Zetetiké

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

A disciplina Análise Real e o futuro professor de Matemática: um repensar

The discipline Real Analysis and the future Mathematics teacher: a rethink

Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo [1]

Marisa Martinez Tarran [2]

Angela Marta Pereira das Dores Savioli [3]

Geraldo Aparecido Polegatti [4]

Resumo

O objetivo desse artigo é promover uma discussão a respeito da disciplina Análise Real com vistas a entender por que essa disciplina tem sua permanência em cursos de licenciatura em Matemática, considerando sua utilização na Educação Básica, e ao mesmo tempo é tão criticada por seu rigor e formalidade. Para atingir esse objetivo, trazemos um levantamento dessa disciplina em cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, perspectivas de trabalhos nacionais e internacionais a respeito do tema, situações relacionadas ao Ensino Fundamental e Médio que justificariam discussões em salas de aula de análise, bem como um olhar para essa disciplina com base no Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) e no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), pertencentes ao quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino de Deborah Ball e colaboradores. Como resultado elencamos algumas justificativas para a permanência dessa disciplina em currículos de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Análise Real; Formação de Professores de Matemática.

Abstract

The purpose of this article is to promote a discussion about the Real Analysis discipline to understand why this discipline has its permanence in Mathematics degree courses, considering its use in Basic Education, and at the same time it is so criticized for its rigor and formality. To achieve this goal, we bring a survey of this discipline in undergraduate courses in Mathematics in Brazil, perspectives of national and international work on the topic, situations related to Elementary and High School that would justify discussions in analytical classrooms, as well as a look at this discipline based on the Horizon of Content Knowledge (HCK) and on the Specialized Content

---

Submetido em: 21/11/2021 – **Aceito em**: 20/12/2023 – **Publicado em**: 30/12/2023

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Brasil. E-mail: ligiabitten@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7376-4958

[2] Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Brasil. E-mail: marisa_mt@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8283-0144

[3] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Brasil. E-mail: angelamartasavioli@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5624-6398

[4] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor do Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT), Brasil. E-mail: geappolegatti@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4515-3855

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Knowledge (SCK) belonging to the theoretical framework of Mathematical Knowledge for Teaching by Deborah Ball et al. As a result, we list some justifications for the permanence of this discipline in the Mathematics Degree curriculum.

Keywords: Mathematics Education; Real Analysis; Mathematics Teacher Education.

Introdução

Interessados em investigar e justificar a importância da disciplina Análise Real para a formação do futuro professor de Matemática, realizamos um levantamento acerca da oferta dos cursos de licenciatura em Matemática, que ocorrem de forma presencial, no âmbito das instituições públicas do Brasil. Apesar de organizarmos os dados considerando os Institutos Federais, Universidades Federais e Estaduais, no presente artigo, optamos por trazer o panorama sem realizar essa subdivisão, uma vez que o foco é a disciplina Análise Real. Tal panorama é apresentado no Quadro 1, conforme a oferta por região do Brasil.

Quadro 1 – A oferta de licenciatura em Matemática nas instituições públicas do Brasil

Região				
Centro-oeste	Nordeste	Norte	Sudeste	Sul
36	101	44	75	49

Fonte: Os autores

Nesse cenário, a região Nordeste configura com a maior quantidade de cursos de licenciatura em Matemática, atingindo quase um terço do total, ou seja, 101 dos 305 cursos. Com relação à disciplina Análise Real, em nossas leituras aos documentos dos cursos, notamos a presença de oito nomenclaturas diferentes: Análise; Análise Matemática; Análise na Reta; Análise para Licenciatura; Análise Real; Fundamentos de Análise; Introdução à Análise e Tópicos de Análise. O nome Análise Real foi o que apresentou maior representatividade configurando em mais de um terço dos nomes das disciplinas nos cursos pesquisados, motivo pelo qual estamos utilizando-o.

Salientamos que a temática de Análise Real não se apresenta como disciplina obrigatória em apenas dois cursos de licenciatura em Matemática do montante investigado: no curso da Universidade Federal do Ceará (UFC) no município de Fortaleza e no curso da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) em seu campus no município de Jacarezinho. O Quadro 2 traz os quantitativos de carga horária média da disciplina Análise Real nos cursos pesquisados por instituição e em cada Região do Brasil.

Quadro 2 – Quantitativo médio de carga horária de Análise Real nos cursos pesquisados em horas

Instituição	Carga média de Análise Real em horas por Região		
Instituto Federal	Centro-Oeste: 91	Nordeste: 78	Norte: 87
	Sudeste: 71	Sul: 76	Total: 81
Universidade Federal	Centro-Oeste: 106	Nordeste: 77	Norte: 79
	Sudeste: 83	Sul: 93	Total: 88
Universidade Estadual	Centro-Oeste: 107	Nordeste: 74	Norte: 83
	Sudeste: 78	Sul: 110	Total: 90
Média Geral	Centro-Oeste: 101	Nordeste: 76	Norte: 83
	Sudeste: 77	Sul: 93	Total: 86

Fonte: Os autores

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

A maior média regional pertence à Região Centro-Oeste, que atinge 101 (cento e uma) horas disponibilizadas para a disciplina Análise Real. Porém, os cursos pesquisados das Universidades Estaduais da Região Sul despontam com 110 (cento e dez) horas destinadas em média para essa disciplina. Assim, apesar de determinadas regiões apresentarem carga horária média maior que outras, bem como algumas instituições possuírem carga horária média maior que outras, é possível observar de forma marcante a presença da disciplina Análise Real nas matrizes curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática, que ocorrem de forma presencial, no âmbito das instituições públicas do Brasil.

Esse fator vai ao encontro do que é proposto nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de licenciatura em Matemática, que sugerem que conteúdos de "Fundamentos de Análise" sejam contemplados no currículo proposto pelas Instituições de Ensino Superior, podendo ser distribuídos ao longo do curso.

A partir do panorama apresentado, em que é possível perceber claramente a presença marcante da disciplina Análise Real em cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, no presente artigo buscamos entender a importância de ela estar presente em praticamente todos esses cursos, considerando sua utilização na Educação Básica. Esse trabalho corresponde a uma pesquisa bibliográfica, na qual, segundo Severino (2007, p. 122), "Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos".

O presente artigo se trata de uma revisão narrativa. De acordo com Gonçalves e Fiorentini (2019, p. 229), esse tipo de revisão "[...] diferencia-se das revisões sistemáticas por reunir, para revisão, publicações que não possuam uma problemática definida e comum de estudo, mas que abordam ou contemplam uma questão ou temática de interesse do pesquisador". Nesse contexto metodológico de investigação, buscamos responder a seguinte questão: "Por que o professor precisa estudar Análise Real no curso de licenciatura para ensinar Matemática na Educação Básica?". Com vistas a encontrar respostas a esse questionamento, em um primeiro momento abordamos a visão a respeito da disciplina Análise Real segundo alguns autores como Dysman e Dysman (2021) e Moreira e Vianna (2016), bem como apresentamos alguns resultados de pesquisas já publicadas que revelam as opiniões de grupos envolvidos com o tema.

