EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p698-721

Um estudo dos processos de prova dos alunos no colégio[1]

A study of students' proving processes at the junior high-school level

Un estudio de los procesos de prueba de los estudiantes en el nivel de secundaria

Une étude des processus de preuve des élèves au niveau de l'école secondaire de premier cycle

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite : Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal da Bahia
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Méricles Thadeu Moretti[4]
Universidade Federal de Santa Catarina
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo

O objetivo desta pesquisa é identificar os fundamentos da crença dos alunos na validade de uma afirmação em sua atividade matemática: o que eles reconhecem na prática como uma prova e como eles tratam uma refutação. Concentrou-se neste estudo nas relações entre o processo de comprovação dos alunos, os conhecimentos de que dispõem, a linguagem que podem utilizar e o papel do contexto situacional. Os tipos de processos de prova evidenciados pelos alunos não caracterizam intrinsecamente o que poderíamos chamar sua "racionalidade", na medida em que diferentes níveis de prova puderam ser observados em sua atividade de resolução de problemas. O significado dos processos de prova não pode ser compreendido sem

[1] Author typescript of: Balacheff N. (1988) A study of students' proving processes at the junior high school level. In: Second UCSMP international conference on mathematics education. Chicago: NCTM.
[2] Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] saddoag@gmail.com
[4] mthmoretti@gmail.com

uma análise cuidadosa das concepções dos alunos sobre os conceitos matemáticos envolvidos e sua leitura da situação em que atuam. As características da situação parecem determinar o nível de comprovação, ao passo que a imagem que os alunos têm da matemática também desempenha um papel importante, principalmente no tratamento das refutações. Observa-se que a passagem de provas pragmáticas para provas intelectuais requer uma base cognitiva e linguística. Desprezar a complexidade desta passagem pode ser uma das principais razões para o fracasso do ensino da prova matemática, uma vez que esta passagem é muitas vezes considerada apenas no nível lógico. Em geometria em particular, este ensino ocorre em um campo conceitual que, para os alunos ainda, não se constituiu como uma teoria; já que a geometria era para eles essencialmente restrita à observação e construção de objetos geométricos sem necessidade de prova. Assim, o ensino da prova está associado ao que poderia ser descrito como uma quebra cognitiva na atividade do aluno, relacionada à quebra didática representada pela nova exigência de provas matemáticas.

Palavras-chave: Processo de prova, Tipos de provas, Crenças de alunos sobre a prova em matemática.

Abstract

The aim of this research is to identify the foundations of students' belief in the validity of an assertion in their mathematical activity: what they recognize in practice as a proof and how they treat a refutation. We focused this study on the relationships between students' proving processes, the knowledge they have, the language they can use, and the role of the situational context. The types of proof processes evidenced by the students do not intrinsically characterize what we might call their "rationality", in that different levels of proof could be observed in their problem-solving activity. The meaning of the proof processes cannot be understood without a careful analysis of the students' conceptions of the mathematical concepts involved and their reading of the situation in which they act. The characteristics of the situation seem to determine the level of proof, while the students' image of mathematics also plays an important role, especially in dealing with refutations. It is observed that the passage from pragmatic to intellectual proofs requires a cognitive and linguistic foundation. Disregarding the complexity of this passage may be one of the main reasons for the failure of teaching mathematical proof, since this passage is often considered only at the logical level. In geometry in particular, this teaching occurs in a conceptual field that, for students has not yet constituted itself as a theory; since geometry was for them essentially restricted to the observation and construction of geometric objects with no need for proof. Thus, the teaching of proof is associated with what could be described as a cognitive break in student activity, related to the didactic break represented by the new requirement for mathematical proofs.

Keywords: Proof process, Types of proofs, Students' beliefs about proof in mathematics.

Resumen

El objetivo de esta investigación es identificar los fundamentos de la creencia de los estudiantes en la validez de una afirmación en su actividad matemática: lo que reconocen en la práctica como una prueba y cómo tratan una refutación. Hemos centrado este estudio en las relaciones entre los procesos de prueba de los alumnos, los conocimientos que poseen, el lenguaje que pueden utilizar y el papel del contexto situacional. Los tipos de procesos de prueba evidenciados por los alumnos no caracterizan intrínsecamente lo que podríamos llamar su "racionalidad", en la medida en que se pudieron observar diferentes niveles de prueba en su actividad de resolución de problemas. El significado de los procesos de demostración no puede entenderse sin un análisis cuidadoso de las concepciones de los alumnos sobre los conceptos matemáticos implicados y su lectura de la situación en la que actúan. Las características de la situación parecen determinar el nivel de las pruebas, mientras que la imagen que tienen los alumnos de las matemáticas también desempeña un papel importante, sobre todo al tratar las refutaciones. Se observa que el paso de las pruebas pragmáticas a las intelectuales requiere una base cognitiva y lingüística. Despreciar la complejidad de este pasaje puede ser una de las principales razones del fracaso de la enseñanza de la demostración matemática, ya que este pasaje suele considerarse sólo a nivel lógico. En la geometría, en particular, esta enseñanza se produce en un campo conceptual que, para los alumnos, aún no se ha constituido como teoría; ya que la geometría se limitaba para ellos esencialmente a la observación y construcción de objetos geométricos sin necesidad de demostración. Así, la enseñanza de la demostración está asociada a lo que podría describirse como una ruptura cognitiva en la actividad del alumno, relacionada con la ruptura didáctica que representa la nueva exigencia de las pruebas matemáticas.

