EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p722-769

Concepções dos alunos: uma introdução a uma caracterização formal[1]

Students' conceptions: an introduction to a formal characterization

Las concepciones de los estudiantes: una introducción a una caracterización formal

Les conceptions des élèves : introduction à une caractérisation formelle

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite : Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482
Nathalie Gaudin[3]
La Prépa des INP - Grenoble INP - UGA Institut d'ingénierie et de management
https://orcid.org/0000-0002-5719-1632

Tradução

Saddo Ag Almouloud[4]
Universidade Federal da Bahia
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054
Méricles Thadeu Moretti[5]
Universidade Federal de Santa Catarina
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo

Investigamos neste artigo a complexidade de modelar os saberes matemáticos dos alunos sob as restrições de reconhecer sua possível falta de coerência e sua eficiência local. Para tanto, propomos a formalização da noção de "concepção" como uma possível ferramenta para responder ao problema epistemológico que identificamos. Aplicamos então esta abordagem ao estudo das possíveis concepções de "função", de um ponto de vista histórico e depois epistémico. Relatamos o resultado de um estudo de caso para ilustrar o benefício que esperamos dessa abordagem. As noções de "concepção", "saber" e "conceito" são então relacionadas entre si dentro do modelo apresentado.

[1] Texto original em : https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190425
[2] Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] nathalie.gaudin@grenoble-inp.fr
[4] saddoag@gmail.com
[5] mthmoretti@gmail.com

Palavras-chave: Concepção, caracterização formal, alunos.

Abstract:

We investigate in this paper the complexity of modeling students knowing of mathematics under the constraints of acknowledging both their possible lack of coherency and their local efficiency. For this purpose, we propose a formalization of "conception" as a possible tool to answer the epistemological problem we identify. We apply then this approach to the study of the possible conceptions of "function" from a historical and then an epistemic point of view. We report the result of a case study to illustrate the benefit we expect from this approach. The notions of "conception", "knowing", and "concept" are then related one to the other within the model presented.

Keywords: Conception, Formal characterization, Students.

Resumen

En este trabajo investigamos la complejidad de modelar los saberes matemáticos de los estudiantes bajo las restricciones de reconocer su posible falta de coherencia y su eficiencia local. Para ello, proponemos la formalización de la noción de "concepción" como posible herramienta para responder al problema epistemológico que hemos identificado. A continuación, aplicamos este enfoque al estudio de las posibles concepciones de "función", desde un punto de vista histórico y luego epistémico. Informamos de los resultados de un estudio de caso para ilustrar el beneficio que esperamos de este enfoque. Las nociones de "concepción", "conocimiento" y "concepto" se relacionan entonces entre sí dentro del modelo presentado.

Palabras clave: Concepción, caracterización formal, estudiantes.

Résumé

Nous étudions dans cet article la complexité de la modélisation des connaissances mathématiques des élèves sous les contraintes de la reconnaissance de leur éventuel manque de cohérence et de leur efficacité locale. À cette fin, nous proposons la formalisation de la notion de " conception " comme outil possible pour répondre au problème épistémologique que nous avons identifié. Nous appliquons ensuite cette approche à l'étude des conceptions possibles de la "fonction", d'un point de vue historique puis épistémique. Nous présentons les résultats d'une étude de cas pour illustrer les avantages que nous attendons de cette approche. Les notions de "conception", de "connaissance" et de "concept" sont ensuite reliées entre elles au sein du modèle présenté.

Mots clés : Conception, caractérisation formelle, étudiants.

Concepções dos alunos: uma introdução a uma caracterização formal

Do comportamento ao significado

Os únicos indicadores que temos do bom ou do mau funcionamento do ensino são os comportamentos e produções dos alunos, que são consequências do *saber*[6] que construíram e das suas relações com o conteúdo ensinado. Mas tais avaliações são possíveis e seus resultados são significativos apenas no caso em que se consegue estabelecer uma relação válida entre esses saberes observados e o próprio conhecimento considerado. Essa relação entre comportamentos e conhecimento é crucial. Ela foi escondida como resultado da luta contra o behaviorismo, mas sempre esteve implicitamente presente na pesquisa educacional, pelo menos no nível metodológico. A questão principal é que o significado de um conhecimento não pode ser reduzido a comportamentos, por outro lado, o significado não pode ser caracterizado, diagnosticado ou ensinado sem vinculá-lo aos comportamentos.

Essa ligação foi claramente apontada por Schoenfeld em 1987, em um livro que editou sob o título *Cognitive Science and Mathematics Education*. Na introdução do livro, ele associa a abordagem da ciência cognitiva a um esforço em direção a uma descrição mais detalhada dos comportamentos de resolução de problemas, para que possam ser ensinados e reproduzidos. Esta posição de Schoenfeld é sintetizada pela seguinte indicação sobre sua própria pesquisa neste momento: “Minha intenção era colocar a questão das heurísticas de resolução de problemas em uma perspectiva das ciências cognitivas: qual nível de detalhes é necessário para descrever estratégias de resolução de problemas que os

[6] Seguimos a escolha feita para a tradução da obra de Brousseau (1997), de usar o saber como substantivo para distinguir os construtos pessoais dos alunos do conhecimento que se refere aos construtos intelectuais reconhecidos por um corpo social. Pretende-se manter a distinção feita em francês entre “connaissance” e “savoir”.

alunos podem realmente utilizar?[7]" (ibid., p.18). Essa *problemática* se abre em duas questões essenciais:

- Por um lado, em que medida uma granularidade mais fina de uma descrição garantiria uma melhor confiabilidade da transferência de um operador para outro? Ou, ainda, para qualquer competência, existe um nível de granularidade que dê uma garantia intrínseca da eficácia de tal transferência?

- Por outro lado, em que medida uma descrição mais precisa dos comportamentos de resolução de problemas informa sobre as relações entre comportamentos e saberes?

Com relação à segunda questão, devemos notar que o próprio Schoenfeld finalmente sugerem no capítulo de seu livro dedicado ao construtivismo, que essa relação é essencial que essa é essencial- mas pode ser, sem tirar todas as consequências dessa observação.

A questão das relações entre comportamentos e saberes é considerada fundamental para a *teoria das situações didáticas* (Brousseau, 1997)[8]. Um de seus postulados é que cada situação-problema exige do aluno comportamentos que são indicativos de saber. Esta correspondência fundamental, estabelecida caso a caso, justifica-se pela interpretação das situações-problema em termos de jogo, e pela interpretação de comportamentos em termos de indicação de estratégias, cujo caráter adaptado deve ser demonstrado no modelo ou representação atribuída ao aluno (Brousseau, 1997, p.215). Esse postulado é compartilhado por alguma abordagem da Ciência Cognitiva: "Todo comportamento implica um saber", escreve Pichot (1995, p.206)[9]. Na verdade, este postulado justifica a

---

[7] My intention was to pose the question of problem-solving heuristics from a cognitive science perspective: What level of details is needed to describe problem-solving strategies so that students can actually use them?" (*ibid*. p.18)

[8] Para a conveniência do leitor de língua inglesa, tomaremos todas as referências às contribuições de Brousseau para a educação matemática do livro publicado em 1997 por Kluwer, mas deve-se notar que o trabalho a que nos referimos foi publicado principalmente entre 1970 e 1990.

[9] Uma afirmação que ecoa a posição piagetiana clássica que Furth (1969) nos lembra em sua apresentação da fundamentação teórica do construtivismo: Piaget "identifica inteligência ativa com comportamento"

maior parte de nossa pesquisa experimental, uma vez que os comportamentos dos alunos são a fonte do corpus no qual realizamos nossa análise. Mas "identificar" um comportamento a partir da observação de uma dita realidade, que poderia ser uma sala de aula ou um experimento de laboratório, é um problema metodológico e teórico, como enfatiza Robert (1992, p.54). Um comportamento observado não é dado pela "*realidade*", mas retirado dela a partir de *uma decisão tomada por um observador*.

Se um comportamento é a descrição das relações materiais entre uma pessoa e seu ambiente, então depende das características da pessoa, bem como das características de seu ambiente. Um bom exemplo é o caso de instrumentos que ao mesmo tempo facilitam a ação, se o usuário detém o saber necessário e, por outro lado, limitam essa ação por causa de suas próprias limitações (Rabardel, 1995; Resnick & Collins, 1994, p.7). Na verdade, deve-se notar que essas limitações podem estar relacionadas a restrições materiais, bem como aos saberes envolvidos no projeto desses instrumentos.

"Pessoa" e "ambiente" referem-se a realidades complexas, das quais nem todos os aspectos são relevantes para o tipo de questionamento que estamos considerando. O que nos interessa é a pessoa do ponto de vista de sua relação com um saber. Por isso, vamos nos referir a partir de agora ao sujeito como uma redução da pessoa à sua dimensão cognitiva. Da mesma forma, não nos interessa o ambiente em toda a sua complexidade, mas apenas por suas características que são relevantes para um dado conhecimento. Denominamos *meio* esse subconjunto do ambiente de um sujeito; o *meio* é uma espécie de projeção do ambiente em sua dimensão epistêmica.

De fato, no caso da matemática, os saberes não são apenas consequências da interação entre um sujeito e um *meio material*, mas envolvem também interações com

(enfocando a característica estrutural dos comportamentos adaptativos, ibid., p. 170). O que significa que "inteligência não é uma coisa que causa comportamento inteligente; é um comportamento inteligente em sua estrutura ativa e aspectos essenciais, que nós, em nome da economia verbal, chamamos de inteligência (ibid., p.175).

sistemas de significantes produzidos pelo próprio sujeito ou por outros. Devemos então estender a ideia clássica de *meio* para integrar sistemas simbólicos e interação social como meios para a produção de saberes. Esse é o sentido da proposta de Brousseau, de definir o *meio como o sistema antagonista do sujeito no processo de aprendizagem* (Brousseau, 1997, p.57). Assim, não consideramos um saber como uma propriedade que pode ser atribuída apenas ao sujeito, nem apenas ao meio[10]. Ao contrário, o consideramos como uma propriedade da interação entre o sujeito e o meio - seu sistema antagonista. Essa interação é significativa, porque consegue preencher as condições necessárias para a viabilização do *sistema sujeito meio*. Por viabilidade, queremos dizer que o sistema *sujeito/meio* tem a capacidade de recuperar um equilíbrio após algumas perturbações; o que implica que a perturbação é reconhecida pelo sujeito (por exemplo, uma contradição ou uma incerteza). Em alguns casos, o sistema sujeito/meio pode até mesmo evoluir, caso as perturbações sejam tais que isso seja necessário. Em outras palavras, esta é uma formulação do postulado de Vergnaud de que os problemas são a fonte e os critérios dos saberes (Vergnaud, 1981, p.220).

Problema significa aqui uma perturbação mais ou menos séria do sistema sujeito/meio. A existência de um saber pode então ser evidenciada por sua manifestação como uma ferramenta de solução de problemas, o que é reificado como comportamentos do sistema sujeito/meio à medida que supera as perturbações a fim de satisfazer suas restrições de viabilidade. Essas restrições não abordam a maneira como o equilíbrio é recuperado, mas o critério desse equilíbrio (também poderíamos dizer que não há apenas

[10] Levando em consideração a observação de um dos revisores de uma versão anterior deste artigo, parece necessário reconhecer claramente a estreita relação entre o que é afirmado no artigo e o construtivismo de Piaget. Mas uma diferença fundamental deve ser enfatizada: nosso foco está em todo o sistema [S <> M] e não em uma de suas partes. Em outras palavras, nossa preocupação não é saber “como o sujeito pensa”, mas ser capaz de dar conta de todo o sistema de uma forma relevante para um projeto didático - o sistema cognitivo que consideramos não é S, mas [S<>M].

uma maneira de saber). Seguindo Stewart (1994, pp. 25-26), diríamos que essas restrições são *proscritivas*, o que significa que expressam condições necessárias para garantir a viabilidade do sistema, e que não são prescritivos, pois não informam em detalhes de que forma um equilíbrio deve ser reconstruído (e podemos acrescentar aqui que as descrições buscadas por Schoenfeld soam mais prescritivas do que proscritivas).