Na sequência, entendendo que "Os professores com um conhecimento conceitual profundo na matéria estabelecem mais conexões e relações com outros tópicos e podem transladar esse conhecimento ao ensino" (Marcelo-García, 2009, p. 119), e que o "conhecimento superficial prejudica os alunos, limitando-lhes uma compreensão dos conceitos, levando-os a representações errôneas da disciplina" (p. 119), e, com isso, justificar a nossa visão a respeito da importância da disciplina para a formação dos futuros professores de Matemática, nos apoiamos no Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowlege – HCK)* pertencente ao quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching – MKT*), de Deborah Ball e colaboradores.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Por fim, interessados em justificar ainda mais a importância dessa disciplina para a formação do professor de Matemática, elaboramos duas situações passíveis de acontecerem em salas de aula do Ensino Médio e capazes de evidenciar que um conhecimento de conteúdo fragmentado e superficial poderá afetar o modo como os professores ensinam, tornando-os “incapazes de conectar os comentários e perguntas dos alunos com outros temas” (Marcelo-García, 2009, p. 119) ou restringindo as atividades dos estudantes a aspectos procedimentais.

Discussões iniciais

Para discutir a importância do ensino da disciplina Análise Real para os licenciandos em Matemática, acreditamos ser essencial buscar entender as posições de alguns grupos envolvidos neste processo, os pesquisadores da Matemática e da Educação Matemática, professores formadores, professores de Matemática do Ensino Básico e licenciandos.

A pesquisa realizada por Almouloud, Silva, Miguel e Fusco (2008) já apontava as dificuldades com que professores da Educação Básica se deparavam na resolução de problemas que envolviam demonstrações e provas matemáticas, principalmente por eles utilizarem uma linguagem matemática carente de significado e, por consequência, criando barreiras para esses professores ensinarem seus alunos a raciocinar, argumentar, provar e demonstrar matematicamente.

Para evidenciar a opinião de um grupo de matemáticos e outro de educadores matemáticos, consideramos relevantes os dados trazidos por Cury, Moreira e Vianna (2005) e Moreira e Vianna (2016). Nessas pesquisas foram utilizados questionários muito parecidos, com perguntas que dizem respeito aos conteúdos que deveriam ser ministrados nas aulas de Análise Real para o curso de licenciatura em Matemática, à bibliografia de apoio para o ensino dessa disciplina, bem como à obrigatoriedade da presença da disciplina nos cursos. Em nossa análise, focamos nas razões utilizadas pelos entrevistados para justificar a obrigatoriedade da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em Matemática.

Cerca de 90% dos matemáticos entrevistados consideravam a disciplina muito importante para a formação do professor de Matemática, devendo, obrigatoriamente, compor a ementa do curso, enquanto que, para os educadores matemáticos, na pesquisa de 2016, essa foi a opinião de pouco mais de 80% dos entrevistados. Vale ressaltar que, tanto na pesquisa de 2005 quanto na de 2016, ninguém manifestou a opinião de que a disciplina Análise Real não deveria compor a ementa do curso, mas há um pequeno percentual de entrevistados que não responderam ou manifestaram opiniões menos conclusivas. Apesar da natureza das profissões desses dois grupos serem muito distintas, as justificativas apresentadas por eles foram muito parecidas, e estão embasadas, majoritariamente, em três eixos principais: o estudo de Análise Real é uma boa (e talvez a melhor) oportunidade que os alunos têm de desenvolver uma cultura matemática e entender o que significa pensar matematicamente; o estudo de Análise Real proporciona uma base mais sólida para os futuros professores do Ensino Básico, que passam a ter mais segurança ao ministrar aulas e mais facilidade em estabelecer conexões entre os temas que ensinam e, por fim, a Análise Real tem aplicações

Zetetiké

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

em outras ciências, e estudá-la fornece meios para compreender fenômenos que ocorrem em outras áreas do conhecimento.

Outro grupo cuja opinião deve ser considerada, uma vez que tem relação próxima com os futuros professores do Ensino Básico, é composto por professores da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em Matemática. Martines (2012) concluiu, por meio das respostas a uma entrevista realizada com quatro professores que ministram essa disciplina na licenciatura e quatro coordenadores de curso, que, entre os motivos que justificam a importância dela no curso, alguns merecem destaque, a saber, o papel de fundamentar o conhecimento matemático do futuro professor, mesmo considerando que a Análise Real não tem uma aplicação direta no Ensino Básico, consolidar e formalizar conteúdos e, por último, fundamentar o conhecimento sobre o conjunto dos números reais.

Há, por fim, mais um grupo cuja opinião a respeito da Análise Real convém ser mencionada. Gomes (2013) concluiu, após pesquisa realizada com três professores do Ensino Básico e três acadêmicos de licenciatura em Matemática, que a presença dessa disciplina no curso é rodeada, ainda, por algumas incertezas, e até contradições, por parte dos sujeitos da pesquisa. Eles acreditam que

> [...] a disciplina de Análise não é significativa para o professor de matemática, mas, ao mesmo tempo, proporciona ao licenciando/licenciado uma visão profunda do que é abordado na educação básica. [...] Da mesma forma que se mostra inútil, podendo ser excluída da grade curricular de um curso de licenciatura em matemática, eclode em possibilidades para fortificar e embasar as atitudes do professor (Gomes, 2013, p. 256).

Assim, Gomes (2013) mostra que, mesmo considerando a Análise Real uma disciplina difícil, que gera sofrimento e aversão e que é, muitas vezes, vista como formal demais pelos sujeitos da pesquisa, eles compreendem o seu importante papel para os futuros professores do Ensino Básico. De acordo com o autor, as respostas dos participantes de sua pesquisa parecem apontar para duas trajetórias paralelas, que são transitadas pelos professores ou futuros professores de Matemática: "*a disciplina de Análise não é significativa para o professor de matemática, mas, ao mesmo tempo, proporciona ao licenciando/licenciado uma visão profunda do que é abordado na educação básica*" (p. 256, grifo do autor).

Cabe salientar que, apesar das divergências e polêmicas que cercam este assunto, todas estas pesquisas apontam para uma unanimidade com relação à importância da Análise Real na ementa dos cursos de licenciatura em Matemática. Ressaltamos que os dados apresentados aqui retratam as opiniões de um grupo restrito de pessoas e, por isso, não devem ser generalizadas, nem tomadas como a opinião do grupo todo.

Gomes, Otero-Garcia, Silva e Baroni (2015) trazem relatos de pesquisas a respeito de Análise Real, com discussões diversas que vão desde a *decoreba* até a aritmetização dessa disciplina, que a *libertou* da argumentação geométrica e da intuição. Para esses autores,

> [...] a formalidade da análise é uma herança cultural de seu desenvolvimento; ao longo da história, como corpo do conhecimento – e as técnicas empregadas, desde o método analítico grego até a aritmetização da análise pautaram-se na ideia de rigor

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

característica de cada época" (Gomes et al, 2015, p. 2).

Ainda segundo esses pesquisadores, "há uma íntima relação entre a análise (em todas as suas facetas) e as demonstrações" (Gomes et al, 2015, p. 2), e algumas características da Análise Real surgem, como formal, difícil, teórica e abstrata. De acordo com os autores, trata-se de uma disciplina que necessita de conteúdos de outras disciplinas, que o estudante utilize intuição e que se precisa ir além dela.

