Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Enfoque funcional en early algebra en las aulas brasileñas: ¿De dónde partimos?

Sandra Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz
Ilhéus, BA — Brasil
smpmagina@uesc.br
0000-0003-0383-9744

Marta Molina
Universidad de Salamanca
Ávila, Espanha
martamolina@usal.es
0000-0002-1213-6162

2238-0345

10.37001/ripem.v13i4.3354

Recibido • 04/03/2023
Aprobado • 10/08/2023
Publicado • 30/09/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumen: Las directrices curriculares de diversos países (e.g., Brasil) exigen la introducción de formas de pensar y conceptos algebraicos en Educación Primaria. Este enfoque conecta con contenidos propios del currículo de Educación Primaria, entre ellos los problemas aritméticos verbales y la proporcionalidad. En esa dirección, el objetivo del estudio es analizar las estrategias empleadas por alumnos brasileños en la resolución de problemas verbales con relaciones funcionales implícitas. La recogida de datos se realizó por medio de un cuestionario administrado colectivamente, con respuestas individuales, a alumnos de 4º, 5º y 6º cursos en sus aulas habituales y sin limitación de tiempo. Los resultados evidencian predominio del uso de relaciones de correspondencia vs escalares. Se detecta progresión en el rendimiento de los escolares y evolución favorable en el uso de las estrategias exitosas. Llaman la atención la necesidad de abordar la enseñanza para la puesta en práctica del enfoque funcional del Early algebra.

Palabras-clave: Early Algebra**.** Estudio Exploratorio. Enfoque Funcional**.** Educación Básica.

Functional approach of early algebra in Brazilian schools: Where do we start from?

Abstract: The curricular guidelines of various countries (e.g., Brazil) require the introduction of ways of thinking and algebraic concepts in elementary Education. This approach connects with contents of the Primary Education curriculum, including verbal arithmetic problems and proportionality. In this direction, the objective of the study is to analyze the strategies used by Brazilian students in solving verbal problems with implicit functional relationships. The data collection was carried out by means of a questionnaire administered collectively, with individual answers, to students of 4th, 5th and 6th grades in their usual classrooms and without time limitation. The results show a predominance of the use of correspondence relations vs. scalars. Progression is detected in the performance of schoolchildren and favorable evolution in the use of successful strategies. They draw attention to the need to address teaching for the implementation of the functional approach of Early algebra.

Keywords: Early Algebra. Exploratory Study. Functional Approach. Elementary School.

O enfoque funcional na *early algebra* em escolas brasileiras: De onde partimos?

Resumo: As orientações curriculares de vários países (por exemplo, Brasil) exigem a introdução de formas de pensar e conceitos algébricos no Ensino Primário. Esta abordagem conecta-se com conteúdos do currículo do Ensino Fundamental, incluindo problemas de aritmética verbal e proporcionalidade. Nessa direção, o objetivo do estudo é analisar as estratégias utilizadas por estudantes brasileiros na resolução de problemas verbais com relações funcionais implícitas. A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário aplicado coletivamente, com respostas individuais, aos alunos de 4º, 5º e 6º anos, em suas salas habituais e sem limitação de tempo. Os resultados mostram uma predominância do uso de relações de correspondência versus. escalares. Detecta-se progressão no desempenho dos alunos e evolução favorável no uso de estratégias exitosas. Eles chamam a atenção para a necessidade de abordar o ensino para a implementação da abordagem funcional da *early álgebra.*

Palabras clave: EarlyAalgebra. Estudo Exploratório. Enfoque Funcional. Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

1 Introducción

Hasta las dos últimas décadas del pasado siglo se pensaba que el álgebra solo debería enseñarse después de la aritmética, debido a su grado de abstracción y por considerarse una continuación natural de ésta (Molina, 2009; Schliemann *et al*. 2012). Primero se aprendían las cuatro operaciones, proponiendo problemas verbales con un solo término desconocido para que fuera calculado por los alumnos. Después, ya en enseñanza secundaria, se introducía el álgebra como generalización de la aritmética y se aplicaban problemas resolubles mediante ecuaciones algebraicas lineales. Las funciones eran una materia reservada para final de secundaria y bachillerato.

Gracias a una amplia discusión mundial entre expertos en educación matemática (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Kaput, 1995; Post, Behr y Lesh, 1995; Schliemann *et al*, 1998; Thompson, 1995) se pasó a considerar la posibilidad de anticipar la introducción de álgebra. Esta tendencia cobró mucha fuerza a finales de 2006, cuando la Mathematical Association of America (MAA), financiada por la National Academy of Science (NAS), convocó a un amplio grupo de expertos en educación matemática, que se dividieron en grupos para reflexionar sobre la enseñanza del álgebra en la enseñanza básica. Uno de esos grupos se llamó *Early algebra* y tuvo como foco debatir sobre el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico, en especial en los años iniciales de la escolaridad. El resultado de esa conferencia fue la publicación del informe *Algebra: Gateway to a Technological Future* (Katz, 2007), en el que cada grupo escribió los principales puntos de sus reflexiones.

En el informe del grupo *Early algebra* (Blanton *et al*., 2007) se señala que la enseñanza tradicional de las matemáticas, que en los grados de primaria estaba centrada en la fluidez aritmética y en cálculos numéricos, no había tenido éxito en términos de preparar a los alumnos para el aprendizaje del álgebra en los grados posteriores. Entonces, propusieron adelantar la introducción del álgebra para la educación primaria, y así cultivar en los alumnos hábitos mentales que les permitan profundizar en las estructuras subyacentes del álgebra. Blanton *et al*. (2007) aclara que el objetivo de esta propuesta, conocida como *Early algebra,* es llevar a las clases de primaria situaciones que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas que requieran reflexiones activas por parte de los alumnos. Estas situaciones necesitan promover la construcción de argumentos, justificaciones y la explicación de sus ideas. Una conjetura fundamental de esta propuesta es que cuando los niños tienen estas experiencias en los grados de primaria, por un período extendido de tiempo, desarrollan una base de entendimiento matemático mucho más profunda que los niños cuyas experiencias se centran principalmente en los cálculos. Como resultado, estos alumnos están mejor preparados para el contenido formal de álgebra en la escuela secundaria.

En este marco se considera una visión multidimensional del álgebra que engloba el estudio de las relaciones funcionales junto a la generalización de patrones, la manipulación de símbolos y modelación de situaciones y contextos, así como el uso (aunque implícito) de estructuras abstractas de cálculo (Molina, 2009).

