 11 professores de Matemática das redes Municipal e Estadual de ensino da cidade de Cajazeiras (PB), a qual solicitou aos professores respostas para o instrumento de pesquisa retirado de Silva (2018). O instrumento era composto de 12 itens que solicitam a fração correspondente à parte pintada da figura geométrica, distribuídos em duas questões, a primeira contendo 10 (A-J) e a segunda apenas 2 (A-B) itens. Esses itens englobam, de dois em dois, os seis graus de não congruência semântica nas conversões do RGBim para o RSF, descritos por Silva (2018). Nesse estudo traremos a análise da entrevista semiestruturada.

## **2 Conversões entre o RGBIM e o RSF dos números racionais: graus de não congruência semântica**

O funcionamento cognitivo mobilizado durante a aprendizagem Matemática é distinto daquele das outras áreas do saber, pois todos os objetos matemáticos são abstratos e, portanto, pertencem ao mundo das ideias, não podendo ser sentidos, vistos ou tocados. Sendo assim, o acesso a esses objetos do conhecimento ocorre de forma indireta por meio dos seus Registros de Representações Semióticas (RRS), que podem ser a língua materna, uma figura geométrica, um gráfico, um símbolo numérico ou algébrico, dentre outros.

De acordo com Duval (2012), para que haja compreensão em Matemática é necessária a coordenação entre ao menos dois dos registros de representações de um objeto matemático. Por sua vez, a capacidade de transitar entre RRS está sujeita ao fenômeno da não congruência semântica que aparece principalmente nas transformações por conversão, pois, ‘Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão’ (Duval, 2012a, p. 100).

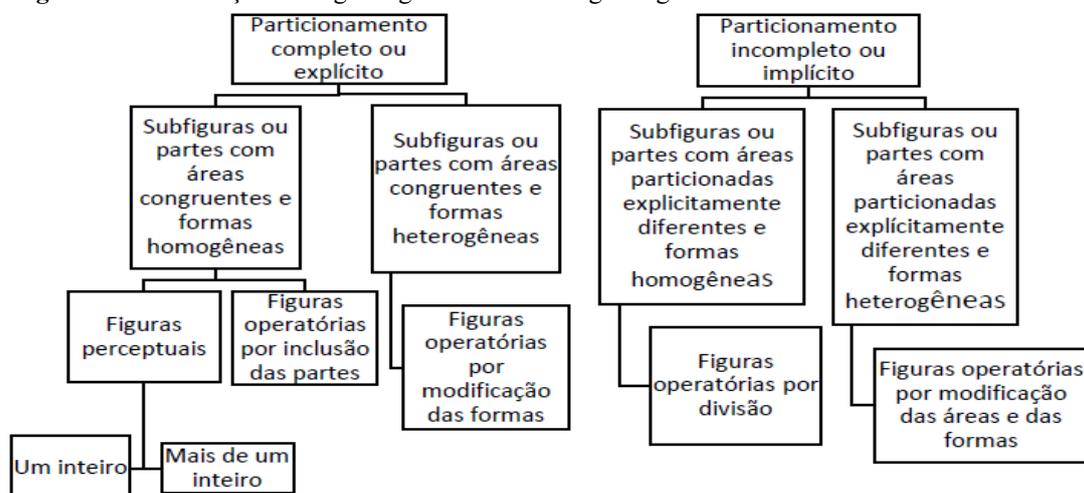
Desta forma, Silva (2018) ao analisar as conversões entre as figuras geométricas que são representações semióticas dos números racionais pertencentes ao denominado em seu estudo, Registro Geométrico Bidimensional (RGBim) e as frações que pertencem ao Registro Simbólico Fracionário (RSF) observou que dependendo das características visuais da figura geométrica, no registro de partida, a fração a ser escrita, no registro de chegada, poderá estar mais ou menos evidente.

Sendo assim, propôs uma classificação das figuras geométricas que formam o RGBim dos números racionais, conforme Figura 1, considerando os aspectos visuais destas, com base em Duval (2004), como também, os tipos de apreensões geométricas (Duval, 1994), necessárias para estabelecer a relação parte-todo e converter para o RSF. Sendo elas, apreensão perceptual das formas que permite reconhecer de imediato as formas da figura geométrica, como também de suas subfiguras e que conduz as demais apreensões; apreensão discursiva que permite relacionar as unidades figurais com as simbólicas do RSF, e a apreensão operatória que é aquela utilizada nas transformações figurais.

Silva (2018) observou que os tipos de figuras geométricas empregadas nas conversões entre os RRS estudados em sua pesquisa, apresentam variações em seus elementos figurais necessários para estabelecer a relação parte-todo e converter para o registro simbólico fracionário, como por exemplo, apresentar particionamento explícito ou implícito em áreas

congruentes. Além disso, as figuras geométricas com particionamento explícito podem apresentar subfiguras com mesmas ou distintas formas, que levam a uma maior ou menor visualização da congruência entre as áreas das subfiguras.

**Figura 1:** Classificação das figuras geométricas do registro geométrico bidimensional dos racionais



Fonte: Silva (2018, p.78)

Enquanto as figuras geométricas com particionamento implícito irão necessitar de um tratamento inicial para que as subfiguras apresentem áreas congruentes. O tratamento na figura geométrica poderá variar dependendo das características visuais das subfiguras e envolver a descoberta da unidade-parte<sup>4</sup> para posterior particionamento, além de movimentos de rotação e translação das figuras geométricas. Estas transformações, para Duval (2012) são denominadas de tratamentos, pois são realizados dentro de um mesmo registro.