Podemos agora propor uma definição do significado de um saber que pode ser utilizada pragmaticamente e eficientemente em uma *problemática didática.*

Um saber é caracterizado como o estado de equilíbrio dinâmico de um ciclo de ação/feedback entre um sujeito e um meio sob restrições proibitivas de viabilidade.

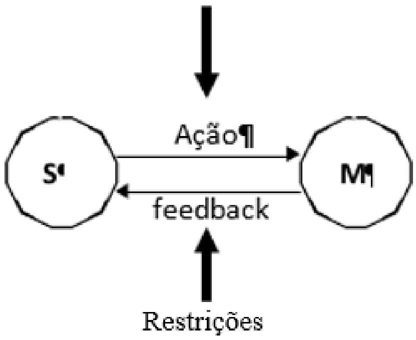


Figura 1.

Seguindo a problemática didática, estamos interessados na natureza das restrições prescritivas que o sistema sujeito/meio deve satisfazer. Dentre essas restrições, não conhecidas exaustivamente, podemos citar duas que são específicas dos sistemas didáticos: as restrições de tempo e as restrições epistemológicas (Arsac et al., 1992). As primeiras devem-se à forma de organização da escolaridade (duração da vida escolar, organização do ano letivo, organização das aulas etc.). Este último se deve à existência de um conhecimento de referência que subjaz a qualquer conteúdo a ser ensinado e que, de fato, fornece critérios para a aceitabilidade de qualquer resultado de aprendizagem.

O papel do professor, no que diz respeito a determinado conteúdo a ser ensinado, é organizar o encontro entre um sujeito e um meio para que um saber - que pode ser visto como aceitável em relação à intenção didática - possa emergir de sua interação. Esse encontro não é um evento trivial. Estar em um meio não é suficiente para o aluno ser capaz de “ler” nele o meio relevante para a finalidade de ensino (Balacheff, 1998). Selecionar as características relevantes do meio, identificar o feedback e entendê-lo com relação ao alvo de ação pretendida não é evidente. A condição para o professor ter sucesso nesta tarefa é construir uma situação que permita a devolução para os alunos tanto do meio como das relações relevantes (ação/feedback) para esse meio. Mas a intenção didática de tal situação pode atuar como uma restrição; é o caso quando o aluno acredita na expectativa do professor, o que poderia modificar a natureza do equilíbrio do sistema sujeito/meio e, a seguir, a natureza do saber relacionado. Mas essa é a complexidade básica dos sistemas didáticos.

A aprendizagem é um processo de reconstrução de um equilíbrio do sistema sujeito/meio que foi perdido após perturbações do meio, ou perturbações das restrições no sistema, ou mesmo perturbações do próprio sujeito (modificação de suas intenções, ou como consequência de uma doença cerebral etc.). A problemática didática considera o caso de perturbações provocadas propositalmente, com o intuito de estimular a aprendizagem. O indicador de uma perturbação é a lacuna, reconhecida pelo sujeito, entre o resultado esperado de uma ação e o feedback real do meio. Isso significa, por um lado, que o sujeito é capaz de reconhecer a existência de uma lacuna não aceitável em relação à sua intenção e, por outro lado, que o meio pode fornecer um feedback identificável.

Às vezes, o sujeito não identifica uma lacuna, ao passo que nós, como observadores, identificamos que uma deveria ter sido reconhecida. Denominamos erro a essa lacuna despercebida quando ela é o sintoma de um saber, isto é: o sintoma da resiliência de um equilíbrio prévio do sistema sujeito/meio.

Como agora é bem aceito, nem todos os erros são negativos. Para a construção de certos saberes é ainda melhor estar atento a alguns erros e superá-los. Por exemplo, a convergência uniforme é um conceito muito poderoso, cuja construção frequentemente procede por meio de erros devido a uma ideia comum de conservação de certas propriedades de funções (como a afirmação - falsa em geral - de que o limite de uma série de funções contínuas é uma função contínua). Mas se a pesquisa foi capaz de mostrar em alguns casos que conhecimentos errôneos poderiam ser necessários para a aprendizagem significativa de alguns conceitos, ela deixou em aberto a questão do controle sobre os meios que permitem sua superação.

O conhecimento da fonte de erros poderia ser refutado localmente, mas poderia manter alguma validade até mesmo no que diz respeito ao conhecimento de referência, o que pode ser visto como fornecendo a ele um domínio de validade (o conceito de convergência uniforme permite expressar o domínio de validade do chamado princípio de conservação de algumas propriedades). Mas mesmo quando esse conhecimento errôneo é rejeitado e substituído por um novo, ele pode manter uma validade pragmática (os números decimais não são números naturais com uma virgula, mas considerá-los como tal é bastante útil no que diz respeito à computação). A consequência é a possibilidade de os primeiros saberes persistirem apesar de sua refutação, simultaneamente com novos saberes - o que provavelmente instigará ainda a ideia de um sujeito cognoscente incoerente e instável.

Um problema epistemológico

Coerência e esfera de prática

> No diagrama do calendário, a série completa das oposições temporais que são implantadas sucessivamente por diferentes agentes em diferentes situações, e que nunca podem ser praticamente mobilizadas juntas por causa das necessidades da prática, nunca requerem tal apreensão sinótica, mas antes a desencorajam através de suas demandas urgentes, se justapõem na simultaneidade de um único espaço. O calendário, portanto, cria ex nihilo toda uma série de relações [...] entre pontos de referência em diferentes níveis, que nunca são colocados frente a frente na

> prática, são praticamente compatíveis, mesmo que sejam logicamente contraditórios. (Bourdieu, 1990, p. 83)

Esta explicação do paradoxo da coexistência de um pensamento racional e de saberes, que parece contraditória do ponto de vista do observador, pode ser estendida no caso de um único agente observado em diferentes situações. O cerne desta explicação é o tempo, por um lado, e, por outro, a diversidade de situações. O tempo organiza as ações do sujeito sequencialmente de tal forma que os saberes contraditórios são igualmente operacionais, porque aparecem em diferentes períodos de sua história - os saberes contraditórios podem então ser ignorados. A questão da diversidade de situações introduz um elemento de tipo diferente. É uma explicação possível na medida em que se reconhece que um saber não é de natureza geral, mas, ao contrário, está relacionado a um espaço de validade específico e concreto sobre o qual é reconhecido como uma ferramenta eficiente. Isso enfatiza que a transferência de uma situação para outra não é um processo óbvio, mesmo que aos olhos de um observador essas situações sejam isomórficas. Seguindo Bourdieu, nos referiremos à esfera da prática para designar esses domínios de validade mutuamente exclusivos na história do sujeito. Podemos dizer que, na esfera da prática, o sujeito racional está reconciliado com o sujeito que conhece.

Devemos insistir no fato de que as contradições, assim evidenciadas, são reconhecidas como tais por um observador que é capaz de relatar situações tidas como independentes e completamente diferentes pelo próprio sujeito. Mas, não obstante, no sistema referencial do observador, esses estados do sistema sujeito/meio observado, devem ser rotulados da mesma forma. Assim, pode-se querer falar do sujeito conhecimento de números decimais, de continuidade de funções ou de reflexão de linhas, mesmo que mais tarde se reclame que esse conhecimento não é coerente.

De fato, aceitar a existência de saberes contraditórios parece refutar o princípio teórico dos construtos mentais como produtos de um processo de adaptação regido por critérios de confiabilidade e de adequação à resolução de problemas ou desempenho de tarefas. Isso levanta problemas na educação matemática, para a qual as soluções têm sido buscadas em diferentes direções. Vamos aqui considerar o mais significativo e sua evolução.

De miconcepções a concepções como saber

Em uma pesquisa que apresentou na reunião anual de 1986 da American Educational Research Association, Confrey relaciona o desenvolvimento da pesquisa sobre conceitos errôneos ao reconhecimento de um fracasso no ensino: apesar de todos os esforços, muitos alunos tinham grandes conceitos errôneos em matemática e ciências. A pesquisadora nota que a comunidade de educação matemática teve uma abordagem bastante pragmática para este problema:

> Misconcepções foram definidas empiricamente como falhas documentadas de muitos alunos em resolver problemas que pareciam estar relacionados a conceitos fundamentais. (Confrey, 1986, manuscrito p.4)

Em um artigo publicado posteriormente, Confrey (1990) distingue diferentes abordagens dessa questão[11]. Em todas elas, a criança-aluno é vista como um sujeito fundamentalmente distinto do adulto-especialista que se apresenta como o dono do saber de referência[12]. Mas essa visão não exclui o reconhecimento de algum tipo de legitimidade cognitiva desses equívocos[13]:

> [...] uma criança pode não estar 'vendo' o mesmo conjunto de eventos que um professor, pesquisador ou especialista. Isso sugere que muitas vezes a resposta de uma criança é rotulada de errônea muito rapidamente, e que se alguém fosse

[11] They are the Piagetian genetic epistemology, the scientific epistemology and the information processing approach. Each of these three approaches aims at providing a *problématique* for the cases when the students' conceptions appear to be in contradiction with shared and recognized knowledge (Confrey, 1990, p.4)
[12] the case of the former one or even of the "mathematics of the child" (Confrey, 1990, p.29)
[13] Essa observação, feita no caso da epistemologia científica, é de fato uma abordagem válida, inclusive para a abordagem piagetiana, como enfatizaremos no parágrafo seguinte.

> imaginar como a criança estava entendendo a situação, então descobriria que os erros eram razoáveis e sustentáveis. (ibid., p. 29)

Na verdade, dentro do quadro de referência do aluno - em oposição a um externo - as concepções se enquadram nas regras comuns de saber:

> Um equívoco não requer a postulação de uma 'imagem' inadequada do mundo; requer a noção de uma conclusão bem-sucedida de uma série de problemas em que o ciclo de formulação de problemas (expectativa), resolução de problemas (ação) e reconstrução de problemas (revisão) são realizados com sucesso.

Em outras palavras: *uma misconcepção tem um domínio de validade*, caso contrário, não existiria como tal. Portanto, há uma distância muito curta entre um equívoco e um saber. A principal diferença é que, para uma misconcepção, existe uma refutação que é conhecida pelo menos pelo observador. Mas mesmo ao atribuir a uma misconcepção o status de um saber, o que leva a maioria dos autores a abandonar a própria palavra, permanece como um corolário da definição inicial a existência de *um conhecimento de referência intrinsecamente correto* - embora tal posição seja claramente refutada por nosso conhecimento atual da história da ciência e da matemática. Notemos, neste ponto, que considerar que os saberes dos alunos e os saberes de referência são de natureza diferente, tem como consequência a impossibilidade de um modelo, o que seria uma ferramenta para dar conta de ambos.

