ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS: ANÁLISES PRELIMINARES E A PRIORI

Didatic Engineering for the Fundamental Theorem of Plane Curves: preliminary analysis anda priori analysis

Ana Carla Pimentel Paiva

Francisco Régis Vieira Alves

Resumo

O Teorema Fundamental das Curvas Planas – TCP - se apresenta como um assunto considerado na abordagem tradicional da teoria de Geometria Diferencial. Nesse artigo se descreve, de modo particular, duas etapas previstas pela Engenharia Didática – ED: as fases de análise prévias e análise a priori. Enfatizam-se atividades descritas/estruturadas com apoio da tecnologia. A mediação afetada pela exploração adequada de softwares possibilita evitar determinados elementos que atuam como entraves a um entendimento amplo, inerente ao TCP. Desse modo, com a indicação e estruturação de situações-problema, se imprime maior ênfase na visualização e entendimento de propriedades qualitativas (gráfico-geométricas) e não apenas de natureza algorítmicas. Por fim, com elementos questionados nos livros didáticos de Geometria Diferencial, proporciona-se a descrição de fatores pertinentes á mediação didática do TCP.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Teorema Fundamental das Curvas Planas. Análisesprévias. Análise a priori.

Abstract

The Fundamental Theorem of Plane Curves is introduced a subject considered in the traditional approach of theory of Differential Geometry. This article describes, in a particular way, two stages predicted by Didactic Engineering – ED: previous analysis phases and a priori analysis. Emphasized activities described/structured with the support of technology. The mediation affected by proper exploitation of software makes it possible to avoid certain elements that act as obstacles to a broad understanding, inherent to TCP. Thus, with the indication and structuring of problem situations, a greater emphasis is placed on the visualization and understanding of qualitative (graphic - geometric) properties and not just algorithmic nature. Finally, with elements questioned in the textbooks of Differential Geometry, we provide a description of factors pertinent to the didactic of TCP.

Keywords: Didactic Engineering.Fundamental Theorem of Plane Curves. Previous analyzes. A priori analysis.

Introdução

Este trabalho foi elaborado no âmbito de uma pesquisa preliminar e em andamento de uma dissertação do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemáticapara Professores. Compete um desafio muito interessante por aliar as novas tecnologias à Matemática. O *software* Geogebra revelou-se uma ferramenta interessante por possibilitar um significado geométrico ao Teorema Fundamental das Curvas Planas – TCP, tornando o ensino de Geometria Diferencial – GD menos abstrato, permitindo a visualização de conceitos.

Além disso, o artigo busca utilizar a Engenharia Didática, como uma engenharia de formação a ser utilizada em professores do IFCE, baseados em recentes estudos que salientam a necessidade de uma mudança na forma de lecionar. MORAN (2000,p.2) afirma que:

> (...)muitas formas de ensinar hoje não se justificam mais. Perdemos tempo demais, aprendemos muito pouco, nos desmotivamos continuamente. Tanto professores como alunos temos a clara sensação de que em muitas aulas convencionais perdemos muito tempo. Podemos modificar a forma de ensinar e de aprender. Um ensinar mais compartilhado. Orientado, coordenado pelo professor, mas com profunda participação dos alunos, individual e grupalmente, onde as tecnologias nos ajudarão muito, principalmente as telemáticas.

Dessa forma, no texto que se segue pretendemos desenvolver habilidades que favoreçam a aquisição de conhecimentos, baseados nos estudos de DE LIMA e

ALVES(2016), ALVES (2014), que utilizam tecnologias de informação e *softwares* aliadas a Engenharia Didática como metodologia de aprendizagem.

No momento em que consideramos os inúmeros conceitos que são objetos para o ensino de Geometria Diferencial – GD, comprovamos a relevância do Teorema Fundamental das Curvas Planas - TCP. Seu caráter essencial na Geometria Diferencial nos permitirá, nesse artigo, evidenciar um problema que concerne à interpretação gráfica-geométrica. Desse modo, na medida em que indicamos um problema ou entrave, efetuamos "o primeiro passo para uma Engenharia Didática" (DOUADY, 2008, p.2). DOUADY (2008, p.2) acrescenta ainda que:

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, isto é, a construção, a realização, observação e análise de sessões de ensino.

