EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p816-871

Controle, prova e demonstração. Três regimes de validação[1]

Control, proof, and demonstration. Three regimes of validation

Control, prueba y demostración. Tres regímenes de validación

Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite : Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal da Bahia
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054
Méricles Thadeu Moretti[4]
Universidade Federal de Santa Catarina
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo

Raciocinar é uma das seis competências da base comum da matemática do 4º ciclo (anos 7, 8 e 9 do currículo obrigatório na França). Inclui provar, argumentar, demonstrar, e afirma a centralidade da demonstração. As avaliações do programa reconhecem a dificuldade desse ensino. O texto a seguir questiona os avanços na pesquisa sobre a aprendizagem e o ensino de demonstração e sua capacidade de esclarecer a implementação dos programas atuais. Ele volta ao vocabulário, insistindo em particular nos diferentes regimes de validação da atividade do aluno. Em seguida, aborda essas questões na problemática da validação no sentido da teoria

[1] **Para cita resta versão:** Balacheff N. (2019) Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In : Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp.423-456). Paris : ARDM et IREM de Pris - Université de Pari Diderot.

[2] Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] saddoag@gmail.com
[4] mthmoretti@gmail.com

das situações didáticas. Os temas principais são a articulação entre prova e conhecimento, evocando brevemente o modelo ck¢, e a relação entre prova e argumentação.

Palavras-chave: Controle, Prova, Demonstração, Modelo ck¢.

Abstract

Reasoning is one of the six competencies of the Common Base of Mathematics for Cycle 4 (years 7, 8 and 9 of the compulsory French curriculum). It includes proving, arguing, demonstrating, and asserts the centrality of demonstration. The comments of the programs recognize the difficulty of this teaching. The following text questions the advances made in research on the learning and teaching of demonstration and their capacity to inform the implementation of current programs. It returns to the vocabulary, insisting on the different regimes of validation in the student's activity. It then addresses these questions within the problematic of validation in the sense of the theory of didactic situations. The main themes are the articulation between proof and knowledge by briefly evoking the ck¢ model, and the relation between demonstration and argumentation.

Keywords: Control, Proof, Demonstration, ck¢ Model.

Resumen

El razonamiento es una de las seis competencias de la Base Común de las Matemáticas en el ciclo 4 (años 7, 8 y 9 del plan de estudios francés obligatorio). Incluye probar, argumentar y demostrar, y afirma la centralidad de la demostración. Los comentarios sobre los programas reconocen la dificultad de esta enseñanza. El siguiente texto examina los avances realizados en la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración y su capacidad para informar sobre la aplicación de los programas actuales. Vuelve al vocabulario, insistiendo en particular en los diferentes regímenes de validación en la actividad del alumno. A continuación, aborda estas cuestiones dentro de la problemática de la validación en el sentido de la teoría de las situaciones didácticas. Los temas principales son la articulación entre prueba y conocimiento evocando brevemente el modelo ck¢, y la relación entre demostración y argumentación.

Palabras clave: Control, Prueba, Demostración, Modelo ck¢.

Résumé

Raisonner est l'une des six *compétences* du socle commun des mathématiques du cycle 4 (années 7, 8 et 9 du cursus français obligatoire). Elle inclut *prouver*, *argumenter*, *démontrer* et affirme le caractère central de la *démonstration*. Les commentaires des programmes reconnaissent la difficulté de cet enseignement. Le texte qui suit interroge les avancées de la recherche sur l’apprentissage et l’enseignement de la démonstration et leur capacité à éclairer la mise en œuvre des programmes actuels. Il revient sur le vocabulaire en insistant notamment sur les différents régimes de la validation dans l'activité de l'élève. Puis il aborde ces questions dans la problématique de la validation au sens de la *théorie des situations didactiques*. Les principaux thèmes sont l’articulation entre preuve et connaissance en évoquant brièvement le modèle ck¢, et la relation entre démonstration et argumentation.

Mots clés : Contrôle, Preuve, Démonstration, Modèle ck¢.

Controle, prova e demonstração. Três regimes de validação

Este texto retoma e completa o conteúdo da minha apresentação no seminário nacional de didática da matemática em 18 de novembro de 2017[5]. Nesse dia, quis propor uma reflexão sobre a aprendizagem e o ensino da demonstração, tomando como elemento estruturante os programas atuais dos ciclos 1 a 4 da escolaridade obrigatória, e a seguir questionar a investigação para compreender a complexidade do projeto educativo e levantar questões sobre as quais seria importante avançarmos; de certa forma, as prioridades de pesquisa. O texto a seguir toma algumas liberdades com relação à própria apresentação[6], por exemplo, para levar em consideração o relatório da missão Villani-Torossian, publicado em janeiro de 2018.

O referencial teórico em que me coloco é o da teoria das situações didáticas (Brousseau, 1998) e da teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990). Também contarei particularmente com o trabalho de Raymond Duval (1992) sobre prova e argumentação. O pano de fundo da minha reflexão consiste nos meus trabalhos sobre a prova que irei revisitar de vez em quando, e na minha tentativa de modelação de concepções, em particular o modelo cK¢, cuja motivação é estabelecer uma ligação entre conhecer e provar.

Portanto, começarei este texto lendo os programas atuais, focalizando a compreensão de suas implicações para os professores, tanto do ponto de vista do projeto de aprendizagem quanto do projeto de ensino. As noções de controle, prova e demonstração são aqui um meio para analisar as relações entre concepção e prova, a fim de enfrentar o problema da engenharia didática de situações para o aprendizado da prova. Por fim, a conclusão proporá dois temas de investigação que considero prioritários para contribuir para o sucesso do ensino da prova em matemática na escolaridade obrigatória.

[5] Vídeo da apresentação no URL : https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/9b24c7f9-30c1-4ed3-9f38-fb969f1f1b2e

[6] Não vou retomar aqui a última parte da apresentação que abordou os problemas induzidos para o design de ambientes computacionais para a aprendizagem da prova, isso alongaria excessivamente este texto. Um texto desenvolvendo este tema estará disponível em breve, entretanto podemos nos referir a Balacheff & Boy de la Tour (2019).

Nossos programas

Argumentar, provar, demonstrar no ciclo 4

O currículo do 4º ciclo da escolaridade obrigatória (Menesr, 2015c) inclui o raciocínio entre as seis grandes competências[7] da atividade matemática. O documento anexo (Eduscol, 2016), intitulado "Raciocínio", sublinha o "lugar de escolha" dado a esta competência no currículo e especifica o seu significado distinguindo quatro "abordagens": resolver, colaborar, demonstrar, bem como estabelecer e defender um julgamento. Voltarei mais tarde à dimensão social subjacente à segunda, colaborar, e à quarta dessas abordagens, fundamentar e defender um juízo. Demonstrar, de acordo com este documento, é "utilizar um raciocínio lógico e regras estabelecidas (propriedades, teoremas, fórmulas) para chegar a uma conclusão." É também o "meio matemático de acesso à verdade 'por' [dar] ver "as diferentes etapas de uma prova pela apresentação, escrita de forma dedutiva, das ligações lógicas que a fundamentam." (Ibid. p. 1). Assim, esta abordagem está presente tanto no processo de resolução de um problema quanto no processo de validação de sua solução. Outra abordagem constitutiva do raciocínio, que se refere à validação, é o de "fundamentar e defender os próprios julgamentos com base nos resultados estabelecidos e no domínio da argumentação" (ibid.). Um pouco mais adiante no texto, outro verbo é introduzido, "provar", a propósito de uma conjectura, na expressão "provar a verdade de uma demonstração" (ibid. p.2). Assim, os termos demonstrar, provar e argumentar juntos delineiam a questão da validação do currículo para este ciclo.