Gomes et al. (2015) apoiados em Souza, Perez, Bicudo, Bicudo, Silva, Baldino e Cabral (1991), argumentam que conteúdos do ensino básico se situam em domínios da contagem e da medida, respectivamente, o discreto numérico e o contínuo geométrico. Além disso, os autores, a partir ainda do trabalho de Souza et al. (1991), traçam uma trajetória para a distribuição de disciplinas em um curso de licenciatura em Matemática para que, ao chegar na Análise Real, o estudante tenha condições de acompanhar a disciplina do modo como ela é apresentada, o que levaria o estudante a construir os pensamentos diferencial e algébrico e a complementar sua visão de vários "conteúdos abordados na educação básica pela perspectiva da matemática" (Gomes et al., p. 1258). Asseguram, assim, que ela deva ser apresentada quando da constituição do pensamento diferencial.

Considerando a importância do aprofundamento de conceitos matemáticos no processo de formação do professor de Matemática, Gomes et al. (2015), ademais, expõem dois pontos chamados por eles de significativos: "[...] a disciplina de análise proporciona certa autonomia ao professor atuante na educação básica" e "[...] coloca a disciplina de análise dentre aquelas que elevam o nível de pensamento do licenciado/futuro professor da educação básica a um patamar superior" (p. 1260).

Nessa perspectiva, Dysman e Dysman (2021, p. 356), ao discutirem a problemática da Análise Real na licenciatura em relação a uma colonização epistêmica e a uma lógica do pensamento abissal e da ecologia dos saberes de Boaventura Santos[5], atentam para

> [...] o fato de que, se por um lado tendemos a crer na importância do ensino de matemática (e da Análise na Licenciatura) por seu potencial emancipador, por outro lado, quando este ensino se transforma em imposição (de fórmulas, métodos, teoremas, demonstrações, etc.) legitimada com base em hierarquias (entre saberes ou sujeitos) que reproduzem a lógica colonial, esse mesmo ensino pode ser transformado em instrumento que contribui para a emergência da subumanidade moderna mencionada por Santos, instrumento que poda autoestima, sequestra autonomia e produz submissão. Eis o paradoxo da educação matemática formulado por Paul Ernest (2004)[6]: "a matemática é muito clara e coerente, porém quando o raciocínio não é entendido ela se torna o mais irracional e autoritário dos assuntos" (p. 356).

É claro que ainda há muitas dúvidas a serem respondidas e inúmeros questionamentos podem ser feitos, mas, como o nosso objetivo neste artigo é apresentar alguns argumentos

---

[5] Santos, B. S. (2018). *Construindo as Epistemologias do Sul*: Para um Pensamento Alternativo de Alternativas. Volume 1. Buenos Aires: CLACSO. Disponível em: https://www.boaventuradesousasantos.pt/media/Antologia_Boaventura_PT1.pdf

[6] Ernest, P. (2004). *Postmordernism and the Subject of Mathematics.In Walshaw, M. Mathematics Education whithin the Postmodern*. Greenwich: IAP.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

que mostrem a importância da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura, vamos nos ater a algumas perguntas principais. Moreira e Vianna (2016, p. 527) questionam

> [...] por que o futuro professor da escola precisa adquirir essa cultura matemática que a Análise Real oportuniza? Por que precisa entender o que significa pensar matematicamente, segundo o desenvolvimento dessa disciplina o leva a entender? E por que, como futuro profissional docente da Educação Básica, ele precisa entender a natureza desse conhecimento matemático que a Análise Real lhe propõe?

De acordo com Moreira e David (2005), há distinções de abordagem e produção do conhecimento matemático desenvolvidas no âmbito do Ensino Superior (com destaque para os cursos de Licenciatura em Matemática) e o conhecimento matemático ensinado no contexto da Educação Básica. Para os autores, o primeiro corresponde à Matemática Acadêmica que abrange todo o escopo científico de conhecimentos que são constatados e constituídos por matemáticos profissionais (aqui com destaque para a Análise Real), já o segundo se trata da Matemática Escolar que é formada pelos saberes matemáticos já validados formalmente pela Matemática Acadêmica, e que são relacionados ou conectados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Compreendemos que os conhecimentos de Matemática Acadêmica estudados na disciplina de Análise Real proporcionam, entre outras coisas, a validação teórica e formal dos conhecimentos de Matemática Escolar presentes na Educação Básica. No caso das definições e demonstrações, segundo Moreira e David (2005), a prova matemática dedutiva e rigorosa (presente em Análise Real) que conduz às demonstrações matemáticas, no âmbito da Matemática Escolar, em meio à prática de ensino do professor de Matemática, pode ser trabalhada com argumentações menos formais e que são mais convenientes no contexto da Matemática Escolar. Nesse sentido, Lima (2007) salienta que provar e demonstrar, mesmo na Educação Básica, é uma forma de convencer pela razão ao invés de pela autoridade, mas o autor enfatiza que é preciso ter equilíbrio para provar e demonstrar respeitando o nível intelectual dos alunos, priorizando certos fatos matemáticos importantes, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras, que possuam demonstrações fáceis e elegantes.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, partir de aplicações com resolução de problemas contextualizados, envolvendo a utilização de metodologias de ensino articuladas a fatos e personagens históricos da área, tem sido fonte de pesquisas no âmbito da Educação Matemática. Contudo, como destaca Lima (2007), precisamos formular e trabalhar de forma correta, precisa e objetiva os conceitos e definições matemáticas envolvidas no processo educacional e os enunciados das proposições, bem como promover a prática do raciocínio dedutivo, estabelecer conexões entre diversos conceitos além das variadas possibilidades de interpretações e reformulações de ideias que emergem das discussões com os estudantes.

Colaborando com o debate, segundo Morais Filho (2016, p. 157, grifo do autor),

> Não é exagero dizer que expor as ideias de forma clara e precisa, e saber redigir uma demonstração é tão importante quanto inventá-la; não basta apenas resolver exercícios complicados, ter *sacadas* geniais ou entender profundamente teorias matemáticas. É

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

> necessário escrever as próprias ideias. O ato de escrever melhora o pensamento, fortalece as convicções nos argumentos, apura o raciocínio e deve se tornar uma prática.

Para Ávila (2011, p. 1-2), “um dos objetivos principais da Análise para a licenciatura é a prática em demonstrações. Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da Matemática”. Assim, compreendemos que o estudo e o desenvolvimento das demonstrações matemáticas que abrangem o escopo disciplinar de Análise Real buscam aprimorar a capacidade do futuro professor em conceituar matematicamente e lhe fornecer suporte de conhecimento matemático para as discussões com seus estudantes. Afinal, a Matemática “não é útil apenas para as coisas concretas do cotidiano real, mas é um instrumento formidável para entender o mundo em suas formas tão variadas” (D’Amore, 2011, p. 23).

Nesse contexto, compreendemos que a disciplina Análise Real é fundamental para a formação inicial do professor de Matemática, para que ele possivelmente tenha segurança e convicção na arte de conceituar matematicamente, escrever as próprias ideias e construir demonstrações matemáticas. Não pretendemos dizer, com isso, que somente a presença da disciplina Análise Real no currículo obrigatório da licenciatura em Matemática e sua frequência por parte dos futuros professores, já garantam uma boa formação profissional em conceituação e demonstrações matemáticas. Porém, a Análise Real de alguma maneira fecha um ciclo de amadurecimento matemático e, como destacam os trabalhos de Wasserman, Fukawa-Connelly, Villanueva, Mejia-Ramos e Weber (2017) e Wasserman, Weber, Fukawa-Connelly e Mcguffey (2019), cabe ao professor formador responsável por esse componente curricular promover diálogos a fim de estabelecer conexões entre os conteúdos de Análise Real e os conteúdos matemáticos presentes no Currículo da Educação Básica. Na próxima seção, trazemos o entrelaçamento entre o HCK e o SCK como aporte teórico de nossas discussões.