Bachelard (1938, p.13) escreveu de maneira simpática que a realidade nunca é o que se poderia acreditar, mas é sempre o que se deveria ter pensado[14]. Feita na primeira metade do século, esta afirmação expressa que o saber está sempre em progresso. Se aceitarmos isso, os erros testemunham a inércia do poder instrumental de um saber que se provou por sua eficiência em situações suficientes, e sua probabilidade de organismo em um ambiente que o modifica e que por sua vez se modifica. Pode-se notar que o

[14] "O real nunca é 'o que se poderia pensar', mas é sempre o que se deveria ter pensado" (Bachelard, 1938, p.13).

construtivismo não reconheceu imediatamente essa natureza do erro, ou pelo menos do que se poderia pensar. Por exemplo, Aebli (1963), que desenvolveu a aplicação da psicologia de Jean Piaget à didática, caracterizou os erros como testemunhos de mal-entendidos ou hábitos de um aluno[15]. Assim, as reações errôneas que podem provocar em alguma situação de resolução de problemas devem ser estudadas detalhadamente com os alunos, para que entendam os motivos pelos quais alguns processos não são corretos, e para que capturem diferenças e relações entre a reação correta e o erro (ibid., p.101). Até certo ponto, podemos sugerir que, em tal visão, o aluno é um sujeito cognitivo, mas ainda não é um sujeito totalmente sabido:

> Do ponto de vista do nível funcional, a criança é idêntica ao adulto, mas com uma estrutura mental que varia em função das fases de desenvolvimento (Piaget, 1969, p.224). Envolvida em um processo de construção, a criança é sempre obrigada a se acomodar a uma realidade externa, às peculiaridades do ambiente a partir do qual ela tem que aprender tudo. (ibid., p.225)

O conteúdo da estrutura mental da criança ainda não tem completamente o estatuto de um saber, embora existam todos os ingredientes teóricos que permitam considerá-la como tal. A revolução copernicana não se concretizou no início dos anos 70.

A principal evolução dos anos 80 foi reconhecer que os erros não são apenas efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, mas o efeito de um saber anterior que foi interessante e bem-sucedido, mas que agora se revela como falso ou simplesmente não adaptado (Brousseau, 1997, p.82). Na França, um dos primeiros trabalhos neste paradigma (Salin, 1976) propôs características cognitivas dos erros essenciais para o desenvolvimento da teoria das situações didáticas: por um lado, um erro é um ponto de vista de um saber sobre outro saber (possivelmente, para um sujeito, a avaliação de um saber antigo do ponto de vista de um novo), por outro lado, um erro só pode ser identificado se o feedback do meio

[15] "Reflexos condicionados acionados por um sinal indutor" (Aebli, 1963, p.53).

puder ser "lido" pelo sujeito como indicação de uma falha (uma expectativa não satisfeita)[16].

A principal diferença entre a posição anterior e a atual reside no seu significado epistemológico; o status de saber é diferente em cada caso. A primeira posição implica a existência de um conhecimento de referência geral e verdadeiro (um conhecimento, por assim dizer). A segunda posição requer apenas estabelecer uma relação entre dois saberes com a ideia de uma evolução, sem julgá-los. Qualquer conhecimento é o que é, pareça estar errado ou não, parcial ou mal adaptado; é antes de tudo o resultado de uma adaptação ótima do sistema sujeito/meio, segundo critérios de adequação e eficiência.

Como consequência da natureza do sistema sujeito/meio, todo saber tem caráter provisório, ou melhor, todo saber poderia ser revisitado, seu domínio de validade pode ser modificado em decorrência de algumas perturbações que seria inútil afirmar que são improváveis. Com efeito, reconhece-se aqui a forte relação que liga "saber" e "problemas", para os quais este saber é uma ferramenta (permitindo voltar a um equilíbrio).

Concepção, uma caracterização formal[17]

A palavra "concepção" tem sido usada há anos em pesquisas sobre ensino e aprendizagem de matemática, mas tem sido utilizada como uma noção de senso comum, ao invés de definida explicitamente. Ela funciona como uma ferramenta, mas sua definição permanece implícita; não é tomado como objeto de estudo como tal (Artigue, 1991, p.266). De acordo com a análise de Artigue, ""concepção" se refere a um objeto local; neste

[16] A tese de Brousseau, no início dos anos setenta, vai além do fato de reconhecer que os construtos mentais fonte dos erros são os saberes. Afirma que alguns desses saberes passíveis de serem falsificados são necessários ao aprendizado: a trajetória do aluno pode ter que passar pela construção (provisória) de saberes errôneos, porque a consciência dos motivos pelos quais esse saber é errôneo é necessária para a construção e compreensão do novo saber. Seguindo Bachelard (1938, pp. 13-22), Brousseau chama de obstáculos epistemológicos essas portas obrigatórias para uma nova compreensão: "Um conhecimento, como um obstáculo, é sempre fruto de uma interação entre o aluno e seu entorno e mais precisamente entre o aluno e uma situação que torna este saber 'de interesse'. Em particular, ele permanece "ótimo" em um determinado domínio definido pelas características numéricas "informacionais" da situação." (Brousseau 1997, p.85).

[17] Embora bastante completa, a apresentação é aqui limitada aos principais contornos da caracterização formal de concepções. O leitor pode estar interessado em visitar o site relacionado www.conception.imag.fr .

sentido, o seu estatuto epistemológico não difere propriamente do da palavra "misconcepção". Há necessidade de uma definição mais bem fundamentada de conceitos e de ferramentas que nos permitam analisar suas diferenças e semelhanças. Uma necessidade já observada por Vinner (1983, 1987). Esta seção visa propor uma solução para este problema na forma de uma formalização da noção de "concepção". Em seguida, nas últimas seções deste artigo, analisaremos a literatura atual sobre as concepções de função dos alunos como um caso para uma primeira ilustração da utilidade de nossa proposição.

Essa formalização deve ser uma forma de superar a contradição apontada acima, ou seja, que a multiplicidade de saberes de um sujeito pode se revelar contraditória com relação à alguma referência dada. Assim, também proporemos definições dos termos "saber" e "conceito" como entidades abstratas, cujas diferenças residem em suas funções e relações.

Denominamos concepção C o quádruplo (P, R, L, $\sum$) em que:

- P é um conjunto de problemas;
- R é um conjunto de operadores;
- L é um sistema de representação;
- $\sum$ é uma estrutura de controle.

O leitor informado reconhecerá, subjacentes aos três primeiros componentes, as principais características identificadas por Vergnaud (1991, p.145)[18] para caracterizar um conceito; introduzimos o quarto por razões que explicaremos a seguir. A primeira questão de qualquer investigador em educação matemática será a de saber relacionar esta definição formal com a "realidade" de que se depara. Vamos considerar este ponto para cada um dos quatro elementos da definição.

[18] Essa definição proposta por Vergnaud foi, de fato, cunhada no início dos anos 80.

A questão da caracterização concreta do conjunto P de problemas é complexa. Uma opção seria considerar todos os problemas para os quais a concepção proposta fornece ferramentas eficientes para a elaboração de uma solução. Esta é a opção sugerida por Vergnaud no caso das estruturas aditivas (1991, p.145). Essa solução está fora de alcance na maioria dos casos. Outra opção poderia consistir em considerar um conjunto finito de problemas, com a ideia de que outros problemas derivariam deles. Essa é a solução proposta por Brousseau (1997, p.30). Se a opção de Vergnaud não ajudar, a opção de Brousseau deixa em aberto a questão de estabelecer que um conjunto gerador de problemas pode ser construído para qualquer concepção. Em vez disso, propomos adotar uma postura pragmática, derivando a descrição de P, de forma empírica, a partir da caracterização de situações que permitem diagnosticar as concepções dos alunos. Esta abordagem pode ser reforçada pela análise de usos históricos e reais da matemática (por exemplo, Sierpinska 1989; Thurston, 1994; d'Ambrosio, 1993; Lave, 1988; Nuñes et al., 1983).

A questão da caracterização concreta do *conjunto R de operadores* é mais clássica. Os operadores são as ferramentas para obter uma evolução das relações entre o sujeito e o meio; elas são as ferramentas para a ação. Os operadores podem ser “concretos”, permitindo realizar ações em um meio material, ou “abstratos”, permitindo transformar representações linguísticas, simbólicas ou gráficas. Assim, um operador pode assumir a forma de funcionalidade na interface de um software ou de uma regra sintática para transformar uma expressão algébrica, ou ainda pode assumir a forma de um teorema em uma inferência.

O sistema de representação L consiste em um repertório de conjuntos estruturados de significantes, de natureza linguística ou não, utilizados na interface entre o sujeito e o meio, apoiando a ação e o feedback, as operações e as decisões[19]. Para citar apenas alguns exemplos: linguagem algébrica, desenho geométrico, linguagem natural, mas também interfaces de software matemático e calculadoras são exemplos de sistemas de representação. Seja como for, dependendo do estado do sistema sujeito/meio, o sistema de representação deve ser adequado para dar conta dos problemas e permitir operadores atuantes.

A última dimensão de uma concepção, *a estrutura de controle* $\sum$, é constituída por todos os meios necessários para fazer escolhas, tomar decisões, bem como expressar julgamentos. Esta dimensão é muitas vezes deixada implícita, embora se possa perceber que os critérios que permitem decidir se uma ação é relevante ou não, ou se um problema é resolvido, é um elemento crucial para a compreensão de um conceito matemático. Sugerimos que na proposição de Vergnaud, a estrutura de controle está implícita em sua referência a teoremas em ação ou à inferência (Vergnaud, 1991, pp. 141-142), que são noções significativas apenas na medida em que estão associadas ao reconhecimento que o sujeito tem de procedimentos para verificar se suas ações são legítimas e corretas. Após Polya e uma longa tradição de pesquisa sobre metacognição, Schoenfeld (1985, pp. 97-143) mostrou o papel crucial do controle na solução de problemas. Mais recentemente, Robert (1993) enfatizou o papel do metaconhecimento, demonstrando a necessidade de tratar as estruturas de controle como tais. Na verdade, isso está diretamente relacionado a uma *problemática* da validação, que está intrinsecamente relacionada ao entendimento (Balacheff, 1987, p.160).

[19] Na sequência das observações de um dos nossos árbitros, devemos sublinhar que estamos cientes da dificuldade que se pode colocar com o uso da palavra “representação”, especialmente quando é lida à luz de uma problemática psicológica. Reconhecemos que qualquer “símbolo como representação necessita de uma pessoa viva que constrói a representação ou, ao compreendê-la, a reconstrói” (Furth, 1969, p.,93). Mas aqui estamos nos concentrando no sistema formado por um sujeito cognoscente e um meio, e não exclusivamente em um deles. Na verdade, a representação neste sentido - isto é, no sentido semiótico - é o suporte básico dos comportamentos observados. Não pretendemos reduzir nem o sujeito nem o conhecimento aos significantes.

É importante insistir no fato de que essa caracterização de uma concepção não está mais relacionada ao sujeito do que ao meio com o qual ele interage. Pelo contrário, permite uma caracterização do sistema sujeito/meio: o sistema de representação permite a formulação e a utilização dos operadores tanto pelo emissor ativo (o sujeito) como pelo receptor reativo (o meio). A estrutura de controle permite expressar os meios do sujeito para decidir sobre a adequação e validade de uma ação, bem como os critérios do meio para selecionar um feedback.

O caso das funções

Um tema amplamente estudado

Em vez de dar muitos exemplos, que só poderíamos explorar superficialmente no espaço limitado do presente artigo, optamos por investigar da maneira mais precisa possível apenas um caso, a saber, o caso das "funções".

O tema da função foi amplamente estudado. Existe uma grande quantidade de referências bibliográficas, todas muito diferentes umas das outras. Por outro lado, a noção de função está na intersecção de várias áreas matemáticas (números, limite, álgebra etc.) e requer a consideração de vários sistemas de representação (representações gráficas, linguagem simbólica etc.). Um contexto tão rico ajudará a demonstrar o benefício que se pode esperar da modelagem das concepções que propomos.

É clássico hoje em dia considerar a priori as seguintes categorias de concepções de função:

- Funcionar como uma "lei" de correspondência (uma função expressa a correspondência entre dois conjuntos, um elemento do primeiro conjunto sendo associado a um elemento único do segundo conjunto)
- Funcionar como expressões simbólicas (uma fórmula, uma expressão algébrica ...)