Palabras clave: Proceso de prueba, Tipos de pruebas, Creencias de los alumnos sobre las pruebas en matemáticas.

Résumé

L'objectif de cette recherche est d'identifier les fondements de la croyance des élèves en la validité d'une affirmation dans leur activité mathématique : ce qu'ils reconnaissent en pratique comme une preuve et comment ils traitent une réfutation. Nous avons axé cette étude sur les relations entre les processus de preuve des élèves, les connaissances qu'ils possèdent, le langage qu'ils peuvent utiliser et le rôle du contexte situationnel. Les types de processus de preuve mis en évidence par les élèves ne caractérisent pas intrinsèquement ce que nous pourrions appeler leur "rationalité", dans la mesure où différents niveaux de preuve ont pu être observés dans leur activité de résolution de problèmes. Le sens des processus de preuve ne peut être compris sans une analyse attentive des conceptions des élèves sur les concepts mathématiques impliqués et de leur lecture de la situation dans laquelle ils agissent. Les caractéristiques de la situation semblent déterminer le niveau de la preuve, tandis que l'image que les élèves ont des mathématiques joue également un rôle important, notamment dans le traitement des réfutations.

On observe que le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles nécessite d´une base cognitive et linguistique. Ne pas tenir compte de la complexité de ce passage peut être l'une des principales raisons de l'échec de l'enseignement de la preuve mathématique, car ce passage est souvent considéré uniquement au niveau logique. En géométrie en particulier, cet enseignement s'inscrit dans un champ conceptuel qui, pour les élèves, ne s'est pas encore constitué en théorie ; puisque la géométrie se limitait pour eux essentiellement à l'observation et à la construction d'objets géométriques sans besoin de preuve. Ainsi, l'enseignement de la preuve est associé à ce que l'on pourrait décrire comme une rupture cognitive dans l'activité de l'élève, liée à la rupture didactique représentée par la nouvelle exigence des preuves mathématiques.

Mots clés : Processus de preuve, Types de preuves, Croyances des élèves sur la preuve en mathématiques.

Um estudo dos processos de prova dos alunos no colégio

O ensino da prova matemática parece ser um fracasso em quase todos os países, não importa como esse ensino seja organizado. Uma consequência foi suprimir a prova como um conteúdo a ser ensinado na maioria dos currículos. Na França, a palavra “demonstração” desapareceu do enunciado dos programas oficiais, nos EUA as provas matemáticas são ministradas apenas aos alunos que fazem o curso de geometria etc. Em nossa opinião, tal consequência é drástica, na medida em que, antes de tudo, esvazia a matemática de sua essência, e em segundo lugar, porque a validade do conhecimento matemático se baseia fundamentalmente na prova que o estabelece.

Uma análise dos materiais de ensino indica que há uma ênfase muito forte no ensino do lado lógico da prova, enquanto sua importância social e prática na atividade matemática permanece oculta. Frequentemente se esquece que as provas matemáticas são um meio de comunicação entre os matemáticos; elas desempenham um papel essencial em estabelecer a validade de uma declaração e em esclarecer seu significado. E, como lembra Manin:[5] “uma prova torna-se uma prova após o ato social de aceitá-la como prova.” Essa natureza social das provas matemáticas é parte de seu valor prático; leva a reconhecê-las como ferramentas eficientes e confiáveis para os matemáticos.

Mas, a prova matemática é ensinada sem levar em conta que os alunos tiveram critérios para julgar a validade e a relevância de suas afirmações matemáticas antes de serem apresentados a este novo conhecimento. Para a maioria dos alunos, as provas matemáticas parecem, em última análise, ser um tipo de retórica específica da sala de aula de matemática (Balacheff, 1982). Eles a produzem porque o professor exige, não porque a reconhecem como necessária em sua prática; como um estudante britânico disse a um entrevistador: “provar algo

[5] Manin quoted by Hanna 1983, p.71

em matemática significa que você resolveu e prova o quão bom você é em resolver questões e entendê-las” (Galbraith, 1979).

Então, o objetivo de nossa pesquisa é identificar os fundamentos da crença dos alunos na validade de uma afirmação em sua atividade matemática: o que eles reconhecem na prática como uma prova, e como eles tratam uma refutação. Concentramos este estudo nas relações entre o processo de comprovação dos alunos, os conhecimentos de que dispõem, a linguagem que podem usar e o papel do contexto situacional.

Aspectos cognitivos e sociais da prova

Precisão na terminologia

Em inglês, assim como em francês, dois termos são usados na matemática de forma sinônima: “prova” (em francês, *preuve*) e “demonstração matemática” (em francês, démonstration). Esse costume apresenta um obstáculo ao nosso estudo, pois esconde de forma diferente níveis que devem ser diferenciados. Assim, apresentamos a seguir nossa proposta, a partir das seguintes distinções:

- Utilizaremos o termo explicação para descrever o discurso de um indivíduo que pretende estabelecer para outrem a validade de uma afirmação. A validade de uma explicação está inicialmente relacionada ao falante que a articula.

- Utilizaremos o termo prova para nos referirmos a uma explicação que é aceita por uma comunidade em um determinado momento;

- Designaremos como demonstração matemática uma prova aceita pelos matemáticos. Como um tipo de discurso, as demonstrações matemáticas hoje têm uma estrutura específica e seguem regras bem definidas que foram formalizadas pelos lógicos.