Entretanto, como mesmo apontam suas indicações, nesse trabalho, iremos nos restringir apenas às fases (análises prévias e construção de situações/análises a priori) que permitem realizar a construção das sessões de ensino que detém a possibilidade de realizações didáticas em sala de aula, no contexto do ensino de GD com a sistematização prevista pela Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995; ROBINET, 1983) e recentes considerações sobre essa metodologia condicionada pelo nosso objeto teórico de interesse e estudo.

Sobre o Teorema Fundamental das Curvas Planas

Essencialmente, a Geometria Diferencial estuda as propriedades geométricas das curvas e superfícies mediante conceitos analíticos tais como o de métrica, curvatura e torção. O Teorema Fundamental das Curvas Planas, que caracteriza completamente uma curva pela função curvatura, para curvas duas vezes continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, a curvatura é a propriedade característica no seguinte sentido: duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco que possuem a mesma função curvatura diferem por uma isometria de $\mathbb{R}^2$.

Registramos uma seção, na maioria dos livros de Geometria Diferencial (TENEBLAT, 2008; DO CARMO, 2012; ALENCAR, 2002; ARAÚJO, 1998; THORPE , 2012;) dedicada ao Teorema Fundamental das Curvas Planas - TCP, assim como nos livros de Cálculo (STEWART, 2012), nos quais, deparamos maior grau de generalidade.

Intuitivamente, a apresentação do problema matemático que descreve o TCP garante que dada a função curvatura de uma curva plana, podemos determinar a curva a menos de sua posição no plano. Formalmente, TENEBLAT (2008, p.52) descreve o teorema da seguinte maneira:

> a) Dada uma função diferenciável$k(s), s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é o $k(s)$.
> b) A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha(s_0)' = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$.
> c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e$\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$,tal que $\alpha(s) = (L \text{ o } T)(\beta(s))$.

Denotamos por movimentos rígidos rotações e/ou translações, sendo denotados tais movimentos pela letra gregaφ.

A gênese do interesse em torno do TCP, é atribuída a Euler. PICADO (2006, p.2)relataque:

> (...) as origens da geometria diferencial de superfícies remontam ao século XVII, com o estudo das geodésicas, isto é, curvas, de comprimento mínimo, numa superfície. Em 1697, Jean Bernoulli (1667-1748) colocou o problema de determinação da curva mais curta ligando dois pontos numa superfície convexa. Em 1698, Jacques Bernoulli (1655-1705) determinou as geodésicas nos cilindros, cones e superfícies de revolução. A forma geral das equações das geodésicas numa superfície foi obtida por Euler em 1728. Foi Euler quem deu bases sólidas a teoria das superfícies em RecherchessurlaCourburedesSurfaces (1760), onde introduziu as chamadas curvaturas principais de uma superfície num ponto. Em 1827, Gauss publicou o seu famoso trabalho fundamental sobre superfícies, Disquisitionesgeneralescircasuperficies curvas, no qual introduziu uma nova

medida de curvatura, a curvatura guassiana de uma superfície.

Apresentação nos livros de Geometria

Nesta seção, evidenciaremos e identificaremos os elementos que se sobressaem a partir da proposta de abordagem de certos compêndios especializados, tradicionalmente adotados no Brasil, no que concerne ao TCP. Utilizaremos problemas envolvendo curvas do tipo $\alpha(s) = (x(s), y(s))$,nosso primeiro exemplo é extraído de TENEBLAT. Observamos que, na figura,o referido autor imprime ênfase ao caráter algébrico dos conceitos envolvidos. O autor não faz nenhuma indicação do seu contexto histórico e/ou epistemológico, concernente ao momento de gênese e das ideias heurísticas do teorema.

Figura 1 - Exemplo abordado em TENEBLAT (2008, p.53)

QUESTÃO 1 - Caracterize todas as curvas regulares planas que têm curvatura constante.

Na figura 2, TENEBLAT sugere um problema generalizado, toda via em nada difere do caso anterior.

Figura 2 - Exemplo abordado em TENEBLAT (2008, p.54)

QUESTÃO 3 - Determine as curvas planas de curvatura$k(s) = \frac{1}{\cosh s}$.

Na figura 3, STEWART (2012) poderia sugerir uma interpretação geométrica como solução da questão, porém a solução é dada por meios algébricos, dificultando uma melhor compreensão do conceito curvatura.

QUESTÃO 30 - 31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \longrightarrow \infty$?