Os comentários oficiais também contêm pistas sobre a complexidade, para professores e alunos, de atingir os objetivos deste programa. Com relação ao professor, "não se trata de

---

[7] Embora o termo "conhecimento" se refira antes a saberes codificados, para um programa escolar, o de competências recebe muitas definições distintas. Elas tendem a concordar sobre um significado mais amplo ou "transversal". "Uma competência é uma combinação de conhecimentos, de capacidades de aplicar esses conhecimentos, e de atitudes, ou seja, de disposições de espírito necessárias para esta implementação" (HCE). "Uma habilidade é uma capacidade de ação eficaz em uma família de situações, que pode ser dominada por ter os conhecimentos necessários e a capacidade de mobilizá-los, para identificar e resolver problemas reais". (Perrenoud) (in : *Les définitions des termes et indicateurs statistiques de l'éducation nationale* http://www.education.gouv.fr/cid23200/les-definitions-des-termes-et-indicateurs-statistiques-de-l-education-nationale.html -- consultado em 13 fevereiro de 2019)

demonstrar todos os teoremas ou propriedades que aparecem no programa” (Eduscol, 2016, p.3). A formulação é forte. Embora a demonstração seja a ferramenta canônica de validação em matemática, o legislador observa que ela tem um custo tal que não pode ser o meio exclusivo de validação em sala de aula. No entanto, o professor deve “qualificar sistematicamente as afirmações matemáticas de acordo com seu status, distinguindo entre definições, teoremas aceitos e teoremas demonstrados.” (Ibid., p.3). Na prática, os teoremas aceitos são acompanhados por atividades ou discursos que facilitam sua aceitação pelos alunos.

Assim, a demonstração deve ocupar seu devido lugar na atividade matemática e, ao mesmo tempo, coexistir com outras formas de validação necessariamente decorrentes da argumentação ou mesmo da persuasão. Além disso, há indícios de que as dificuldades dos alunos são levadas em consideração: “Para não distrair os alunos que têm dificuldade em entrar nos códigos de escrita de uma demonstração da resolução de problemas, é importante promover as produções espontâneas, escritas ou orais, resultantes das fases de pesquisa e experimentação.” (Ibid. p.4).

O trabalho da aula incluirá assim “tempo para partilha e argumentação, permitindo a produção de provas e tempo para formatação (demonstrações redigidas)” (ibid., p.4). Argumentação, prova e demonstração são distinguidas e relacionadas como ordens de discurso oral ou escrito. No entanto, os comentários dos programas de 2016, retomando os de 2008, estipulam que “a forma escrita [da prova] não faz parte dos requisitos [da base comum]” (Eduscol, 2009, p.2). O professor se depara com essa complexidade: por um lado, fazer com que os alunos entendam o que é uma demonstração e seu papel na matemática, por outro lado, de alguma forma ficar por trás desse objetivo, equilibrando os níveis de discurso que são relacionados com a argumentação e a demonstração; ele deve conseguir colocá-los em relação uns aos outros, negociando essa dupla exigência. Para os alunos, a dificuldade antecipada é de “[...] passar do raciocínio indutivo ao raciocínio dedutivo para estabelecer a prova; [então] moldar esse raciocínio dedutivo para fazer uma demonstração, ou seja, uma prova comunicável." (Ibid., p.3). Nota-se que o legislador parece considerar apenas a indução, enquanto a abdução - ou raciocínio plausível, segundo Polya - e muitas outras estratégias heurísticas estão em ação na resolução de problemas que confrontam os alunos com a dificuldade de síntese e formatação no momento de validação. Se este momento é essencialmente um momento de consistência e formatação dos produtos da atividade de resolução (Garuti, Boero, & Lemut, 1998), a redução das diferenças estruturais ou mesmo lógicas entre esta atividade e uma prova aceitável pode ser difícil (Pedemonte , 2007), portanto, acrescenta-se que "a redação e formatação de uma prova se beneficiam em ser trabalhadas coletivamente, com o auxílio do professor, e em ser apresentadas como uma forma convincente de comunicar um raciocínio oralmente e por escrito" (Eduscol, 2009, p.4).

Resolver, argumentar, provar, demonstrar, comunicar e convencer oralmente ou por escrito são todas as dimensões da competência "raciocínio" que os programas desejam que fosse adquirida. A investigação tem demonstrado que são estruturantes, por vezes complementares, mas também opostas, criando tensões tanto na aprendizagem como no ensino. Vou levar todos esses pontos mais precisamente a seguir, mas antes disso, proponho verificar rapidamente o que está acontecendo nos ciclos 2 e 3 que preparam os aprendizados para o ciclo 4.

Argumentar, provar, demonstrar nos ciclos 2 e 3

No 3º ciclo, ciclo de consolidação, "a matemática contribui para construir nos alunos a ideia de prova e argumentação" (Menesr, 2015b). Esse objetivo é parte de um projeto maior de aprender a "justificar suas afirmações e buscar a validade das informações de que dispõe". (Menesr, 2018b). A geometria é classicamente apontada como o lugar privilegiado para esse aprendizado. Seu ensino deve "[permitir] aos alunos moverem-se progressivamente de uma geometria em que os objetos [...] e suas propriedades são controlados pela percepção de uma geometria em que são controladas pelo uso de instrumentos, pela explicitação das propriedades, para então ir para uma geometria cuja validação é baseada apenas em raciocínio e argumentação.” (Ibid.).

As distinções entre prova e argumentação, justificar e validar, não são especificadas, nem suas respectivas definições. O próprio objetivo de aprendizagem é expresso de uma forma bastante geral: “construir a ideia” de prova ou argumentação. Essas formulações são suficientes para expressar a intenção do legislador de mudar a relação dos alunos com o conhecimento, pela tomada de consciência do que o separa da opinião e da crença. Para isso, o professor terá de estimular a passagem das abordagens empíricas para as abordagens intelectuais, mobilizando competências discursivas para “explicar sua abordagem ou seu raciocínio, entender as explicações do outro e argumentar na troca” (Ibid.).

Os textos do 2º ciclo trazem sugestões para a preparação dessa aprendizagem. Assim, sobre os sistemas naturais e técnicos (domínio 4), temos: “Apoiado pelo professor, o aluno tenta experimentar, apresentar sua abordagem seguida de explicar, demonstrar, explorar e comunicar os resultados das medições ou pesquisas, a resposta ao problema colocado usando uma linguagem precisa. O discurso produzido é argumentado e baseado em observações e pesquisas e não em crenças” (Menesr, 2018a). O objetivo, na tradição da formação da mente crítica, é formar o futuro cidadão a “debater, argumentar racionalmente, emitir conjecturas e refutações simples, questionar-se sobre os objetos de conhecimento, começar a resolver problemas especialmente em matemática formulando e justificando suas escolhas, desenvolver o julgamento e a autoconfiança” (Ibid.).

Explicitamente, a matemática não faz parte do programa do ciclo 1 (jardim de infância), porém, numa perspectiva mais ampla, o professor é convidado a organizar “momentos de linguagem”, notadamente nos momentos coletivos de resolução de problemas, “há então argumentação, explicação, questões, interesse no que os outros acreditam, pensam e sabem. O professor então comenta sobre a atividade que está acontecendo para destacar sua importância e propósito” (Menesr, 2015a).

Um projeto que atravessa os ciclos do ensino obrigatório

A leitura dos programas[8] mostra que a problemática da validação, fundamento da cultura científica e cívica, permeia toda a escolaridade obrigatória e ocupa um lugar especial na aprendizagem e no ensino da matemática. O relatório, apresentado ao governo em fevereiro de 2018, afirma isso muito claramente: “a noção de prova está no cerne da atividade matemática, qualquer que seja o nível (apropriadamente, esta afirmação é válida do jardim de infância à universidade)” (Villani & Torossian, 2018, p. 25).

A tradução desta afirmação nos programas e seus comentários utiliza uma variedade de termos (argumentar, provar, justificar, demonstrar), cujos significados não são estáveis (por exemplo, demonstrar não pode ter o mesmo significado no ciclo 2 e no ciclo 4) e cujas relações não são claramente elucidadas (por exemplo, entre “prova” e “prova comunicável”). Ao ler o relatório Villani-Torossian, encontra-se as mesmas dificuldades. A seção dedicada à “prova” (ibid., p.25-26) utiliza formulações como: “abordagem da justificação argumentada”, “formas de argumentação específicas da matemática”, “demonstração”, cuja intenção entendemos, mas dificilmente as nuances: como diferenciar uma argumentação específica da matemática da demonstração? Seriam essas designações simplesmente equivalentes, prova e demonstração seriam sinônimos de acordo com um dos autores que expressa a posição dos matemáticos[9]? Respostas precisas a essas perguntas são necessárias para a implementação dos currículos e para a prática diária do ensino da matemática.

[8] Programas em vigor na época do seminário em novembro de 2017 e no momento da redação deste texto em março de 2019.

[9] Cédric Villani, por ocasião de uma breve troca de e-mails sobre o relatório sobre o ensino da matemática (30 de março de 2018).