A nivel internacional esta propuesta ha tenido impacto en el currículo escolar en países como Australia (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011), Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2012), Estados Unidos (NCTM, 2000), Japón (Watanabe, 2008) y Portugal (Canavarro, 2009), entre otros países que han incluido el álgebra en el currículo de educación primaria. En Brasil la propuesta *Early algebra* demoró en llegar y solo en 2017, cuando se publicó la Base Nacional Curricular Común (BNCC) (Brasil, 2017), pasó a ser una de las unidades temáticas a partir de la educación primaria. En la parte destinada a la enseñanza primaria y secundaria el documento explica:

> [...] para utilizar modelos matemáticos es esencial la comprensión, representación y análisis de relaciones cuantitativas de magnitudes y también de situaciones en estructuras matemáticas haciendo uso de letras y otros símbolos. […] Las ideas matemáticas fundamentales vinculadas a esa unidad son: equivalencia, variación, interdependencia y proporcionalidad.
>
> En esta perspectiva, es imprescindible que algunas dimensiones del trabajo con álgebra estén presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje desde los grados iniciales, como las ideas de regularidad, generalización de patrones y propiedades de igualdad (Brasil, 2017, pp. 266-270)[1].

Sin embargo, Ferreira, Ribeiro y Ribeiro (2017), en un estudio realizado en un encuentro de formación en servicio de 14 profesores, observaron que los docentes de primaria en Brasil no están preparados para trabajar el pensamiento algebraico con sus alumnos. Ellos no son expertos en matemática y en su formación como docentes, solo cursan una o dos asignaturas de matemáticas, siempre relacionadas con su didáctica.

Ante la necesidad de implementar la propuesta *Early algebra* en las clases brasileñas, así como ocurre en otros países, y contribuir a la capacitación de los docentes para esto, hemos iniciado un proyecto de investigación para evaluar las capacidades para abordar la resolución de tareas algebraicas de las que parten los estudiantes brasileños que aún no han recibido ninguna formación algebraica.

Desde este punto de vista, el objetivo del presente estudio es analizar las estrategias u por alumnos brasileños en la resolución de problemas verbales con relaciones funcionales implícitas. Pretendemos responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué estrategias utilizan los estudiantes brasileños, que aún no han estudiado álgebra en la escuela, cuando se enfrentan a problemas verbales con relaciones funcionales implícitas? Es importante aclarar que, si bien el 6º grado ya no forma parte de la enseñanza primaria, los estudiantes en este ciclo escolar aún no tienen contacto con el álgebra formal. Por ello decidimos incluir este año, ya que a partir del mismo los alumnos tendrán clases de matemáticas con profesores especialistas en esta asignatura.

Hasta el momento, los estudios realizados en contextos brasileños no analizan el conocimiento o las capacidades de los estudiantes. Algunos grupos de investigación brasileños vienen estudiando la implementación de la propuesta *Early algebra* (Ferreira *et al*., 2017; Luna y Souza, 2013; Magina y Porto, 2018). Estos autores se centran en discutir su potencialidad y

[1] Tradución libre hecha del portugués por las autoras.

las formas de poner en práctica su implementación.

Sin embargo, podemos destacar estudios brasileños recientes, tanto con énfasis en el razonamiento algebraico de los estudiantes (Magina, 2017; Magina & Porto, 2018; Merlini, Magina & Teixeira, 2018; Teixeira, Magina & Merlini, 2021) como en la formación de los docentes (Magina 2017; Magina, Oliveira & Merlini, 2018; Oliveira & Magina, 2019).

En este artículo nos centramos en la dimensión del álgebra con relación al estudio de las funciones. Analizamos las estrategias utilizadas por alumnos brasileños de 4º, 5º y 6º grado (con edades de 10 a 12 años) sin conocimientos previos de algebraica, al abordar problemas verbales en los que hay implícitas relaciones funcionales. Nuestro objetivo es obtener información de utilidad para la enseñanza que oriente la puesta en práctica del enfoque funcional de la propuesta *Early algebra*.

2 Enfoque funcional del *Early algebra*

El enfoque funcional del álgebra sugiere un estudio del álgebra centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real en las que relaciones cuantitativas pueden explicarse por medio de esos modelos (Heid, 1996). La propuesta parte de la experiencia en la resolución de problemas aritméticos de los estudiantes de primaria, dado que esos problemas pueden modificarse variando las cantidades y no la estructura, para trabajar con las operaciones desde una perspectiva funcional.

La idea que subyace a este enfoque y que defienden autores como Carraher & Schliemann (Carraher & Schliemann, 2016; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2012) es que las operaciones aritméticas son, en último análisis, una función. En este contexto se distinguen tres tipos de relaciones entre las cantidades covariantes: recurrencia, correspondencia y covariación (Blanton *et al*., 2015; Smith, 2008). La primera se refiere a un patrón en una secuencia de valores de una sola variable. Las otras dos relaciones atienden a dos variables. La relación de correspondencia se refiere a la relación entre pares correspondientes de valores de las variables dependiente e independiente. La relación de covariación alude al cambio coordinado entre cantidades; es una relación relativa a que las cantidades de las variables dependiente e independiente varían al mismo tiempo y de forma coordinada. Esta relación es precursora de la tasa de cambio (la pendiente en el caso de funciones lineales).

El pensamiento funcional se identifica como parte del pensamiento algebraico (Blanton et. al. 2007; Magina, 2017; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007; Kaput, 1995, 2008; Schliemann *et al*., 2012; entre otros). Este término se refiere al proceso de construir, describir y razonar con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Blanton, *et al*., 2011; Merino, Cañadas & Molina, 2013; Cañadas & Molina, 2016; Zapateira, 2018).

Los estudios que indagan en el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria evidencian su capacidad para describir la covariación y la correspondencia entre los datos por medio de diferentes sistemas de representación, entre ellos el verbal y el simbólico (Oliveira & Magina, 2019, 2023; Blanton *et al*., 2015; Brizuela & Martínez, 2012; Carraher, Martínez & Schliemann, 2008) La mayoría de estos trabajos reportan las capacidades de estudiantes de educación primaria en el contexto de clases ideadas para que desarrollen su pensamiento funcional.