30. $y = \ln x$ 31. $y = e^x$

Figura 3 – Exemplo abordado em STEWART (2012, p.797)

DO CARMO(2012) acentua o caráter formalista, que prioriza o quadro algébrico para lidar e manipular objetos matemáticos. Reparemos no enunciado abaixo, a inexistência de contextualizações, não há intenções didáticas.

Figura 4 – Exemplo abordado em DO CARMO (2012, p.28)

QUESTÃO 8 – O traço da curva parametrizada (parâmetro arbitrário)

$\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$é chamado de catenária.

a. Mostre que a curvatura com sinal da catenária é $k(t) = \frac{1}{cosh^2 t}$.
b. Mostre que a evoluta da catenária é $\beta(t) = (t - senh\, t \cosh t, 2\cosh t)$.

Vale assinalar que os livros em outros idiomas fortalecem alguns dos aspectos questionados nos parágrafos anteriores. Observe o exemplo dado em THORPE (2012)

Figura 5 - Exemplo abordado em THORPE (2012, p.65)

10.3 Find global parametrization of each of the following plane curves ,oriented by $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ where f is the fuction defined by the left side of each equation.

(a) $a\,x_1 + bx_2 = c$, $(a,b) \neq (0,0)$.

(b)$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $a \neq 0, b \neq 0$.

(c)$x_2 - ax_1^2 = c$, $a \neq 0$.

(d) $x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_1 > 0$

10.4 Find the curvature k of each equation of the oriented plane curves in Exercise 10.3.

Concluiremos essa seção, recordando que a metodologia de pesquisa nominada Engenharia Didática(ARTIGUE,1996), tem sido utilizada *design* de investigação, numa perspectiva de complementaridade (ARTIGUE,2009; BROUSSEAU,1986) com outras teorias, desde a década de 80. Esses autores dão ênfase nas etapas de *análise preliminar* e *análise a priori*. De modo semelhante, neste artigo, escolhemos o TCP como objeto matemático investigado. Daqui para frente, apresentamos as duas fases iniciais de uma ED com o tema TCP.

Análises preliminares ou prévias

De acordo com o que assinalamos na introdução desse artigo, do ponto de vista do design de investigação adotado, assumimos a sistemática prevista pela ED. Procedente de uma vasta tradição acadêmica, sabemos que a concepção de pesquisa em Engenharia Didática – ED compara a forma de trabalho didático do professor com a mesma maneira de trabalho do engenheiro que, para realizar projetos, se apoia sobe conhecimentos científicos de seu domínio. (ARTIGUE, 1996,p.273)

E, no que se refere aos momentos ou fases da investigação, distinguimos: as análises preliminares, análises a priori, a etapa da experimentação e introdução ao movimento de todo aparato tecnológico construído, validação e análise a posteriori. Dessa forma, como assinalado nas seções anteriores, restringiremos aos primeiros dois momentos previsto por ARTIGUE (1996, p.243).

Então, no âmbito das análises preliminares ou prévias, nessa seção, identificaremos problemas de ensino e de aprendizagem vinculado ao TCP. Com base e amparo em tal sistemática, delinearemos questões (situações problema), formularemos determinadas hipóteses, que detém a possibilidade de serem investigadas, a posteriori, de modo empírico. Dois elementos devem ser evidenciados nessa etapa, de acordo com ALMOULOUD (2007, p.172), a saber; (i) estudo da organização matemática, (ii) análise didática do objeto escolhido.

De modo específico, concernente ao item (i), nos atemos: estudo das gêneses históricas envolvendo TCP (apresentada na seção 2); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático); obstáculos relativos ao TCP (conceitos reconhecidamente complexos vinculados do TCP); a estrutura atual do ensino do TCP e seus efeitos. Relativo ao item (ii) apontamos a relevância da análise de livros didáticos (apresentada na seção 3). Uma análise de livros de Geometria Diferencial deve contemplar: o papel da história do TCP; os obstáculos epistemológicos identificáveis na abordagem dos autores; antever as possíveis concepções dos alunos (dimensão cognitiva), provenientes a partir da abordagem proposta. Desse modo, concluímos:

- os autores de livros enfatizam o caráter algorítmico condicionado pelo TCP;
- a noção de existência matemática é admitida de modo automático pelos autores;
- os aspectos topológicos locais, de aplicação do TCP são desconsiderados;
- a visualização e a significação gráfico-geométrica do teorema é negligenciada.