Neste ponto, sustentarei que a encomenda da instituição articula um componente educacional e um componente didático não exclusivo de outros aspectos, complementares e fortemente vinculados. No componente educacional, o ensino deve levar os alunos a se conscientizarem da distinção entre crença e conhecimento, apoiando-se em interações sociais regidas pelos princípios do debate científico. No aspecto didático, trata-se de responder com meios adaptados ao nível concernente à questão da verdade em matemática desde as primeiras aprendizagens. O objetivo no final da escolaridade obrigatória é que os alunos compreendam e pratiquem a demonstração como um tipo de prova específica da matemática, o que implica esclarecer a relação entre prova e demonstração e saber especificar o que podem ser outros tipos de provas que seriam praticadas por alunos e professores em níveis mais básicos.

No restante deste texto, especificarei quais pesquisas em didática matemática podem contribuir para a compreensão das palavras-chave usadas pelos programas e documentos que os acompanham. Voltarei então aos tipos de prova, à distinção entre prova e controle no contexto da resolução de problemas e à relação entre argumentação e prova. Vou relembrar o papel e as características das situações de validação no sentido da teoria das situações didáticas, que fornece os elementos essenciais do design de situações para a aprendizagem da prova.

Por outro lado, não entrarei na discussão dos limites da interação social, que é sabidamente um dos fulcros para provocar debates de prova. Tenho sublinhado a dificuldade do professor em gerir estas situações (Balacheff, 1991), cuja origem reside na frágil fronteira entre persuadir e argumentar. A inclusão das categorias de persuasão e argumentação na tipologia de provas de Harel e Sowder (1998) é justificada pela legitimidade da chamada à autoridade para afirmar a validade de uma afirmação, quer o aluno invoque o professor, ou o professor tenha um teorema aceito sem provas. A arte de persuadir é uma arte que deve ser reconsiderada na aula de matemática.

Explicação, prova, demonstração, o significado das palavras

Raciocínio

A competência "raciocinar", ou seja, o raciocínio, constitui o quadro geral em que a instituição situa resolver e demonstrar. Por raciocínio, ela quer dizer "[um] processo mental que permite fazer inferências. Lembre-se de que uma inferência é uma operação mental pela qual se aceita que uma proposição é verdadeira em virtude de sua conexão com outras proposições" (Eduscol, 2016, p. 1). Utilizei uma definição muito semelhante no início do meu trabalho sobre a aprendizagem da prova, ao designar o raciocínio como uma atividade intelectual que consiste em obter novas informações a partir de uma determinada informação (Balacheff, 1987, p. 148). Esta formulação foi desajeitada, na medida em que o problema que se coloca não é modelar as atividades mentais, mas caracterizá-las por suas manifestações tangíveis para poder criar situações de aprendizagem adequadas para provocar sua evolução por meio do efeito de feedback específico que elas trariam; ou seja, situações didáticas na acepção da teoria das situações didáticas (Brousseau, 1998), referência em que me coloquei explicitamente.

Proponho adotar a definição dada por Raymond Duval que, por um lado, é congruente com os quadros teóricos em que me coloco e, por outro lado, não introduz uma contradição com uma problemática psicológica:

> O raciocínio "[é] a organização de proposições direcionada para um enunciado-alvo a fim de modificar o valor epistêmico que esse enunciado-alvo tem em um dado estado de conhecimento, ou em um determinado ambiente social, e que, por consequência, modifica seu valor de verdade quando certas condições particulares de organização são satisfeitas". (Duval, 1992, p. 52)

Por valor epistêmico devemos entender "o grau de certeza ou convicção associado a uma proposição" (Duval, 1991, p. 254). O papel desse valor é particularmente perceptível durante as trocas em sala de aula ou durante a resolução colaborativa de problemas. Essa definição torna a análise do raciocínio - tanto para o ensino quanto para a pesquisa - um trabalho sobre o discurso e o texto, cujo caráter contextualizado será levado em conta pelo estado de conhecimento, pelos níveis de linguagem e pelas restrições de situação.

As "condições particulares de organização" mencionadas por Raymond Duval são uma referência tanto à estrutura lógica quanto ao padrão particular do discurso de prova. Compreender a natureza e o papel deste padrão é um dos principais desafios no ensino de demonstração. Discutirei alguns aspectos disso na seção sobre os tipos de provas.

Explicação

"Explicação" não é uma palavra-chave que se sobressae nos textos do programa ou em seus comentários. Por outro lado, junto com "argumentação", é o termo que mais divide dentro da comunidade científica quando se questiona a distinção entre prova que prova e prova que explica, para usar a formulação de Gila Hanna (1990), que desde muito cedo trouxe esse problemática. Os problemas subjacentes são o de compreender a prova e a sua capacidade de responder à questão do porquê uma afirmação é verdadeira, além da forma correta de discurso que garante essa validade. É, portanto, a questão da ligação entre prova e conhecimento, mais especificamente a questão da ligação entre o cálculo, que reduz a validade ao cumprimento das regras sintáxicas, e o raciocínio em que uma parte da exigência semântica permanece.

No que se segue, "explicação" é utilizado para designar um "sistema de relações em que os dados a serem explicados encontram seu lugar" (Duval, 1992, p. 40). Com efeito, "a questão do valor epistêmico resolvido, surge aquela da construção da coerência ou pertencimento da nova produção ao sistema de conhecimento" (Ibid.). A explicação é, portanto, colocar em relação o enunciado produzido a partir da resolução de um problema com os conhecimentos explicitamente disponíveis: há compreensão se há fechamento para essa conexão.

Raymond Duval (1992) identificou uma clivagem entre explicação e raciocínio. O primeiro "dá uma ou mais razões para tornar-se um dado (um fenômeno, um resultado, um comportamento, ...) compreensível" (ibid. p. 40), enquanto para o segundo "o papel das razões apresentadas é bastante diferente: é para 'comunicar' as afirmações que devem justificar sua força de argumento" (ibid. p. 41).

Explicação, argumentação, prova e demonstração

Ao apoiar a existência de uma clivagem entre explicação e raciocínio, Raymond Duval induz aquela entre explicação e prova que Gila Hanna rejeita: "uma prova realmente se torna legítima e convincente para um matemático apenas quando leva a uma compreensão matemática real" (Hanna, 1995, p. 42).

De minha parte, vinculei fortemente a explicação e a prova em um esforço de esclarecimento e definição (Balacheff, 1987b, p. 148). Minha escolha deu origem a algumas dificuldades tanto com Raymond Duval, por causa dessa mesma ligação, quanto com Gila Hanna[10], por causa da disjunção que ela afirmava entre a prova que prova e a prova que explica. Volto e esclareço essas distinções aqui com o objetivo de reduzir as contradições. Para fazer isso, temos que voltar ao termo "argumentação".

A argumentação, especifica Raymond Duval (1992, p. 37), é aceita ou rejeitada de acordo com dois critérios: sua relevância (coerência semântica) e sua força (valor epistêmico "positivo") (ibid. P. 39); isto é, a força de crença que alguém atribui às suas afirmações por boas ou más razões.

A introdução da distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística (ibid. p. 51) aproximou esse significado geral da argumentação de um significado congruente com as demandas da atividade matemática. Com efeito, de acordo com esta distinção, a argumentação retórica visa convencer um interlocutor, enquanto a argumentação heurística orienta a resolução do problema, favorecendo escolhas estratégicas ou apoiando a suposta validade de um enunciado pelo único recurso àquele a quem o raciocínio o vincula.