Entre o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e o Conhecimento Especializado de Conteúdo a ensinar

Por muito tempo, acreditou-se que o domínio do conteúdo a ser ensinado era o que bastava para o exercício da prática do professor. Assim, o conhecimento técnico do conteúdo era tido como necessário e suficiente para o bom desenvolvimento da profissão. No entanto, na metade da década de 1980, a pesquisa em Educação foi marcada pelo início de um movimento que apontava para a importância de um tipo de conhecimento que vai além do domínio técnico do conteúdo. Schulman (1986) introduz, então, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, que engloba o conhecimento necessário para a prática do ensino e abrange grande quantidade de exemplos, ilustrações, analogias e diferentes maneiras de se representar as ideias. Nesse contexto, Schulman afirma que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo é uma “maneira de representar e formular o conteúdo que o torna compreensível para os outros. […] E também inclui um entendimento do que torna a aprendizagem de determinados tópicos fácil ou difícil” (p. 9, tradução nossa). O autor distinguia o Conhecimento Pedagógico do

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Conteúdo daquele conteúdo puramente técnico relativo ao assunto tratado.

Ball, Thames e Phelps (2008), na tentativa de desenvolver os estudos iniciados por Schulman e estabelecer de maneira mais clara as distinções entre os tipos de conhecimento no campo da Matemática, começam a utilizar, então, o termo Conhecimento Matemático para o Ensino para se referir ao conjunto de todos os conhecimentos, habilidades e técnicas que fazem parte da prática do professor de Matemática, para além do conhecimento técnico do conteúdo. Tomando como base o trabalho desenvolvido por Schulman, eles propõem uma subdivisão do Conhecimento Matemático para o Ensino em dois subdomínios: o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, que são, então, subdivididos em outras categorias de conhecimento. Uma delas, que é o foco aqui, resulta da preocupação de Ball (1993) com a questão de como a Matemática Escolar pode se conectar com a Matemática Acadêmica. Nesse contexto emerge o Conhecimento no Horizonte, uma espécie de "visão periférica da matemática, uma visão do universo matemático mais amplo que o ensino requer" (Ball & Bass, 2009, p. 1, tradução nossa).

O Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), para Ball, Thames & Phelps (2008), funciona como uma consciência da maneira como conteúdos matemáticos se relacionam uns com os outros no currículo escolar, bem como apresenta possibilidades de conexões com a Matemática Acadêmica. Conforme Ball e Bass (2009), o HCK diz respeito às relações entre o que está sendo ensinado no momento e um conhecimento mais profundo e amplo das estruturas, ideias e princípios matemáticos. Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney (2012) definem o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte como uma

> […] familiaridade com a disciplina (ou disciplinas) que contribuem para o ensino do conteúdo escolar, proporcionando aos professores um senso de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado e conectado ao território disciplinar mais amplo. […] Permite que os professores 'escutem' os alunos, façam julgamentos acerca da importância de determinadas ideias ou questões, e tratem a disciplina com integridade […] (p. 4642, tradução nossa).

Vale ressaltar, no entanto, que isto não significa dizer que o professor deve ensinar tais conteúdos para seus alunos, o que poderia ser irresponsável, uma vez que não fazem parte do currículo e integram um corpo de conhecimentos que os alunos não estão preparados para acessar no momento. O conteúdo no horizonte atua como "uma consciência – mais como um turista experiente e apreciativo do que como um guia turístico – do grande universo matemático no qual as instruções e experiências presentes se situam" (Ball & Bass, 2009, p. 6, tradução nossa).

Por outro lado, segundo Silva, Andrade e Santos (2018, p. 216, grifo dos autores), o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) a ensinar

> [...] é único para o ensino, no sentido de que somente professores de matemática (teoricamente) necessitam dele. Muitas vezes, durante a atividade do ensino, os professores têm de fazer um tipo de trabalho matemático que outros não precisam fazer. Este trabalho envolve uma espécie de *descompactação* da matemática, que não se faz necessária em outras áreas. A intenção e o objetivo pedagógico, comprovam que esse tipo de conhecimento é bem mais do que uma sólida compreensão do

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

conteúdo matemático.

A disciplina Análise Real constitui um conjunto de conhecimentos de Matemática Acadêmica que (teoricamente) se situa no horizonte do professor de Matemática, e que não deve ser ensinado aos estudantes da Educação Básica. O professor formador responsável pela disciplina de Análise Real na Licenciatura em Matemática precisa estabelecer diálogos e interlocuções com conteúdos da Matemática Escolar, no sentido de procurar problematizar (formular e reformular problemas), dar outros significados aos conteúdos escolares, fazer e refazer conexões desses conteúdos, procurando promover transposições didáticas entre os conhecimentos sistemático e formal da Análise Real (Matemática Acadêmica) e os conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica (Matemática Escolar), em ações pedagógicas não dominadoras, mas solidárias, dos saberes acadêmicos (HCK) em relação aos saberes da prática escolar (SCK).

Algumas situações que justificam a importância da Análise Real na formação de professores de Matemática

Situação 1

De acordo com Ávila (2011), o contato que os estudantes da Educação Básica têm com os números irracionais se limita ao estudo do número π, associando-o à razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, e "o aluno é apenas informado de que a expansão decimal desse número é infinita e não periódica" (p. 35). Para o autor, outro momento crítico com relação aos números irracionais ocorre no estudo de cálculos com radicais, sendo, geralmente, somente informado aos estudantes que números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, por exemplo, são números irracionais. Segundo Ávila (2011, p. 35), "Esse 'aprendizado' dos números irracionais pode deixar no aluno a impressão de que números irracionais são o π e alguns radicais; e ele talvez até forme a ideia de que o conjunto desses números seja bem reduzido, no máximo enumerável".

Tendo em vista o cenário dessa relação frágil entre os estudantes da Educação Básica e os irracionais, no Quadro 3 apresentamos uma suposta situação no âmbito do Ensino Médio com o intuito de ilustrar a importância de o professor de Matemática da Educação Básica possuir conhecimento de Análise Real mesmo que sua atuação seja apenas nesse nível de ensino.

Quadro 3 – Descrição da situação 1

Após um professor de Matemática definir, em uma de suas aulas para o Ensino Médio, número racional como "o número que pode ser expresso como quociente de dois inteiros", número irracional como "o número que não é racional" e $\mathbb{R}$ como o conjunto dos números que são racionais ou irracionais, uma dúvida que pode emergir de um estudante é: ___Professor, no nosso dia a dia e na disciplina de Matemática aparecem mais números racionais do que irracionais. É verdade que existem mais números

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

racionais do que irracionais? Na sequência, na intenção de responder seu colega, outro estudante pode dizer: ___Claro que não, o conjunto dos números racionais e irracionais são ambos infinitos, então eles têm a mesma quantidade de números.