Algunos trabajos indagan en el tipo de relaciones que los estudiantes utilizan cuando dan evidencias de pensamiento funcional. Los autores difieren en las causas que consideran motivadoras del empleo de un tipo de relación u otra: edad y factores de desarrollo versus tipo de tareas y forma de usarlas en clase. Por ejemplo, Smith (2008)~~,~~ y Warren (2005) destacan las relaciones recursivas y de covariación como las más utilizadas por los estudiantes más jóvenes. En cambio, los resultados de trabajos como Blanton y Kaput (2004) y Morales *et al*. (2018) señalan que esa preferencia depende más del tipo de tareas y de la forma en que los profesores se las presentan a los alumnos. Por ejemplo, Morales *et al*. (2018) observan que las relaciones identificadas por los alumnos del 1º grado de Educación Primaria están vinculadas al tipo de caso que se les plantea en la pregunta y al alcance de la generalización. Así, cuando se trabaja con estos alumnos, la relación de covariación parece estar asociada a casos particulares de operaciones con números elevados. Los alumnos que identifican relaciones funcionales de correspondencia son los que expresan generalizaciones.

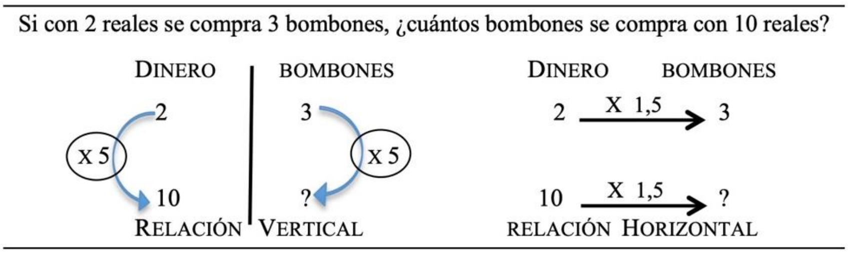
3 Proporcionalidad y *Early algebra*

El razonamiento proporcional es destacado por algunos autores (Burgos y Godino, 2019; Butto y Rojano, 2010) como una forma de iniciación temprana al pensamiento algebraico. Este tipo de razonamiento proporcional ya lo describen Lesh, Post y Behr (1988) como la consolidación del conocimiento aritmético en la enseñanza primaria y la cimentación del pensamiento algebraico en la enseñanza secundaria. Al fin y al cabo, una situación proporcional viene modelada por una función del tipo $f(\mathrm{x}) = a\mathrm{x}$.

En las situaciones proporcionales se distinguen dos enfoques: el escalar y el funcional (Fernández & Llinares, 2012; Schliemann & Carraher, 1992). El enfoque escalar se centra en la identificación y uso de la razón interna (relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud o variable). En este enfoque “cada variable se mantiene independiente de la otra y las transformaciones paralelas se realizan en ambas variables” (Schliemann & Carraher, 1992, p. 52). El enfoque funcional se centra en la identificación y uso de la razón externa (relaciones multiplicativas entre cantidades de distinta). En este segundo enfoque la atención está en cómo una de las variables varía en función de la otra. Dentro de este segundo enfoque se encuentra la estrategia de reducción a la unidad.

Esta propuesta parte del análisis que hace Vergnaud (1991) de los problemas multiplicativos. Vergnaud argumenta que a partir del desarrollo del razonamiento proporcional los alumnos comprenden problemas multiplicativos y propone que la multiplicación se trabaje desde la enseñanza primaria haciendo explícitas las variables del problema, como se presenta en la Figura 1.

Figura 1: Problema multiplicativo y esquemas de resolución propuesto por Vergnaud (1983)



Fuente: Construcción de las autoras

De acuerdo con Vergnaud (1991, p. 12), “el análisis vertical […] no es simple […] puesto que hay que completarlo con un análisis (horizontal) de la noción de función lineal”. El autor explica que no siempre el uso de estos esquemas está explícito en la acción del alumno, pero el análisis de lo que se hizo permite identificar el esquema utilizado. Desde la perspectiva adoptada en este trabajo, nos referimos a la relación vertical como relación de covariación y a la horizontal como relación de correspondencia, de acuerdo con lo que se describe en el apartado previo.

En los estudiantes de primaria se han detectado dos comportamientos erróneos que a veces se presentan de forma simultánea: el uso de métodos aditivos incorrectos en la resolución de situaciones proporcionales y el uso de métodos multiplicativos incorrectos en situaciones aditivas (Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010). Estos estudios indican que la tendencia a aplicar métodos aditivos disminuye con la edad en contraposición con los métodos multiplicativos. Concretamente, Fernández y Llinares (2012) observan "que hay una variación desde la utilización de las relaciones aditivas 'independientemente del tipo de problema' durante la Educación Primaria y primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) hasta la utilización de métodos multiplicativos 'independientemente del tipo de problema' al final de la ESO" (p. 137). El cambio de tendencia observado pone de manifiesto la influencia del currículo cuando se introducen de 2º a 3º, de manera más sistemática, las magnitudes proporcionales y el método de la regla de tres.

Otros estudios que investigan de qué manera en la educación primaria los niños resuelven problemas de proporcionalidad (Schliemann & Carraher, 1992) señalan que el contexto donde se inserta el problema contribuye mucho a que los niños comprendan la proporcionalidad. Así, problemas que involucren dinero, compras o trabajo, son más fácilmente comprendidos. Observan que la estrategia escalar es la más usada para resolver problemas de proporcionalidad, independientemente de si la han estudiado previamente en la escuela o no. Los niños escolarizados prefieren encontrar el operador escalar de una variable y luego multiplicar el término conocido de la otra variable por ese escalar. Sin embargo, los niños no escolarizados tienden a realizar, paso a paso, sumas repetidas con uno de los valores de una de las variables hasta que alcanzan el otro valor de esa variable y luego usan esa cantidad de repetición en el valor de la otra variable para descubrir el valor desconocido. Aunque esta estrategia es correcta, deja implícito el uso del multiplicador escalar. Estos autores concluyen llamando la atención para la importancia de hacer explícitos los multiplicadores escalares y funcionales para la comprensión futura de las funciones lineales y del papel del coeficiente y el término independiente en las mismas.

4 El estudio

En este artículo presentamos parte de una investigación cuyo objetivo era evaluar las capacidades y estrategias de las que parten los estudiantes brasileños de los grados de primaria y secundaria, previos a la enseñanza del álgebra, para abordar la resolución de tareas algebraicas. Concretamente, aquí analizamos las estrategias que emplean los alumnos de 4º, 5º y 6º grado en la resolución de problemas verbales en los que aparecen implícitas relaciones funcionales. Se trata de un estudio diagnóstico, exploratorio y metodológicamente enmarcado como descriptivo.