- Funcionar como um objeto gráfico

As duas primeiras formulações vêm de Vinner e Dreyfus (1989 pp. 359-360). Como o leitor deve saber, esses autores consideram outras imagens conceituais de "função", como "relação de dependência", "regra" e "operação". Outros autores introduzem outras categorias como "razão e proporção" ou "dependência funcional" (Sierpinska, 1989) ou concepção como processos (Breidenbach et al., 1992). Essas categorias podem ser vistas como refinamentos das categorias mais gerais mencionadas acima. Devido à fragilidade dos meios de que dispomos para atribuir uma concepção a um aluno, optamos aqui por permanecer com as três definições principais.

Os métodos geralmente utilizados para atribuir uma concepção a um aluno consistem mais frequentemente em analisar entrevistas ou questionários que perguntavam aos alunos se existe uma função correspondente a uma determinada especificação (por exemplo, Vinner e Dreyfus, 1989, p.359) ou modelagem de algumas situações (por exemplo, Breidenbach et al., 1992, p.279), ou mesmo abordando diretamente a questão "o que é uma função para você?" (Vinner e Dreyfus, 1989, p.359). O que os alunos produzem então é bastante difícil de analisar. Por exemplo, pode-se perguntar como é possível distinguir precisamente entre a categoria "relação de dependência entre duas variáveis" ("relação de dependência") e a categoria "algo que relaciona o valor de x ao de y" ("regra"). A questão aqui apontada é, por um lado, a forma como os dados são recolhidos e os seus efeitos no diagnóstico das concepções e, por outro lado, a forma como essas concepções podem ser descritas. Voltaremos a esta questão mais tarde.

As categorias que selecionamos podem ser vistas como invariáveis na literatura da educação matemática; correspondem, de fato, aos três principais sistemas de representação associados à "função" - quer se considere a pesquisa em educação matemática ou a pesquisa em história da matemática. Com efeito, é pela análise histórica, utilizando as obras clássicas de vários historiadores (Kline, 1972; Smith, 1958; Kleiner, 1989; Edwards, 1979), que introduziremos uma primeira proposição para modelar as concepções de "função".

Concepções de função em uma perspectiva histórica

Um bom ponto de partida para identificar as principais concepções de "função" ao longo da história da matemática é distingui-las por meio do principal sistema de representação que implementaram.

Um dos sinais mais antigos da existência de função são as tabelas e seus usos. Por exemplo, Ptolomeu (no Almagesto) sabia que as posições dos planetas mudam com o tempo e compilou tabelas numéricas astronômicas (Youschkevitch, 1976, p.40-42). Nos séculos 10 e 11, tabelas precisas também foram utilizadas na astronomia pelos árabes. As tabelas vão com a localização de um número isolado por outro número (ou quantidades) e, portanto, a ideia de variável ainda não está presente.

A associação de uma curva e uma tabela desempenha um papel crítico na formulação e solução do problema de determinação das trajetórias dos planetas. Kline, por exemplo, indica que Kepler melhorou o cálculo da posição dos planetas essencialmente pelo ajuste de curvas geométricas e dados astronômicos, sem qualquer referência teórica para explicar por que as trajetórias são elípticas (op. cit., p.336). A validade das trajetórias conjecturadas estava então essencialmente relacionada à precisão da medição das posições dos planetas e à escolha de um objeto geométrico familiar, a elipse que permitia descrever o universo com leis matemáticas simples. Kline observa que a maioria das funções introduzidas no século XVII foram primeiramente estudadas como curvas (ibid., p.338). Na verdade, as curvas, como trajetórias de pontos móveis, eram o principal objeto de estudo dos matemáticos do século XVII (Kleiner, 1989, p.283).

A criação do simbolismo da álgebra (Viète, 1540-1603, e, posteriormente, Descartes, Newton, Leibniz) foi decisiva para o desenvolvimento das funções. A separação do estudo da função da geometria é creditada a Euler. Kleiner (ibid., p.284) enfatiza que o "Introductio in analysin infinitorum" (1748) oferece uma abordagem inteiramente algébrica, sem uma única imagem ou desenho. A função foi apresentada como objeto central da Análise. A caracterização analítica das funções recebeu forte formulação de Euler, que afirmou que uma função é uma expressão analítica formada de qualquer maneira a partir de uma quantidade e constantes variáveis (ibid., p.404).

Embora considerar a função como expressão analítica tenha se mostrado uma ferramenta poderosa, causou contradições e foi inadequada para resolver alguns problemas do século XVIII (por exemplo, a polêmica das cordas vibrantes). Euler formulou em 1755 uma definição geral de função, expressando a noção de dependência entre quantidades variáveis e a noção de causalidade (Dhombres, 1988, p.45). Tal definição abriu novas potencialidades e dificuldades que estimularam muitas discussões até o século XX (Monna, 1972).

Cada uma dessas concepções[20] pode ser caracterizada por um quádruplo, conforme definimos acima:

- - Concepção da tabela: $C_T = (P_T, RT, \text{Tabela}, \sum_T)$,
- - Concepção de curva: $C_C = (P_C, R_C, \text{Curva}, \sum_C)$,
- - Concepção analítica: $C_A = (P_A, R_A, \text{Álgebra}, \sum_A)$.
- - Concepção de relação: $C_R = (P_R, R_R, L_R, \sum_R)$

Os casos das concepções de Tabela, Curva e Álgebra são suficientes para ilustrar nosso propósito e, portanto, não desenvolveremos em detalhes o caso da concepção de

[20] Não pretendemos que essas três concepções sejam suficientes para dar conta do desenvolvimento histórico de "função". Eles são pedras angulares a partir das quais a análise histórica pode ser realizada e organizada.

Relação. As palavras “Tabela”, “Curva” e “Álgebra” são utilizadas para nos referirmos aos sistemas de representação correspondentes (o que não é o caso para a concepção de Relação) que se caracteriza por suas regras sintáticas específicas e seus próprios critérios de validade. A questão é então examinar se para C_T, C_C e C_A os conjuntos P, R e $\sum$ mostram diferenças significativas dependendo da concepção que contribuem para descrever. Vamos considerar esta questão do ponto de vista das estruturas de controle.

A concepção C_T tem fundamentos essencialmente empíricos. Na verdade, a validade de uma tabela depende da precisão da medição e dos cálculos relacionados em relação aos requisitos de uma dada circunstância. No caso da concepção C_C, a validade deve ser avaliada em relação à qualidade das interpolações e previsões que a elipse permitiu. Portanto, a estrutura de controle correspondente $\sum_T$ é fundamentalmente de natureza empírica, assim como para $\sum_C$. Devem fornecer ferramentas que permitam verificar a precisão das tabelas ou das curvas relativamente às observações e medições realizadas. As correspondentes esferas de prática dependem de maneira essencial da qualidade de produções bastante concretas. Com efeito, no início do século XVIII, um problema importante era o da navegação de longa distância, estando as costas invisíveis[21].

Assim, o conjunto de problemas P_T, assim como P_C, eram dominados por questões práticas e R_T, assim como R_C, incluíam - mas não exclusivamente - técnicas de medição, de computação e de desenho. Neste ponto, podemos sugerir que a elipse da primeira lei de Kepler era um objeto geométrico, idealmente concebido, mas utilizado empiricamente na construção de curvas, a fim de ter acesso ao objeto e para previsões. Uma curva não era a representação gráfica do que hoje reconhecemos como o gráfico de uma função considerada como relação entre entidades (números ou mesmo quantidades).

[21] No século XVI, os métodos de [computação da longitude] eram tão imprecisos que os navegadores costumavam errar até 500 milhas” (Kline, 1972, p.336). Em 1712, o governo britânico estabeleceu uma comissão para a descoberta da longitude.

A concepção analítica A_C é de natureza diferente. A nosso ver, isso introduz uma ruptura na epistemologia das funções. Uma função definida por uma expressão analítica não precisa se referir a um campo experimental (seja de fenômenos naturais, seja de desenhos mecânicos). Ela pode ser estudada por si mesma, como Euler expressou ao apresentar funções como objeto de estudo da Análise (Introductio in analysin infinitorum). Isso não significa que a problemática da modelagem não desempenhe mais nenhum papel, mas sim que ela não é mais central e não caracteriza a concepção. Um objetivo da Análise do século XVIII (e dos séculos XIX e XX ...) foi a resolução de equações funcionais que foi de grande importância para a Física (Dhombres, 1988), e os desenvolvimentos em séries infinitas, que desempenharam um papel central como operadoras (R_A) nessas resoluções. A estrutura de controle correspondente $\sum_A$ depende das características específicas da Álgebra como sistema de representação e dos operadores que permite implementar. A implementação de expressões simbólicas e a prova matemática são as principais ferramentas para decidir se uma afirmação é válida ou não. Na verdade, as representações simbólicas não são as únicas disponíveis e utilizadas. A qualquer função C_A pode ser associado um gráfico, que é um conjunto de pares (x, y) no plano cartesiano (onde y é o valor da função para um determinado x). Essa possibilidade sugere frequentemente relações próximas entre C_C e C_A, o que levanta a questão da relação entre gráfico e curva. Embora o gráfico seja uma representação possível de uma função, exibindo fenômenos que as expressões algébricas não demonstram facilmente (por exemplo, a interseção de duas linhas), uma curva é antes uma evocação da trajetória de um ponto móvel ou de um objeto geométrico, como Kline expressa ao descrever a concepção de Newton (op. cit., p.339).

A solução geral das equações diferenciais parciais que expressam as vibrações de uma corda finita, por causa das condições iniciais, induziu Euler a considerar funções arbitrárias que não tinham necessariamente uma representação analítica. A existência de tais funções arbitrárias era controlada por argumentos físicos e estava relacionada às várias formas iniciais possíveis do fragmento. O surgimento de uma concepção C_R de função exigiu então o desenvolvimento de novos modos de representação L_R e de uma nova estrutura de controles $\sum_R$ para definir o que tais funções poderiam ser e para trabalhar com elas sem qualquer referência a uma representação analítica. Isso demorou dois séculos.

É importante enfatizar aqui que as concepções, conforme as descrevemos, diferem umas das outras de maneira essencial. Para ilustrar isso, considere as várias definições da derivada fornecidas por Thurston (1994):

- *Simbólico*: a derivada de x^n é nx^{n-1}, a derivada de sin (x) é cos (x), a derivada de fog é f'og*g' etc.
- *Geométrica*: a derivada é a inclinação de uma reta tangente ao gráfico da função, se o gráfico tiver uma tangente.
- *Aproximação*: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear da função perto de um ponto.

Thurston infere que cada uma das diferentes definições expressa "maneiras de compreender uma determinada peça da matemática", mas que são de fato equivalentes, desde que se faça um esforço para formulá-las com suficiente precisão (Thurston, 1994, pp.4-7). Se isso poderia ser o caso de um especialista que realmente vê uma relação metafórica entre os diferentes cenários evocados, está longe de ser o caso para um aprendiz ou mesmo do ponto de vista da história da matemática ao longo da qual essas definições surgiram. Concepções como as que descrevemos não verificam a propriedade de equivalência sugerida por Thurston.

Voltando ao caso da função, a questão não é a precisão na formulação de uma definição, nem é uma questão de linguagem. A concepção de curvas como trajetórias de um ponto, atribuída a Newton por Kline (1972, p.339), é fundamentalmente diferente da concepção de Dirichlet, que a considera como um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos que satisfazem determinadas restrições (o que garante a univalência). O ponto crucial é que “função” não se refere ao mesmo objeto nos dois casos, mas a objetos que são diferentes em essência.

Sem ir muito longe na discussão desses pontos, devemos notar o fato de que cada sistema de representação que consideramos, tomado por si (com suas características semióticas), tem um poder de exibição diferente (que pode ser definido como a capacidade de mostrar o que deve ser mostrado, ou possivelmente para se esconder). Essas diferenças podem ser melhor compreendidas considerando os operadores, que podem ser implementados e os respectivos sistemas de controle.