Silva (2018) apontou que cada tipo de figura geométrica categorizada apresenta um grau distinto de não congruência semântica no estabelecimento da relação parte-todo e conversão para o RSF. Para analisar os graus de não congruência semântica na conversão do RGBim para o RSF, a pesquisadora levou em consideração, além dos tipos de figuras geométricas categorizadas em seu estudo, dois dos três critérios de não congruência semântica definidos por Duval (2009), quais sejam, a possibilidade ou não de uma correspondência semântica entre as unidades elementares figurais da figura geométrica e as unidades simbólicas da fração, e o critério da univocidade semântica terminal que trata-se de verificar se para cada unidade figural elementar corresponde a uma única unidade elementar simbólica.

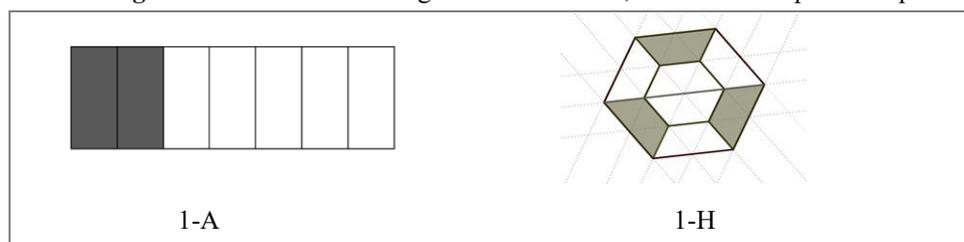
O terceiro critério definido por Duval (2009) não foi utilizado devido aos registros de partida (RGBim) e o de chegada (RSF) não possuem as mesmas dimensões para as suas unidades elementares de sentido, pois o registro de partida tem duas dimensões e o de chegada apenas uma.

Dessa forma, Silva (2018) definiu seis graus de não congruência semântica nas conversões do RGBim para o RSF dos números racionais. No Grau 1 de não congruência semântica estão as Figuras Perceptuais<sup>5</sup> que representam um inteiro, sendo correspondentes aos itens A e H da primeira questão do instrumento de pesquisa utilizado por Silva (Idem) e replicado na nossa pesquisa, conforme Figura 2.

<sup>4</sup> Termo cunhado por Silva (2018) para representar a subfigura que servirá de referência para o particionamento completo da figura geométrica inicial.

<sup>5</sup> As Figuras Perceptuais são aquelas que possuem o particionamento completo explícito em formas homogêneas e áreas das subfiguras congruentes

**Figura 2:** Grau 1 de não congruência semântica, itens A e H da primeira questão



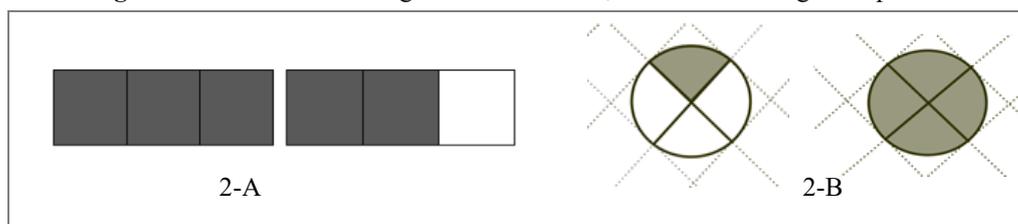
**Fonte:** Silva (2018, p. 137)

Nessas figuras para serem estabelecidas em cada uma delas, a relação parte-todo dos números racionais, é necessária a apreensão perceptual das formas geométricas para que sejam reconhecidas as áreas congruentes das subfiguras (unidades-partes) que formam cada todo, como também, aquelas que foram tomadas, representadas pelas partes pintadas.

Posteriormente, é necessário verificar o número de subfiguras que foi dividido o inteiro e que foi tomado do inteiro para, fazendo uso da apreensão discursiva, relacionar as unidades visuais com as unidades simbólicas do registro numérico fracionário e escrever a fração que corresponde ao número racional representado (Silva, 2018).

No Grau 2 de não congruência semântica estão as figuras perceptuais que representam mais de um inteiro, que no instrumento de pesquisa estão representadas na questão 2, itens A e B, conforme Figura 3.

**Figura 3:** Grau 2 de não congruência semântica, itens A e B da segunda questão



**Fonte:** Silva (2018, p. 146)

Esses tipos de figuras geométricas requerem uma apreensão perceptiva das formas geométricas e discursivas entre as unidades visuais dessas figuras e simbólicas do RSF, como no grau anterior, para escrever a fração requerida. Entretanto, para Silva (2018), a presença de mais de um inteiro torna a relação parte-todo menos ‘evidente’, pois a apreensão perceptual das formas sem uma apreensão discursiva entre a unidade figural ‘inteiro’ e a unidade simbólica ‘denominador’, pode levar a uma interpretação das subfiguras dos inteiros como tratando-se apenas de um único inteiro.