Fonte: Os autores

Para Klein (1932), a maioria dos estudantes da Educação Básica tende a contentar-se com cálculos que deem resultados que apresentem uma exatidão limitada, e no caso dos números irracionais, geralmente, compreende-os por meio de exemplos, e isso é o que usualmente é feito pelos professores de Matemática. Ou seja, os números irracionais são compreendidos, por grande parte dos estudantes da Educação Básica, como um conjunto numérico à parte dos racionais e que é composto por alguns números específicos. Para o autor, é esperado que o professor de Matemática ensine de forma tradicional e estanque, contudo é preciso que o professor seja capaz de promover conexões entre a Matemática desenvolvida na Educação Básica e a Matemática que ele estudou no Ensino Superior de forma a influenciar em sua práxis.

Nesse sentido, com relação ao ensino de Análise Real na licenciatura em Matemática, o professor formador responsável por essa disciplina pode aplicar o modelo de ensino desenvolvido por Wasserman et al. (2017). De acordo com os autores, o modelo inicia com a escolha do conteúdo matemático da Educação Básica a ser ensinado, bem como a observação de possíveis práticas de ensino de matemática que professores da Educação Básica costumam fazer no processo de ensino do conteúdo em discussão. Em seguida, o professor formador responsável pela disciplina de Análise Real conduz as discussões com os seus acadêmicos no intuito de identificar o conteúdo de Análise Real que pode ser adequado para desenvolver e, de certa forma, validar por meio de prova formal o conhecimento matemático necessário e, em comunhão com as práticas de ensino anteriormente observadas, atua para promover o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo matemático da Matemática Escolar em estudo.

Nesse processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática Acadêmica presentes no currículo da disciplina de Análise Real da licenciatura em Matemática, Wasserman et al. (2019) salientam que o modelo instrucional de Wasserman et al. (2017)

> [...] considera as relações entre: (i) Matemática Acadêmica; (ii) Matemática Escolar; e (iii) ensino de Matemática Escolar. Os dois primeiros são sobre conteúdo; o terceiro é sobre ensino. O Conhecimento Especializado do Conteúdo para o ensino é desenvolvido à medida que as ideias do primeiro e do segundo são aplicadas ao terceiro. Nosso modelo instrucional tem três fases e “realiza” o estudo de Matemática Acadêmica, começando e terminando com uma discussão sobre ensino. As situações pedagógicas motivam o estudo da Matemática Acadêmica para que os acadêmicos vejam a relevância do conteúdo em estudo e fornecem uma aplicação de como a Matemática Acadêmica pode informar o processo de ensino desse conteúdo (Wasserman et al., 2019, p. 7, tradução nossa).

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Iniciando o debate no âmbito da História da Matemática, de acordo com Roque (2015), durante o século XVII os números irracionais tinham manipulação livre pelos estudos dos matemáticos e sua natureza matemática não foi investigada. Por exemplo, "Pascal e Barrow afirmavam que números irracionais deviam ser entendidos somente como símbolos, não possuindo existência independente de grandezas geométricas contínuas. Um número como $\sqrt{3}$, por exemplo, deveria ser entendido como uma grandeza geométrica" (p. 434). No final do século XVIII e início do século XIX, os números que hoje denominamos de irracionais apareciam nos estudos dos matemáticos como Charles Sanders Peirce (1839-1914), George Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916), inclusive no processo de resolução de problemas, mas ainda não estavam definidos, sequer eram admitidos como números. "Todos os nomes utilizados para designar esses números exprimem a dificuldade de admitir sua existência ou, melhor dizendo, sua cidadania matemática: números 'surdos' ou 'inexprimíveis'" (Roque, 2015, p. 409, grifo da autora).

Em meio às discussões envolvendo o conceito de continuidade, os números irracionais se agruparam aos números racionais para darem corpo ao conjunto dos números reais. Segundo Bacha & Saito (2014, p. 15)

> Pode-se dizer que à medida que progredia no estudo da continuidade, Peirce foi levado a rejeitar a visão de Cantor de que o contínuo fosse alguma forma geométrica composta de infinidade de pontos. Enquanto Cantor e Dedekind consideravam os números irracionais como complemento dos racionais, conferindo abrangência sobre os números reais, Peirce viu a relação entre racionais e irracionais de forma diferente. Ele concluiu que havia uma espécie de proximidade nos reais que, na verdade, constituía uma violação da continuidade.

De acordo com Bacha & Saito (2014), o conceito de continuidade para Peirce tinha uma importância primordial, sendo necessária "para explicar o espaço, tempo e movimento, mas também a evolução, o desenvolvimento psicológico, a própria ciência, enfim seria um caminho para a verdade filosófica, mas também para a verdade científica em todas as áreas" (p. 20). Por outro lado, segundo Bacha & Saito (2014), enquanto Cantor pesquisou a continuidade dos números reais com seu estudo envolvendo séries trigonométricas, Dedekind buscou caracterizar a continuidade ou a ideia de contínuo, para construir a definição de números reais, por meio do processo matemático que ficou conhecido como Cortes de Dedekind. Na busca por constituir processos de ensino envolvendo temas básicos do Cálculo Diferencial, principalmente com o estudo de limites, "Dedekind percebeu que a intuição geométrica, apesar de ser um guia, não era rigorosamente satisfatória, assim se voltou para um estudo puramente aritmético da continuidade e dos números irracionais" (p. 20).

Broetto & Santos-Wagner (2019, p. 740) salientam que os números irracionais fornecem sustentação para a composição do sistema numérico, sendo fundamental sua compreensão por parte dos estudantes da Educação Básica. "A insuficiência dos racionais para realizar a medida de um segmento qualquer a partir de uma unidade de medida preestabelecida, como a constatação da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao lado, justifica a ampliação do campo numérico".

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

No caso da suposta situação relatada, além desses fatos e personagens da História da Matemática, é importante que o professor conheça os resultados provados por George Cantor, como o de que "o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável" e de que "o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável", pois sabendo disso e ainda que a reunião de dois conjuntos enumeráveis é enumerável e que o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, chegaria à conclusão de que o conjunto dos números irracionais é não enumerável e que, portanto, existem "muito mais" números irracionais do que racionais, no sentido de que um conjunto não enumerável (no caso, os irracionais) possui cardinalidade maior que um conjunto enumerável (no caso, os racionais).

É verdade que tais argumentos fogem completamente ao nível e aos objetivos do Ensino Médio, assim como a apresentação rigorosa da teoria dos números reais conforme realizada nos cursos de Análise Real. No entanto, se o professor é capaz de relacionar os conteúdos que precisa ensinar àqueles que estudou na graduação, como salientam Klein (1932) e Broetto & Santos-Wagner (2019), em particular na disciplina Análise Real, possivelmente, esse professor terá maior segurança nos diálogos com os seus estudantes, elucidando dúvidas como essa que exemplificamos, e poderá ir ao encontro das inquietações dos estudantes, estimulando-os, inclusive, a interagir durante as aulas.

De acordo com Elias (2017, p. 207),

> Ao nos preocuparmos com o HCK envolvendo esses números, precisamos, necessariamente, compreender como os racionais se conectam com os irracionais e, consequentemente, com os reais. Se, por um lado, a construção formal dos números racionais por classes de equivalência é feita a partir das operações já conhecidas para os números inteiros, por outro, a natureza da construção dos números reais é bem diferente, uma vez que necessita de noções da Análise Real, como a de limite.