Tomemos novamente o caso das tabelas (C_T). Uma tabela é uma maneira bastante particular de representar uma função, na medida em que não diz nada além dos valores que exibe. Embora seja o primeiro meio de representação utilizado, o cadinho dentro do qual foram moldadas várias funções, Kline (1972, p.338) nos lembra que a tábua dos seios da face era conhecida com grande precisão muito antes de a curva associada se tornar um objeto matemático. A validade de um enunciado baseado na manipulação de uma tabela depende, como já enfatizamos, da precisão do cálculo ou da precisão das observações que seus elementos produzem. Aqui parece que a estrutura de controle $\sum_T$ depende fortemente da relação com um domínio exterior à matemática, para o qual a concepção considerada fornece os meios para modelagem. Da mesma maneira, R_T inclui operadores matemáticos e operadores específicos para a coleta de dados.

Concepções de função dos alunos

Vamos nos concentrar em alunos dos níveis secundário e pós-secundário. Esses alunos constituem a maior parte da população considerada na literatura. Todos eles têm algum conhecimento de álgebra, e todos foram expostos às funções elementares clássicas.

O estudo de Vinner sobre a imagem do conceito de função dos alunos é clássico. Vinner identificou oito componentes das concepções de função dos alunos, dos quais reproduzimos aqui as principais características:

- “A correspondência que constitui a função deve ser sistemática, deve ser estabelecida por norma e a própria norma deve ter regularidades próprias”;
- “Uma função deve ser um termo algébrico”;
- “Uma função é identificada com uma das suas representações gráficas ou simbólicas”;
- “Uma função deve ser dada por uma regra”;
- “A função pode ter diferentes regras de correspondência para domínios disjuntos, desde que esses domínios sejam domínios regulares (como meias linhas ou intervalos);
- “Uma regra de correspondência que não é uma regra algébrica é uma função apenas se a comunidade matemática a anunciou oficialmente como uma função”;
- “O gráfico de uma função deve ser regular e sistemático”;
- “Uma função é uma correspondência um-para-um”.

Esses componentes da imagem conceitual da função (que retiramos de Vinner, 1992, p. 200) resultam das investigações realizadas pelo autor com alunos da região de Jerusalém no início dos anos oitenta. Desde este trabalho seminal de Vinner em 1983, essas características foram confirmadas como sendo amplamente comuns a estudantes em todo o mundo (Tall, 1996, pp.297-301).

Conforme são apresentados ao leitor, esses recursos ainda não estão organizados em concepções. Em particular, faltam indicações sobre seu domínio de validade, bem como sobre a maneira como eles poderiam ser implementados em situações de resolução de problemas. Pode-se notar que vários deles estão intimamente relacionados a um sistema de representação, algébrico ou gráfico. Por isso, consideramos as representações uma porta de entrada privilegiada para a busca de uma caracterização das diferentes concepções.

Do ponto de vista dos alunos, a ideia de que uma curva de gráfico deve existir em relação a uma expressão algébrica é central, ambas as representações devem obedecer a certas restrições[22]. Pela expressão "curva do gráfico", nos referimos a duas entidades diferentes que devem ser distinguidas. Isso é bem expresso por Sierpinska, quando ela introduziu a distinção entre visões sintéticas e visões analíticas de curvas[23]:

> Visão analítica da curva: uma função é uma curva 'abstrata' em um sistema de coordenadas; isso significa que é concebido de pontos (x, y), onde x e y estão relacionados entre si de alguma forma. (ibid., 1989, pp.18)
> Curva, uma vista sintética: [...] a função se identifica com sua representação no plano; é uma curva vista de uma forma concreta e sintética. (Sierpinska, 1989, p.17)

Essa distinção nos lembra a que normalmente é feita em matemática entre curva e gráfico: curva, referindo-se a um objeto geométrico, e gráfico, referindo-se a uma representação de uma função no sistema de representação gráfica (um traço, um gráfico). Mas a distinção feita por Sierpinska aqui pode não ser exatamente esta, já que ela acrescentou que a "relação (entre x e y, a visão analítica) pode ser dada por uma equação. Mas a curva não representa a relação. Em vez disso, é representada pela equação" (ibid.). Essa observação, de fato, chama nossa atenção para a confusão que provavelmente os

[22] Existe uma rica literatura sobre funções de compreensão e suas representações. Uma distinção comum é feita entre os aspectos de processo/objeto das funções (Dubinsky e Harel, 1992; Sfard, 1991). Esses aspectos podem ser relacionados aos usos dos alunos de diferentes representações de funções (Schwingendorf, Hawks e Beineke 1992; DeMarois e Tall, 1999). A distinção entre a abordagem global e a abordagem pontual de funções (Bell e Janvier, 1981; Even, 1998) também é crítica, mostrando em particular que a capacidade de lidar com (o gráfico e o algébrico) representações de funções ou de mover de uma representação para outra está relacionada à flexibilidade no uso de diferentes abordagens para funções. Devido ao lugar restrito permitido neste trabalho, todos esses aspectos não podem ser desenvolvidos e nos limitamos ao caso específico da distinção gráfico/curva.

[23] Embora ela continue usando a palavra "curva" em ambos os casos.

alunos fazem entre a configuração geométrica e a configuração do cálculo (no sentido de Douady, 1985), o que é facilitado pelo sistema de representação gráfica comum usado por ambos.

Assim, sugere-se considerar dois tipos de concepções do aluno: a Curva-Algébrica e a Algébrica-Grafo. Iremos considerá-los de uma forma mais precisa e descrevê-los utilizando as ferramentas que acabamos de apresentar:

- Concepção *Curva-Algébrica*: $C_{GA} = (P_{GA}, R_{GA},$ *Gráfico-Algébrico*, $\sum_{GA})$,
- Concepção de *Gráfico-Algébrico*: $C_{AG} = (P_{AG}, R_{AG},$ *Gráfico-Algébrico*, $\sum_{AG})$

Essas duas concepções compartilham o mesmo sistema de representação, tanto algébrica quanto gráfica, mas esses sistemas têm diferentes graus de importância em ambos (isso é sugerido pela ordem diferente em sua denominação). No caso da concepção Curva-Algébrica, o critério é que a curva deve ser representada por uma equação, como escreveu Sierpinska, mas preferiríamos dizer que ela deveria ter uma representação algébrica em vez de uma equação. No caso da concepção de Gráfico-Algébrico, o critério é que a representação algébrica deve estar associada a um gráfico que deve ser traçado. A distinção entre gráfico e curva não é muito fácil de fazer porque eles implementam o mesmo sistema de representação. As razões para esta dificuldade são as mesmas razões pelas quais os alunos têm dificuldade em reconhecer em que ambiente em que precisam a trabalhar (e, portanto, em saber o que é legítimo ou não). É observando as regras-ferramentas que ambas as concepções exigem e observando sua estrutura de controle que podemos definir a distinção.

Inferimos que a tarefa é bastante difícil quando se pode apenas confiar nas evidências fornecidas por tarefas em que os alunos são diretamente solicitados a responder à pergunta “o que é uma função?”, ou em que eles são convidados a decidir se gráficos ou descrições de correspondências representar funções (ex: "Existe uma função, cujos valores são iguais entre si?" (Vinner e Dreyfus, 1989)). Pode-se notar dois pontos importantes sobre esses experimentos:

- Em primeiro lugar, mostram a distância entre as respostas à pergunta "o que é uma função?" e as respostas para as tarefas que requerem uma decisão sobre as descrições das correspondências. Esse distanciamento evidencia a relação entre concepções e problemas. Tarefas diferentes (como fornecer uma definição ou descrever uma função) podem exigir diferentes concepções. Isso significa que as concepções dos alunos são menos acessíveis em declarações sobre um conceito, do que em situações de resolução de problemas envolvendo o conceito. Por isso, a caracterização das concepções requer evidenciar as relações entre concepções e problemas.
- O segundo ponto diz respeito ao tipo de tarefas propostas aos alunos. Em todos eles, os alunos não precisam realizar ações para produzir uma solução, mas sim ativar os operadores de controle para produzir uma decisão - como os mencionados por Vinner e citados acima. Na verdade, Vinner enfatiza a fragilidade desse tipo de investigação. Ele observou um grande número do que denominou de raciocínio irrelevante e que define da seguinte forma: "[...] a justificativa dada pelo aluno porque ele assumiu que era a coisa certa a se dizer (e nenhum pensamento significativo estava envolvido) não será considerado um raciocínio relevante" (Vinner, 1992, p.206).

Isso pode ser analisado à luz da descrição muito clara de Castella (1995) da situação que ela utilizou para explorar as concepções de tangente dos alunos. Castella assume que os desenhos que propôs aos alunos são "diretos", que seu caráter aproximado (são esboços de funções) não esconde nenhuma característica surpreendente - as funções representadas são o que parecem ser[24] (ibid., p.21) Pode-se então pensar legitimamente que as situações observadas podem depender muito da qualidade do contrato experimental. O pesquisador afirma que a investigação tem como alvo as concepções dos alunos, mas pode ser que o que se observe sejam as opiniões contingentes dos alunos e não as concepções dos alunos como esperado. As respostas dos alunos podem ser uma forma de agradar às expectativas do professor/observador - isso é exatamente o que Vinner temia. Mas, de fato, como poderia ser diferente? Especialmente no sistema de representação gráfica, as tarefas são

[24] As funções representadas são as que parecem ser", escreve Castella.

fornecidas aos alunos utilizando o que sugerimos denominar ícones de função em vez de representações gráficas de funções. Para entender isso, convidamos o leitor a considerar tais tarefas do ponto de vista da natureza do feedback que os alunos podem esperar do ambiente fornecido pela situação em que estão envolvidos. Eles não podem realizar nenhuma ação relevante na representação gráfica, uma vez que essas representações são apenas esboços (ver fotos de Castella ou tarefas de Vinner e Dreyfus evocadas acima).

Chegamos aqui a um ponto em que o que deve ser discutido é a natureza dos problemas para os quais as concepções dos alunos fornecem ferramentas que permitem propor soluções razoáveis (pelo menos aos olhos do aluno). Com efeito*, a caracterização de uma concepção não deve ser separada da caracterização da situação-problema que permitiu evidenciá-la.*

Ir além da definição e investigar situações mais orientadas para o problema é de fato o que Vinner (1992) pretendia quando pediu aos alunos que decidissem sobre a continuidade ou diferenciabilidade de uma função (ibid, p.202-210). Ele concluiu de seu estudo que, para os alunos (i), uma "função ser contínua é o mesmo que ser definida e ser descontínua é o mesmo que ser indefinida em um determinado ponto" (ibid., p.205), ou (ii) "Continuidade ou descontinuidade está relacionada ao gráfico" [por exemplo 'Uma função é contínua porque seu gráfico pode ser desenhado em um curso'] (ibid., p. 206), ou (iii) "há uma certa referência ao conceito de limite" [por exemplo, 'A função é contínua porque tende a um limite para cada x'] (ibid., p. 207). Considerando que a pergunta direta "o que é uma função?" deu essencialmente uma indicação de possíveis elementos das estruturas de controle, obtemos aqui uma visão sobre as ferramentas que os alunos podem ter disponíveis.

Algumas dessas ferramentas estão claramente relacionadas a uma concepção Curva-Algébrica. Por exemplo, desenhar o gráfico [$y = 1$ se $x > 0$ e $y = -1$ se $x < 0$] é uma ferramenta que permite controlar o aspecto do objeto gráfico (o gráfico mostra uma interrupção) e assim permite concluir que a função f (x) = $\frac{|x|}{x}$ é descontínua (tarefa de Vinner B1). Outras ferramentas referem-se a uma concepção de Gráfico - Algébrico (como as que envolvem um critério de limite).