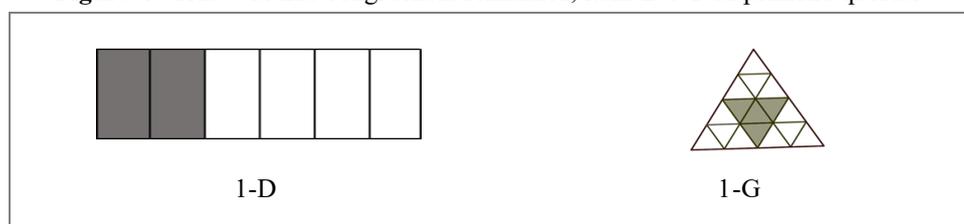
Uma estratégia que pode ser utilizada nas conversões envolvendo esse tipo de figuras geométricas é aquela que considera cada uma delas separadamente para estabelecer a relação parte-todo e escrever as respectivas frações, obtendo assim, duas frações ou um inteiro e uma fração. O uso dessa estratégia é totalmente adaptado ao procedimento da dupla contagem, apresentando, portanto, uma congruência semântica com esse procedimento Silva (Idem).

O Grau 3 de não congruência semântica comporta as figuras ‘operatórias por inclusão das partes’, sendo representadas no instrumento de pesquisa pelos itens D e G da primeira questão, conforme Figura 4.

As figuras geométricas deste Grau de não congruência semântica além de requererem as apreensões perceptivas das suas formas e discursiva, entre as unidades figurais e simbólicas, podem receber um tratamento figural resultando numa fração irredutível. Sendo assim,

favorecem o desenvolvimento do conceito de equivalência por meio da apreensão operatória, pois o tratamento de reconfiguração intermediária<sup>6</sup> levará a uma fração de magnitude relativa, ou seja, equivalente àquela apreendida perceptualmente na figura geométrica inicial. No entanto, essa figura geométrica ainda admite uma estratégia que é semanticamente congruente ao procedimento da dupla contagem, resultando numa fração de magnitude literal que pode ser tratada no registro numérico fracionário (Silva, 2018).

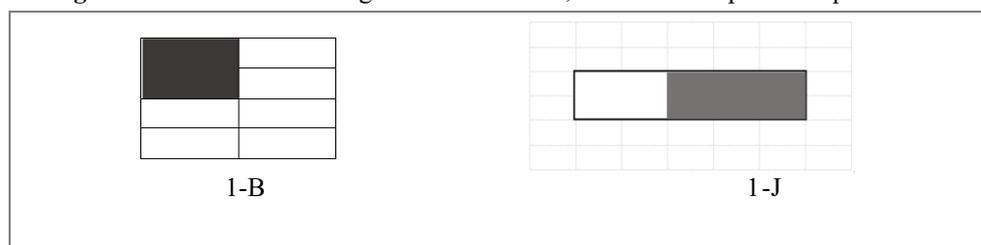
**Figura 4:** Grau 3 de não congruência semântica, itens D e G da primeira questão



**Fonte:** Silva (2018, p. 157)

No Grau 4 de não congruência semântica estão as figuras ‘operatórias por divisão’ representadas no instrumento de pesquisa pelos itens B e J da questão 1, conforme Figura 5.

**Figura 5:** Grau 4 de não congruência semântica, itens B e J da primeira questão



**Fonte:** Silva (2018, p. 172)

Nessas figuras geométricas apenas as apreensões, perceptual das suas formas e discursivas entre as unidades figurais e simbólicas, não levarão ao estabelecimento da relação parte-todo. É necessário que a figura geométrica receba um tratamento. Sendo assim, entra em curso obrigatoriamente a apreensão operatória de reconfiguração, mesmo que mentalmente, para dividir essa figura inicial em subfiguras de áreas explicitamente congruentes (Silva, 2018).

Esse tipo de figura geométrica não mantém uma congruência semântica com o procedimento da dupla contagem, pois as áreas das subfiguras iniciais não são congruentes. Entretanto, o tratamento a ser empregado nesse tipo de figura geométrica vai considerar o particionamento existente para estabelecer a unidade-parte a ser utilizada e finalizar o particionamento explícito, Silva (Idem).

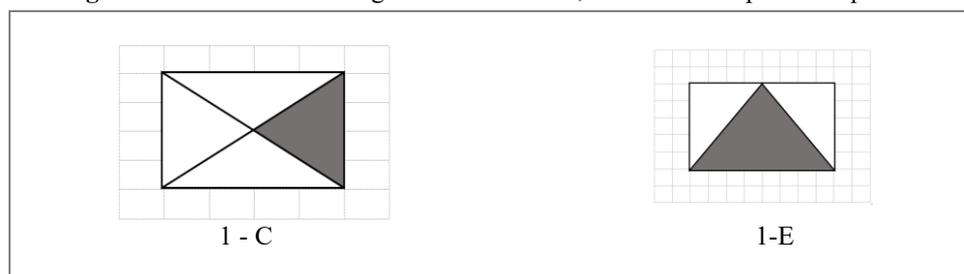
No Grau 5 de não congruência semântica estão as figuras ‘operatórias por modificação das formas’, as quais são representadas no nosso instrumento de pesquisa pelos itens C e E da primeira questão, conforme Figura 6.

Essas figuras possuem subfiguras com formas geométricas diferentes, dificultando a apreensão perceptiva da congruência entre as áreas das subfiguras que estão totalmente particionadas explicitamente. Sendo assim, é necessário que a figura geométrica inicial seja tratada para ser reconhecida a congruência entre as áreas das subfiguras. Portanto, se faz indispensável além da apreensão perceptiva das formas, a apreensão operatória e a discursiva que irá relacionar as unidades visuais e simbólicas entre os registros semióticos envolvidos

<sup>6</sup> O tratamento de reconfiguração intermediária, segundo Duval (2012) é aquele que (re)particiona a figura geométrica, acrescentando ou retirando traços das partes ou subfiguras.

(Silva, 2018).