Aspectos cognitivos das provas

De acordo com o que a psicologia cognitiva nos diz, o tipo mais elementar de prova consiste apenas em mostrar o que Semadeni (1984) chama de prova em ação. Aqui está um exemplo clássico de tal prova da propriedade: “a soma dos n primeiros números ímpares é n^2” (Figura 1):

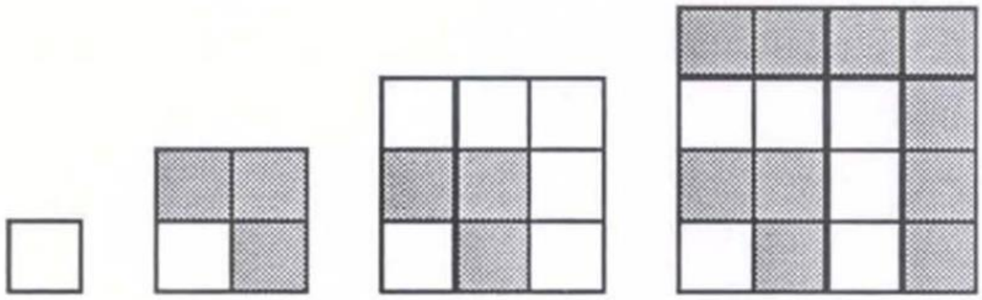

Figura 1.
Ilustração da prova da propriedade

Essas provas dependem da capacidade da pessoa que observa o esquema de reconstruir as razões que estão embutidas nela, mas não formuladas.

Em um nível mais alto, as razões podem ser expressas, mas ainda estão fortemente relacionadas às ações realizadas em algum exemplo. Na medida em que o exemplo não é visto como um caso particular, mas como um representante de uma classe de objetos, reconheceremos isso como uma prova por exemplo genérica. Tal prova requer que a generalidade seja vista além do particular. Vamos dar um exemplo tirado de Bezout (*Notes sur l’arithmétique*, 1832 p.23, nossa tradução livre):

> O resto da divisão de um número por 2x2 ou por 5x5 é igual ao resto da divisão por 2x2 ou por 5x5 do número escrito com os dois últimos dígitos à direita deste mesmo número [...]. considere o número 43728 e o divisor 5x5. O número 43728 é igual a 47700 + 28. Mas 43700 é divisível por 5x5, porque 47700 é o produto de 437 por 100 e 100 igual a 10x10, ou 5x2x5x2 ou 5x5x2x2, o fator 100 é divisível por 5x5. O restante da divisão de 43728 por 5x5 ou 25 é igual ao de 28 por 25.

Denominamos provas pragmáticas aquelas provas que dependem da ação, e de provas intelectuais aquelas que utilizam verbalizações das propriedades dos objetos e de suas relações. Este passo em direção à prova intelectual não consiste em uma mera tradução da ação em palavras; requer uma construção genuína de meios de linguagem como uma ferramenta operativa. O solucionador de problemas deve ser capaz de utilizar a linguagem e os símbolos como meio de calcular em declarações e relações.

No nível mais alto, em matemática, as provas matemáticas requerem um status específico de saber que deve ser organizado em uma teoria e reconhecido como tal por uma comunidade: a validade das definições, teoremas e regras dedutivas é socialmente compartilhada.

Aspectos sociais da prova

Como Popper (1979, p.78) enfatiza: "a 'certeza' de uma crença não é tanto uma questão de sua intensidade, mas da situação: da nossa expectativa de suas possíveis consequências. Tudo depende da importância atribuída à verdade ou falsidade da crença". Em outras palavras, diremos que o envolvimento em um determinado nível de validação é uma questão de economia de lógica "que quer que não se coloque em jogo mais lógica do que o necessário para as necessidades práticas" (Bourdieu, 1980 p.145, nossa tradução livre).

Assim, o fato de apresentar um problema aos alunos não garante que eles se comprometam a produzir uma prova; isso não se deve a uma falta fundamental de consciência, mas ao fato de que sua leitura da situação não exige a produção de uma prova. Em nossa pesquisa, portanto, prestamos muita atenção em fornecer aos alunos um contexto que promova a consciência da necessidade de prova - ou seja, um contexto que contém algum risco ligado à incerteza e, portanto, algo a ganhar entrando em um processo de prova.

A dialética de provas e refutações

Uma interpretação bem conhecida de um contraexemplo na sala de aula de matemática é a de uma espécie de catástrofe que implica a rejeição definitiva do que foi refutado. Deste ponto de vista, a ideologia da sala de aula de matemática é mais maniqueísta do que dialética. A análise da atividade do matemático sugere um funcionamento bastante diferente e, pelo menos, menos radical. A decisão sobre a validade de uma prova depende da qualidade de sua análise crítica, que finalmente garante a ausência de erros lógicos e de contraexemplos. Nesse sentido, o processo de comprovação é baseado no compromisso do solucionador de problemas de levar em conta a possível existência de contradições: o processo de comprovação é fundamentalmente dialético. Isso é ainda mais óbvio no contexto de interações sociais, em que explicações provisórias ou refutações de uma determinada declaração são eliciadas.

Para levar em conta essa dimensão do processo de prova, adotamos o modelo da dialética das provas e refutações proposto por Lakatos (1976). Devemos mencionar aqui que esse modelo está em consonância com as teorias desenvolvidas pela escola piagetiana, que tem mostrado o papel central da contradição na gênese das estruturas cognitivas. Usando este modelo, podemos diferenciar as implicações de um contraexemplo, dependendo se estamos considerando a conjectura, sua prova ou o conhecimento relacionado e a racionalidade do próprio solucionador de problemas.