[10] « For Balacheff, then, a proof would seem to be an explanation by virtue of being a proof. » (Hanna, 1990 p.9)

Podemos notar que se Raymond Duval forjou a noção de "valor epistêmico" dos enunciados - força da crença em sua validade - de uma argumentação retórica, ele não propõe um termo particular para o valor daqueles da argumentação heurística. Uma proposta recente de Gila Hanna (2017) oferece a possibilidade de preencher essa lacuna ao retomar a distinção introduzida pelos filósofos Frans Delarivière e Bart van Kerkhove (2017) entre o valor epistêmico que implica a existência de um agente, e o valor ôntico, independentemente de qualquer agente. Para esses autores, tratava-se de qualificar o caráter intrínseco ou relativo do valor explicativo de uma prova - essa distinção vale também para a argumentação. Assim os autores afirmam que[11]:

> Uma prova matemática pode ser vista como um argumento pelo qual se convence a si mesmo ou aos outros de que algo é verdade, por isso pode parecer difícil ir além da conversa epistêmica sobre uma prova explicativa. Entretanto, embora o conteúdo de qualquer prova em particular seja fruto do trabalho epistêmico de uma pessoa, ela pode ser considerada como um objeto independente de uma mente em particular. Outras pessoas podem ler esta prova e serem convencidas por ela. Isto nos leva à pergunta se mostrar por que um teorema é verdadeiro é uma característica da própria prova ou uma característica de atos, textos ou representações comunicativas. (ibid. p.3)

Isto deve ser comparado com o critério de reconhecimento do caráter heurístico ou epistêmico de um argumento "[que] se deve à existência de uma organização teórica do campo de conhecimento e representações em que o argumento ocorre, ou a ausência de tal organização teórica" (Duval, 1992, p. 51). "Uma argumentação heurística requer a existência de uma organização teórica do campo do conhecimento e das representações em que se realiza a argumentação" e "que sejamos capazes de compreender ou produzir uma relação de justificação entre proposições que sejam de natureza dedutiva e não apenas de natureza semântica" (Ibid., p. 52). Assim, a distinção entre argumentação retórica e argumentação

[11] A mathematical proof can be seen as an argument by which one convinces oneself or others that something is true, so it might seem hard to go beyond epistemic talk about an explanatory proof. However, while the content of any particular proof is the fruit of a person's epistemic work, it can be separated as an object independent of a particular mind. Other people can read this proof and be convinced by it. This leads us to the question whether showing why a theorem is true is a feature of the proof itself or a feature of communicative acts, texts or representations. » (ibid. p.3)

heurística se reduz à avaliação do valor epistêmico e do valor ôntico dos enunciados. Podemos, então, adiantar que uma argumentação será admissível no sentido da matemática se o valor epistêmico de seus enunciados for condicionado por seu valor ôntico; este critério permitirá que ela seja reconhecida como uma prova em matemática. A estrutura padronizada das demonstrações é um meio técnico de realizar esta avaliação.

A distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística, e entre valor epistêmico e valor ôntico de uma afirmação, torna possível reformular e esclarecer a oposição entre argumentação e demonstração que às vezes é tão abrupta como aqui:

> O modelo de raciocínio dedutivo de Duval é a derivação formal, enquanto para nós é apenas um modelo para o produto final, não adequado para a abordagem escolar dos teoremas e da prova. (Boero et al., 2010, p. 17)

Essa discussão me permite voltar e esclarecer o diagrama (Figura 1) que propus em 1988, repetido muitas vezes, para o qual há muito subestimei o risco de mal-entendido.

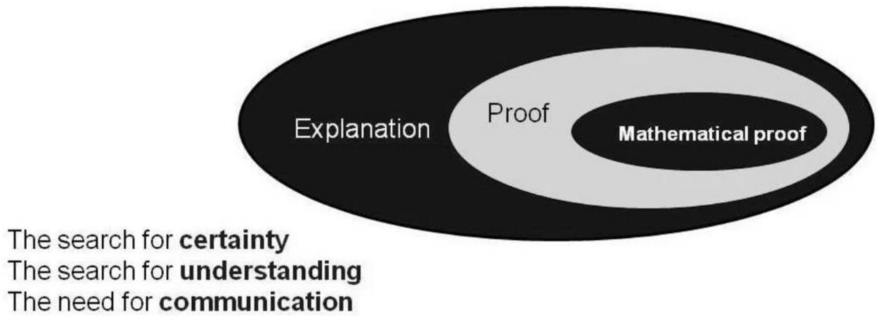


Figure 1

Não percebi a importância de voltar a este diagrama ao ler uma primeira versão de uma comunicação que Gila Hanna disponibilizou gratuitamente no Research Gate (Hanna, 2018, f. 3), na qual ela comenta: “Se fosse para assumir a posição de que uma explicação é simplesmente um argumento dedutivo, então todas as provas seriam automaticamente explicações”. Essa observação é legitimamente induzida pela representação proposta, desde que o leitor ignore o texto que a acompanha. Aproveito a versão em inglês[12] deste texto

[12] Ver em francês (Balacheff, 1987, fol. 3) - texto disponível online.

publicado em 2010 abaixo, para ficar no contexto de leitura que Gila Hanna foi capaz de fazer[13]:

> Esta estruturação [das relações entre explicação, prova e prova matemática] distinguia prova pragmática e prova intelectual, e em ambas identificava categorias relacionadas primeiro com a natureza do saber do aluno e os seus meios de representação disponíveis. A justificativa para esta organização (esboçada [aqui figura 1]) é o postulado de que o poder explicativo de um texto (ou "discurso" não textual) está diretamente relacionado à qualidade e densidade de suas raízes no aprendiz (ou mesmo conhecimento do matemático). O que é produzido primeiro é uma "explicação" da validade de uma declaração da própria perspectiva do sujeito. Este texto pode alcançar o status de prova se receber apoio suficiente de uma comunidade que o aceita e valoriza como tal. Finalmente, pode ser reivindicado como prova matemática se atender aos padrões atuais da prática matemática. Portanto, a pedra angular de uma problemática da prova em matemática (e possivelmente em qualquer campo) é a natureza da relação entre o conhecimento do sujeito e o que está envolvido na "prova". (Balacheff, 2010, p. 130)

Essas relações entre explicação, prova e demonstração foram esclarecidas a partir da perspectiva do indivíduo empenhado em resolver um problema e validar sua solução. A qualificação de uma explicação como um enunciado não prejulga o valor epistêmico ou ôntico em si de seus enunciados; tal afirmação pode ter o valor ôntico positivo de um teorema em ato (isto é, crença empiricamente baseada em uma invariância observada e objetificada). Permanecendo no quadro de Duval, a passagem da explicação à argumentação é aquela imposta pela necessidade de formular as razões e a sua organização, seja para si ou para outrem. Fazer com que outros aceitem que uma argumentação estabelece a validade de uma solução muda seu status e valor pelo caráter público que adquire. Ela ganha o status de prova. Entre essas

[13] This structuration [of the relations between explanation, proof and mathematical proof] distinguished between pragmatic and intellectual proof, and within both it identified categories related first to the nature of the student knowing and his or her available means of representation. The rationale for this organisation (sketched [here figure 1.]) is the postulate that the explaining power of a text (or non-textual "discourse") is directly related to the quality and density of its roots in the learner's (or even mathematician's) knowing. What is produced first is an "explanation" of the validity of a statement from the subject's own perspective. This text can achieve the status of proof if it gets enough support from a community that accepts and values it as such. Finally, it can be claimed as mathematical proof if it meets the current standards of mathematical practice. So, the keystone of a *problématiques* of proof in mathematics (and possibly any field) is the nature of the relation between the subject's knowing and what is involved in the 'proof.

provas, algumas têm uma estrutura particular que satisfaz os padrões coletivos, como na matemática os da demonstração.

Tentei desenhar um novo esboço (Figura 2) que pode limitar os mal-entendidos, mas não tenho certeza se um desenho é melhor do que um discurso (longo).

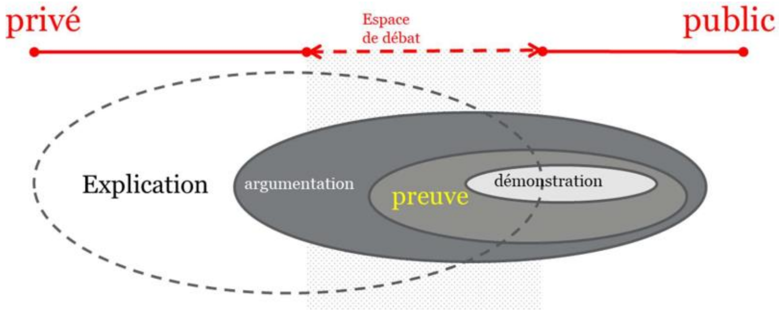


Figure 2[14]

O ponto importante é o destaque da existência de uma fronteira entre a esfera privada e a pública. Na esfera privada, a explicação trabalha sobre os objetos e suas relações, é a base da construção da argumentação que será o meio de convencer da validade da solução de um problema, seja este trabalho garantido ou não pela transformação do valor epistêmico em valor ôntico. Ultrapassar essa fronteira implica a busca de um consenso, ou seja, de um processo social que, por sua natureza, não pode garantir que os protagonistas individualmente reconheçam o caráter explicativo da argumentação - a prova - aceito coletivamente. Essa incerteza é ainda mais forte no caso da demonstração por causa de seu caráter normativo que tem precedência sobre suas propriedades retóricas.