**Figura 6:** Grau 5 de não congruência semântica, itens C e E da primeira questão

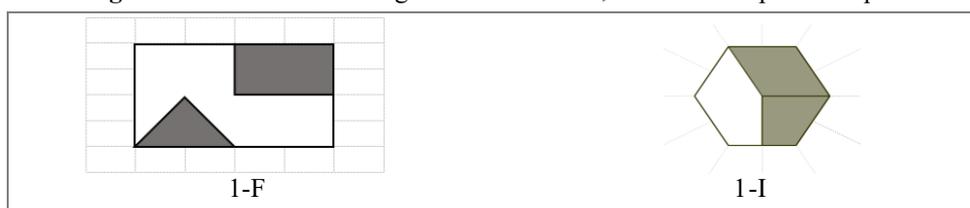


**Fonte:** Silva (2018, p. 185)

Entretanto, é importante salientar que apesar da opacidade inicial na visualização da congruência entre as áreas das subfiguras, o procedimento da dupla contagem é congruente semanticamente com a figura geométrica inicial. E isso quer dizer que a conversão pode ser realizada de forma correta sem que, de fato, a congruência entre as áreas das subfiguras tenha sido observada.

E finalmente, no Grau 6 de não congruência semântica estão as figuras operatórias por modificação das formas e das áreas, sendo representadas no nosso instrumento de pesquisa pelos itens F e I da primeira questão, conforme Figura 7.

**Figura 7:** Grau 6 de não congruência semântica, itens F e I da primeira questão



**Fonte:** Silva (2018, p. 196)

Nesse tipo de figura geométrica em que as subfiguras possuem explicitamente formas e áreas diferentes, a relação parte-todo a ser estabelecida é dificultada. Sendo necessário, obrigatoriamente entrar em curso, após o reconhecimento por meio da apreensão perceptual das formas e das áreas das subfiguras diferentes, a apreensão operatória.

A operação de reconfiguração intermediária da figura inicial levará a modificação das áreas e das formas geométricas da figura inicial implícita ou explicitamente. Esse tratamento da figura geométrica pode envolver operações de particionamento, translação e rotação, local ou global das subfiguras. E todas essas operações podem levar a figuras geométricas bem distintas da figura inicial, que podem manter apenas relação de semelhança com os contornos fechados dessa figura. Portanto, é o tipo de figura geométrica apontada por Silva (2018) como sendo de maior custo cognitivo para o estabelecimento da relação parte-todo.

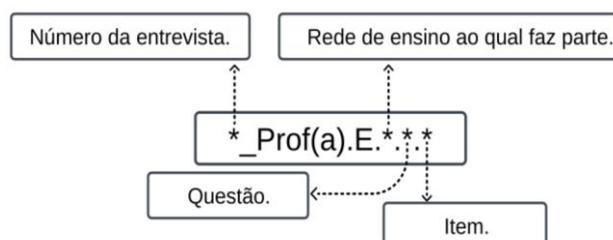
Por apresentarem áreas diferentes entre as subfiguras, esse tipo de figura não possui uma congruência semântica com o procedimento da dupla contagem, portanto, esse não é bem adaptado para esses tipos de figuras geométricas.

Com base nos seis graus de não congruência semântica na conversão entre o RGBim e o RSF dos números racionais, entrevistamos os nossos sujeitos da pesquisa, com o objetivo de analisar a compreensão desses quanto à influência das características visuais das figuras geométricas nas conversões entre o registro geométrico bidimensional — RGBim e o RSF dos números racionais.

### 3 Resultados e discussões

A fim de codificar as falas dos sujeitos da pesquisa na entrevista semiestruturada para os referenciar, desenvolvemos a seguinte estrutura, conforme Figura 8.

**Figura 8:** Codificação Falas dos Participantes da Pesquisa



**Fonte:** Acervo pesquisa

A partir da análise das respostas ao instrumento de pesquisa verificamos que das 132 respostas dadas aos itens, 113 (83%) foram corretas e 23 (17%) das respostas estavam erradas. Para os itens A e H da primeira questão que correspondem ao Grau 1 de não Congruência Semântica foram obtidas 100% das respostas corretas.

Nesse Grau, o item 1-A foi classificado pelos respondentes como sendo fácil, sem necessidade de transformação da figura geométrica inicial,

*Mais simples, porque você tem sete partes e, após essa contagem, você analisa quais são as partes escuras e você consegue fazer essa relação de duas partes pintadas para sete partes do todo (1\_Prof(a).E.E.1.A.).*

Assim, pode-se notar que há uma apreensão espontânea e imediata das formas geométricas e uma apreensão discursiva, entre as unidades figurais, ‘partes escuras ou pintadas’, ‘partes do todo’, e o procedimento da dupla contagem.

Pois, não é estabelecida de forma explícita, pelo professor 1\_Prof(a).E.E.1.A, a relação de congruência entre as áreas das subfiguras que constitui a figura geométrica inicial que representa o inteiro. Na pesquisa de Silva (2018) também encontramos fala dos alunos que fazem alusão ao procedimento da dupla contagem ao resolver o item 1-A.

Pesquisadora: “3\_ERL.12C” essa letra A que você fez, como foi que você pensou?  
Aluna: Eu contei as partes que tinha né. Pesquisadora: Sim. Aluna: Que é um inteiro, e peguei as que foram utilizadas, que foram duas (2), e coloquei embaixo o denominador sete (7). (Silva, 2018, p. 145).