Segundo Ball e Bass (2009), o HCK "não é o tipo de conhecimento que os professores precisam ter para explicar para seus alunos; de forma similar, o conhecimento do horizonte não cria um imperativo para agir em uma determinada direção matemática" (p. 10, tradução nossa). Mesmo assim, ter domínio dos conteúdos a serem dialogados com os estudantes, conhecer os conceitos envolvidos em sua integridade e, dependendo do objeto matemático em debate, investigar o contexto histórico analisando os fatos e personagens que delinearam e constituíram a construção dos conhecimentos matemáticos atrelados, pode guiar o professor em uma direção de mais compromisso com o ensino, evitando distorções que podem provocar equívocos conceituais na aprendizagem da Matemática e, bem como já destacado por Ávila (2011), no processo de ensino e aprendizagem dos números irracionais.

Situação 2

Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 61) "A igualdade $1 = 0{,}999\ldots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes", e um professor que, em seu processo de formação, não teve a oportunidade de pensar a respeito, pode sentir-se incomodado e confuso com questões a ela relacionadas. Para ilustrar tais questões e colaborar

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

com o debate acerca da importância da Análise Real na formação do professor de Matemática e do HCK, no Quadro 4 descrevemos a situação envolvendo a igualdade mencionada.

Quadro 4 – Descrição da situação 2

Após um professor de Matemática definir, em uma de suas aulas para o Ensino Médio, o que é uma dízima periódica simples, concluir que toda dízima periódica simples representa um número racional, que recebe o nome de fração geratriz, e ir além, como nos compêndios de Aritmética, afirmando que "A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período" (Lima, 2006, p. 63), um estudante pode levantar o seguinte questionamento ao seu professor:
___ Professor, se encontrarmos a fração geratriz da dízima periódica $0{,}999\ldots$ do modo como vimos em aula, fica $\frac{9}{9}=1$. É verdade que $0{,}999\ldots$ é igual a 1 e que podemos escrever $0{,}999\ldots=1$?
Visando colaborar com as discussões em sala de aula, outros três estudantes podem participar do debate respondendo o seguinte:
___ Eu acho que $0{,}999\ldots$ é quase 1.
___ Eu também acho, nesse caso deveríamos usar o sinal de aproximado e não de igual. Para mim, igual é igual.
___ Calma, $\frac{1}{3}$ não é $0{,}333\ldots$? Então se fizermos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ vamos ter, por um lado $\frac{3}{3}=1$ e, por outro, $0{,}333\ldots+0{,}333\ldots+0{,}333\ldots=0{,}999\ldots$. Então $0{,}999\ldots=1$, não é mesmo professor?

Fonte: Os autores

Assim como para lidar com a Situação 1 o professor precisa conhecer tópicos de Análise Real, a Situação 2 exige o entendimento de assuntos relacionados a esta disciplina, e foi por nós pensada para justificar a importância da presença de Análise Real na matriz curricular dos cursos de licenciatura em Matemática, bem como para ilustrar a necessidade de uma maior proximidade da matemática ensinada nestes cursos com a matemática da prática do professor da Educação Básica. Diferentemente da Situação 1, não se utiliza aportes da História da Matemática dialogando com personagens e fatos. Aqui, vamos iniciar a discussão trazendo três resoluções, conforme o Quadro 5, que são debatidas por Elias (2017).

Quadro 5 – Três resoluções envolvendo a igualdade 1 = 0,999...

(1)

Se, $\frac{1}{9}=0{,}111\ldots$ $\frac{2}{9}=0{,}222\ldots$ $\frac{3}{9}=0{,}333\ldots$ $\frac{4}{9}=0{,}444\ldots$ $\frac{5}{9}=0{,}555\ldots$
logo, $\frac{9}{9}=0{,}999\ldots$ e se, $\frac{9}{9}=1$, então, $1=0{,}999\ldots$ Chavante (2015)

(2)

$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ $3.\frac{1}{3}=3.0{,}333\ldots$ $1=0{,}999\ldots$ Niven (1984)

(3)

$x=0{,}999\ldots$ $\quad 10x-x=9+0{,}999\ldots-0{,}999\ldots$
$10x=9{,}999\ldots$ $\quad 9x=9$

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

$10x = 9 + 0{,}999\ ...$	$x = 1$	Niven (1984)

Fonte: Elaborada pelos autores com base em Elias (2017)

De acordo com Elias (2017), a resolução (1), do Quadro 5, formulada por Chavante (2015), proporciona discussões no âmbito do Ensino Fundamental, mais precisamente com estudantes do sétimo ano. É um modo prático de apresentação dessa igualdade nesse nível de ensino, pois está embasada em uma maneira prática de se obter frações geratrizes de dízimas periódicas, como apresentado pela maioria dos livros didáticos do sétimo ano. Porém, como o próprio autor salienta, “Trata-se, como o próprio nome afirma, de uma maneira prática de se encontrar a fração geratriz, mas que nada justifica” (Elias, 2017, p. 204).

Com relação à resolução (2) do Quadro 5 formulada por Niven (1984), e que vai ao encontro da ideia proposta por um dos estudantes, ou seja, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0{,}333\ ... + 0{,}333\ ... + 0{,}333 \rightarrow 1 = 0{,}999\ ...$, Elias (2017), com base em Penteado (2004), salienta que nem sempre é possível realizar operações matemáticas com representações infinitas. Assim, essa situação não é consistente matematicamente. Já para a resolução (3) do Quadro 5 que também é apresentada por Niven (1984), de acordo com Elias (2017, p. 205, grifo do autor),

> Entendemos que essa seja uma justificativa plausível para o que se pretende, mas também traz estranhezas consigo. Ao multiplicarmos 0,9999… por 10, caímos em 9,9999… e “acreditamos” que a quantidade de nove à direita da vírgula é a mesma que a quantidade de nove em 0,9999…, pois, ao subtrairmos 0,9999… de 9,9999… e zeramos todas as casas decimais, concluindo que 9,9999…− 0,9999…= 9.

Para Elias (2017), a partir das discussões geradas pela igualdade 0,999... = 1, outras problematizações podem ser realizadas, tanto com os estudantes da Educação Básica quanto no processo de formação de professores de Matemática e de forma a fomentar debates que envolvam o conjunto dos números irracionais. “Por exemplo, se 0,999... e 1 forem diferentes, então deve haver um número real entre esses eles. Neste caso, qual seria a média aritmética entre esses dois números (0,999... e 1)?” (p. 208). A seguir, o leitor pode perceber quais seriam os conceitos e elementos de Análise Real envolvidos na Situação 2 e que poderiam ajudar um professor que vivenciasse uma situação como essa em sala de aula.

Dada a expressão decimal $\alpha = 0{,}999\ ...$ representada pelo número real $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$, de fato é possível afirmar que $\alpha = 1$. Neste caso, temos uma sequência não decrescente de números racionais

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$$

em que $\alpha_1 = \frac{9}{10}$, $\alpha_2 = \frac{99}{100}$, $\alpha_3 = \frac{999}{1000}$, $\alpha_n = \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots\frac{9}{10^n}$, que são valores cada vez mais aproximados do número real $\alpha = 1$, uma vez que $1-\alpha_1 = 0{,}1$, $1-\alpha_2 = 0{,}01$, $1-\alpha_3 = 0{,}001$ e, mais geralmente, $1-\alpha_n = 10^{-n}$, de modo que tomando n suficientemente grande, a diferença $1-\alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Neste caso, dizemos então que o número real $\alpha = 1$ é o limite da sequência de números reais que apresentamos. “O conceito de limite – um elemento fundamental na análise real – é útil

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

para reconciliar tensões sobre expansões decimais infinitas por meio de sequências ou séries convergentes, por exemplo, $0,\overline{9} = 1$" (Wasserman et al., 2017, p. 2, tradução nossa).