4.1 Sujetos

Este estudio contó con la participación de 238 alumnos de cuatro escuelas públicas de dos ciudades rurales pequeñas (menos de 200 mil habitantes) del sur de Bahía, Brasil. Estas escuelas, que disponen de muy pocos recursos, atienden a alumnos cuya renta familiar no sobrepasa el valor de un salario mínimo nacional (aproximadamente €200). Concretamente, se trata de cuatro clases de 4º grado (95 alumnos de 9-10 años), dos de 5º (59 alumnos de 10-11 años) y cuatro de 6º (84 alumnos de 11-12 años). Ninguno de estos alumnos tenía experiencia con actividades algebraicas ni con actividades orientadas al desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria. Su experiencia en la resolución de problemas aritméticos se limitaba a problemas aditivos y multiplicativos de una sola etapa. El estudio de la proporcionalidad se inicia en 7º grado, habiendo trabajado hasta 6º grado solo con problemas basados en relaciones de “uno a muchos” como problemas multiplicativos.

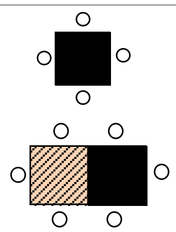
Consecuentemente, ninguna de las tareas aplicadas en esta investigación eran familiares o rutinarias para los estudiantes y se trata de tareas que no suelen trabajarse en la escuela ni en 4º, ni en 5º ni en 6º grado. La muestra de alumnos fue seleccionada intencionalmente por las características socioeconómicas de los centros, que representan gran parte de la población de la región de Bahía.

4.2 Instrumento y recogida de datos

La recogida de datos se realizó al final del curso por medio de un cuestionario aplicado por dos investigadoras, en su clase habitual y sin límite de tiempo para ser respondido. El cuestionario es individual y contiene 11 tareas. Para garantizar la comprensión de estas tareas por parte de los alumnos, las investigadoras leyeron en voz alta cada una, dando un tiempo para que ellos respondieran antes de pasar a la siguiente. Todas las dudas sobre la comprensión del texto se resolvieron en voz alta y las dudas vinculadas al contenido fueron devuelta al alumno, también en voz alta.

De dicho cuestionario, analizamos aquí tres tareas que se encuadran dentro del enfoque funcional del álgebra (ver Tabla 1). Las tareas se presentan en un enunciado verbal que describe una situación problema. En términos de funciones, las tareas 1 y 3 expresan de forma explícita una relación funcional lineal y le solicitan al estudiante el valor de la variable dependiente para un valor dado de la variable independiente. En la tarea 2, se le pide al estudiante que identifique una relación funcional lineal a partir del estudio de patrones en casos particulares. Se le pide al estudiante el valor de la variable dependiente para dos valores de la variable independiente. Uno de estos valores es elevado con la intención de inducir a la generalización de la relación funcional.

Tabla 1: Las tareas retiradas del cuestionario consideradas en este artículo (traducción libre del portugués).

Tarea	Enunciado	Imagen que acompaña al texto	Función
1	Con 2,00 reales se compran 3 bombones rojos. Diogo gastó 10,00 reales comprando bombones rojos. ¿Cuántos bombones compró?		$f(x) = 1{,}5x$
2	La imagen representa una mesa del restaurante ***Buena Comida*** con 4 lugares. Llegaron al restaurante 6 personas para almorzar y el camarero colocó 2 mesas juntas. Ver la imagen de las 2 mesas juntas al lado. a) Este restaurante siempre deja 5 mesas juntas. ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden ocupar esas mesas b) Un día se pidió que en el restaurante se juntasen 48 mesas porque vendrían muchas personas para el almuerzo. Todos los lugares de esas mesas fueron ocupados. ¿Cuántas personas vinieron? C) ¿Hay alguna manera de escribir matemáticamente la relación entre la cantidad de mesas y de personas?		$f(x) = 2x+2$

3	Juan arregla televisiones. Cobra 20 reales por la visita (para averiguar la causa de la avería de la televisión) y luego cobra 15 reales por hora de trabajo para hacer la reparación. Ayer fue a arreglar mi televisión. Descubrió el problema y pasó 3 horas arreglando mi televisor. ¿Cuánto tengo que pagarle?		$f(x) = 15x + 20$

Fuente: Datos del estudio

La tarea 1 es un problema de proporcionalidad que establece una relación de "muchos a muchos" (2,00 reales para 3 bombones). En términos de funciones carece de término independiente, a diferencia de las otras dos, y el coeficiente es racional (1,5) lo que les dificulta a los estudiantes el uso de la relación de correspondencia en la resolución del problema. Es más fácil resolver la tarea 1 usando relaciones de covariación (con un enfoque escalar, en términos de Fernández y Llinares, 2012). En cambio, la tarea 3 es más fácilmente resoluble usando la relación de correspondencia (mediante un enfoque funcional, en términos de Fernández y Llinares, 2012).

La tarea 2 fue considerada en estudios previos, entre ellos los de Carraher, Martínez e Schliemann (2008) y Merino *et al*. (2013) y puede resolverse mediante estrategias sencillas de cálculo, a partir de la construcción de la correspondiente representación icónica, o también reconociendo la función que relaciona cantidad de mesas y cantidad de personas a lo que conduce especialmente la segunda tarea en la que se pregunta por el uso de 48 mesas. Tanto en esta tarea como en la 3, la función tiene un componente aditivo y otro multiplicativo.

Las tareas 1 y 2 incluyen representaciones icónicas. En el primer caso, dicha representación repite información ya presentada verbalmente con la intención de destacar la necesidad de relacionar las variables dinero y bombones y, en el segundo caso, la imagen aporta información necesaria para entender la situación que se plantea (ejemplifica cómo disponer las mesas).

5 Análisis de los datos

Para el análisis de las estrategias que los estudiantes utilizan para solucionar las tareas propuestas elaboramos las categorías que definimos a continuación. Adoptamos los términos escalar y correspondencia, apoyándonos en la terminología de los estudios mencionados anteriormente. Dentro de las estrategias de tipo escalar, algunas son de covariación (cuando hacen uso de este tipo de relaciones). A continuación, se definen y ejemplifican las categorías elaboradas a partir del análisis de los datos.

Estrategia Escalar (E): esta categoría muestra los casos en los que el estudiante opera únicamente con valores de una variable, de forma aditiva (E-A) o multiplicativa (E-M), u opera por separado ambas variables haciendo uso de la relación de covariación (E-CV). Esta tercera estrategia es la que en ocasiones conduce a respuestas correctas (ver ejemplos en la Tabla 2 y la Figura 2).

A continuación, en la Tabla 2 se presentan las 3 subcategorías que han sido identificadas dentro de la estrategia escalar utilizada por los estudiantes.