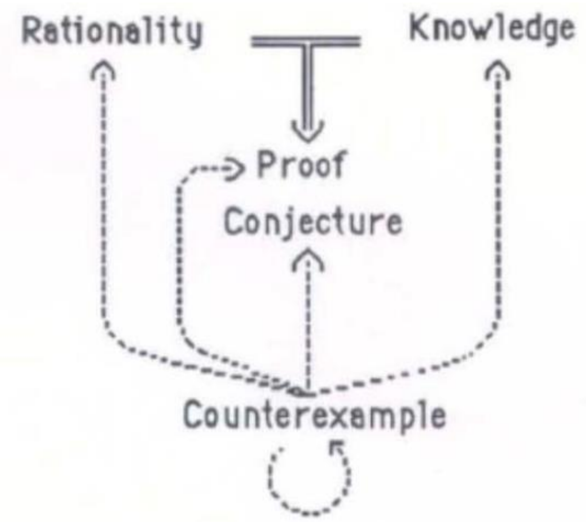

Figura 2.

Modelo da dialética das provas e refutações

Este esquema (Figura 2), que mostra a conjectura e sua prova como o produto do conhecimento e da racionalidade de um sujeito, resume as principais consequências possíveis de um contraexemplo. Na verdade, ele apenas evoca a gama dessas possíveis consequências, mas é suficiente para dar uma ideia daquilo que denominamos de abertura do tratamento de uma refutação.

A natureza do desenvolvimento do conhecimento matemático descrito por Lakatos sugere uma questão que Lakatos não colocou[6], mas que é, no entanto, essencial para o professor ou pesquisador em educação matemática: o que determina a adequação de uma escolha para superar a contradição trazida por um contraexemplo? Investigamos esta questão juntamente com a questão da natureza dos processos de prova dos alunos.

Tipos e hierarquia de provas de alunos

Uma abordagem experimental

A fim de explorar os processos de prova dos alunos, utilizamos uma situação de interação social que incentiva o confronto de diferentes pontos de vista sobre a solução de um problema e, portanto, uma troca verbal que torna esses pontos de vista explícitos.

Pares de alunos de 13 a 14 anos foram obrigados a resolver o seguinte problema:

> *Forneça uma maneira de calcular o número de diagonais de um polígono, uma vez que o número de vértices seja conhecido.*

A resposta a esta pergunta deveria ser expressa em uma mensagem endereçada a, e para ser utilizada por, outros alunos de 13 a 14 anos. Os dois alunos têm acesso a quantos papéis sulfites quiserem, mas a apenas um lápis. Esta restrição reforça a natureza cooperativa da situação; ao mesmo tempo, dá-nos um acesso mais direto à dinâmica dos dois sistemas de conhecimento confrontados, especialmente nos casos de tomada de decisão. O observador intervém somente depois que os alunos afirmam que produziram uma solução final; neste

[6] Na verdade, Lakatos dá exemplos que podem levar a tal pergunta. Um deles é o caso de Poinsot que, em 1809, considerou alguma estrela - poliédrica como contraexemplo ao teorema de Euler. Mas cerca de 50 anos depois, Poinsot mudou de ideia, considerando esses poliédricos como tendo apenas faces triangulares; “Agora ele vê apenas exemplos onde antes via contraexemplos” (ibid, p.31).

estágio, ele abandona sua postura de neutralidade e pede aos alunos que lidem com contraexemplos que ele propõe.

O problema escolhido refere-se ao conhecimento do aluno, que é mais cultural do que escolar, pois embora os polígonos possam ter sido estudados na escola primária (em atividades relacionadas à classificação geométrica), eles não fazem mais parte do currículo no nível em que estamos preocupados. Como no caso dos sólidos no século XVIII, as concepções dos alunos sobre esse conteúdo matemático não são teorizadas. O contexto, portanto, é propício ao surgimento de processos semelhantes aos descritos por Lakatos, de modo que nos permite analisar a dinâmica da prova, o tratamento relacionado às refutações e sua relação com a construção do conceito.

Nesta situação experimental:

- O tipo de comunicação incentivada estrutura a atividade dos alunos e, mais particularmente, promove a formulação verbal do procedimento de contagem. Isso é algo que os alunos normalmente não fazem de imediato, mesmo que sejam tecnicamente capazes disso. Ao mesmo tempo, o desejo de fornecer uma ferramenta confiável para o outro grupo provavelmente levará a dupla de alunos a prestar mais atenção à formulação e à validade de sua solução.

- A interação social por intermédio das trocas que requer da dupla de alunos ajuda a eliciar as concepções e planos dos alunos, e a base para suas decisões, independentemente da intervenção de qualquer observador. As restrições de utilizar apenas um lápis obrigam a um confronto permanente e à explicitação da escolha de critérios comuns para aceitar ou recusar qualquer afirmação ou estratégia.

Observamos quatorze pares de alunos, cada sessão durando cerca de 90 minutos. Todas as sessões foram gravadas. A partir desses dados, fizemos a análise subjacente aos resultados que apresentamos aqui (um relatório completo dessa pesquisa é apresentado em Balacheff, 1988).

Hierarquia e interrelação dos tipos de provas

Empiricismo ingênuo

A origem do empirismo ingênuo pode ser traçada em dois fenômenos bastante diferentes: evidência factual e crença cognitiva[7]. "O termo 'crença' expressa a forma direta, simpática, de conhecimento, o sentimento de validade implícita e confiabilidade das respectivas representações ou interpretações e sua capacidade extrapolativa" (Fishbein 1982, p. ll).