[14] Ces questions et ce schéma ont été repris et détaillés lors de mon exposé au colloque CORFEM en juin 2019 à Strasbourg (texte à paraitre en 2020).

Os tipos de provas

Ilustração 1: as origens da convergência uniforme

A obra de Gilbert Arsac (2013) sobre a gênese do conceito de convergência uniforme[15] destaca precisamente as restrições que pesam sobre a argumentação em matemática, evitando, tanto quanto possível, os anacronismos de uma reescrita contemporânea. Retenho aqui a parte deste estudo (ibid., p. 57ss.) que diz respeito ao limite de uma série de funções de uma variável real contínua no curso da Análise de Cauchy de 1821. Trata-se de compreender este texto matemático no contexto dos recursos e meios disponíveis em um dado momento; de certa forma, uma arqueologia do saber matemático.

A formulação do teorema sobre a continuidade do limite de uma série de funções contínuas conforme aparece no curso de Cauchy é reproduzida abaixo (figura 3). Este texto não apresenta nenhuma dificuldade particular para o leitor contemporâneo. Porém, podemos notar expressões que não existem mais, como: "os termos da série (I) contendo uma mesma variável". Por que ele não escreve um (x)? Não é que Cauchy ignorava a notação f (x), ele a usa em outra parte do curso. A hipótese mais plausível é que ele não o faz aqui porque a problemática das séries de funções herda fortemente daquela das séries numéricas.

Além disso, Gilbert Arsac observa que o termo "variável", utilizado como substantivo no enunciado abaixo, é utilizado como um adjetivo em outra parte do curso para evocar o comportamento dinâmico:

> Quando as quantidades variáveis estão relacionadas de tal forma que, dado o valor de uma delas, podemos inferir os valores de todas as outras, geralmente concebemos essas várias quantidades expressas por meio de um dentre elas, que então leva o nome de variável independente; e as outras grandezas expressas por meio da variável independente são o que denominamos funções dessa variável. (Cauchy, 1821, p. 19)

[15] La lecture de ce livre devrait faire partie de la formation des jeunes chercheurs en didactique des mathématiques.

(I) $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n, u_{n+1}$, &c...

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable ;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

Figure 3

Cauchy (1821, p. 131–132)

Essa estreita relação entre variável e quantidade denota uma concepção cinemática do limite que remonta a Neper e Newton (Arsac, 2013, p. 17). Essa concepção é sustentada pela força da representação gráfica das funções, conforme evidenciado pelo texto de Cauchy sobre o teorema dos valores intermediários (Cauchy, 1821, p. 44)[16]. Está presente na definição de continuidade:

[16] Uma prova analítica desse teorema é, entretanto, fornecida na nota III desta mesma obra. (ibid., p.378 sqq)

> Em outras palavras, a função f (x) permanecerá contínua em relação à x entre os limites dados, se entre esses limites um aumento infinitamente pequeno na variável sempre produz um aumento infinitamente pequeno na própria função. (Ibid., p. 34-35)

Essa concepção da relação entre função e variável era dominante na época.

O texto que precede o enunciado do teorema não é uma demonstração como se pode ler em outro lugar no curso, mas a narração de um raciocínio da mesma natureza que aquele da concepção que subjaz a definição de continuidade. Cauchy toma o cuidado de qualificar este texto como uma "observação", significando claramente seu status singular.

As primeiras linhas deste texto fixam o significado dos escritos s, s_n e r_n, como seria feito para uma série numérica. O fato de serem funções é introduzido pela frase: Quando os termos da série

> (I) contendo a mesma variável x [...]. Portanto, o que aparece primeiro são os números (ou seja, variáveis que representam quantidades) e suas dependências. Isso não significa que seja exatamente isso que Cauchy conceba, mas atesta os limites que lhe são impostos pelos meios de expressão à sua disposição. Percebemos também a concepção subjacente de uma evolução contínua, mesmo monotônica, da variável x e seu efeito sobre a da função em cada estágio do raciocínio. O incremento da variável x é explicitamente designado, mas esta designação não é utilizada por Cauchy. Expressa a continuidade em um intervalo e não em um ponto. Além disso, a continuidade da função está ligada à da curva (representação gráfica) e é sustentada pela ideia de uma dinâmica temporal da evolução conjunta da variável e da função. (Arsac, 2013, seç. I .6)

Cauchy reconheceu exceções ao teorema formulado em seu curso de 1821, notadamente o da série de Fourier (Arsac, 2013, Capítulos IV e V). Além disso, trinta anos após a publicação de seu curso, ele propôs uma nova formulação, afirmando "[que] é fácil ver como devemos modificar o enunciado do teorema, de modo que não haja mais necessidade de qualquer exceção" (Cauchy, 1853, p. 455). Essa modificação consiste na introdução de uma condição, permanecendo sob o nome de critério de Cauchy (figura 4).

Desta vez, Cauchy descreve esta evidência publicada no Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS) como uma "demonstração". No entanto, o leitor verificará a distância que existe entre essa formulação e a formulação moderna. Gibert Arsac (2013, p. 61

ss.) propõe uma análise precisa, da qual reterei aqui um dos elementos, que é particularmente esclarecedor quanto aos limites impostos pelos meios de representação ou formulação da expressão do pensamento matemático: a organização do discurso em linguagem natural coloca os termos {n, x, ε}[17] em uma ordem que não é congruente com aquela em que eles aparecem na formalização contemporânea do teorema: ($\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall x\ \forall\ n> N\ \forall\ n' > n\ |\ s_n - s_{n'}\ | <\varepsilon$), tornando difícil notar o fato de que N depende de ε e não de x.

A nova formulação de Cauchy está mais próxima do que se poderia chamar de argumentação matemática, na qual o valor epistêmico das afirmações é seu valor ôntico, do que de uma prova de acordo com os padrões contemporâneos. Esta observação não põe em causa o rigor do matemático, está sujeita aos limites das representações e dos meios técnicos disponíveis naquele momento: a noção de variável domina a de função (variável dependente) com uma concepção dinâmica de convergência que influencia a de limite e continuidade, falta a notação algébrica do valor absoluto[18], a continuidade é definida em um intervalo - e não em um ponto - e está intimamente ligada à percepção da continuidade gráfica da curva. Além disso, a indisponibilidade[19] de quantificadores dificulta a identificação das dependências presentes no discurso e a negação dos enunciados que as implicam (por exemplo, descontinuidade como negação de continuidade). A construção do argumento é guiada por uma concepção cinemática de continuidade e convergência e pelo princípio da continuidade (lex continuitatis, Leibniz[20])

[17] Notando por conveniência ε "um número tão pequeno quanto quisermos", o que Cauchy não faz.
[18] Ela é introduzida por Weierstrass en 1841.
[19] Foi necessário esperar o século vinte.
[20] Ver p. ex. *Philosophie et mathématique leibniziennes*, Gilles-Gaston Granger (1981)

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n, le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n', la différence

$$(3) \qquad s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}.$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande, on puisse rendre, pour toutes les valeurs de n comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n, inférieur à un nombre ε aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n.$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n. D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

» 1er *Théorème*. Si les différents termes de la série

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \ldots$$

sont des fonctions de la variable réelle x, continues, par rapport à cette variable, entres des limites données, si, d'ailleurs, la somme

$$(3) \qquad u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$$

.../...

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x.

Cauchy (1853 pp.456-457)

FIGURE 4

Da análise de Gilbert Arsac, à qual o leitor deve se referir, retenho os seguintes elementos: por um lado, não é para fins cognitivos, mas epistêmicos[21], por outro lado, trata-se de um material - o curso de Cauchy de 1821 e os CRAS de 1853 - no seu contexto - a matemática da primeira metade do século XIX. Se se examina com precisão o trabalho

[21] Jean Piaget denomina "sujeito epistêmico" as estruturas de ação ou pensamento comuns a todos os sujeitos do mesmo nível de desenvolvimento, em oposição ao "sujeito individual ou psicológico" utilizando esses instrumentos de conhecimentos. (M.-F. Legendre, Fundação Jean Piaget, Piaget e Epistemologia, consultado 190311 17:00)
http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=320&IDMODULE=72

realizado, nota-se que o conhecimento de Cauchy se caracteriza, por um lado, pelo problema em jogo, aqui a conservação de uma propriedade durante a passagem ao limite, mas também pelos sistemas de representação disponíveis, as operações possíveis e meios de validação acessíveis. Diferentes níveis de validação estão presentes no curso de 1821, da prova à argumentação. Dependem essencialmente do acesso aos objetos matemáticos (representações, operações, relações) que mobilizam.