Tabla 2: Ejemplos de respuestas clasificadas como estrategias de tipo Escalar

Subcategoria	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Escalar aditiva (E-A)	10 + 2, 2 + 10, 10 – 2	5 + 5	20 + 15, 15 + 20

Escalar multiplicativa (E-M)	10 × 2, 2 × 10	5 × 3, 48 × 3	20 × 15
Escalar de covariación (E-CV)	Suma 3 veces 5 (ver Figura 2)	—	—

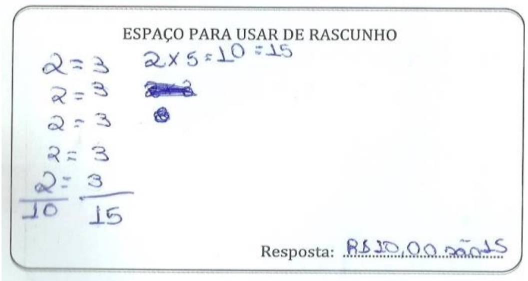
Fuente: Datos del estudio

En la Figura 2 se presentan dos distintas representaciones utilizadas por los alumnos, que fueron clasificadas como *Estrategia Escalar* (E) de covariación. Señalamos que ambas condujeron a la correcta respuesta.

Figura 2: Ejemplos de respuestas (correctas) a la tarea 1 clasificadas como estrategia escalar de covariación.

Protocolo 549 de 5º curso

Protocolo 646 de 6º curso



*10 reales son 15

Fuente: Datos del estudio

En la Figura 2 se muestran las respuestas de dos estudiantes de 5º y 6º grado, respectivamente, que resolvieron la tarea 1 mediante una Estrategia Escalar de covariación. Con representación icónica en el primer caso y representación numérica en el segundo, repitieron la cantidad 3 un total de 5 veces. En el primer caso, el cálculo del 5, la razón interna, queda implícito. En el segundo caso, se muestra que el alumno la averigua sumando repetidamente el 2 hasta obtener 10.

Estrategia Correspondencia (CR): abarca las respuestas en las que el estudiante hace uso de alguna relación que conecta las variables independiente y dependiente. Distinguimos tres subcategorías dependiendo de si opera cantidades de ambas variables únicamente de forma aditiva (CR-A) o multiplicativa (CR-M) o, si en cambio, combina ambas operaciones (CR-C). Esta última estrategia es la que en ocasiones conduce a respuestas correctas (ver ejemplos en la Tabla 3 y Figuras 3 y 4).

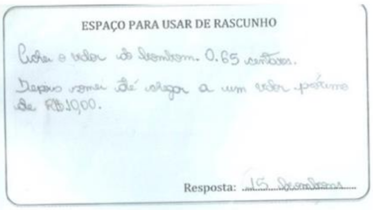
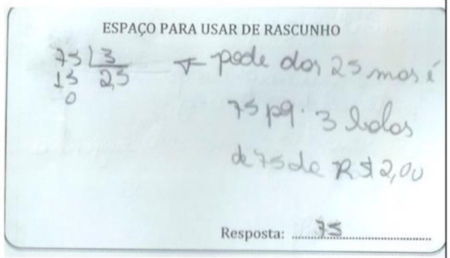
Tabla 3: Ejemplos de respuestas clasificadas como estrategias de tipo Correspondencia

Subcategoria	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Correspondencia aditiva (CR-A)	2 + 3, 10 + 3, 10 – 3	—	—
Correspondencia multiplicativa (CR-M)	10 × 3, 3 × 10, 2 × 3, 3 × 2	5 × 2, 5 × 4, 5 × 6	15 × 3, 3 × 15, 20 × 3, 3 × 20
Correspondencia combinada (CR-C)	3 ÷ 2 × 10 (ver Figura 3)	5 × 2 + 2	15 × 3 + 20 (ver Figura 4)

Fuente: Datos del estudio

En la Figura 3 se muestra que algunos estudiantes se apoyaron en un cálculo estimado del valor de cada bombón (0,65 o 0,75 según el caso), la razón externa, para obtener la respuesta usando la relación de correspondencia entre los bombones y el dinero.

Figura 3: Ejemplos de respuestas (correctas) a la tarea 1 clasificadas como correspondencia combinada

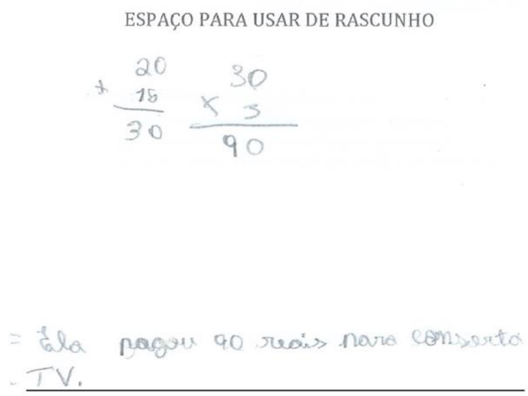
Protocolo 632 de 6º curso	Protocolo 635 de 6º curso
	
Encontré el valor del bombon. 0,65 centavos. Despues sumé hasta llegar a un valor próximo a R$ 10,00	*Puede ser 25, pero es 75 (centavos) porque 3 caramelos de 75 es como un R$ 2,00

Fuente: Datos del estudio

En la Figura 4 se muestra la respuesta de un estudiante de 4º grado en la tarea 3 clasificada como correspondencia combinada.

Figura 4: Ejemplo de respuesta (incorrecta) a la tarea 3 clasificada como estrategia correspondencia combinada

protocolo 466 del 4° año



* Ella pagó 90 reales para areglar la TV

Fuente: Datos del estudio

Otras respuestas, no clasificables en las categorías anteriores, consisten en repetir alguno de los números del enunciado, operar todos los números del enunciado conjuntamente y realizar el conteo sobre una representación icónica. En la Figura 5 se muestran dos ejemplos de esta última estrategia. En ambos casos los alumnos se apoyan en una representación icónica de las mesas y los comensales y obtienen la respuesta contando sobre el dibujo. La diferencia es que en el segundo caso el alumno dispone las mesas de forma diferente a la descrita en el enunciado.

Figura 5. Ejemplos de respuestas a la tarea 2 clasificadas como estrategia conteo

Protocolo 405 de 4° curso

Protocolo 502 de 5° curso

Fuente: Datos del estudio

Otras respuestas se clasificaron como incomprensibles cuando ofrecieron un número, cálculo o representación que no parecía tener relación con los datos de la tarea.

6 Resultados

Iniciamos la descripción de los resultados mostrando la cantidad de respuestas correctas en cada una de las tareas. Los datos de la Tabla 4 muestran un aumento en el porcentaje de aciertos de más del 10% entre uno y otro grado, teniendo en cuenta las tres tareas, que llegaron a un porcentaje de aciertos de algo más del 30% en 6º grado. En las tareas 1 y 3, individualmente, también se detectó esta progresión en el porcentaje de aciertos entre un grado y el siguiente.