O método da dupla contagem é totalmente adaptável às figuras geométricas que compõem o Grau 1 de não congruência semântica, visto que em cada figura as subfiguras possuem as mesmas formas e as suas áreas são congruentes,

*[...] na figura são sete partes iguais, e tem duas que estão pintadas. Então ele tem dois do sétimo né, tem duas partes do sétimo, ao todo. (3\_Prof(a).E.E.1.A.).*

Em paralelo, o item 1-H, devido à existência da malha triangular, a apreensão perceptual das formas das subfiguras pode considerar os trapézios e/ou triângulos da figura geométrica inicial. E isso acarreta em tratamentos no RGBim,

*[...] foi possível localizar outra resposta, devido os triângulos mais claros, que teriam vinte e quatro triângulos divididos e, teria nove desses triângulos para serem encontrados, ou seja, nove sobre vinte e quatro, que simplificando, chegaria em três oitavos (4\_Prof(a).E.E.1.H).*

Dessa forma, inferimos que os professores pesquisados apesar de estabelecerem corretamente a relação parte-todo e realizarem a conversão para o RSF nas figuras geométricas que correspondem ao Grau 1 de não congruência semântica, não verbalizam todas as unidades figurais necessárias para estabelecer esta relação, ao deixarem de enunciar que as áreas das subfiguras são congruentes, o que nos leva a compreender que podem estar recitando o procedimento da dupla contagem.

No Grau 2 de não Congruência Semântica, foram obtidas 14 respostas corretas e 12 erradas para os itens dessa categoria, se configurando como o Grau com maior número de respostas erradas, assim como ocorreu em Silva (2018). Obtivemos esse resultado por considerar duas respostas distintas dadas por dois professores para um mesmo item.

Nesse grau de não congruência semântica, há uma particularidade que é a presença de ao menos dois inteiros, o que leva a um nível maior de dificuldade no estabelecimento da relação parte-todo. Dessa forma, o ‘todo’ não corresponde ao total de subfiguras dos inteiros, mas de apenas um desses. Sendo agravado pela falta de familiaridade dos professores com esse tipo de figura geométrica, visto que estão detidos ao estabelecimento da relação parte-todo com apenas um inteiro.

Assim como em Silva (2018), alguns dos pesquisados, para diminuir a falta de transparência entre a quantidade total de inteiros e a fração a ser escrita, buscaram estabelecer uma fração para cada figura geométrica do item, como se fossem inteiros distintos. Outros, ao realizarem esse procedimento perceberam que a primeira fração equivale a um inteiro e transformaram as duas frações em um número misto.

A partir da análise, inferimos que os erros estão interligados à tentativa de unificação das figuras geométricas em um único todo e ao uso do procedimento da dupla contagem,

*Considerando uma única figura, temos cinco partes pintadas de seis, ou seja, cinco sextos (2\_Prof.(a) E.E.2.A.)*

Para o item 2-A. Além disso, nota-se que há uma dualidade de interpretação para as figuras,

*Fiquei em dúvida sobre que resposta você queria. Se encarasse como uma figura só, por exemplo, a letra “a” você tem cinco quadradinhos pintados de seis, ou seja, cinco sextos, mas como eles estão divididos, pode ser encarado como uma fração mista, você teria a uma parte completa, e na segunda parte você teria dois terços. Se a gente transformar a fração mista teria cinco terços, fazendo aquela multiplicação em que o denominador multiplica pela parte inteira, soma com o numerador: [...] pois a gente tem uma base com o denominador três, então como é cinco, você tem com esses três completos e iguais, e teria dois que estão passando. O numerador seria o cinco e o denominador seria três, ou seja, o todo, o numerador é maior que o denominador por ter duas partes passando da figura (1\_Prof(a).E.E.2.A).*

A solução dada pelo professor 1\_Prof(a).E.E.2.A, apresenta indícios que a apreensão perceptiva pode estar interferindo na compreensão do estabelecimento da relação parte-todo, pois mesmo tendo chegado a duas soluções diferentes ( $5/6$  e  $5/3$ ) para o mesmo item (2-A), o docente não percebe a incoerência nas respostas dadas e as aceita como sendo coexistentes por terem sido encontradas de duas maneiras diferentes.

Corroborando com essa análise, o professor 11\_Prof(a).E.E.2.A, encontrou o número misto ( $1 \frac{2}{3}$ ) equivalente aos inteiros representados no item 2-A e transformou em fração imprópria ( $\frac{5}{3}$ ). Entretanto, quando perguntado se reconhece a fração encontrada na figura geométrica inicial, afirma que

*Reconheço não. Se fosse pensar em um tablete de chocolate inteiro, seriam cinco sextos.”*  
(11\_Prof(a).E.E.2.A).

Este participante não reconheceu a fração imprópria encontrada inicialmente ( $\frac{5}{3}$ ) na figura geométrica. Portanto, inferimos que no Grau 2 de não congruência semântica, assim como em Silva (2018), a presença de mais de um inteiro entre as figuras geométricas trabalhadas nos itens, levou os professores pesquisados à dificuldade para estabelecer a relação parte-todo, podendo ser devido ao não reconhecimento da ‘unidade’, como também, a não congruência semântica entre as unidades figurais e as unidades simbólicas que representam o denominador da fração.

O Grau 3 de não Congruência Semântica, apresentou 22 (100%) de respostas corretas para ambos os itens dessa categoria. Esse Grau, juntamente com o primeiro não apresentaram respostas erradas. É importante destacar que neste grau é facultativo o tratamento das figuras geométricas bidimensionais para estabelecer a relação parte-todo e converter para a fração correspondente.