No primeiro caso, o nível de prova evidencia um empirismo pragmático que permite aos alunos considerar a mera observação como suficiente. Tal comportamento pode advir de um conflito entre alunos ou de uma leitura da situação que os leve a preferir submeter rapidamente sua solução ao observador em vez de tentar entrar em um processo de prova por conta própria. É, por exemplo, o caso de dois alunos que observamos, Pierre e Mathieu[8], que propuseram uma solução ao observador, mas dizendo-lhe que "é um jogo ... é melhor tentar algo" (mesmo que também afirmem que não adianta "tentar nada").

O segundo caso é bastante diferente, pois se baseia em uma crença real na validade da solução proposta. Essa crença está fortemente relacionada com as concepções dos alunos que elas não conseguem expressar ou analisar: "um tipo intrínseco de convicção, diretamente imposto pela própria estrutura da situação" (Fishbein, 1982, p. ll, situação significa aqui situação matemática). A título de ilustração, apresentamos o seguinte trecho de um de nossos estudos de caso:

[7] This expression has been coined by Fishbein (1982); we render it in French by *évidence de raison*.
[8] Balacheff, 1988, p. 108.

> Pierre e Philippe[9] induzem, a partir da observação de polígonos com 6 e 8 vértices, os seguintes números de diagonais: 6 x 3 e 8 x 5 (embora isso seja contradito por seus desenhos). A conjectura deles, então, é que o número de diagonais é igual ao número de diagonais de um vértice multiplicado pelo número de vértices, mas os alunos dizem: "não sabemos como explicá-lo". Quando o observador propõe o caso de um polígono com nove vértices, calcula 9x6 e diz: "São 54, é o mesmo procedimento". Sua crença na validade desta solução é baseada na evidência de que o número de diagonais de cada vértice de um polígono é o mesmo. Mas eles são incapazes de justificar sua solução, ou a afirmação de que seria suficiente multiplicar esse número pelo número de vértices.

Devemos mencionar aqui que fizemos a mesma experiência, mas fornecemos aos alunos um documento apresentando as definições de polígono e diagonal juntamente com algumas figuras. Este documento era bastante semelhante ao que eles poderiam encontrar em um livro de texto. Nesta situação, os alunos propuseram soluções mais corretas para o problema, mas na maioria dos casos, com uma base empirista ingênua. No novo contexto, os exemplos utilizados pelos alunos para verificar as suas soluções foram exemplos retirados do documento fornecido. Os alunos entenderam-nos como protótipos, pelo que não se fizeram necessários mais testes, o que é claramente afirmado por alguns alunos[10]: "Vamos ver se funciona sempre, em todos os polígonos". Esse tipo de empirismo ingênuo, que gostaríamos de denominar de efeito prototípico, é essencial do ponto de vista didático, pois questiona o uso de exemplos para fins didáticos.

Os exemplos são de fato úteis para fins de ensino, mas parece que, do ponto de vista do aluno, eles podem ter um status que provavelmente se tornará um obstáculo aos processos de comprovação.

O experimento crucial

O experimento crucial é uma etapa importante, pois identifica a tomada de consciência do problema da validade de um enunciado matemático, levando em consideração o problema da generalização. Sua origem pode estar na tomada de consciência da insuficiência de uma

[9] Balacheff, 1988, p.109.
[10] Ba1acheff, 1988, p.250. What is meant here is: all the polygons proposed by the document.

mera verificação em poucos exemplos, mas dentro de limites cognitivos e de linguagem que não permitem ao aluno ir além.

Um bom exemplo é o caso das soluções do tipo: f (n) = (n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + ... + 2 + 1. Isso requer a expressão de uma iteração, que os alunos que observamos não conseguiram fazer. Aqui está a solução formulada por Martine e Laura[11]:

Primeiro vértice: número de diagonais = número de vértices -3

Segundo vértice: número de diagonais = o mesmo

Do terceiro vértice: número de diagonais recém-obtido - 1 diagonal

Quarto vértice: número de diagonais recém-obtido - 1 diagonal

e assim por diante

- no final, adicionamos todos os números da diagonal em cada vértice para encontrar o número de diagonais do polígono

Os dois alunos decidem "desenhar uma figura muito grande para verificar", o que fazem com um polígono com dez vértices.

Tomemos outro exemplo que dá evidências claras desse comportamento, Nadine e Elisabeth[12] produziram uma solução que consiste em uma fórmula recorrente:

> Eles encontraram nove diagonais para um polígono com seis vértices, a seguir anunciado para um polígono com sete vértices: "devemos somar cinco, normalmente ... se funcionar, então normalmente com sete encontraremos quatorze diagonais"; o que é confirmado por seu experimento. Mas, para aceitar a solução definitivamente, eles confiaram em um experimento crucial. Como eles afirmaram: "tente uma vez com quinze vértices, então se funcionar significa que funciona com qualquer outro número". Na verdade, o experimento foi feito com um polígono com dez vértices: "então normalmente ... com dez lados devemos encontrar trinta e cinco diagonais". A conjectura é então aceita como verdadeira.

[11] Balacheff, 1988, pp.98. 121.

[12] Balacheff, 1988, pp.122-123.