Tabla 4: Respuestas correctas en las tres tareas por grado escolar

Curso	Tarea 1	Tarea 3	Tarea 2		Totales
			Cuestión 2A	Cuestión 2B	
4º n = 95	9.5%	4.2%	29.5%	4.2%	11.8%
5º n = 59	23.7%	22%	27.1%	6.8%	20.8%
6º n = 84	30.9%	46.4%	32.1%	3.6%	31.2%

Fuente: Construcción de las autoras

En el caso de la tarea 2, en cada una de las preguntas, los porcentajes de aciertos son muy similares entre los tres grados. Se aproximan al 30% en el caso de la primera pregunta y no llegan al 7% en la segunda pregunta. Esta diferencia de rendimiento entre ambas preguntas radica en el tipo de estrategia utilizada por los estudiantes en la resolución de cada pregunta, como se detalla más adelante.

Antes de proceder al análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes descartamos los casos en que no dan respuesta o la misma resulta incomprensible (Tabla 5).

Tabla 5: Respuestas descartadas por tarea y grado

<table>
<tr><th rowspan="3">Respuestas descartadas</th><th colspan="4" rowspan="2">Tarea 1</th><th colspan="4" rowspan="2">Tarea 2</th><th colspan="8">Tarea 3</th><th rowspan="3">Total</th></tr>
<tr><th colspan="4">Cuestión A</th><th colspan="4">Cuestión B</th></tr>
<tr><th>4º</th><th>5º</th><th>6º</th><th>Total</th><th>4º</th><th>5º</th><th>6º</th><th>Total</th><th>4º</th><th>5º</th><th>6º</th><th>Total</th><th>4º</th><th>5º</th><th>6º</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Blanco</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>16</td><td>7</td><td>4</td><td>27</td><td>11</td><td>2</td><td>2</td><td>15</td><td>26</td><td>8</td><td>9</td><td>43</td><td>88
9.2%</td></tr>
<tr><td>Incomprensible</td><td>12</td><td>11</td><td>5</td><td>28</td><td>14</td><td>4</td><td>6</td><td>24</td><td>13</td><td>7</td><td>8</td><td>28</td><td>27</td><td>23</td><td>26</td><td>76</td><td>156
16.4%</td></tr>
</table>

Fuente: Construcción de las autoras

A continuación, en la Tabla 6 presentamos las frecuencias asociadas a cada uno de los tipos de estrategias identificadas en las respuestas de los alumnos.

Observando los resultados generales presentados en la Tabla 6, se constata que el registro de relaciones de correspondencia fue mucho mayor que el de relaciones escalares (368 vs. 175), siendo empleadas en todas las tareas. La estrategia de conteo solo se identifica en respuestas a la tarea 2.

Individualmente, las dos estrategias más utilizadas fueron la correspondencia multiplicativa (CR-M), seguida por la correspondencia combinada (CR-C). Observamos que, dependiendo de la tarea, la estrategia más usada cambia. Además, se observó que en la tarea 5 predomina el pensamiento multiplicativo. En las tareas 1 y 3 predomina el pensamiento multiplicativo cuando se usan estrategias de correspondencia y el aditivo cuando se utilizan estrategias escalares, mostrando ambos una presencia similar en los datos globales.

Tabla 6: Clasificación de las estrategias utilizadas en cada tarea por grado

Tarea		**Repite**	**Opera todos**	**Conteo**		**Escalar**				**Correspondencia**				**Totales**
				Cor	Inc	E-A	E-M	E- CV		CR-A	CR-M	CR-C		
								Cor	Inc			Cor	Inc	
1	4º	5	1			**30**	5	8	3	2	19	1	8	82
	5º	0	2			3	10	12	1	2	**13**	3	2	48
	6º	1	7			12	3	**25**	3	5	10	7	4	77
Total		6	10			45	18	**45**	7	9	42	11	14	207
3	4º	3	8			18	0				**25**	4	7	65
	5º	1	6			**18**	1				5	13	4	48
	6º	1	8			11	0				13	**39**	2	74
Total		5	22			**47**	1				43	**56**	13	187
2ª	4º	12		16	3	0			1		**27**	12	0	71
	5º	7		6	5	1			2		**19**	10	0	50
	6º	7		19	4	0			3		**31**	9	1	74
Total		26		**41**	12	1			6		**77**	31	1	195
2B	4º	13			7	2			0		16	3	1	42
	5º	2			3	0			0		19	4	0	28
	6º	2			7	1			2		**32**	3	2	49
Total		17			17	3			2		**67**	10	3	119
Totales		54	32	41	28	96	19	45	15	9	**229**	**108**	31	708

Leyenda: Repite = repite número del enunciado, Opera todos = opera todos los números, Cor = correcta, Inc = incorrecta, E-A = escalar aditiva, E-M = escalar multiplicativa, E-CV = Escalar de covariación, CR-A = Correspondencia aditiva, CR-M = Correspondencia multiplicativa, CR-C = Correspondencia combinada.

Fuente: Construcción de las autoras

En la tarea 1 (problema multiplicativo de proporcionalidad, “muchos para muchos”) la estrategia más usada fue la escalar (55%; 115 en 207): aditiva en el caso de 4º grado y covariación en 5º y 6º grado. En este sentido, se detecta una evolución favorable en el uso de la estrategia que conduce a la respuesta correcta apoyándose en el cálculo de la razón interna. No obstante, en esta tarea también se han usado estrategias de covariación, que en pocos casos conduce a la respuesta correcta; concretamente, 76 de las 207 respuestas presentan este tipo de estrategia, habiendo 11 respuestas correctas. Estas últimas corresponden a casos en los que los alumnos estiman el coste de un bombón en 0,65 o 0,75 para dar respuesta a la tarea (ver Figura 3). También se detecta una evolución con la edad en el uso de estrategias de correspondencia cada vez más adecuadas para la resolución de la tarea. Las estrategias que condujeron a respuestas correctas en esta tarea (escalar de covariación y correspondencia combinada) son utilizadas por los estudiantes en el 37.2% de las respuestas (77 de 207).

En la tarea 3, la estrategia más común fue la de correspondencia (60%; 112 de 187) y ninguno de los estudiantes que empleó estrategias escalares obtuvo la respuesta correcta. En 4.º grado predomina la correspondencia multiplicativa y en 6.º la correspondencia combinada, detectándose en los datos una evolución hacia el tipo de estrategia de correspondencia que conduce a respuestas correctas. En 5º grado, en cambio, la estrategia más empleada fue la de tipo escalar. La única estrategia que condujo a respuestas correctas en esta tarea (correspondencia combinada) fue empleada en un 36.9 % (69 de 187) de las respuestas.