Esse tratamento quando desenvolvido será realizado por meio da inclusão das partes, como na fala de 9\_Prof(a).E.E.1.D,

*É uma figura tradicional, em que já está dividida por seis partes iguais, tomada duas, então, dois sextos, e de forma simplificada, um terço. Dá para reconhecer um terço na figura, se você tomar a cada dois quadrados, dois blocos, você vai observar que ela está sendo dividida em três partes iguais, sendo tomada uma, trabalhando a equivalência da figura* (9\_Prof(a).E.E.1.D).

No item mencionado, a figura geométrica em questão estava totalmente particionada em seis partes de áreas congruentes, tendo sido pintada duas delas. O tratamento da inclusão das partes realizado pelo sujeito de pesquisa em questão, considerou a junção de duas dessas partes em uma, obtendo a fração irredutível  $\frac{1}{3}$ .

Sendo observadas assim, a presença da apreensão perceptual, discursiva e operatória durante a conversão entre os dois RRS. Entretanto, pode-se verificar que, assim como ocorreu nos graus anteriores, os participantes não fazem referência explícita à congruência entre as áreas das partes.

No Grau 4 de não Congruência Semântica, foram obtidas 18 respostas corretas e 4 erradas para os itens dessa categoria. As figuras geométricas contidas neste grau, apresentam subfiguras de formas explicitamente diferentes, com particionamento implícito ou incompleto, tornando ineficaz o procedimento da dupla contagem. Por isso, atribuímos os erros à sua utilização, como é perceptível na resolução do item 1-B,

*Uma parte escura para sete partes ao todo existentes. Numerador, um; denominador, sete.* (2\_Prof(a).E.E.1.B)

Assim, é evidente que não houve o tratamento figural, que levaria a reconfiguração das áreas das subfiguras. O professor comete o mesmo erro no item 1-J,

*Numerador, um; denominador, três. Uma parte escura para três partes no todo. Não precisou de transformação (2\_Prof(a). E.E.1.J).*

O elevado percentual de acertos é atribuído a apreensão operatória necessária na figura, que leva a modificação das áreas das subfiguras, tornando-as congruentes, para que logo em seguida seja identificada a relação parte-todo,

*Tem duas formas, no caso com esse retângulo escuro se ele for dividido em duas partes, a fração seria dois oitavos e a outra forma de fazer é observando esse retângulo escuro sem ele ser dividido em um e visualizar as outras três partes, no caso a fração seria um quarto (8\_Prof(a).E.E.1.B).*

No item 1-J, percebe-se a influência da malha quadriculada para o estabelecimento da relação parte-todo,

*Foi preciso transformação e por meio da malha, observei que existem cinco retângulos e desses retângulos, foram pintados três retângulos. Foi preciso transformação porque a princípio não foi possível observar os tracinhos que dividem o retângulo maior; só consegui por meio da malha. Não dá para chegar na resposta apenas com a figura inicial (10\_Prof(a).E.E.1.J.)*

Sendo assim, inferimos que neste Grau de não congruência semântica, os erros cometidos pelos professores pesquisados correspondem a falta do tratamento obrigatório para estabelecer a relação parte-todo e ao uso do procedimento da dupla contagem.

No Grau 5 de não Congruência Semântica, foram obtidas 19 respostas corretas e apenas 3 erradas para os itens dessa categoria. Este grau é caracterizado por ter figuras geométricas apresentando particionamento completo ou explícito e por ser totalmente adaptável ao procedimento da dupla contagem. Entretanto, por terem subfiguras com formas geométricas diferentes, necessitam da apreensão operatória para alteração das formas e posterior visualização da congruência entre as áreas das subfiguras,

*Precisou de transformação, pois tracei mais linhas. Foi um pouco mais difícil de visualizar, porque os triângulos aqui traçados, não são semelhantes, são opostos, então eu dividi o retângulo, passei ao meio uma vertical, e uma horizontal, dividindo dessa maneira, em oito formas semelhantes, em que duas foram tomadas. Outra forma, seria simplificada, reduzindo em um quarto, mas para mostrar para o aluno na figura, ficaria mais difícil de visualizar para o aluno, porque teria que dividir e redesenhar a figura (2\_Prof(a). E.E.1.E).*

O professor 2\_Prof(a). E.E.1.E relatou a dificuldade de visualizar, inicialmente, a congruência entre as áreas das subfiguras do item 1-E, visto que essas não possuem as mesmas formas geométricas, necessitando realizar um tratamento na figura geométrica inicial. No entanto, comete um erro ao afirmar que os triângulos das subfiguras não seriam semelhantes, mas opostos. Infere-se que essa afirmação faz alusão aos ângulos opostos pelo vértice que compõem cada par de triângulos (das subfiguras).