Em contraste com o empirismo ingênuo que desaparece quando os alunos atingem o nível de provas intelectuais, o experimento crucial permanece como um meio último de fundamentar a convicção dos alunos, especialmente no caso de uma prova baseada em um exemplo genérico. Este é um exemplo da coexistência operativa de pragmatismo empírico e racionalismo lógico. Confirma a tese de Fishbein (1982), que afirma que se trata de dois tipos de racionalidade com valor prático distinto: “ asduas formas básicas de provar - a empírica e a lógica - não são simétricas; não têm o mesmo peso na nossa atividade prática” (ibid. p.17).

O experimento crucial assume um significado bem diferente nas interações sociais quando se torna um meio de neutralizar um conflito sobre uma afirmação entre os dois alunos. Então, não é mais uma ferramenta genuína para provar. Ele apoia uma posição contra a outra sem efetivamente afirmar sua validade. Notamos que, em tais circunstâncias, houve outras explicações da afirmação na dupla de alunos. É o caso de Christophe e Bertrand[13]:

> Christophe não aceita a solução proposta por Bertrand. Ele afirma que o número de diagonais é o dobro do número de vértices, como para P7 o exemplo que ele considerou. Em vez de explicar sua solução (o que ele poderia ter feito, veja esta solução abaixo), Bertrand propôs a Christophe tentar com P8 e ver ... após a observação deste caso, Christophe se rende e então aceita a solução de Bertrand. O exemplo P8 desempenhou exatamente o papel do “experimento crucial” de Bacon, cujo resultado permite fazer uma escolha entre duas possibilidades.

O exemplo genérico e a experimento do pensamento

A experiência de pensamento pode ser vista na ligação de provas a partir de um exemplo genérico, ao longo de um processo de descontextualização que requer a eliminação do particular. Esse processo não ocorre apenas no nível da linguagem; requer construções cognitivas de grande complexidade para eliciar os objetos envolvidos na prova e suas relações. Essa complexidade se deve ao fato de que muitas vezes o experimento mental depende de etapas intermediárias em um nível inferior de prova.

[13] Balacheff, 1988, p .118.

A partir do experimento de pensamento, o processo de descontextualização, juntamente com o de temporalização (obliteração do tempo, em um movimento de dinâmico para estático) e de despersonalização (obliteração do ator), pode evoluir para provas que consistem em uma computação real nas relações. Isso tem sido observado muito raramente, uma vez que requer meios de linguagem poderosos e exige que o conhecimento seja semelhante a uma teoria.

O exemplo a seguir mostra a transição de uma prova por exemplo genérico para uma experiência de pensamento:

> Christophe e Bertrand[14] deduziram, de uma análise detalhada de um polígono com sete vértices, que o número de diagonais para cada vértice segue o padrão n-3. O seguinte relato que produziram mostra que chegaram a isto:

Se tivermos um polígono com 7 vértices, cada ponto terá dois vizinhos, e a partir deste ponto começará:

7 - (2 + 1) Fazemos isso para todos os pontos.

Números de vértices — número de vizinhos — O ponto

Sua formulação reflete o raciocínio por trás de suas soluções, mas isso ocorre no nível da ação, e não realmente no da computação, envolvendo relações:

> Conhecendo o número de vértices de um polígono, parte de cada ponto o número de vértices - (seus dois vizinhos + ele mesmo). O que foi obtido então deve ser multiplicado pelo número de vértices (de cada vértice começa o mesmo número de diagonais).
> Mas contamos duas vezes cada diagonal: o número de diagonais obtido deve ser dividido por dois para encontrar o número de diagonais.

[14] Balacheff, 1988, p.138-141.

O tratamento de refutações[15]

A análise do tratamento dado pelos alunos às refutações reflete grande parte das possibilidades descritas pelo modelo de Lakatos. A questão que enfocamos é a dos critérios de escolha dos alunos entre todas essas possibilidades.

Três tipos de análise parecem determinar a escolha do tratamento de uma refutação:

- Análise com referência ao próprio problema. Esse tipo de análise fornece um lugar central para a discussão da natureza e, portanto, da definição dos objetos envolvidos no problema. Potencialmente, pode levar a qualquer um dos tipos de tratamento possíveis, nenhum é privilegiado a priori. A escolha dos alunos só pode ser compreendida por meio da análise local do processo de resolução de problemas ou das características específicas de cada indivíduo. O tipo de tratamento pode mudar no curso do processo de resolução de problemas, por exemplo, a decisão dos alunos de modificar a definição pode ser seguida pela introdução de uma condição ou pela modificação da conjectura inicial quando suas concepções estiverem estabilizadas. Mas as origens da escolha de tratar o contraexemplo introduzindo uma condição ou buscando uma solução específica, ou modificando a conjectura, não podem ser rastreadas com os dados que reunimos. Tudo o que podemos supor é que quando uma refutação pode eliminar uma ampla gama de polígonos (no que diz respeito às concepções dos alunos), os alunos preferem modificar a conjectura, adicionando uma solução específica para os objetos referidos no contraexemplo (extensão para polígonos ímpares em caso de $f(n) = n / 2$, procure uma solução para polígonos não convexos etc.).

- Análise com referência a uma concepção global da natureza da matemática. Isso pode ser um sério obstáculo para algumas respostas a uma refutação, e pode levar à recusa de tratar

[15] Para um relatório completo sobre este aspecto da pesquisa, ver: N. Balacheff, “Tratamento das refutações: aspectos da complexidade de uma abordagem construtivista da aprendizagem da matemática”. 10 aparecem em E. Von Glasersfeld (Eds.): “Constructivism in mathematics Education”, D. Reidel Publishing Company

o contraexemplo como uma exceção, rejeição de uma solução que não pode ser expressa por uma fórmula única etc.