En la tarea 5 no se detectan diferencias asociadas a la edad en el uso de estrategias. En ambas preguntas destacamos el uso de la estrategia correspondencia multiplicativa, que está asociada a una interpretación diferente de la situación planteada, probablemente más acorde con la experiencia de los alumnos en la realidad. En sus respuestas, los estudiantes multiplicaron el número de personas que pueden sentarse en una mesa por el número de mesas. En este caso se destaca la ausencia de pensamiento aditivo. La estrategia de conteo se destaca por ser la más frecuente en la primera pregunta, y no es usada con éxito en la pregunta B. En esta segunda pregunta, que resultó más difícil para los tres grupos de alumnos, cabe destacar la gran cantidad de respuestas clasificadas como incomprensibles. En general, cuando los alumnos hacen uso de estrategias de conteo suelen alcanzar la respuesta correcta, salvo en los casos en que realizan una representación diferente de la situación descrita (mesas dispuestas de forma aislada o unidas de forma diferente) o disponen menos de dos posiciones por mesa. Las estrategias que condujeron a respuestas correctas en esta tarea (conteo y correspondencia combinada) fueron empleadas en un 36.3% de las respuestas (114 de 314).

En esta tarea 2 un 17,6% de los alumnos (4, 12 y 26 de 4º, 5º y 6º respectivamente) dan evidencias de haber usado una misma relación funcional para responder a ambas preguntas: A y B. En algunos casos se trata de la relación 2×+2, en otros 2×, 3×, 4× o 6×. De este modo muestran estar usando pensamiento funcional. En las otras tareas la explicación dada por los estudiantes, de tipo puramente operatorio, nos impiden identificar si estaban haciendo uso de pensamiento funcional.

7 Discusión y conclusiones

La motivación que guía nuestro proyecto de investigación es evaluar de qué capacidades y conocimientos parten los estudiantes brasileños en relación con varios conceptos algebraicos, entre ellos la función, antes de iniciar su formación algebraica. En este artículo en concreto, se partió de tres tareas aritméticas en las que hay relaciones funcionales implícitas para extraer conclusiones de utilidad e iniciar con estos alumnos el estudio de las funciones desde una perspectiva compatible con la propuesta *Early algebra*.

Los estudios que se vienen realizando en el marco de la propuesta *Early algebra* ya han mostrado la viabilidad de esta propuesta en las aulas por medio de intervenciones que promueven modos algebraicos de pensar. Aquí, en cambio, indagamos en comportamientos espontáneos de 238 niños de 4º, 5º y 6º grado, sin formación algebraica previa, al resolver situaciones que involucran implícitamente relaciones funcionales, sin ninguna intervención de investigadores o docentes. El 12%, 21% y 31% de los estudiantes, respectivamente, resuelven correctamente las tareas propuestas. Identificamos una evolución positiva en el rendimiento de los alumnos, observando que los alumnos mayores resuelven mejor las tareas propuestas que los más jóvenes. Como estos alumnos no habían recibido ninguna instrucción para tareas semejantes a las consideradas en este estudio, es razonable suponer que este aumento sea debido a su desarrollo cognitivo, y no podemos descartar la posibilidad de que en su vida cotidiana los niños mayores hayan tenido un mayor contacto con situaciones similares a las de las tareas 1 y 3.

En lo que respecta a las estrategias empleadas, se detecta que el diseño del problema influye en la estrategia que prefieren utilizar los estudiantes, así como en la estrategia con la que son más exitosos. No obstante, se destaca un predominio del uso de estrategias de correspondencia, incluso en la primera tarea que implicaba el uso de números decimales al calcular la razón externa. Es interesante observar el predomino del pensamiento multiplicativo cuando se usan estrategias de correspondencia y del aditivo cuando se utilizan estrategias escalares.

La mayoría de los alumnos de los tres cursos, eligieron la operación de multiplicación dentro de la relación de correspondencia, que fue la más utilizada para resolver las tareas propuestas, incluso cuando esto no siempre les daba un resultado correcto.

Se detecta una evolución positiva en el uso de estrategias que conducen a respuestas correctas; este resultado es especialmente relevante dada la ausencia de experiencia de los alumnos con el tipo de problemas aquí propuestos. Es previsible que esta evolución sea mucho más generalizada y rápida si se promueve a través de la enseñanza. En el caso de la tarea de generalización, en cambio, se detecta que los resultados correctos dependen del tratamiento escolar de este tipo de tarea para que los alumnos reconozcan y adopten estrategias útiles para su resolución.

Analizando específicamente la estrategia escalar aditiva, notamos que su presencia disminuye al avanzar la escolaridad, principalmente en el problema de proporcionalidad planteado. Este resultado está alineado con los de Fernández y Llinares (2012).

Los resultados destacan la necesidad que los docentes aborden algunos aspectos puntuales. En primer lugar, que los estudiantes que hacen uso de estrategias escalares hagan explícita la razón interna, dado que se detecta un predominio de estrategias escalares aditivas donde ésta queda implícita. Este resultado concuerda con lo que observan Schliemann y Carraher (1992) en estudiantes sin escolarizar. Se requiere que desde la docencia se incida en este hecho para ayudar a los estudiantes a explicitar y tomar conciencia de las relaciones funcionales con las que están trabajando. El uso de estrategias de correspondencia hace explícita la relación funcional, lo que se ha destacado como favorable para la generalización en estudios previos (Morales *et al*., 2018). El siguiente paso por dar en la enseñanza es variar las cantidades involucradas sin modificar la estructura o incluso el contexto, como se suele hacer en las tareas de generalización, para que el estudiante generalice dicha relación. Pero solamente esto no es suficiente. Los resultados obtenidos en la tarea 5 señalan la necesidad de que se promueva la generalización en clase de forma explícita.

Teniendo como objetivo el estudio de las funciones, consideramos relevante promover, tanto el uso de estrategias escalares de covariación, como estrategias de correspondencia, dado que ambos tipos de relaciones permiten indagar en el comportamiento de la función y sus características. En este sentido, las tareas de proporcionalidad y los problemas aritméticos verbales de dos etapas, aditiva y multiplicativa (en los que, por lo tanto, hay implícita una función lineal) son tareas complementarias para trabajar en clase, puesto que favorecen el uso de diferentes tipos de estrategias, como hemos observado en los resultados.