Alguns participantes recorrem a malha quadriculada de forma explícita na apreensão operatória para encontrar áreas congruentes das subfiguras,

*[...] visualizando a malha e fazendo a junção desses minúsculos retângulos, divisão e junção de áreas. (7\_Prof(a).E.E.1.E), sobre o item 1-E.*

Entretanto, como em Silva (2018) também foi observado que houve professores que se utilizaram apenas do procedimento da dupla contagem, sem demonstrar ter realizado uma análise da congruência entre as áreas das subfiguras,

*A parte que está pintada do lado direito do triângulo é o numerador e, o denominador seria juntar todas as partes. Não é necessário fazer alguma mudança, apenas com a contagem dá para chegar ao resultado (1\_Prof(a).E.E.1.E).*

E entre as três respostas erradas obtidas neste grau de não congruência semântica, duas delas realizaram o procedimento da dupla contagem, desprezando o tratamento a ser empregado na figura para reconhecimento da unidade-parte,

*Um terço. Numerador, um; denominador, três. Uma parte escura de três ao todo. Não precisou de transformação (2\_Prof(a).E.E.1.C).*

Sendo assim, podemos inferir que neste grau de não congruência semântica houve professores pesquisados, assim como em Silva (2018), que utilizaram o procedimento da dupla contagem ao estabelecer a relação parte-todo, sem o devido reconhecimento da congruência entre as áreas das subfiguras, mesmo que tal ação os tenham levado ao acerto. Assim como, houveram aqueles que utilizaram o procedimento da dupla contagem, sem o devido reconhecimento da unidade-parte, levando-os ao erro.

No Grau 6 de não Congruência Semântica, foram obtidas 18 respostas corretas e 4 erradas para os itens dessa categoria. Este grau é caracterizado por figuras geométricas que necessitam da apreensão operatória por modificação das formas geométricas e das áreas das subfiguras. Sendo necessário utilizar a malha quadriculada para realizar o tratamento figural que pode envolver rotação e/ou translação de subfiguras,

*A figura ela tá dentro de uma margem quadriculada, em blocos pequenos, observa-se que na primeira amostra quadricular, levando em consideração que ela tem quatro partes iguais, pintadas, na primeira figura, aí na segunda figura, eu tracei/prolonguei toda a área, no triângulo eu fiz o rebatimento dessa parte pintada, levando a preencher esse espaço, ou seja, dá para preencher dois blocos, com esses dois blocos e mais quatro em cima, temos seis blocos e, ao todo na figura, são dezesseis blocos. Teria outras formas de reconstruir a figura e, você simplificando, ficaria três oitavos, seria redirecionar a figura para oito partes semelhantes, tomada três (9\_Prof(a).E.E.1.F).*

O professor 9\_Prof(a).E.E.1.F menciona a necessidade do tratamento figural por desconstrução das formas geométricas das subfiguras iniciais, com base na malha quadriculada, para formar subfiguras de mesmas formas geométricas e que possuam áreas congruentes.

As respostas erradas aos itens deste grau de não congruência semântica, ocorreram por erro no tratamento das subfiguras, quanto ao particionamento total e pela aplicação do procedimento da dupla contagem, sem a devida congruência entre as áreas das subfiguras,

*Dois terços. Numerador, dois; denominador. Duas partes escuras para três partes no todo. (2\_Prof(a).E.E.1.F) para o item 1-F.*

O professor 2\_Prof(a).E.E.1.F, explicitou, ainda, que o item não necessitou de transformação. Em correlação, outro docente, também estabelece a dupla contagem,

*Dei uma olhada pelo todo, cheguei a dois terços, mas depois estava olhando por essa malha por trás, e dá pra ver que tem como fazer por outras formas, se cortar no meio, você vai separar em figuras diferentes, mas vai chegar ao mesmo resultado (3\_Prof(a).E.E.1.I).*

Todavia, o professor 3\_Prof(a).E.E.1.I percebe que pode desenvolver um tratamento na figura geométrica inicial a partir da malha quadriculada, mas não o faz e conclui que chegaria a mesma solução.

Sintetizando os principais erros cometidos pelos sujeitos de pesquisa nas conversões entre RGBim e RSF dos números racionais, temos que são relativos aos graus de não congruência semântica 2, 4, 5 e 6, conforme Quadro 1. O grau 1 e 3 de não congruência semântica não foram considerados por não terem apresentado respostas erradas.

**Quadro 1:** Principais erros cometidos pelos sujeitos da pesquisa nas conversões entre

Grau	Características dos erros nas conversões entre RGBim e RSF
2°	O enclausuramento da apreensão perceptiva em detrimento da apreensão discursiva das unidades visuais das figuras geométricas. A unificação das figuras geométricas em apenas um todo para o estabelecimento da relação parte-todo por meio do procedimento da dupla contagem
4°	Utilização do método de dupla contagem sem que fosse realizada a necessária apreensão operatória das figuras geométricas.
5°	A ausência da apreensão operatória nas figuras geométricas para verificar a congruência entre as áreas das subfiguras.
6°	A ausência da apreensão operatória para (re)particionar totalmente as figuras geométricas, ou ainda, dificuldade de desenvolver o tratamento correto dessas figuras.

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Apesar do Grau 2 de não congruência semântica ter apresentado o maior número de erros por parte dos sujeitos da pesquisa, estes ao serem solicitados para classificarem entre fácil, médio e difícil, os itens do instrumento de pesquisa, 50% consideraram o item 2-A e 37% o item 2-B, ambos pertencentes a este Grau de não congruência semântica, como sendo de nível fácil. O que nos leva a inferir que essa classificação pode estar sendo estabelecida ao serem consideradas, erroneamente, as figuras geométricas iniciais como um todo unificado, que é totalmente adaptado ao procedimento da dupla contagem. Haja visto, os erros cometidos pelos professores da pesquisa, considerarem os dois inteiros como sendo um único inteiro.

O segundo maior percentual de erros ocorreu no Grau 6 de não congruência semântica, item F (27%). A estratégia de erros mais utilizada foi o procedimento da dupla contagem, com desprezo da congruência das áreas entre as subfiguras, o mesmo ocorrido em Silva (2018).