Assim, segundo Lima et al. (2006, p. 61), a única maneira de dirimir o aparente paradoxo $1 = 0{,}999\,...$ é esclarecer que "o símbolo $0{,}999\,...$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0{,}9$ $0{,}99$ $0{,}999$ etc". E conforme vimos anteriormente, esse número é 1.

Entendemos que o professor de Matemática que for atuar no âmbito do Ensino Médio precisa conhecer os objetos matemáticos descritos para sentir-se seguro frente aos questionamentos dos estudantes, e não correr o risco de ser influenciado pelos pontos de vista destes e vir a se equivocar em suas respostas. Além disso, esse conhecimento pode tornar o professor capaz de propiciar uma interação produtiva em sala de aula. Nesse sentido, concordamos com Elias, Gereti & Savioli (2015) que, para que a interação seja produtiva, faz-se necessário que ela esteja ao alcance dos estudantes. Assim, conforme os autores, "ao falar sobre as representações de um número racional, por exemplo, professor e aluno devem falar na mesma direção, compartilhando conhecimentos" (p. 12). Porém, como ressaltam Wasserman et al. (2017) e Wasserman et al. (2019), para que isso seja possível, é fundamental que o professor tenha consciência e respaldo dos conteúdos que estudou no curso de graduação, e que possa realizar as devidas relações entre o que aprendeu e o que irá ensinar.

Algumas considerações finais

A discussão acerca da presença da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em Matemática ainda suscita muitas polêmicas, apesar da pesquisa apresentada neste artigo mostrar que a quase totalidade das instituições públicas de Ensino Superior no Brasil a mantém em seu currículo, respeitando as diretrizes do Conselho Nacional de Educação. Como vimos em Gomes (2013), os licenciandos em Matemática e os professores da Educação Básica que participaram da pesquisa demonstraram certa aversão à Análise Real por considerá-la muito difícil e formal, bem como avaliaram que há um descompasso entre o que é aprendido na disciplina e o que é ensinado no Ensino Básico. Apesar disso, manifestaram um sentimento de que a Análise Real executa um importante papel na formação dos futuros professores de Matemática. O que pudemos perceber é que há unanimidade com relação à importância de se aprender essa disciplina, mas as razões para explicar tal posição permanecem, segundo a visão de grande parte das pessoas, um pouco obscuras.

De acordo com Wasserman et al. (2017, p. 2, tradução nossa),

> De fato, cursos de Análise Real projetados para professores às vezes se baseiam nessas conexões para tornar as ideias em análise real mais concretamente relacionadas à Matemática Escolar. No entanto, quando questionados sobre como cursos de Análise Real afetam seu processo de ensino, os professores raramente citam esses tópicos ou quaisquer outras conexões explícitas entre Análise e Matemática Escolar. Mesmo quando são mostradas aos professores explicações a partir de análises reais

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

> que resolvem as tensões descritas anteriormente, como uma prova de que $0,\overline{9} = 1$, muitos dizem que essas explicações não são relevantes para suas práticas de ensino. Para evitar interpretações errôneas, não afirmamos que essas ideias em Análise, na verdade, são irrelevantes para o ensino da Matemática Escolar, apenas que alguns professores as percebem como tal e a maioria não consegue conectar essas ideias a ações pedagógicas concretas.

É evidente que este assunto ainda precisa ser amplamente discutido com a finalidade de estabelecer, de maneira mais clara, qual é o papel da Análise Real na formação de professores de Matemática para que as dificuldades nitidamente presentes no seu ensino sejam enfrentadas de maneira mais consciente. Jakobsen et al. (2012) afirmam que os tópicos de "matemática avançada para os professores precisam estar demonstradamente relacionados ao trabalho do ensino nas escolas" (p. 4636, tradução nossa). Seguindo nesta direção, este artigo tem o intuito de trazer para o debate a ideia do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, teoria ainda pouco discutida no Brasil, porque entendemos que ela pode ajudar a fazer uma ponte entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar.

As situações 1 e 2 apresentadas mostram as relações que, apesar de serem sutis, claramente existem entre a Análise Real e os conteúdos estudados na Educação Básica. A aparente falta de relação entre esses conteúdos é compreensível, uma vez que a enumerabilidade de conjuntos, como na situação 1, e as séries, como na situação 2, não são temas que os estudantes devam, necessariamente, aprender, a não ser em cursos de Ensino Superior. No entanto, sem o conhecimento deles, o professor pode acabar tomando decisões menos acertadas no momento de conduzir as dúvidas como as que foram apresentadas. Mesmo que os estudantes não tenham intenção de construir carreiras na Matemática, o professor deve ter condições de dirimir suas dúvidas da melhor maneira possível, sempre respeitando a integridade matemática. As situações mencionadas foram pensadas como parte da tentativa de continuar uma discussão que sabidamente já acontece, mas que pode, e deve, ganhar contornos mais práticos. Em outras palavras, nossa intenção foi a de apresentar situações que poderiam acontecer dentro de uma sala de aula de Matemática e trazê-las aqui na forma de diálogos, visando ilustrá-las de forma um pouco mais compreensível. Acreditamos que o constante exercício de imaginar situações e tentar prever as possíveis reações dos alunos, por mais difícil que isso seja, é importante na medida em que possibilita ao professor refletir a respeito delas e se preparar para gerenciá-las da melhor forma possível.

De acordo com Ball et al. (2008), o HCK diz respeito ao panorama do conhecimento matemático, antes, durante e depois de um ou mais processos de ensino e aprendizagem da Matemática. A construção de conhecimento matemático que se perfaz no horizonte do professor perpassa pelo passado, presente e futuro com relação aos conteúdos presentes no currículo escolar e para além deles. Para Fernández & Figueiras (2014), o HCK além de envolver os conteúdos curriculares, engloba as relações dos objetos matemáticos entre si e em diferentes áreas do conhecimento, assim como em outras áreas necessárias ao desenvolvimento da práxis do professor, que inclusive, transpassam o domínio do contexto escolar.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Nesse trabalho, entendemos que o estudo do HCK possibilita compreender como os objetos matemáticos se relacionam uns aos outros, como eles se entrelaçam e se articulam. Ou seja, no diálogo com os estudantes sobre um determinado conteúdo matemático, possivelmente vêm à tona outros assuntos matemáticos que já devem ser de conhecimento dos estudantes (suposto aprendizado no passado), bem como se deve buscar a constituição de elos com outros temas matemáticos, que emergem logo em seguida ou que já estejam interligados, em consequência do objeto matemático que se está dialogando (presente) e com vistas a preparar o terreno para a construção de conhecimento matemático do que ainda está por vir (futuro). Compreendemos que as constituições desses elos são validadas matematicamente, no processo de formação inicial do professor de Matemática, no âmbito da disciplina Análise Real.

As pesquisas por meio do HCK envolvem o desenvolvimento de habilidades complexas, articuladas e dinâmicas, geralmente de cunho matemático, mas que podem estar atreladas a outras áreas do conhecimento, e pedagógicas do professor de Matemática, com a finalidade de possibilitar a transição do conhecimento matemático desde o que o estudante já deva saber (passado que se faz presente), com o que ele está buscando aprender (presente de olho no futuro) e com o que ele ainda precisa conhecer (futuro que se faz a partir do presente em consonância com o que se aprendeu no passado). O estudo das ideias que compõem o cerne do HCK é fundamental para a constituição do planejamento, desenvolvimento do que foi planejado, bem como das reflexões que emergem da práxis do professor de Matemática.