Las evidencias de pensamiento funcional en este trabajo son muy limitadas, dada la escasa cantidad de estudiantes que mostraron el uso de una misma estructura en las preguntas planteadas en la tarea 2 y las características de las explicaciones dadas por los estudiantes que impiden hacer inferencias al respecto. En este sentido, es necesario incorporar entrevistas en la recogida de datos para enriquecer estos resultados con la identificación de la interpretación (funcional o no) que hacen los estudiantes de las operaciones implícitas en las tareas propuestas. La continuidad de este estudio también implica analizar otras dimensiones de las capacidades de los estudiantes, relevantes para su iniciación en el estudio de nociones algebraicas, entre ellas ecuación, equivalencia, función y patrón.

Agradecimientos

Parte del desarrollo de este trabajo ha sido financiado por el proyecto I+D+I con referencia PID2020-113601GB-I00. Además, el estudio recibió apoyo del CNPq, por intermedio de beca de productividad de investigación.

Referências

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2011). National Report on Schooling in Australia 2011. Sidney: Acara.

Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Aproaches to Algebra: Perspectives for research an teaching*. Boston: Kluwer.

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary Grades students' capacity for functional thinking. *En: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v. 2, pp. 135–142). Bergen. Noruega: PME.

Blanton, M.; Levi, L.; Crites, T. & Dougherty, B. J. (Ed.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Blanton, M.; Schifter, D.; Inge, V.; Lofgren, P.; Willis, C.; Davis, F. & Confrey, J. (2007). Early Algebra. En: V. J. Katz (Ed.). *Algebra: Gateway to a Technological Future* (pp. 7-14). Columbia: The Mathematical Association of America.

Blanton, M. L.; Stephens, A.; Knuth, E.; Gardiner, A. M.; Isler, I. & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Brizuela, B. M. & Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En: M. Carretero; J. A. Castorina & A. Barreiro (Ed.). *Desarrollo Cognitivo y Educación: Procesos de Conocimiento y Contenidos Específicos* (v. 2, pp. 263-286). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Burgos, M. & Godino, J. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31*(3), 117-150.

Butto, C. & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(31), 55-86.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En: E. Castro; E. Castro. J. L. Lupiáñez; J. F. Ruíz & M. Torralbo (Ed.). *Investigación en Educación Matemática: Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118

Carraher, D. W.; Martínez, N. & Schliemann, A. D. (2008). Early Algebra and Mathematics Generalization. *ZDM Mathematics Education,* 40, 3-22.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En: L. English y D. Kirshner (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 191-218). New York: Routledge.

Carraher, D. W.; Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. En: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Ed.). *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah: LEA.

Fernández, C. & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1) 129-142.

Ferreira, M. C. N.; Ribeiro, M. & Ribeiro, A. J. (2017) Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké*, 25(3), 496-514.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En: A. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Ed.). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Kaput, J. A (1995) research base for algebra reform: Does one exist. En D. Owens; M. Reed & G. M. Millsaps (Ed.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 71–94). Columbus, Ohio: PME.

Kaput, J. A. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? En: J. Kaput; D. Carraher & M. Blanton (Eds.). *Algebra in early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Katz, V. J. (2007). *Algebra: Gateway to a Technological Future*. Columbia: The Mathematical Association of America.

Lesh, R.; Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert & M. Behr (Ed.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Luna, A. & Souza, C. (2013) Discussão sobre o Ensino da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(4), 817-835.

Magina, S. (2017). A introdução do raciocínio algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições da Psicologia para o Debate. *VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática* (pp. 1-6). Garanhuns, PE.

Magina, S; Oliveira, C. & Merlini, V. (2018). O raciocínio algébrico no Ensino Fundamental: o debate a partir da visão de quarto estudos. *Em Teia*, *9*(1), 1-23.

Magina, S. & Porto, R. (2018). É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do ensino fundamental. *VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Foz do Iguaçu, PR.

Merino, E.; Cañadas, M. C. & Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. Em: A. Berciano; G. Gutiérrez; A. Estepa & N. Climent (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Merlini, V.; Magina, S. & Texeira, C. (2018). O que sabe sobre equação, em representação icônica, os que formalmente ainda não sabem? *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Foz do Iguaçu, PR.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEB

Chile. Ministerio de Educación. Unidad de Currículo y Evaluación (2012). *Bases Curriculares 1º a 6º Básico.* Santiago, Chile.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Morales, R.; Cañadas, M. C.; Brizuela, B. & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM.

Oliveira, C. & Magina, S. (2019). 1, 1, 2, 3, 5…: Padrões na Formação de Professores. XVIII *Encontro Baiano de Educação Matemática* (pp. 1-19). Ilhéus, BA.

Oliveira, C. & Magina, S. (2023). O raciocínio algébrico e a formação híbrida de professores que ensinam Matemática: o poder dos símbolos. *Revista Interinstitucional Artes de Educar*, 9(1), 263-283.

Post, T. R.; Behr, M. J. & Lesh, R. A. (1995). Proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. En: A. F. Coxford & A. P. Shulte (Org.). *As idéias da álgebra.* Tradução de Hygino H. Domingues. (pp. 89-103). São Paulo, SP: Atual.

Schliemann A. & Carraher, D. (1992). Proportional reasoning in and out of school. En: P. Light & G. Bitterworth (Ed.). *Context and Cognition: ways of learning and knowing* (pp. 47-73). London: Harvester Wheatsheaf.

Schliemann A. D.; Carraher D. W. & Brizuela B. M. (2012). Algebra in elementary school. En: L. Coulange & J. P. Drouhard. (Ed.). Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives (pp. 109-124). Grenoble, France.

Schliemann, A. D.; Carraher, D. W.; Brizuela, B. & Pendexter, W. (1998). *Solving algebra problems before algebra instruction*. *Second Early Algebra Meeting.* North Dartmouth, MA: University of Massachusetts at Dartmouth/Tufts University.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En: J. Kaput; D. Carraher & M. Blanton (Ed.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York: LEA.

Texeira, C.; Magina, S. & Merlini, V. (2021) Performance and Strategies Used by Elementary School Fifth Graders When Solving Problems Involving Functional Reasoning. In: A. Spinillo; S. Lautert & R. Borba (Ed.) *Mathematical Reasoning of Children and Adults Teaching and Learning from an Interdisciplinary Perspective* (pp. 191-219). Switzerland: Springer.

Thompson, F. M. (1995). O ensino de álgebra para a criança mais nova. En: A. F. Coxford & A. P. Shulte (Org.). *As idéias da álgebra* (pp. 79-103). São Paulo, SP: Atual.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En: R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las Matemáticas y la Realidad*. México: Trillas.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y primaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 97, 51-67.