Enquanto que, nos graus 3 e 4 de não congruência semântica, verificamos que os sujeitos de pesquisa, em sua maioria, estabeleceram a relação parte-todo e fizeram a conversão para o RSF, para então realizar o tratamento de equivalência de frações e encontrar a fração irredutível, porém, nem todos que utilizavam dessa estratégia reconheciam a fração irredutível na figura geométrica inicial.

## 6 Conclusão

O objetivo da pesquisa foi analisar a compreensão dos professores que lecionam Matemática quanto à influência das características visuais das figuras geométricas nas

conversões entre o RGBim e o RSF dos números racionais. Para isso, contou-se com 11 professores de Matemática das redes Municipal e Estadual de ensino da cidade de Cajazeiras (PB), como sujeitos da pesquisa. E teve-se como pergunta norteadora deste estudo: os professores de Matemática compreendem que existem distintos tipos de figuras geométricas que podem apresentar características diferentes para que seja visualizada a relação parte-todo dos números racionais e realizada a conversão para o Registro Simbólico Fracionário - RSF? E ainda, identificam todos os elementos figurais necessários para estabelecer esta relação e realizar a conversão para o RSF?

A discussão neste estudo levou em consideração uma entrevista semiestruturada, com uso de um instrumento de pesquisa, retirado de Silva (2018), composto de 12 itens que solicitam a fração correspondente à parte pintada da figura geométrica e que englobam, dois a dois, os seis graus de não congruência semântica nas conversões do RGBim para o RSF, descritos por Silva (2018).

De um modo geral, pudemos verificar que entre os erros cometidos pelos professores de Matemática, sujeitos da pesquisa, ao tentar estabelecerem a relação parte-todo e converter para o RSF, envolvendo os graus 2, 4, 5 e 6 de não congruência semântica, verificou-se o predomínio do procedimento da dupla contagem, e em alguns casos, com desprezo da congruência entre as áreas das subfiguras, assim como em Silva (2018). Isto revela um fenômeno que perpassa o ensino e a aprendizagem do objeto matemático números racionais. Pois, mesmo com os docentes, os dados expõem a incorporação do ‘procedimento pelo procedimento’, que é assumido, muitas vezes, como ‘legítimo’ para gerar a conversão do RGBim para o RSF dos números racionais, até nos casos que apresentam mais de um inteiro.

Corroborando com uso do procedimento da dupla contagem, o Livro Didático trabalha, majoritariamente, figuras geométricas que são totalmente adaptáveis a este procedimento (Oliveira, 2021), o que influencia nas práticas pedagógicas dos docentes. As análises demonstram que ao lidarem com figuras geométricas com mais de um inteiro (Grau 2 de não congruência semântica), 46% dos participantes pesquisados desprezam a quantidade total de partes de um inteiro que tem correspondência semântica com o denominador da fração e tendem a unificar as figuras geométricas dadas em um único todo. Aplicando, logo em seguida, o procedimento da dupla contagem, tendo assim, correlação com os achados da pesquisa de Silva (2018).

Além disso, a estratégia de acerto mais utilizada, neste grau de não congruência semântica, considera as duas figuras geométricas como inteiros distintos, encontrando duas frações que são transformadas em um número misto. Dessa forma, compreende-se que essa solução minimiza a não congruência semântica entre o total de partes que foi dividido o inteiro representado pela figura geométrica e o denominador da fração.

Entretanto, verificamos que em alguns casos, mesmo aqueles que encontram a fração correta, no Grau 2 de não congruência semântica, utilizando outras estratégias, muitas vezes têm dificuldades de reconhecê-la nas figuras geométricas ou tendem a aceitar a coexistência de duas soluções distintas, sendo uma delas a que considera a unificação do todo.

Portanto, concluímos que os professores de Matemática sujeitos da pesquisa, em grande parte do estudo, utilizaram o procedimento da dupla contagem, desprezando características visuais das figuras geométricas necessárias para estabelecer a relação parte-todo e converter para o RSF, assim como em Silva (2018), mesmo quando este não era adequado ao tipo de figura geométrica trabalhada. E desta forma, deixam de identificar importantes características das distintas figuras geométricas, necessárias para o estabelecimento da relação parte-todo.

Por fim, sugere-se que seja implementado na formação inicial e na formação em serviço dos professores de Matemática, propostas que visem a discussão dos elementos visuais e simbólicos necessários para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais, e a conversão entre o RGBim e o RSF, incluindo a classificação das figuras geométricas utilizadas para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais e os Graus de não congruência semântica nas conversões entre o RGBim e o RSF dos números racionais, propostos por Silva (2018).

## Referências

- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères, IREM*, 1(17), 121-138.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Traducción de M. V. Rastrepo. (2. ed.). Santiago de Cali: Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2009). *Semiósisis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução de L. F. Levy & M. R. A. Silveira. São Paulo, SP: Livraria da Física.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo, SP: PROEM.
- Duval, R. (2012). *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência*. Tradução de M. T. Moretti. *Revemat*, 7(1), 118-138.
- Duval, R. (2016). *Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de Matemática*. Tradução de M. T. Moretti. *Revemat*, 11(2), 1-78.
- Oliveira, F. M. (2021). *Livro didático: Análise das figuras geométricas empregadas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais à luz dos registros de representações semióticas*. 88f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal da Paraíba. Cajazeiras, PB.
- Silva, F.A.F. (2018). *Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionários dos números racionais*. 258f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, PE.
- Silva, F.A.F (2020). *Proposição de graus de não Congruência Semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais*. *Intermaths*, 1(1), 174-196.