Vinner fez o mesmo com a derivada, identificando (i) caracterizações algébricas corretas, ou (ii) descrições de manipulações simbólicas a serem realizadas, ou (iii) definições corretas dentro do sistema de representação gráfica. Mas o autor parece não ter ferramentas eficazes para descrever as chamadas soluções incorretas. Isso resulta no uso de atributos como "vago", "difuso" ou "sem sentido". Ao todo, essas respostas vagas e confusas dos alunos representam 46% da amostra de 119 alunos. Devemos perceber aqui que os alunos foram confrontados com representações gráficas de funções e solicitados a decidir e justificar se eram contínuas ou não. No caso da derivada, eles foram solicitados a defini-la diretamente, respondendo à pergunta "o que é uma derivada?" Mais uma vez, observamos a fragilidade dos dados coletados, na medida em que essas tarefas podem não revelar as concepções dos alunos de derivada, mas sua possível opinião oferecida em uma situação bastante embaraçosa.

Para decidir ou justificar uma afirmação, é preciso mobilizar a própria concepção de uma forma diferente, mais operacional, do que defini-la, por assim dizer. A questão aqui é que o que aprendemos com o discurso ou produção de um aluno deve ser analisado em comparação com as características da situação em que esse discurso ou produção é produzido. Podemos ainda ir mais longe, afirmando que as concepções e os problemas são entidades duais (Balacheff, 1995). Isso significa que para caracterizar as concepções dos alunos, deve-se fornecer-lhes situações-problema significativas, com complexidade suficiente para que possam envolver sua concepção de forma significativa, demonstrando para nós as ferramentas que utilizam e a natureza do controle que a tarefa[25] envolve.

Artigue (1992 p.130) dá-nos um excelente exemplo da vantagem de voltar às características da situação dos alunos quando analisa, no caso da abordagem qualitativa das equações diferenciais, o falso teorema: “se f (x) tem um limite finito quando x tende ao infinito, sua derivada f’(x) tende a 0”. Ela escreveu:

> No campo das equações diferenciais, as concepções de monotonicidade podem atuar especialmente como obstáculos, pois, por um lado, as previsões eficazes são implicitamente baseadas na extra-hipótese da monotonicidade e, por outro lado, os teoremas têm que se livrar dessas extra-hipóteses. Sejamos mais explícitos:
> Ao esboçar curvas de solução, desenhamos a mais simples compatível com o conjunto de restrições identificado, mas, ao fazer isso, adicionamos restrições extras relativas à convexidade que pode ser expressa aproximadamente da seguinte maneira: a convexidade tem que ser o mínimo possível de mudança ou, em termos algébricos, o sinal de f”, para uma solução f, deve ser o mais constante possível. Portanto, f’ é implicitamente o mais monotônico possível. (ibid., p.130)

Ela conclui que

> o falso teorema mencionado pode ser visto como uma instanciação de tal extra-hipótese: se para x grande o suficiente, f’ é monotônico, f’ tem necessariamente um limite (finito ou não) e o limite único compatível com um a assíntota horizontal é 0. Em outras palavras, ao adicionar a condição f’ monotônica, esse falso teorema se torna verdadeiro” (ibid.)

Tal análise de uma ferramenta (que é o status real dos teoremas na prática dos alunos) utilizada por alunos evidencia a interação do sistema de representação gráfica e algébrica e o papel desempenhado pelas características da esfera de prática (papel este que é de fato reconhecido por Vinner, quando aponta o fenómeno da “compartimentação”).

Voltemos então às concepções de Curva-Algébrica e às concepções de Gráfico-Algébrico. Essas concepções serão diferenciadas não pelo sistema de representação (gráfica ou simbólica) que mobilizam, mas pelo tipo de ferramentas e controles que envolvem nas situações-problema. Isso significa que para caracterizar essas concepções,

[25] Observe que não pretendemos que isso seja suficiente para resolver nosso problema de diagnóstico, mas que é uma condição necessária.

precisamos ser capazes de descrever o conjunto de operadores R e a estrutura de controle $\sum$ em relação ao conjunto de problemas P.

Afirmar o que é P em ambos os casos permanece um problema em aberto para a pesquisa em educação matemática, mesmo neste domínio tão investigado. Pode-se observar, neste ponto, que a história não ajuda muito. Na verdade, as concepções dos alunos são muito difíceis de analisar em comparação com o que a história nos ensina sobre a evolução do conceito de função. E, de fato, seríamos muito cautelosos com a ideia de que o "estudo histórico da noção de função juntamente com sua análise epistemológica nos ajudou a analisar o comportamento matemático do aluno" (Sierpinska, 1989, p.2). É claro que a análise epistemológica é uma ferramenta essencial, mas a análise histórica pode induzir a uma visão da noção de função que oculta o papel desempenhado pelo contexto escolar moderno. A análise histórica vai delinear a noção do ponto de vista matemático, do ponto de vista cognitivo devemos estar preparados para ver as coisas de uma forma bastante diferente. Na verdade, Sierpinska reconheceu que "as concepções dos alunos não são imagens fiéis da concepção histórica correspondente" (ibid., p. 19). Por exemplo, uma das questões que devemos considerar é saber qual poderia ser a diferença essencial entre as concepções algébricas dos alunos e as concepções históricas "correspondentes". É também surpreendente que as tabelas desempenhem um papel muito limitado, se é que o fazem, nas situações que envolvem funções: se estão presentes, é em relação a situações concretas, em que o objetivo é menos analisar uma função do que analisar os dados (a função é vista como uma ferramenta de análise de dados).

As esferas de prática dos alunos são radicalmente diferentes das esferas dos matemáticos que os historiadores consideram. O sistema didático primeiro introduziu os alunos a funções "boas", principalmente brincando com duas configurações diferentes: algébrica e gráfica. Como Sierpinska (1989, p.17) notou, formas de gráficos de funções elementares podem funcionar como protótipos de concepções. Dependendo do currículo a que foram expostos, os alunos têm à disposição ferramentas mais ou menos sofisticadas para analisar algumas fórmulas algébricas elementares e para descrever o comportamento das funções correspondentes. Essas esferas de prática podem ser descritas em detalhes após uma análise cuidadosa dos livros didáticos que estão disponíveis para os alunos (para uma primeira investigação nesta direção, ver Mesa, 2001).

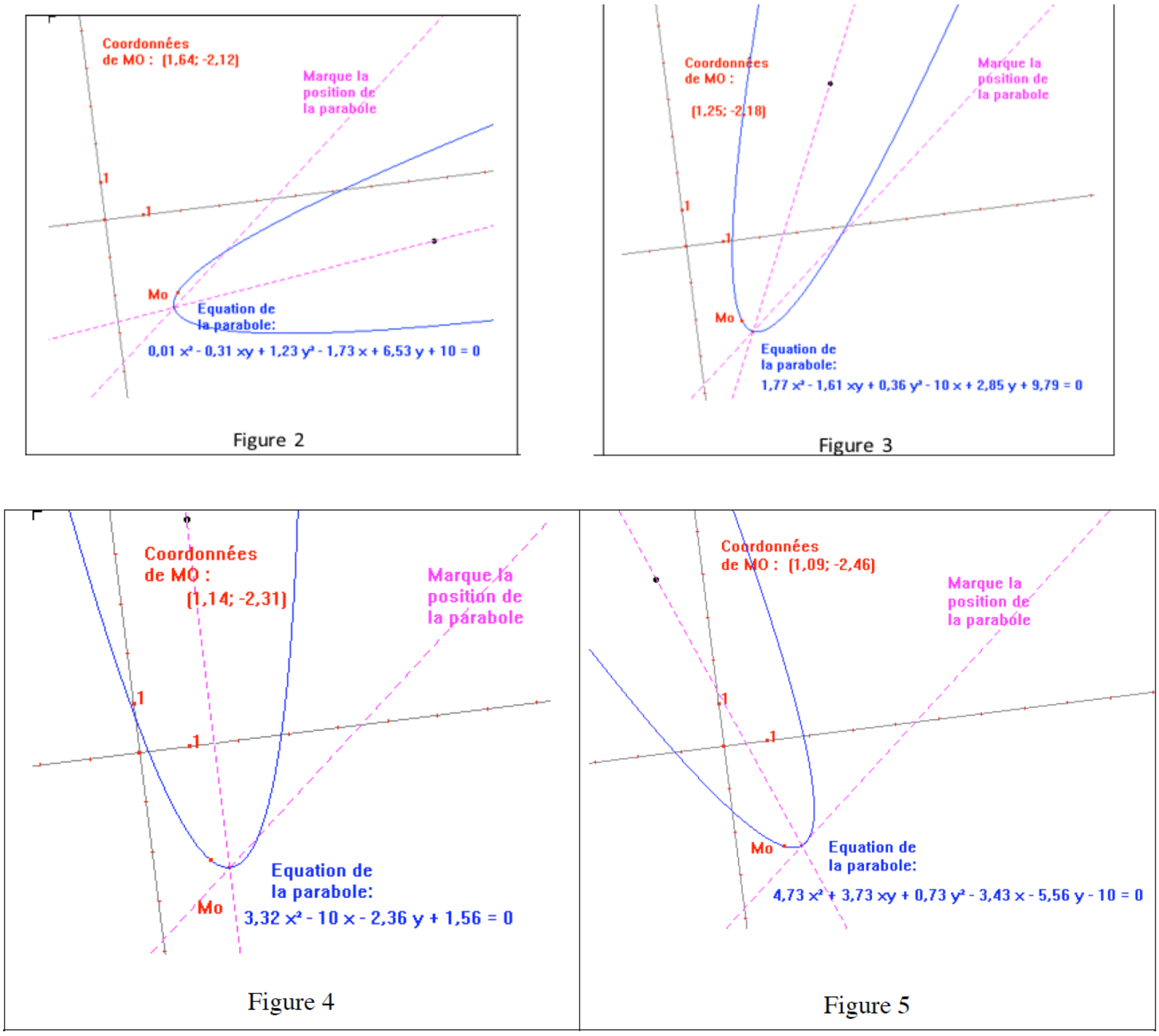
Exemplo de um estudo: as concepções de curva-algébricas e algébrica-gráfico

Ilustraremos a utilização do quadro proposto para a caracterização das concepções de funções dos alunos, tomando o caso de alunos do 12º ano (último ano do ensino médio do sistema educacional francês). Queríamos ir mais longe na compreensão das relações entre os sistemas de representação gráfica e algébrica. Nosso estudo anterior deu origem à caracterização de duas concepções de funções: a Curva-Algébrica e a Algébrica-Gráfico. Gostaríamos de evidenciar nesta seção como o sistema algébrico e o sistema de representação gráfica e, portanto, as ferramentas-regras e os controles exigidos no problema, levam à diferenciação dessas concepções.

Utilizamos o ambiente de geometria dinâmica Cabri-Geometry II[26] (doravante denominado Cabri) no qual se pode construir curvas e mostrar a relação dinâmica entre suas representações gráficas e algébricas (Gaudin, 2002).

Uma parábola em um sistema de coordenadas foi apresentada aos alunos. Essa parábola poderia girar em torno de seu vértice e ser manipulada, sendo a equação associada atualizada dinamicamente durante essas manipulações (ver figuras 2 a 6).

[26] *Cabri-Geometry II* é um ambiente de geometria dinâmica distribuído pela Texas Instruments.



Diferentes posições da parábola no Cabri

Pedimos aos alunos que escrevessem a equação da tangente à parábola no ponto M_0 e que desenhassem essa tangente (os alunos sabiam desenhar com o Cabri uma reta, cuja equação cartesiana é conhecida).

Situação 1: a parábola poderia ser manipulada movendo seu eixo (segurando o ponto preto, veja as Figuras 2-6) para que pudesse atingir uma posição "vertical" (Figura 3) - nesta posição a parábola é o gráfico de uma função quadrático.

Situação 2: os movimentos eram restritos, a parábola não conseguia girar completamente em torno do vértice, portanto, não conseguia atingir a posição vertical como na situação 1; e assim os alunos não conseguiam obter uma função quadrática "familiar".