O caso da convergência uniforme ilustra a estreita relação entre prova e conhecimento. Confirma a afirmação de que não há problemática da validação sem problemática do conhecimento e vice-versa. Não há aprendizagem da matemática sem aprender os meios de validação associados a esse conhecimento que os moldam e do qual dependem. É necessário que a questão da validade e validação seja colocada desde os primeiros momentos desta aprendizagem. É um desafio.

Os padrões de validação em matemática se destacam durante a escolaridade em relação aos de outras disciplinas. Simplificando, é porque *os matemáticos fazem o que fazem porque seus objetos são o que são n*o momento de sua atividade. A questão do rigor não é abstrata, é uma problemática, cuja possibilidade e natureza de desenvolvimento dependem tanto das condições epistêmicas, no sentido piagetiano, quanto dos meios técnicos (as representações e seus tratamentos). Esta questão é difícil em matemática, cujos objetos já são representações.

Detalhes sobre os tipos de provas

A dependência mútua da conceituação dos sistemas de representação e de sistemas de validação torna necessário distinguir e caracterizar diferentes tipos de prova para poder modelar possíveis evoluções e suas condições. Essa necessidade é afirmada classicamente no âmbito de uma problemática cognitiva, portanto, um de seus representantes mais ativos, o matemático David Tall, escreve:

> É necessário ter em conta o desenvolvimento cognitivo dos alunos para que as provas sejam apresentadas de forma potencialmente significativa para eles. Isso requer que educadores e matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova relacionados ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo. (Tall, 1998, p. 136)

A história da matemática nos convida a ampliar essa perspectiva, se o desenvolvimento cognitivo é um dos determinantes dos níveis de validação - sabemos disso desde a obra de Jean Piaget – que não é o único que aponta isso. Devemos ir além das questões cognitivas (Balacheff, 1990) levando em consideração, pelo menos, a economia específica das situações de validação e o estado do conhecimento.

A tipologia de provas que propus no final dos anos 1980 tem sido frequentemente usada para interpretá-la como uma série de "estágios", o que não é. As observações nas quais Balacheff se baseou atestaram que os alunos aceitam uma espécie de prova de acordo com o que suas concepções permitem construir e sua percepção da situação. Essa dependência é particularmente evidente quando se trata de contraexemplos (Balacheff, 1987b, p. 166 e seguintes). Na verdade, muitos tipos de provas podem ser identificados no curso da resolução de um problema ou no curso do debate contraditório. As apostas da interação social ou da situação podem provocar o apagamento da argumentação em favor de um discurso de persuasão.

Na verdade, um tipo de prova é menos uma informação sobre o aluno do que sobre *o aluno em uma situação em um determinado ponto de sua história matemática*.

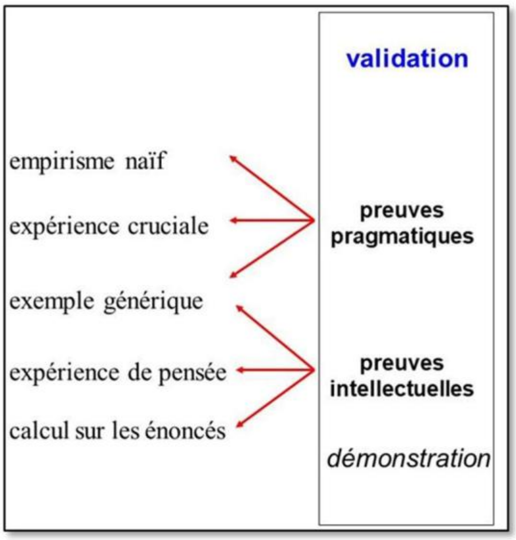


Figura 5

A figura 5 resume os tipos de provas e lembra as duas categorias às quais eles podem ser relacionados. Essas categorias são importantes para localizar os tipos de provas na problemática de aprender a demonstrar[22].

A passagem do empirismo ingênuo para a prova pode, em uma fórmula rápida, descrever o movimento do aprendizado da prova em matemática. Esta passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais necessárias para ir em direção à demonstração é também a de uma problemática pragmática a uma problemática teórica e, portanto, de uma evolução da leitura das situações em que a atividade matemática se desenvolve e do estatuto dos conhecimentos mobilizados.

A compreensão da complexidade da aprendizagem da prova requer entender a relação entre conhecimento e prova, ou mais precisamente, entre concepção e prova. Por "concepção" entendo aqui a caracterização de um conhecimento em situação (Balacheff, 1995; Balacheff & Margolinas, 2005) que associa, no que se refere à interação com o meio, os operadores que são implementados, as representações (linguagem ou não) e os controles. Sem entrar nos detalhes

[22] Por falta de espaço, não desenvolverei aqui a apresentação dos tipos de prova, pode-se para isso consultar Balacheff (1988, vol. 1) disponível online.

desse modelo, o exemplo a seguir ilustra a função dos controles na interação com os sistemas de representação utilizados.

Controle, validação e prova

Ilustração 2: um problema de aproximação

Muitas decisões estratégicas, táticas ou relacionadas à ação são tomadas durante a resolução de um problema. O estudo desta parte da atividade é difícil, porque costuma ser silenciado ou associado a comportamentos difíceis de interpretar. São tempos de reflexão, cuja consideração coloca problemas metodológicos que devem ser resolvidos porque são necessários para a compreensão do processo de resolução. A teoria das situações didáticas fornece meios para isso. Em particular, as situações de formulação (Brousseau, 1998, p. 104 ss.), apoiando-se nas interações com o meio e as interações sociais, possibilitam suscitar comentários ou produções diretamente vinculadas à tomada de decisões. Uma forma básica de tais situações consiste em associar os alunos na resolução colaborativa de problemas, com a condição de que cheguem a um acordo sobre uma solução comum. Esta restrição confere à situação de formulação, que requer uma linguagem comum, a característica mínima de uma situação de validação que requer acordo sobre os critérios e os meios de uma decisão.

Nathalie Gaudin (2005) estudou as concepções de alunos engajados na resolução de problemas envolvendo funções de uma variável real. Apresento aqui uma parte desse trabalho, inédito. Trata-se de resolver um problema de aproximação. Esses problemas dão aos controles um lugar que facilita a observação, sua função e seu funcionamento. A incerteza sobre os melhores critérios de aproximação favorece a discussão das características gerais ou desejadas de uma função em relação aos dados do problema. A suavização de questões, em particular, requer a consideração de múltiplos aspectos na tomada de decisões com base em raciocínios qualitativos ou analíticos que colocam em jogo as propriedades dos sistemas de representação algébrica ou gráfica.

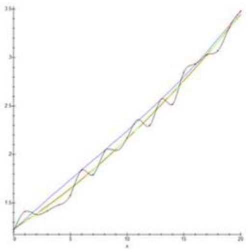
A situação concebida por Nathalie Gaudin explora as funcionalidades do Mapple[23] para a constituição de um ambiente de interação com o qual os alunos irão construir suas estratégias. Os sistemas de representação gráfica ou algébrica associados às concepções mais frequentemente utilizadas são insuficientes para comparar as funções-solução consideradas, suas formas e regularidades. O problema dado aos alunos, que trabalham em dupla e têm de chegar a acordo quanto a uma solução, é o seguinte[24] (Gaudin, 2005, esp. Capítulo 5):

Abaixo estão os valores y_i, sujeitos a erros aleatórios de até 10%. Esses valores vêm de um polinômio P de grau 3 com coeficientes desconhecidos, avaliados em x_i.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i	1.22	1.41	1.38	1.42	1.48	1.58	1.84	1.79	2.03	2.04	2.17	2.36	2.30	2.57	2.52	2.85	2.93	3.03	3.07	3.31	3.48

Propomos cinco aproximações deste polinômio.