Com base nessas dificuldades, formulamos as seguintes hipóteses de trabalho que não serão objeto de investigação empírica nesse estudo teórico, entretanto, podem ser objeto de interesse em outros estudos empíricos, envolvendo a mesma temática ou outro tópico no ensino de Geometria Diferencial:

1ª) Uma mediação condicionada pela abordagem *standard*dos livros de GD não promove a visualização e o entendimento gráfico-geométrico (local) atinente ao TCP;

2ª) Situações de aprendizagem definidas pelos exercícios propostos pelos autores de livros de GD permitem apenas a aquisição de habilidades manipulativas de equações, que incidem ou acarretam em resultados de significado restrito, sem um entendimento amplo do TCP.

Na próxima seção abordaremos algumas situações problema, com vistas à aprendizagem, em concordância com a descrição de BROUSSEAU (1986, p.414). As variáveis didáticas serão apontadas e,sua manipulação e exploração didática conveniente devem estimular novos cenários para efetiva aprendizagem, na medida em que indicaremos elementos de mediação e transmissão dos saberes, que detém a possibilidade de evitar os entraves anteriormente formulados.

Construção das situações e Análises a priori

Nessa fase de ED, elaboramos e analisaremos uma sequência de situações problema envolvendo o TCP. Responderemos algumas questões indicadas nas sessões anteriores, todavia, não ensejamos validar essas hipóteses de investigação, posto que, não procederemos as análises *a posteriori*. Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação problema envolve

"a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber. " (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

Vale observar que, no campo de saberes referenciados porALMOULOUD (2007,p.174), é possível, tendo em vista o nível elementar da Matemática, considerarsituações "menos matematizada". Entretanto, em nosso caso, o modelo matemático condiciona, fortemente, todas as estratégias e ações e decisões dos aprendizes. Essa variável didática é prevista, de modo geral, por BROUSSEAU (1986, p.412).

Contudo, nosso objeto de atenção (um teorema em Matemática e sua aplicação), pertencente a um corpusteórico-formal, implica em fortes condicionantes derivados da própria construção/demonstração e descrição do TCP. Do mesmo modo, levaremos em consideração, com vistas à estruturação das situações-problema, as seguintes características apontadas por ALMOULOUD (2007,p.174): situações que devem colocar em encontro um campo conceitual em que se deseja efetivamente explorar; os conhecimentos antigos não são suficientes para a resolução completa do problema; o problema envolve vários domínios do conhecimento. Assinalamos acima apenasparte das características apontadas por ALMOULOUD (2007, p. 174).

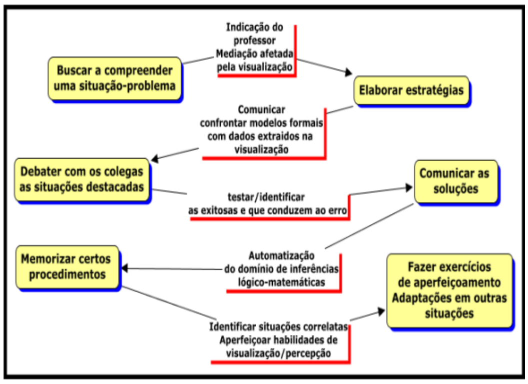
Nesse sentido, vale distinguir e especificar os seguintes elementos: os problemas quetencionamos explorar envolvem domínios analíticos e gráfico-geométricos, entretanto, osconhecimentos antigos (no caso os saberes relacionados com oTCP) devem ser suficientes para aresolução. Além disso, nas situações que buscamos apresentar, desejamos que "elas permitamadaptações dos alunos, na medida em que tomam decisões e as modificam" (BROUSSEAU, 1986,p. 440). Quando visamos descrever situações de ensino fundamentadas de uma Matemática procedente de nível avançado, o campo conceitual é condicionado, por vezes, por uma definição formal ou um teorema estruturante.No nosso caso o TCP, assinalamos que:

- Dado o caráter de não trivialidade do TCP (a descrição da tese), as situações-problema requerem conhecimentos suficientes para sua resolução, entretanto, a abordagem será determinante. Desse modo, a visualização proporcionada pelos softwares deverá ser uma variável didática recorrente no cenário de aprendizagem apresentado aos estudantes. Assumimos posição concorde com ALMOULOUD (2007, p. 174) ao acentuar que "asatividades devem ser concebidas, levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios", e terão por objetivos: auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes deuma maneira construtiva e significativa; desenvolver certas habilidades como, por exemplo, saberler, utilizar as diferentes representações matemáticas e desenvolver raciocínio dedutivo.