Os alunos do 12º ano deveriam saber:

- que uma parábola cuja equação é $y = ax^2 + bx + c$ é o gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- que uma equação da tangente ao gráfico de uma função f no ponto M_0 (x_0; y_0) é $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, f' sendo a derivada de f.

- algumas regras de diferenciação.

- nada sobre cônicas.

A fim de enquadrar a análise da atividade de resolução de problemas dos alunos que desenvolvemos, esboçamos a seguir as estratégias que podem ser esperadas em ambas as situações:

Situação 1:

- Um controle sobre a posição da parábola permite alcançar a posição vertical para obter o gráfico de uma função quadrática f. Sua representação algébrica é $f(x) = (1 / 2{,}36)(3{,}32x^2 - 10x + 1{,}56)$ (veja a Figura 4).

- A propriedade "Uma equação da tangente de um gráfico de uma função f no ponto M_0 (x_0; y_0) é $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, f' é a derivada de f". É um operador que processa a expressão algébrica de f.

- Obtém-se a equação da tangente da parábola ($y = -1{,}01x - 1{,}17$) e desenha-se a tangente com Cabri.

Situação 2:

- A parábola não pode mais atingir a posição vertical, mas, na posição horizontal, é o gráfico de uma função quadrática em outro sistema de coordenadas definido pela mesma origem, o ponto (0; -1) como unidade no eixo x e o ponto (1; 0) como a unidade no eixo y (veja a Figura 6).

- O novo sistema está associado à mudança da variável X = -y e Y = x. Esta mudança é uma ferramenta para conhecer a equação $3{,}08X^2 - 2{,}04Y - 9{,}23X + 10 = 0$ da parábola no novo sistema e obter a representação algébrica $f(X) = (1 / 2{,}04)(3{,}08X^2 - 9{,}23X + 10)$ da função da qual a parábola é um gráfico no novo sistema.

- Como na situação 1, a propriedade "Uma equação da tangente de um gráfico de uma função f no ponto M_0 (x_0; y_0) é $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, f' sendo a derivada de f", é um operador que processa a expressão algébrica de f. Obtém-se a equação da tangente da parábola (Y = -1,20X + 3,06). A mudança da variável X = -y e Y = x é uma ferramenta para conhecer a equação da tangente no sistema inicial de coordenadas: 1,20y - x + 3,06 =0. Pode-se desenhar a tangente com Cabri.

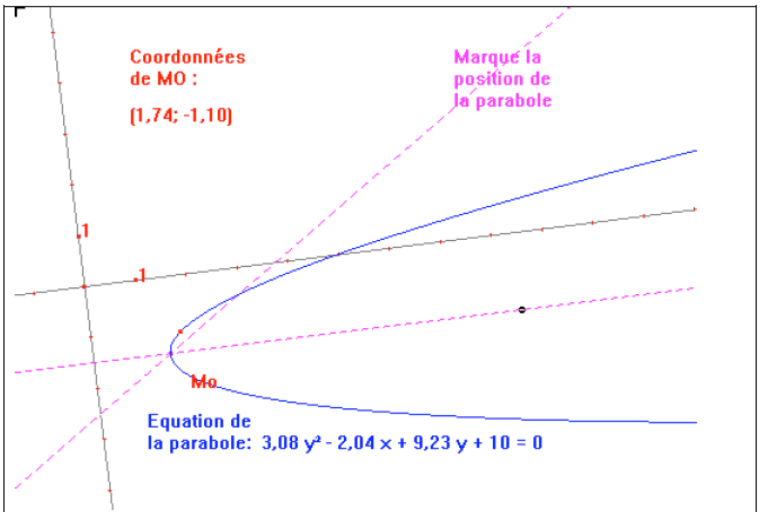


Figure 6

O desenho de uma parábola na tela pode ser conceituado como um *gráfico* ou uma *curva*. Conforme havíamos lembrado, o gráfico de uma função f é o conjunto de pontos (x, f (x)) em um sistema de coordenadas; uma *curva* é um objeto geométrico que pode ser desenhado independentemente da existência de um sistema de coordenadas. Considerar a parábola como o gráfico de uma função quadrática é essencial para associar os controles às ferramentas envolvidas nas estratégias acima mencionadas.

Apresentaremos alguns aspectos da análise dos comportamentos observados de dois alunos, André e Rémi, que trabalharam juntos, bem como de Loïc e Sylvain. Escolhemos estes dois estudos de caso porque ilustram muito bem ambas as concepções: *Curva-Algébrica*, no caso de André/Rémi e *Algébrico-Gráfico*[27], no caso de Loïc/Sylvain. Do ponto de vista desses alunos, obter a equação da tangente da parábola significava "derivar a equação"[28] e utilizar o operador "se f é uma função de x então a equação da tangente no ponto M (x_0, f (x_0)) é y = f'(x_0) (x-x_0) + f (x_0)". Enquanto a parábola não fosse a representação de um gráfico, os alunos não poderiam realizar as regras de diferenciação que conheciam (e assim, utilizar o operador e obter a equação da tangente). Suas decisões e ações para fazer a equação de acordo com essas regras revelaram diferentes controles e ferramentas envolvidas no problema.

Identificar o controle utilizado por André/Rémi ou Loïc/Sylvain para estabelecer se uma equação era derivável ou não na situação 1, fornece meios para discriminar ambas as concepções.

> Para André/Rémi, a equação pode ser derivada se sua forma for [y = <uma expressão de x>]. Como não era o caso, tentaram mudar a posição da parábola. Eles a moveram para a posição vertical. Eles escolheram esta posição enquanto controlavam a equação que, como resultado, se tornou cada vez mais simples (y desaparece na equação: *isso é bom*[29], o coeficiente de xy diminui: *isso é perfeito* ...). Eles obtiveram uma equação que chamaram de "*equação arranjada*" que poderia ser derivada.
> Sylvain/Loïc acharam a equação na tela muito complicada (*monstruosa*). Eles controlaram que *a equação não era a representação de uma função* porque o gráfico não passou no teste da linha vertical (*havia dois valores para um x*). Eles afirmaram que a equação não poderia ser a derivada. O controle sobre a derivabilidade foi baseado na forma da equação que deveria ser [*y = (algum x, não y)*]. Sylvain previu que xy e y^2 deveriam desaparecer da equação quando a parábola atingisse a posição vertical, então eles decidiram obter esta posição.

[27] Para obter mais detalhes, consulte Nathalie Gaudin (1999).
[28] Vamos especificar o que significa "derivar a equação" para cada par de alunos.
[29] Os intercâmbios de alunos são escritos em itálico.

As ações de ambos os pares de alunos na situação 1 são as mesmas: mover a parábola para a posição vertical e obter a equação da tangente conforme descrito na estratégia esperada. Mas os controles e o sistema de representação associado diferem de uma maneira importante. Os controles de André / Rémi referem-se essencialmente ao sistema de representação algébrica: obter uma escrita simbólica adequada da equação. Os controles de Sylvain/Loïc referem-se ao sistema de representação gráfica e algébrica: satisfazer o teste da linha vertical para obter uma equação da forma: [y = (*algum* x, *nenhum* y)].

Esses controles desempenham um papel essencial nas decisões dos alunos na situação 2. Percebendo que a parábola não pode mais alcançar a posição vertical, os pares de ambos os alunos tiveram que mudar suas estratégias.

> André/Rémi decidiu mover a parábola para a posição horizontal porque a equação parecia então ser a mais simples que eles poderiam esperar. A equação obtida (3,08y2 - 2,04x + 9,23y + 10 = 0, ver Figura 5) foi descrita como "*boa*", como "a *melhor*". Mas essa equação ainda não estava de acordo com a regra de diferenciação, e os alunos propuseram *mudar x por y e y por x*. Novamente, o controle é essencialmente algébrico. Eles duvidaram da legitimidade de tal mudança, e então, propuseram mudar o sistema de coordenadas para o novo de acordo com o mapeamento das variáveis: X = -y e Y = x (que é quase o sugerido mudando x com y e y com x). Eles obtiveram uma expressão que poderiam derivar (f (x) = (1 / 2,04) (3,08X2 - 9,23X + 10) - pode-se notar que escreveram "x" e não "X", em "f (x)". O ponto importante aqui é o significado que os alunos atribuíram à mudança de sistema. Eles não relacionaram essa mudança com os outros objetos da situação: eles usaram a coordenada inicial de M_0 no operador "se f é uma função de x então a equação da tangente no ponto M (x_0, f (x_0)) é y = f'(x_0) (x-x_0) + f (x_0)", a equação da tangente não foi reescrita no sistema inicial antes ao desenho da tangente (conforme descrito pelas estratégias "esperadas"), assim a tangente foi invalidada. Obviamente, a mudança de sistema não estava associada a um controle no sistema de representação gráfica, apenas estava associada a um controle sobre a escrita simbólica da equação em conformidade com [*y = (expressão de x)*].
> Loïc moveu a parábola para a horizontal porque esta *posição parecia-lhe ser melhor* do que qualquer posição. Sylvain não considerou essa posição a melhor para resolver o problema. Essa opinião era consistente com o teste de linha vertical que ele usou na situação 1 e é confirmada pela presença de y_2 na equação (*não vejo ... como você lidará com y_2?*). Ele propôs mudar o sistema de coordenadas: o novo sistema proposto sendo aquele em que a parábola satisfazia o teste da linha vertical e, portanto, aquele em que a parábola era o gráfico de uma função. Assim, ao contrário da outra dupla de alunos, foi um controle no sistema de representação gráfica que levou à escolha do novo sistema de coordenadas. Este controle permitiu uma distinção gráfico/curva mais eficaz do que "obter uma bela equação". "Mais eficaz" significa que este controle foi associado a novas ferramentas utilizadas

> pelos alunos: leitura das coordenadas de M0 no novo sistema, obtenção da equação da tangente em que a parábola é um gráfico e, em seguida, escrever esta equação na inicial sistema para desenhar a tangente.

A identificação de diferentes concepções nestes dois estudos de caso é possível observando os controles, as ferramentas e os sistemas de representação associados que os alunos utilizaram para resolver os problemas. Na situação atual, as ações que observamos referem-se a controles bastante diferentes e não definem as mesmas configurações de trabalho.

> No caso da concepção *Curva-Algébrica*, o controle associado ao operador "se f é uma função de x então a equação da tangente no ponto M (x_0, f(x_0)) é y = f' (x_0) (x-x_0) + f (x_0)" é algébrica. A parábola é um objeto geométrico designado por uma equação e algumas de suas posições são mais ou menos operacionais do ponto de vista deste controle. Assim, as ferramentas e transformações algébricas (mudança de variável) não se aplicam aos objetos do cenário geométrico (a parábola, M0, a reta tangente). O cálculo é reduzido a transformações simbólicas.
> No caso da concepção de *Gráfico Algébrico*, os controles gráficos (reconhecendo a parábola como um gráfico, lendo a situação em um novo sistema) estão relacionados às ferramentas algébricas (o operador "se f é uma função de x então a equação da tangente no ponto M (x_0, f (x_0)) é y = f'(x_0) (x-x_0) + f(x_0)", a mudança de variáveis que funciona em todos os objetos do sistema). Por causa dessa relação, o cálculo pode ser baseado em variáveis vinculadas por uma equação e/ou um gráfico.

No entanto, devemos ter cuidado com a relação entre concepções e situações. É importante verificar as concepções caracterizadas e as práticas de sala de aula. Temos que definir de que forma as concepções caracterizadas funcionam nos exercícios propostos nas aulas e em que medida são bastante específicas das situações presentes. Em outras palavras, ainda há que se confirmar que ambas as concepções estão associadas a esferas reais de prática.