Escolha aquele que melhor se aproxima deste polinômio:
- no intervalo [0; 20]
- em [0; + ∞ [

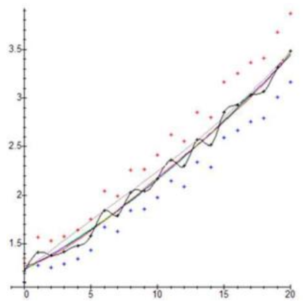


$f1(x) = 1{,}2310 + 0{,}0752\, x + 1{,}789 \times 10^{-3}\, x^2$
$f2(x) = 1{,}2429 + 0{,}06706\, x + 2{,}833\times10^{-3}x^2 – 3{,}48 \times10^{-5}x^3$
$f3(x) = 1{,}2712 + 0{,}0308\, x + 0{,}0115\, x^2 – 7{,}1626 \times 10^{-4}x^3 + 1{,}704 \times 10^{-5}x^4$
f4 definida por:
- ▪ ela passa por cada um dos pontos (xi, yi)
- ▪ em cada intervalo [xi; yi], f4 é um polinômio de grau menor ou igual a 3
- ▪ é duas vezes derivável e sua segunda derivada é contínua
- • sua representação algébrica é a seguinte (em cada intervalo $[x_i; y_i]$): [polinômios de grau 3 por intervalos]

Você explicará as razões pelas quais mantém ou rejeita cada uma das aproximações.

O trecho de diálogo a seguir foi extraído do protocolo de observação de dois alunos, Rémi e Olivier (Gaudin, 2005, p. 233 ff.):

[23] https://fr.maplesoft.com/
[24] Não reproduzo aqui o enunciado inteiro, que inclui a definição muito longa de f4 e indicações para o uso de Mapple.



RÉMI: [Então o polinômio está aí em algum lugar.] A26
OLIVIER: [Sim. A melhor aproximação tem o direito de sair.] A27a [então não estamos bem avançados] A27 b
RÉMI: [Depende de como a gente define melhor. Depende se você considera um ponto que não é bom ou se é uma média ... se todos os pontos são bons ...] A28 [Sabe o que quero dizer. Estamos tentando rastrear os polinômios, se entende o que quero dizer? Vamos traçar todos eles.
OLIVIER: Todos ao mesmo tempo?] A29
RÉMI: [Não sei se vamos ver muita coisa, mas podemos tentar. Ou então colocamos boas cores.
OLIVIER: Você se lembra que é verde a primeira? Você pode anotar? Tão verde ... azul, você tem que escolher as cores, vermelho ...] A30

O primeiro passo no processamento dos diálogos, induzidos pelo modelo cK¢ que sustentou a análise dos dados (Balacheff, 2017), consistiu em identificar os "átomos" que serão os componentes elementares da descrição da atividade de resolução de problemas. Um átomo pode ser composto de várias declarações (por exemplo, A30), ou ser feito de parte de uma declaração (por exemplo, A28, A29). Quando a convergência é suficiente, os enunciados de dois alunos podem ser unidos em um único átomo (por exemplo, A29, A30), sem comprometer a identificação das concepções em jogo que às vezes são opostas. Os controles estão particularmente presentes no exemplo utilizado. Nesse caso, eles estão na origem da questão crítica da definição de "aproximação" (por exemplo, A28) ou das questões que ela levanta (por exemplo, A27a, A27b). Embora limitado, este trecho ilustra sua importância para orientar e estabilizar a estratégia de resolução de problemas.

RÉMI: [Então o polinômio está aí em algum lugar.] A26 OLIVIER: [Sim. A melhor aproximação tem o direito de sair.] A27a [então não estamos bem avançados] A27 b RÉMI: [Depende de como a gente define melhor. Depende se você considera um ponto que não é bom ou se é uma média ... se todos os pontos são bons ...] A28 [Sabe o que quero dizer. Estamos tentando rastrear os polinômios, se entende o que quero dizer? Nós rastreamos todos eles. OLIVIER: Tudo ao mesmo tempo?] A29	A26 + A27a – avaliação de um fato A27b - julgamento A28 – avaliação de um julgamento

RÉMI: [Não sei se vamos ver muito, mas podemos tentar. Ou então colocamos boas cores. OLIVIER: Você se lembra que é verde primeiro? Você pode avaliar? Tão verde ... azul, você tem que escolher as cores, vermelho ...]	A29 – decisão de uma ação A30 – avaliação de uma ação

A análise dos diálogos, muitas vezes debates contraditórios, entre os alunos revela a presença de diferentes tipos e níveis de controles que Nathalie Gaudin designa e caracteriza da seguinte forma:

- Os *controles referentes* (Gaudin, 2005, p. 161) que orientam a pesquisa. Por exemplo: a forma da curva de um polinômio de 3º grau, a proximidade de fi(xi) e yi, a posição da curva em relação a (xi, yi).

Esses controles são acionados tendo em vista que ao final da resolução será necessário estabelecer a validade do que for feito. A validade da solução é então construída durante a resolução do problema; no entanto, isso não necessariamente tornará a produção da prova imediata, devido a possíveis diferenças estruturais entre a estruturação heurística e os padrões aceitos de expressão da prova (Pedemonte, 2005).

- Os controles de instrumentação (ibid.) que orientam a escolha dos operadores de acordo com os controles referentes. Por exemplo: distância entre a curva de aproximação e os pontos (xi, yi), critério da melhor aproximação. Esses controles regem a escolha das ferramentas certas para a implementação da estratégia escolhida. Eles irão orientar a seleção de ações em linha com os controles referentes.

- Controles locais que garantem a boa execução de um operador. Os controles locais são aqueles de verificação local da possibilidade de uso de um instrumento ou de aplicação de um teorema. É a verificação do valor da "condição" no esquema [Si <condição> então <ação>] que modela um operador.

Estas distinções permitem identificar três concepções da noção de função: (1) a concepção “curva”, que assimila a função a sua representação gráfica, (2) a concepção “analítica”," que atribui de forma privilegiada à função sua representação algébrica e (3) a concepção de “objeto” (Sfard, 1991), que mobiliza as representações e as ferramentas das duas concepções precedentes, mas com a capacidade de passar de uma forma fluida e contínua de um modo de representação e de tratamento gráfico ou algébrico para o outro (Balacheff & Gaudin, 2010). Para cada uma dessas concepções, os respectivos controles garantem a relevância e a validade dos procedimentos de resolução iniciados e preparam a validação final.

Eléments de la conception	**Courbe**	**Analytique**	**Objet**
Nature des contrôles référents (CR)	$CR1_{courbe}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{courbe}$: Proximité de la courbe de l'approximation aux points xiyi	$CR1_{ana}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi	$CR1_{objet}$: Allure globale de la courbe de l'approximation $CR2_{objet}$: proximité des valeurs f(xi) de l'approximation aux valeurs yi ou proximité des points (xi, f(xi)) aux points xiyi
Nature des contrôles d'instrumentation (CI)	$CI1_{courbe}$: $CR1_{courbe}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CR2_{courbe}$ non instrumenté	$CI1_{ana}$: $CR1_{ana}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$	$CI1_{objet}$: $CR1_{objet}$ instrumenté par les représentations graphiques des courbes des fj $CI2_{objet}$: $CR2_{objet}$ instrumenté par $\sum_{0}^{20}(fj(xi)-P(xi))^2$
Systèmes de représentation	Graphique	Analytique et graphique	Analytique et graphique

Figura 6.

Nathalie Gaudin pôde assim confirmar o papel da curva e das concepções analíticas na fase de inicialização da resolução do problema, daí a evolução para a concepção função-objeto, cujo sistema de representação inclui os registros gráficos e algébricos de forma integrada, e cuja estrutura de controle considera a função em si distinta da escolha de sua representação. A Figura 7 dá uma representação sintética das características dessas concepções no contexto do problema estudado, de acordo com os critérios potenciais de seleção da melhor aproximação.

Critère de choix de l'approximation	Conception courbe	Conception analytique	Conception objet
Mesure discrète	Σ : proximité visuelle de la courbe de f et des points xiyi R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : minimiser l'opérateur $\sum_j \left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 2, 5 R : évaluer $\sum_j \left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 2, 5	Σ : minimiser l'écart (f – P) R : évaluer $\sum_j \left[f_i(x_j)-y_j\right]^2$, j = 1…5
Régularités de l'approximation	Σ : continuité, nombre de variations ≤ 2 R : tracer les courbes des fj et les points	Σ : conformité de f(x) à l'expression ax^3+bx^2+cx+d R : évaluer les expressions fj(x), j=1…5	Σ : faire le choix des régularités de l'approximation R : évaluer les régularités des fj
Incertitude	f1, f2 et f3 sont des approximations équivalentes relativement aux critères	f2 est la meilleure approximation	Pas de meilleure approximation sans définir l'usage de celle-ci, mais f1 et f2 assurent le plus de régularité

Figura 7.