- Análise com referência à situação: Esta é essencialmente uma questão do contrato didático[16] que leva os alunos a favorecerem certos tratamentos do contraexemplo (por exemplo, a leitura dos alunos da situação como um "jogo de definição" em que mudam de uma definição para outra para escapar ao contraexemplo) enquanto levanta obstáculos para outros (recusa em introduzir uma condição porque ela não foi declarada na definição do problema, conforme o exemplo dado abaixo).

O breve relato a seguir de um dos estudos de caso mostra como essas diferentes análises desempenham um papel na decisão dos alunos:

Evelyne e Christine[17] consideram a solução "o número de diagonais de um polígono é a metade do número de seus vértices", primeiro com base em um empirismo ingênuo, e depois em um experimento de pensamento. O experimento mental está relacionado com a concepção de uma diagonal que eles explicitam após uma refutação por um polígono com sete vértices: "uma diagonal é uma linha reta que pertence a um vértice de um polígono e que corta sua superfície em duas partes". Mas eles têm pontos de vista diferentes: um deles gostaria de introduzir uma condição no enunciado da conjectura; o outro prefere reconsiderar a definição. Finalmente, é o último que é escolhido após Evelyne argumentar que "não poderia ser porque lá [na declaração da tarefa] eles não dizem que um polígono é ... o número de vértices é par". Em outras palavras, os alunos não têm o direito de restringir o conjunto de polígonos que se enquadram na conjectura; eles têm que dar uma solução para todos eles. Na verdade, a definição que eles escolheram restringe o conjunto dos polígonos àqueles para os quais a conjectura é válida: "se dissermos que um polígono é ... uma coisa cujas arestas são sempre

[16] ln our study, the experimental contract.
[17] Balacheff, 1988 p.182, pp.192·194, pp.221·223.

paralelas dois a dois ... então não é necessário para ser mais preciso. Precisamos apenas dividir por dois". Mas o caso de um triângulo não é tratável sob esta definição. O triângulo é rejeitado como polígono porque não tem diagonal. No ponto de vista dos alunos, é uma espécie de monstro. Posteriormente, um contraexemplo (um polígono com cinco vértices) (Figura 3), produzido pelo observador, se impõe como um polígono. Em seguida, rejeita-se a definição inicial e considera-se uma nova: "com certeza um polígono pode ter qualquer número de diagonais ... mas deve ser regular". Portanto, a única maneira de salvar a conjectura é introduzir uma condição e buscar uma solução específica para os polígonos ímpares.

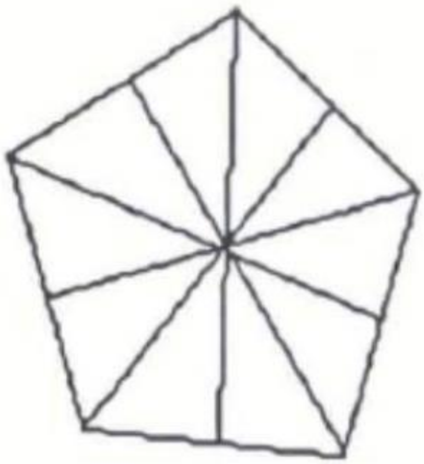

Figura 3.

Um polígono com cinco vértices

Esta última solução parte da concepção de um aluno que considera uma diagonal como um "eixo de simetria": diagonal é uma linha que passa por um vértice de um polígono e o corta em duas partes iguais. No caso de um polígono com cinco vértices, corresponde ao desenho dos alunos dado na figura 3. A solução que eles conjeturam é f (n) = n para polígonos ímpares. Eles primeiro imaginam prová-lo por meio de um experimento crucial com um polígono de onze vértices, mas como parece ser muito complexo, eles o provam "por razões": "é óbvio que é 11, pois há 1 em cada vértice". A incerteza que fica é uma incerteza nas premissas dos alunos: envolve a definição de um polígono e de uma diagonal. É com base nessas definições que eles tratam os contraexemplos produzidos pelo observador.

Essas definições são formuladas até mesmo em sua mensagem:

Se o número de vértices do polígono for par: você divide o número por dois e obterá o número de suas diagonais
Se o número de vértices do polígono for impar: o número de diagonais é igual ao número de vértices
Um polígono é uma figura geométrica que pode ter qualquer número de vértices, mas cujas arestas devem ser iguais.

Por fim, examinamos a questão de uma possível influência do tipo de conjectura na escolha do tratamento de uma refutação. Uma hipótese inicial é que se a conjectura for falsa, então sua rejeição ou modificação, ou a revisão da definição, deve ser dominante; por outro lado, se a conjectura estiver correta, a rejeição do contraexemplo deve ser dominante. Na verdade, observamos que conjecturas como f (n) = n ou f (n) = 2n são abandonadas após sua refutação. Mas tais conjecturas são muito frágeis, na medida em que são verificadas apenas por um polígono. É bem diferente quando a conjectura é verificada por um grande conjunto de polígonos, como a falsa conjectura f (n) = n / 2, cuja força vem do fato de estar relacionada (explicitamente ou não) a uma concepção de um polígono como um polígono regular e uma diagonal como diâmetro. Para essas conjecturas, nenhum tipo de tratamento parece ser o preferido. Mesmo o tipo de fundamento da conjectura não tem influência efetiva na escolha dos alunos quanto ao tratamento do contraexemplo. Por exemplo, uma modificação ad hoc da conjectura (o que de fato está no mesmo nível do empirismo ingênuo) pode seguir um contraexemplo, ao passo que a base desta solução estava em um nível mais alto, como o do experimento de pensamento. É o caso de Lionel e Laurent[18] que primeiro estabeleceram a solução f (n) = n (n - 3) e depois a modificaram para f (n) = n (n - 3) / 2 apenas porque notaram a divisão por dois como uma relação entre o número de diagonais (5) do contraexemplo que eles examinaram e o número que esperavam (10).