Concluiremos essa seção, destacando que "os objetivos da análise aprioridevemdeterminar que as escolhas realizadas permitam o controle do comportamento dos alunos e seusignificado". (ARTIGUE, 1995, p. 45). Desse modo, as escolhas e descrição de ações futuras, nessaseção, são fundamentadas em pressupostos teóricos, que devem permitir o controle didático datransposição didática e do sentido das ações futuras envolvendo a mediação de saberes. O controle didático que propomos é passível de certa hierarquização ou descrição demomentos na mediação do saber científico.

Nesse sentido, recordamos que BROUSSEAU (1986, p.440-441) explica que "a aprendizagem no contexto da resolução de problemas, evolui a partir dacompreensão do papel e função de alguns momentos particulares", condicionados pelo trinômio*professor –saber- aluno*.ALVES (2014,p.157), constrói uma figura no qual, indica (em cor vermelha) elementos condicionados por momentos que envolvem o ensino doTCP acrescidos das variáveis didáticas que consideramosrelevantes em nosso caso.

Figura 6 - Adaptação do esquema proposto por BROUSSEAU (1986, p. 440-441) construído por ALVES (2014)



Fonte: Autores.

Na figura acima, na passagem de transição de cada momento didático, notamos amanifestação de uma decisão tomada (ou várias decisões) pelo sujeito ou pelos sujeitos. Em cada passagem, prevemos "a manifestação de um conhecimento" (BROUSSEAU, 1986,p.27).Para queo aluno vivencie possibilidades de mobilizar e/ou manifestar seu conhecimento privado, "modelisamos situações" (BROUSSEAU, 1986, p. 400) que possuem o potencial de váriasdescobertas, em função de suas escolhas e decisões.

O surgimento dessas descobertas e a ocorrência de elementos inesperados determinam "o grau de incerteza" (BROUSSEAU, 1986, p. 270). Concordamos, comBROUSSEAU (1986, p, 270) ao destacar que "a aprendizagem de um conhecimento ocorre namedida em que diminui o grau de incerteza" relativa às situações didáticas apresentadas peloprofessor em sala de aula.

Situações Didáticas

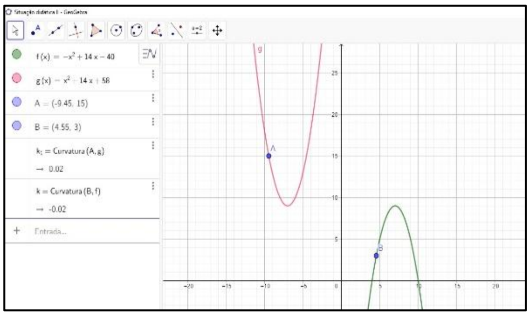
Nessa seção, apresentaremos situações-problema relacionadas com o TCP,se baseando no seguinte ponto de vista:

> (...)para garantir, minimamente, o alcance desses objetivos, o pesquisador ou o construtor de situações-problema necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem do objeto em jogo (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

Desse modo, dentre as variáveis microdidáticas(locais) que colocamos ênfase, indicaremos: os conteúdos envolvidos nas atividades propostas, saberes requeridos para o uso da tecnologia. Vejamos, pois, nossa primeira situação.

Situação (I) : Dada as curvas $c : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e $d : x^2 + y^2 - 24\,x - 6y + 149 = 0$ exiba o comportamento das curvas com o auxílio do Geogebra e utilizando o TCP determine se elas são congruentes.

Figura 7 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico de curvas congruentes



Fonte: Autores.