Conclusão: concepção, saber e conceito

Não há espaço suficiente dentro dos limites do presente artigo para dar uma explicação detalhada de todos os benefícios que esperamos da definição de "concepção" que propomos. A título de exemplo, *mostramos como o modelo permite expressar com mais precisão que duas concepções têm o mesmo conteúdo de referência*, ou referem-se ao mesmo objeto. Expressar tal relação entre as concepções é necessário para permitir a passagem do nível das concepções ao nível dos saberes. Para isso, é necessário um terceiro, um observador:

> Denotamos por Cμ de concepção de um observador (em outras palavras, temos que explicitar uma concepção de referência), e C e C' de duas concepções. Se existe uma função de tradução f: L→Lμ, e f': L'→Lμ tal que para qualquer problema p de P existe um problema p' de P' de modo que f (p) = f'(p') - e inversamente - então dizemos que C e C' se referem ao mesmo conteúdo de referência do ponto de vista de Cμ.

Observe que dizer que duas concepções têm o mesmo conteúdo de referência do ponto de vista de um observador não diz muito sobre a natureza dessas concepções; podem estar erradas ou certas, eficientes ou não, mais ou menos gerais… Todos os tipos de propriedades que podemos expressar de forma precisa dentro do modelo[30], e que podemos utilizar para "computar" situações ótimas de aprendizagem.

Como conclusão, indicamos apenas o progresso que fizemos considerando o problema fundamental descrito na seção 2.

Se chamarmos o saber de um conjunto de concepções que se referem ao mesmo conteúdo de referência, podemos então falar do domínio de validade de um saber (ou seja, a união do domínio de validade das concepções relacionadas), mas ao mesmo tempo podemos reconhecer o caráter contraditório de um saber (uma concepção é falsa do ponto de vista de outra, ambas sendo constitutivas do mesmo significado - cf. Balacheff, 1995, p.233).

Além disso, sugerimos denominar conceito o conjunto de todos os saberes compartilhando o mesmo conteúdo de referência (Balacheff, 1995, pp. 234-235). No caso da função, por exemplo, investigar o seu significado consiste primeiro em construir um esquema como o da figura 7 e compreender as relações ao nível da concepção (é possível, por exemplo, provocar a passagem de uma concepção a outra?)

[30] Ver Balacheff 1995, 1995a

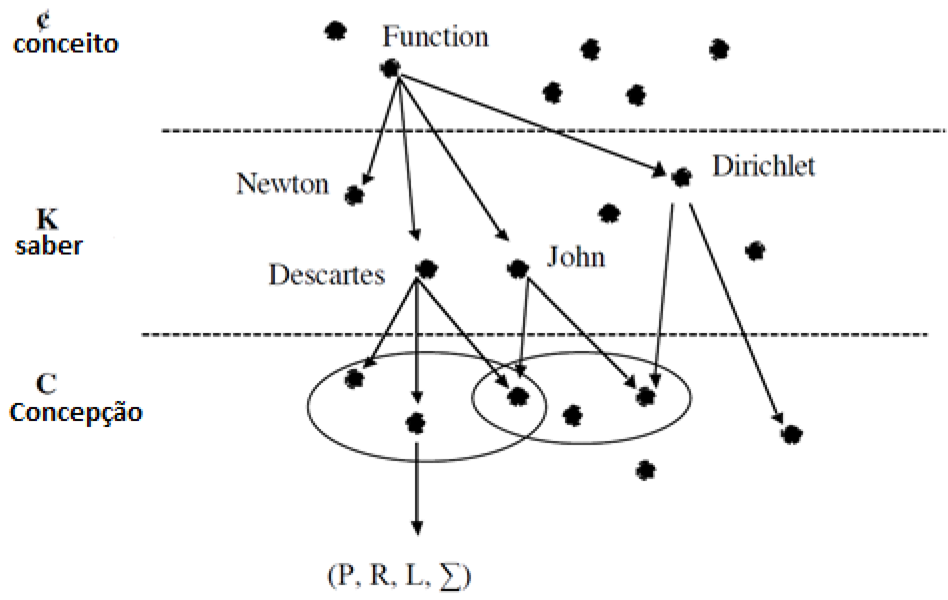


Figura 7.

Em certa medida, estamos perto de responder positivamente à questão que Biehler colocou[31]: “Não poderíamos dizer que o significado de um conceito matemático é a síntese de todos os seus usos?”. Por outro lado, estamos um pouco distantes da proposta de Sfard (1991), que escreveu que

> a palavra ‘conceito’ (às vezes substituída por ‘noção’) será mencionada sempre que uma ideia matemática estiver em causa na sua forma ‘oficial’ - Como uma construção teórica dentro do ‘universo formal do conhecimento ideal’; todo o conjunto de representações e associações internas evocadas pelo conceito - a contraparte do conceito no ‘universo do saber humano’ interno - será referido como ‘concepção´ (ibid. p.3).

No entanto, se a visão de “conceito” pudesse ser considerada mais pragmática em nossa apresentação, a visão de “concepção” que desenvolvemos não está tão longe daquela que Sfard sustenta.

Em suma, pode-se perceber que uma concepção é a instanciação do saber de um sujeito por uma situação (caracteriza o sistema *sujeito/meio em uma situação*), ou poderia

[31] Referimo-nos a uma questão colocada por Rolf Biehler em um documento de trabalho que ele compartilhou no contexto do projeto BACOMET IV “Significado na educação matemática” (1996).

ser considerada como a instanciação de um conceito por um par (sujeito/situação). Das relações entre concepções induzidas pela definição aqui adotada, e de suas propriedades, podemos extrair de forma natural propriedades e relações entre saberes, bem como entre conceitos.

Devemos enfatizar que consideramos aqui o meio, bem como as interações entre o sujeito e o meio do ponto de vista único de situações didáticas - o professor não é considerado neste modelo. Na verdade, o professor deve ser considerado assim que consideramos as condições para um determinado aluno entrar em interação com um meio que consideramos provável que permita alguma aprendizagem. Este será o cerne do desenvolvimento futuro.

Agradecimento: o referencial teórico apresentado neste artigo foi beneficiado pelos comentários e questionamentos dos participantes do IV projeto BACOMET "Significado na educação matemática" (1993-1996), em especial Tommy Dreyfus, Joel Hillel e Ana Sierpinska. As questões de Guy Brousseau e Gilbert Arsac sobre as primeiras versões estimularam vários esclarecimentos. A versão mais avançada se beneficiou de extensas discussões com os participantes do projeto Rutgers RISE "Entendendo os alunos" (2001). Agradecimentos especiais a Carolyn Maher e Susan Pirie que forneceram esta oportunidade.

Referências

Ambrosio U. d' (1993) *Etnomatemática*. São Paulo: Editora Atica. Aebli H. (1963) *Didactique psychologique.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Arsac G., Balacheff N., Mante M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics, 23* (5) 5-29.

Artigue M. (1991) Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2/3) 241-285.

Artigue M. (1992) Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 109-132). Mathematical Association of America.

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Balacheff N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2) 147-176.

Balacheff N. (1995) Conception, connaissance et concept. In : Grenier D. (ed.) *Didactique et technologiescognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp.219-244). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Balacheff N. (1995a) Conception, propriété du système sujet/milieu. In : Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.215-229). Clermont- Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff N. (1998) Construction of meaning and teacher control of learning. In : Tinsley D. J., Johnson D. C. (eds.) *Information and Communication Technologies in School Mathematics* (pp. 111-120). Chapman & Hall.

Bourdieu P. (1990) *The logic of practice*. Stanford, CA: Stanford University Press [English translation of: *Le sens pratique*. Paris: Les éditions de Minuit. 1980]

Breidenbach D., Dubinsky, Hawks J., Nichols D. (1992) Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Brousseau G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bell A., Janvier C. (1981) The interpretation of graph representing situations. *For the Learning of Mathematics, 2*(1), 34-42.

Castela C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(1) 7-47.

Confrey J. (1986) "Misconceptions" accross subject matters: charting the course from a constructivist perspective. *Annual meeting of the American Educational Research Association.* (unpublished manuscript).

Confrey J. (1990) A review of the research on students' conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education*. American Educational Research Association, *16*, pp. 3-56.

DeMarois P., Tall D. (1999) Function: Organizing principle or Cognitive Root? *Proceedings of the twenty third international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 257- 264). Haifa, Israel.

Dhombres J. (1988) Un Texte d'Euler sur les Fonctions Continues et les Fonctions Discontinues, Véritable Programme d'Organisation de l'Analyse au *18ième Siècle. Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris.*

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. In: Streefland L. (ed.) *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 33-52). Utrecht: State University of Utrecht.

Dubinsky E., Harel G. (1992) The nature of the process conception of function. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 195-213). Mathematical Association of America.

Edwards C. H. Jr. (1979) *The historical development of calculus*. Berlin: Springer-Verlag.

Even R. (1998) Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Furth H. G. (1969) *Piaget and Knowledge. Theoretical foundations*. NJ: Prentice-Hall

Gaudin N. (1999) *Caractérisation des conceptions du concept de fonction*. Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Grenoble

Gaudin N. (2002) Conceptions de fonction et registres de représentation, étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics* (in press).

Glasersfeld E. von (1984) An introduction to radical constructivism. In: Watzlawick P. (ed.) *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.

Kleiner I. (1989) Evolution of the function concept: a brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4) 282-300.

Kline M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Lave J. (1988) *Cognition into practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Mesa V. M. (2001) Prototypical uses of function present in seventh- and eight- grade textbooks from fifteen countries. In: van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.) *Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3 pp. 367-374). Utrecht, state University of Utrecht.

Monna A. F. (1972), The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences, 9* (1), 57-84

Nuñes T., Carraher D., Schliemann A. (1983) *Mathematics in streets and schools*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pichot A. (1994) Pour une approche naturaliste de la connaissance. *Lekton, 4*(2) 199-241.

Rabardel P. (1995) Qu'est-ce qu'un instrument ? *Les dossiers de l'Ingénierie éducative, 19,* 61-65.

Resnick L., Collins A. (1994) *Cognition and Learning*. Pre-print. Learning Research and Development Center. University of Pittsburgh.

Robert A. (1992) Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1) 33-58.

Robert A. (1993) Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances. In : Baron M., Robert A. (eds.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques.* RR LAFORIA 93/18. (pp.5-18). Paris: Institut Blaise Pascal.

Salin M.-H. (1976) *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques de l'école primaire.*

IREM de Bordeaux.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Shoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Shoenfeld A. (ed) (1987) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska A. (1989) *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points*. Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie: Académie des Sciences de Pologne.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 25-59). Mathematical Association of America.

Smith D. E. (1958) *History of mathematics*. (Vol. II, esp. chap X). New York: Dover Publications Inc. Schwingendorf K., Hawks J., Beineke J. (1992) Horizontal and vertical growth of the students' conception of function. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 133-152). Mathematical Association of America.

Stewart J. (1994) un système cognitif sans neurones : les capacités d'adaptation, d'apprentissage et de mémoire du système immunitaire. *Intellectika, 18,* 15-43.

Tall D. (1996) Functions and calculus. In: Bishop A. *et al.* (eds.) *International Handbook of MathematicsEducation* (pp. 289-326). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thurston W. P. (1994) On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2) 161-177.

Vergnaud G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(2) 215-231.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2/3) 133-169.

Vinner S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14,* 293-305

Vinner S. (1987) Continuous functions - images and reasoning in college students. In: Bergeron J. C., Herscovics N., Kieran C. (eds.) *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177-183). Montréal, Canada: Université de Montréal.

Vinner S. (1992) The function concept as a prototype for problems in mathematics education. In: Dubinsky E., Harel G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 195-213). Mathematical Association of America.

Vinner S., Dreyfus T. (1989) Images and definition for the concept of function. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4) 356-366.

Youschkevitch A. P. (1976) The Concept of Function up to the Middle of the19th Century. *Archives for History of Exact Sciences, 16* (1) 37-85.