No caso de conjecturas corretas, cuja construção remete a uma concepção “correta” de um polígono e de uma diagonal, sejam elas construídas dedutivamente ou a partir de uma

[18] Balacheff 1988 p.170

dialética entre tentativas sucessivas e suas refutações, o tratamento parece ser bem menos variado do que no caso de uma falsa conjectura. Um tipo de resposta predominante é rejeitar o contraexemplo após sua análise com referência às concepções dos alunos; um segundo tipo dominante de resposta envolve considerar o contraexemplo como uma exceção ou introduzir uma condição (na verdade, o último parece ser uma forma de evitar o reconhecimento da exceção).

Conclusões e questões sobre o ensino

Os tipos de processos de prova evidenciados pelos alunos não caracterizam intrinsecamente o que poderíamos chamar de sua "racionalidade", na medida em que diferentes níveis de prova puderam ser observados em sua atividade de resolução de problemas. O significado dos processos de prova não pode ser compreendido sem uma análise cuidadosa das concepções dos alunos sobre os conceitos matemáticos envolvidos e sua leitura da situação em que atuam. As características da situação parecem determinar o nível de comprovação, ao passo que a imagem que os alunos têm da matemática também desempenha um papel importante, principalmente no tratamento das refutações.

A passagem de provas pragmáticas para provas intelectuais requer uma base cognitiva e linguística. Nosso desprezo pela complexidade desta passagem pode ser uma das principais razões para o fracasso do ensino da prova matemática, uma vez que esta passagem é muitas vezes considerada apenas no nível lógico. Em geometria em particular, este ensino ocorre em um campo conceitual, que para os alunos ainda não se constituiu como uma teoria; não devemos esquecer que a geometria era para eles essencialmente restrita à observação e construção de objetos geométricos, sem necessidade de prova. Assim, o ensino da prova está associado ao que poderia ser descrito como uma quebra cognitiva na atividade do aluno, relacionada à quebra didática representada pela nova exigência de provas matemáticas.

Assim, gostaríamos de dizer que a construção da racionalidade matemática dos alunos deve ser considerada ao mesmo tempo e com a mesma prioridade que a construção dos seus conhecimentos matemáticos. Pode ser possível propor problemas de comprovação desde o início da aprendizagem da matemática, desde que algo diferente de provas matemáticas estritas fosse aceitável. Para tanto, devemos levar em consideração a capacidade de raciocínio dos alunos e considerar as condições didáticas para sua evolução. Mas quando uma prova foi aceita, a validade da declaração em questão é difícil de questionar mais tarde; portanto, a aceitação do professor de uma prova que não é matemática levanta o problema de sua eventual recorrência de uma forma que deve parecer razoável para os alunos.

O caso de refutações levanta problemas didáticos específicos. Mostramos a amplitude do tratamento dado pelos alunos a uma refutação e a variedade de razões para esse tratamento. Então, como podemos lidar com o fato de que quando o professor produz um contraexemplo, os alunos acreditam que é um caso particular, enquanto o que realmente deveria ser questionado é o empirismo ingênuo no qual sua conjectura se baseia ou sua compreensão do conhecimento matemático relacionado?

Se não há um determinismo cognitivo estrito envolvido na maneira como uma contradição mostrada por um contraexemplo poderia ser superada, então, que papel ele deveria desempenhar na situação? As intervenções do professor - a forma como as interações com os alunos é gerenciada - serão essenciais para ajudar os alunos a perceber que um dos principais objetivos é examinar seus conhecimentos, ou o raciocínio por trás de suas conjecturas, e não uma mera adaptação ad hoc de sua solução ou mesmo sua rejeição total.

Referências

Balacheff N., 1982, Preuve et démonstration en mathématiques au Collège. *Recherches en didactique des mathématiques,* 33, pp.261-304

Balacheff N., 1987a, Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics,* 8 pp.147-176

Balacheff N., 1987b, Cognitive versus situationa1 analysis of problem-solving behaviors. *For the learning of mathematics*, 63, pp.10-12

Balacheff N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collège*. Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Genoble1

Bourdieu P., 1980, *Le sens pratique*. Paris: Editions de Minuit

Fishbein E., 1982, Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 32, pp. 9-18 et 24

Galbraith P.L., 1979, *Pupils proving*. Shell Centre for Mathematical Education. The University of Nottingham

Hanna G., 1983, *Rigorous Proofs in Mathematics Education.* Curriculum series 48. The Ontario Institute for studies in Education

Lakatos I., 1976, *Proofs and refutations.* Cambridge University Press Piaget J., 1974, *Recherches sur la contradiction*, Vol.2. Paris : PUF Piaget J., 1975, *L'équilibration des structures cognitives*. Paris : PUF Popper K. R., 1979, *Objective Knowledge*. Oxford University Press

Sémadéni Z., 1984, Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics, 4* (1), pp.32-34