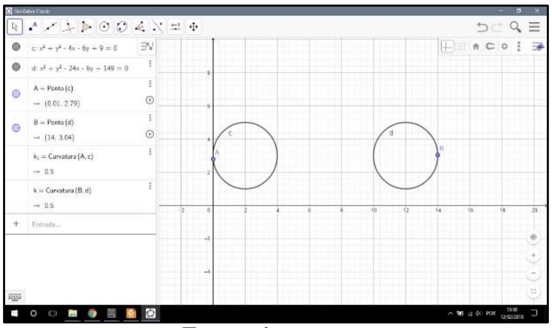
Ao construir as curvas no Geogebra, observamos que se trata de duas circunferências com raios iguais e centros diferentes. Nessa situação didática, quando questionamos se as circunferências são congruentes queremos instigar o aluno a utilizar a sua noção intuitiva e criatividade. A princípio podem surgir premissas verdadeiras, mas baseadas em justificativas equivocadas, por exemplo, as duas circunferências são congruentes pois apresentam o mesmo raio. No entanto, pelo TCP duas curvassão congruentes apenas quando possuem a mesma a curvatura.

Através do *software*, calculamos a curvatura das circunferências e utilizando o fato que na circunferência, em qualquer ponto arbitrário, a curvatura é constante, percebemos a igualdade nas curvaturas, e só assim, podemos afirmar que as curvas são congruentes.

Note que, em momento algum utilizamos nenhum algoritmo para calcular a curvatura, o nosso intuito é priorizar a visualização e entendimento do conceito.O TCP também estabelece que curvas que são congruentes e diferem por sua posição no plano, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$,tal que $c(s) = (L\ o\ T)(d(s))$. Ou seja, existe um movimento rígido que ao ser realizado as coloca na mesma posição. Pela figura1, podemos observar que esse movimento se trata de uma translação da circunferência d para à esquerda. Na próxima situação didática, mostraremos ao aluno casos onde as curvas não sejam congruentes

Situação (II): Considere as curvas $c : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$e $d : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 4$, usando o TCP mostre que não existe um movimento rígido φ, tal que $c(x,y) = \varphi(d(x,y))$.

Figura 8 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da situação em que as curvas não são congruentes

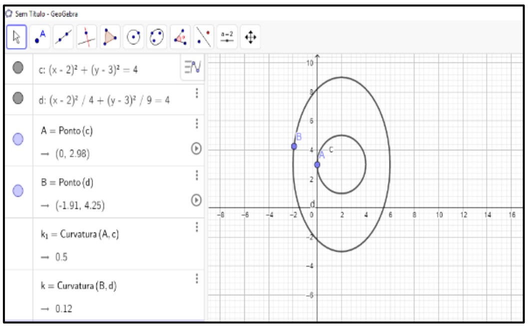


Fonte: Autores.

Note que primeira curva se trata de uma circunferência com curvatura constante igual a 0.5, e a segunda curva uma elipse com curvatura variando, mas atingindo valor máximo igual a 0.37,logo pelo TCP não existe movimento rígido que tal que as curvas c e d sejam congruentes.

Situação (III): Sejam duas funções dadas por $f(x) = -x^2 + 14\,x + 40$ e$g(x) = x^2 + 14\,x + 58$, faça a análise e o gráfico dessas funções .

Figura 9 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da situação de curvas planas

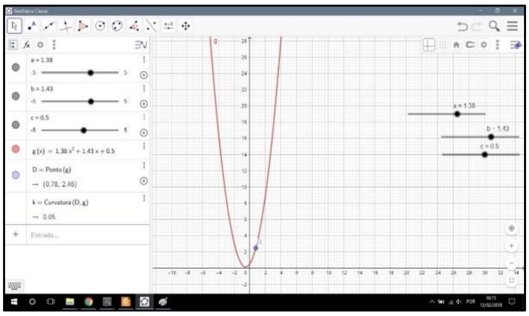


Fonte: Autores.

Ao construir as funções no Geogebra, observamos que se trata de duas parábolas, a curvatura varia ao longo da parábola, mas note que se tomarmos pontos equivalentes nas curvas obtemos nesses pontos o mesmo valor de curvatura, logo pelo TCP essas curvas são congruentes. Veja que é possível visualizar o movimento rígido que coloca a parábola gerada pela função g , na mesma posição de f , basta fazer uma translação para a esquerda e depois uma rotação para cima (caso o aluno tenha dificuldades em visualizar o movimento rígido,usar a ferramenta do *Geogebra* de reflexão para mudar a concavidade da curva $f(x)$, posteriormente a ferramenta de translação) . Continuando nosso estudo, veja uma outra abordagem para o estudo da parábola.