Por falar em práxis educacional, concordamos com Wasserman et al. (2017) quando destacam que acreditar que a simples conclusão da disciplina de Análise Real na licenciatura em Matemática proporciona ao professor da Educação Básica um bom desempenho em sua práxis de Matemática Escolar, ou seja, discutir os conteúdos de Análise Real e compreendê-los por si só já garante que esses professores vão aplicar o que aprenderam em suas práticas escolares, corresponde a uma transição dificilmente de ser realizada em contextos educacionais. “Há uma esperança implícita de que, como um subproduto da aprendizagem de conteúdo de Matemática Acadêmica, os professores responderão diferentemente das situações instrucionais no futuro [...]” (p. 3, tradução nossa).

Nesse sentido, tendo como perspectiva o SCK a ensinar, compreendemos que se faz necessário focar no processo de ensino e aprendizagem a ser realizado pelo professor formador responsável pela disciplina de Análise Real na licenciatura em Matemática, de forma a realizar uma abordagem educacional que parta da práxis de professores da Educação Básica, a fim de promover discussões educacionais com seus acadêmicos com o intuito de realizar diálogos ou interlocuções entre os conteúdos de Matemática Acadêmica (presentes em Análise Real) e os saberes matemáticos a serem ensinados (Matemática Escolar) no âmbito da Educação Básica. Assim, como salientam Wasserman et al. (2017) e Wasserman et al. (2019), as ações educacionais de Análise Real devem iniciar pelo processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática Escolar, perpassar pela Matemática Acadêmica em Análise Real produzindo elos entre o conteúdo matemático (da Matemática Escolar) de partida e desenvolvimento do SCK dos acadêmicos e, posteriormente, retomar a práxis

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

educacional inicial com um processo de ensino e aprendizagem que auxilia a problematizar e ressignificar conteúdos matemáticos presentes na Matemática Escolar, com os quais a Análise Real tem forte conexão.

Agradecimentos:

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Referências

Almouloud, S., Silva, M. J. F., Miguel, M. I. R., & Fusco, C. A. S. (2008). Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. *EMP*, 10(2), 217-246. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1744/1135

Ávila, G. S. (2011). *Análise Matemática para licenciatura.* São Paulo: Edgard Blücher.

Bacha, M. L., & Saito, F. (2014). Peirce e Cantor: um estudo preliminar sobre continuidade e infinitesimais. *RBHM*, 14(28), 1-23. https://doi.org/10.47976/RBHM2014v14n2801-23

Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemas of Teaching Elementary School Mathematics. *The Elementary School Journal*, 93(4), 373-397. https://www.journals.uchicago.edu/doi/pdf/10.1086/461730

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners´ Mathematical Futures. *Anais* do Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, n.43, (pp. 1-12). Oldenburg. https://static1.squarespace.com/static/577fc4e2440243084a67dc49/t/579a39cebe65945c23e8b8cf/1469725134888/EyeOnMathHorizon.pdf

Broetto, G. C., & Santos-Wagner, V. M. P. (2019). O ensino de números irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? *Bolema,* 33(64), 728-747. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14

Chavante, E. R. (2015). *Convergências*: Matemática, 7º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). São Paulo: Edições SM.

D'Amore, B. (2011). *Matemática, estupefação e poesia.* São Paulo: Livraria da Física.

Dysman, A. M., & Dysman, F.C. (2021). Análise Real na Licenciatura: do Pensamento Abissal à Ecologia de Saberes. *International Journal of Research in Mathematics Education – RIPEM*, 11(2), 336-359. https://doi.org/10.37001/ripem.v11i2.2558

Elias, H. R. (2017). *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do Corpo dos Números Racionais na formação de professores de Matemática.* Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina: Universidade Estadual de Londrina. http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000213550

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Elias, H. R., Gereti, L. C. V., & Savioli, A. M. P. D. (2015). “Que horror! Uma coisinha tão Simples”: Um Estudo sobre a Produção de Significados para Questões Matemáticas. *Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, (pp. 1-14). https://www.researchgate.net/publication/284442925.

Fernández, S., & Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, 3(1), 7-29. https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/640/pdf

Gomes, D. O. (2013). *A Disciplina de Análise Segundo Licenciandos e Professores de Matemática da Educação Básica*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91056

Gomes, D. O., Otero-Garcia, S. C., Silva, L. D., & Baroni, R. L. S. (2015). Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. *Bolema*, 29(53), 1242-1267. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a22

Gonçalves, K. V., & Fiorentini, D. (2023). Origens e apropriação cultural do Lesson Study: contribuições à aprendizagem do professor que ensina Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(29), 226-249. https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.29.226-249

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. *Anais do international Congress on Mathematical Education*, (pp. 4635-4644). Seul. https://www.researchgate.net/publication/258960150.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. Londres: Macmillian and Co. Ltd..

Lima, E. L. (2007). *Matemática e Ensino.* Rio de Janeiro: Editora da SBM.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1. Rio de Janeiro: Editora da SBM.

Marcelo-García, C. (2009). A identidade docente: constantes e desafios. *Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação Docente*, 1(1), 109-131. https://www.revformacaodocente.com.br/index.php/rbpfp/article/view/8

Martines, P. T. (2012). *O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91033

Morais Filho, D. C. (2016). *Um convite à Matemática com técnicas de demonstração e notas históricas.* Rio de Janeiro: Editora da SBM.

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2005). *A Formação Matemática do Professor:* Licenciatura e Prática Docente. Belo Horizonte: Autêntica.

Moreira, P.C., Cury, H. N., & Vianna, C. R. (2005). Por que análise real na licenciatura? *Zetetiké*, 13(23), 11-42. https://doi.org/10.20396/zet.v13i23.8646978

Moreira, P.C., & Vianna, C. R. (2016). Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. *Bolema*, 30(55), 515-534. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a11

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8667533

Niven, I. (1984). *Números*: racionais e irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM.

Penteado, C. B. (2004). *Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimento para a abordagem dessa propriedade*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11180

Roque, T. (2015). *História da Matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar.

Schulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. https://www.jstor.org/stable/1175860

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do Trabalho Científico.* São Paulo, Cortez.

Silva, E. S., Andrade, F. C., & Santos, J. A. (2018). Explorando Uma Lista De Transmissão Para Refletir Sobre O Conhecimento Matemático Para o Ensino de Análise Combinatória. *REVEMAT.* 13(2), 210-227. http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p210

Souza, A. C. C., Perez, G., Bicudo, I., Bicudo, M. A. V., Silva, M. G. P., Baldino, R. R., & Cabral, T. C. B. (1991). Diretrizes para a Licenciatura em Matemática. *Bolema*, 6(7), 90-99. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10712

Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Villanueva, M., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2017). Making real analysis relevant to secondary teachers: Building up from and stepping down to practice. *PRIMUS*, 559–578. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1225874

Wasserman, N.H., Weber, K., Fukawa-Connelly T., & Mcguffey, W. (2019). Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: fostering mathematics teachers' "attention to scope". *Journal of Mathematics Teacher Education*. 1-21. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09431-6