Situação (IV) : Sabendo que a equação da parábola é dado por $y = ax^2 + bx + c$, encontre na curva $y = ax^2 + bx + 0.5$ pelo menos um ponto em que a curvatura é 0.05 , em seguida responda se a curvatura varia ou não em função de c.

Figura 10 - Descrição do comportamento gráfico-geométrico da curvatura da parábola



Fonte: Autores.

Para a resolução desse problema, o aluno apartir da formula geral da parábola, cria controles deslizantes e assim dectecta uma equação que satisfaça a situação. O objetivo dessa situação é mostrar pro aluno,a principal propriedade do TCP, que afirma que "dada a função curvatura de uma curva plana, podemos determinar a curva a menos de sua posição no plano", ou seja, o teorema garante a existência dessa parábola. Determinamos o parâmetro c, para que existisse apenas uma solução, mas através do *Geogebra*, o aluno pode perceber que ao variar o parâmetro c, em nada altera a curvatura, assim, o aluno chega a conclusão da segunda pergunta dessa situação didática ou o aluno pode recorrer a formula algébrica $k(t) = \frac{|-x'(t)y''(t) + x''(t)y'(t)|}{|((x'(t))^2+(y'(t))^2|^3}$, observando que $k(t) = \frac{-2a}{\left(\sqrt{1+(2ax+b)^2}\right)^3}$,ou seja, a curvatura independe do parâmetro c.

Finalizaremos o nosso estudo com uma situação didática, que instigue a criatividade dos alunos, e os incentive a prática da pesquisa.

Situação (V): Tome duas curvas planas arbitrárias e utilize o *software*Geogebra em sintonia com TCP para a análise da relação entre essas curvas.

Veja que, ao propor essa atividade, os alunos exercem a prática da pesquisa e determinam curvas no $\mathbb{R}^2$,por exemplo hipérbole, catenária, e calculam a respectiva curvatura. Além disso, observam através da visualização e dos valores obtidos, a relação de congruência dessas curvas, e caso sejam, mostram o movimento rígido que possibilita que as curvas permaneçam na mesma posição. Essa última situação didática, possibilita a oportunidade de várias respostas diferentes, e posteriormente o docente ainda pode propor uma dinâmica para a troca de experiências entre os alunos.

Note que, essas situações didáticas possuem soluções de natureza algébrica, podendo ser solucionadas através de algoritmos mecanizados, no entanto, sem a visualização geométrica o conteúdo se torna abstrato, predominando uma concepção limitada, sem estímulo a criatividade do aluno, comprometendo a aprendizagem do conteúdo.

Considerações Finais

Em vista dos argumentos apresentados, conclui-se que o meio acadêmico propende a privilegiar o carácter algoritmizado do conteúdo matemático, entretanto ao longo do artigo evidenciamos a importância da descrição gráfico–geométrica vinculada, assentindo com ALVES (2014, p.163) que defende que essa visualização tem papel fundamental para a compreensão do comportamento dotraço da curva, do ponto de vista cinemático e dinâmico.

Prosseguimos abordando a descrição das fases inicias previstas pela Engenharia Didática e a produção de sequências de ensino envolvendo o TCP, como uma engenharia de formação elaborando módulos dinâmicos referidos ao longo deste trabalho baseados no público-alvo a que se destinam, professores do IFCE. Procurou-se que as situações didáticas tivessem uma linguagem clara, acessível semtirar o rigor teórico exigido, através das análises *a priori* e *posteriori* com construções de situações, que exploram a tecnologia, em nosso caso do Geogebra. O uso desse software possibilitou a descrição de situações-problema, condicionados pela visualização, com origem na percepção (ALVES, 2011;2012;2013;2014a;2014b). Além disso, as figuras construídas foram relacionadas com cada cenário de aprendizagem, promovendo a validade do TCP.

Esse destaque dado a visualização, entretanto, viabilizou em nosso caso o uso datecnologiaconstituindo, de maneira geral, o esforço isolado, que influencia ainda de modo tímido o ensino naacademia, “acentuadamente formal” (ARTIGUE, p.119, 2003). Com efeito, o que assinalamos naanálise de livros, sob uma natureza particular, é alertado, de modo amplo, por ARTIGUE (1995)quando adverte que “o ensino tradicional se centra no funcionamento do quadro algébrico” junto a metodologia que adotamos, pode ser compreendida como “uma teoria de controle das relações entre significado” (ARTIGUE, 1995).

Por fim, grande parte dos livros de Geometria Diferencial consultados possui algumasdécadas de lançamento, reedições e reimpressões. O docente deve ficar vigilante, quanto ao“envelhecimento das situações” (BROUSSEAU, p.277, 1986) propostas nesses compêndios. A“reprodução/replicação” (GONZALEZ-MARTÍN, p.121,2005) automática dessas situações, para públicos diferentes, pode proporcionar entraves às adaptações e transposições didáticasnecessárias, pois, não se pode prever os mesmos resultados, para públicos distintos em ocasiões únicas, embora possa parecer a mesma. Nesse sentido, a tecnologiaimpulsiona modificações e reformulações periódicas nas sequências de ensino com esse tema.Na proposta de nossa abordagem, não buscamos indicar um caminho “melhor” para atransposição, demarcando com isto que, a outra forma demediação tradicional (sem a exploração da tecnologia), seja entendida como “pior”.O que buscamos é indicar formas diferenciadas e distintas, das atuais propostas nos livros de Geometria Diferencial e que,em maior ou menor grau, influenciam as concepções e o pensamento matemático dosalunos, professores e matemáticos profissionais, que atuam em nossas academias.

Referências

ALVES, F.R.V.*Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*.Tese de Doutorado. Fortaleza: UFC, 2011.

ALVES, F. R. V. *Insight:* descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo. VIDYA, v. 32, n. 2, p. 13, 2015.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. *Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo:* os softwares Geogebra e o CAS Maple. Anais da VI BienalemMatemática. p. 1-10, 2012.

ALVES, F. R. V. *Viewing the roots of polynomial functions in complex variable*: the use of GeoGebra and the CAS maple. ActaDidacticaNapocensia.v. 6, n. 4, p. 45, 2013.

ALVES, F. R. V. *Visual criterion for understanding the notion of convergence if integrals in one parameter*. Acta DidacticaNapocensia. v. 7, n. 1, p. 19, 2014.

ALVES, F. R. V. *Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita:* análises preliminares e a priori. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. v. 7, n. 3, 2014.

ARAÚJO, P. V.. Geometria *diferencial.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

ARTIGUE, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. Ingeniería didáctica em educación matemática. 1995.

ARTIGUE, M. *¿ Qué se puede aprender de La investigación educativa em el nivel universitario?.* Boletín de la asociación matemática venezolana.v. 10, n. 2, p. 117-134, 2003

ARTIGUE, M. *Didactical design in mathematics education*. Nordic research in mathematics education. p. 7-16, 2009.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. *Didactiques dês Mathématiques*, Paris:Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-264.

ALMOULOUD, A. S. *Fundamentos da Didática da Matemática***.** São Paulo: Editora UFPR.2007.

BROUSSEAU, G. Théorisation de phénomènesd´enseignement des mathématiques. Tese de Doutorado. Bordeaux :Université de Bordeaux I. 905f. 1986.

DE LIMA, M. V. M.; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros–IDP's. Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044, v. 5, n. 1/2, 2016.

DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies.*SBM. 2012.

DOUADY, R. *Géométrie, graphiques, fonctions au collège***.**Revista Eletrónica deinvestigacióneneducación e ciencias**.** Nº 1, 2008, p. 1-7.

GONZALEZ-MARTÍN, A. S. *La generalización de la integral definida desde lasperspectivas numéricas, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas deenseñanza y de aprendizaje*. Tese de Doutorado. Laguna: Universidad La Laguna, 2005. 498f.

MORAN, J. M. Mudar a forma de ensinar e aprender com tecnologias. Interações, n. 9, 2000.

PICADO, J. Apontamentos de Geometria Diferencial. Departamento de matemática, Universidade de Coimbra, 2006.

ROBINET, J. De l´ingenieriedidactiques.*Cahier Didactiques dês Mathematique***s**.Nº 1, 1-10. 1983.

STEWART, J. *Cálculo***.** Vol. 2. Editora Cengage-Learning, 2012.

TENEBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*.ed. 2ª. Editora Blucher. 2008.

THORPE, J. A. Elementary topics in differential geometry. Springer Science & Business Media. 2012.

Ana Carla Pimentel Paiva - Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará – IFCE – carlapimentel00@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves- Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará – IFCE – fregis@ifce.edu.br