Representação sintética das características dessas concepções no contexto do problema

A atividade de controle estrutura a resolução de um problema nos níveis estratégico e operacional. Ele estabelece os vínculos estreitos entre a validação da solução, antes do julgamento que encerra a resolução, e o desenvolvimento de uma prova possível. Esses vínculos decorrem da natureza do conhecimento e do papel das estruturas de controle que os constituem em interação com os sistemas de representação e todos os operadores disponíveis para atuar.

Controle, validação e prova

O estudo da gênese da prova me levou a perceber que "[...] controles lógicos e semânticos funcionam localmente no curso da elaboração da solução" (Balacheff, 1988a, p. 36). Enfatizar esse caráter local foi uma negligência, enquanto também observei a dependência desses controles das concepções engajadas pelos alunos (ibid., p. 305), seu lugar na escolha de uma estratégia de resolução e seu papel no processo de tomada de decisão final - por exemplo, voltando às definições. Era preciso vincular controle, validação e prova. Claire Margolinas vai nessa direção durante o seu estudo sobre a importância do verdadeiro e do falso na aula de matemática, ao destacar a forte ligação entre controle e validação, que expressa na definição que propõe: "nós denominamos processo de controle o processo de antecipação da validação" (Margolinas, 1993, p. 213).

Claire Margolinas distingue quatro tipos de processo: (1) escolha do método, (2) processo e procedimento de resolução, (3) fim da resolução, (4) interpretação - distinção entre resultado/resposta (ibid., pp. 214-215). Esses processos partem do repertório dos meios estratégicos ou táticos, globais ou locais, que permitem julgar, verificar, escolher e validar uma decisão. Todos esses meios, em relação aos sistemas de representação e aos operadores dos quais dependem e dos quais regulam o uso, constituem a "estrutura de controle" que entra na caracterização de uma concepção (Balacheff, 1995, 2017; Balacheff & Margolinas, 2005).

Os processos de controle fornecem o material para a argumentação heurística que toma forma na fase privada da solução de um problema. Nesta fase, a resolução e a validação encontram-se imbricadas, sem que seja necessário que o aluno, ou o grupo de alunos, explique de forma sistemática ou precisa os motivos das ações implementadas. No entanto, essa explicitação é necessária para a aprendizagem da prova. O problema do professor é, portanto, criar as condições que o exijam. Para isso, as principais alavancas são a criação de um desafio não muito tolerante à incerteza, um contexto de interação social (por exemplo, tomada de decisão coletiva) que dá origem à formulação de argumentação em um contexto passível de suportar a contradição, e uma transferência da responsabilidade pela prova para os alunos. O conceito de situação de validação (Brousseau, 1998, p. 109-110) modela as situações que associam essas três alavancas. O trabalho sobre a validação domina o de resolução ao dar um lugar preponderante aos processos de controle. É difícil evitar torná-los explícitos, em particular no final da fase de resolução. Enquanto a solução é assegurada do ponto de vista de quem a produziu, ela deve ser aceita pelos demais, passando da explicação (privada) à argumentação (pública) para que sejam reconhecidas como prova (institucionalizada). Durante o debate probatório, a solução defendida pode ser modificada ou mesmo rejeitada. Essa rejeição recoloca em jogo a resolução do problema.

A ideia muitas vezes assumida de que há por um lado a resolução do problema e por outro lado a prova (ou demonstração) não está em contradição com a observação do entrelaçamento da resolução e da validação. Mas o discurso divisionista da instituição induz a sua separação na prática do ensino, enquanto a resolução não perde de vista a validação. O êxito da fase conclusiva depende da possibilidade de construção de um elo operacional em termos de conhecimento ou de estruturação lógica entre resolução e validação (Garuti et al., 1998; Pedemonte, 2005).

Em resumo, os processos de validação - controle, validação, prova - são construídos sob pelo menos quatro restrições:

- As *concepções* mobilizadas que caracterizam os operadores, representações e controles disponíveis.
- A *linguagem e sua organização no discurso*, que se distinguirá da representação dos objetos e de seu funcionamento técnico na resolução do problema. Esta linguagem descreve as implementações que ela permite comunicar e analisar.
- A *situação* que suscita as questões de validação mais ou menos fortes que regulam os princípios de economia da lógica ligados a qualquer prática. Dentre essas situações, as que incluem um debate sobre a prova envolvem a pessoa sob o risco de se descolocar do projeto de convencer para o de persuadir.
- O *contrato didático* que, para uma dada situação, determina as responsabilidades do ônus da prova.

A prova como prática discursiva

A instituição escolar, os comentários do currículo atestam isso, aceita que alguns alunos não aprendam a demonstração e que o professor não seja obrigado a demonstrar todas as afirmações que estão no currículo. O padrão de comunicação e trocas necessárias ao funcionamento do grupo social que constitui a sala de aula de matemática, incluindo os alunos e o professor, deve, portanto, ser construído preservando-se a legitimidade dos vários níveis do discurso sem, no entanto, comprometer o lugar especial da demonstração no estabelecimento da validade de um enunciado.

Ilustração 3: é preciso deixar os alunos se expressarem em sua linguagem?

O documento "Raciocínio" que acompanha o programa do 4º ciclo refere-se a um relatório de pesquisa da equipe académica de Matemática da Academia de Bordéus (2003), que propõe um exemplo de progressão para a "iniciação ao raciocínio dedutivo". A introdução desse texto começa com o exemplo de um problema de geometria (Figura 8).

Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Tracer un diamètre [AB]. Placer deux points K et L sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que K et L sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

1) Démontrer que les triangles AKB et ALB sont rectangles.
2) Les droites (AK) et (BL) se coupent en C. Les droites (AL) et (BK) se coupent en H.
   Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).

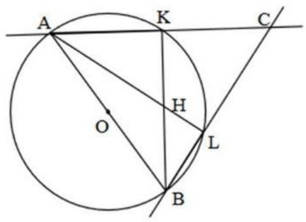


Figura 8

O problema é colocado na forma usual de atividades de avaliação em uma 8ª série. Os alunos entregam suas cópias, a imagem da Figura 9 mostra a transcrição de uma.

1) On sait que [AB] sont le diamètre du cercle et que K et L sont sur le cercle. Dans un cercle circonscrit tout points se trouvant sur ce cercle est rectangle à un triangle, là c'est le cas « AKB » K est rectangle.
   Donc AKB est rectangle et ALB et rectangle.
2) On sait que : c'est le sommet du triangle ABC est H coupe le milieu du segment [AB].
   Donc (CH) $\perp$ (AB).

Figura 9

A transcrição é acompanhada por poucas informações além do efeito superficial do layout e da regularidade da caligrafia, o que sugere a atenção do aluno para o cumprimento de um padrão. Essa escolha corrobora o comentário dos autores que sugerem que o aluno

> entendeu o mecanismo de uma demonstração em uma etapa, mesmo que suas formulações sejam extremamente desajeitadas. Por outro lado, não trata de forma alguma da demonstração em duas etapas e fornece argumentos que não têm mais coerência com a pesquisa realizada. (Ibid., p.11)

O leitor concordará que o esquema ternário de inferência parece ser compreendido em sua forma, se não "compreendido" pelo aluno, é difícil dizer mais. Quanto à sua "falta de jeito de linguagem", ela convida a questionar um possível conflito entre a linguagem que ele usaria se tomasse a liberdade, e aquela que provavelmente procura adotar. As perguntas surgem naturalmente para o professor, que, na maioria das vezes, mesmo tendo conhecimento pessoal dos seus alunos, terá apenas cópias como dados para as suas avaliações: "O aluno não se incomoda com este modelo de redação? Não é melhor deixá-lo se expressar em sua própria linguagem?" (Ibid.). Escrever a solução é realmente um problema, porque o aluno não pode evitar a obrigação de certificar que está adquirindo as novas formas de expressão que lhe são ensinadas; essa obrigação é constitutiva da relação didática com o saber. Ele está "perturbado", no sentido de que não pode simplesmente expressar por escrito qualquer argumentação que compartilhe com outros alunos; ele opera de alguma forma uma "transposição inversa", que não é uma renúncia do que seria sua argumentação privada (Keskessa, 1994, p. 363 e segs.). É também porque a passagem à escrita é ao mesmo tempo um retorno à resolução, e um processo de objetivação com um objetivo particular e determinado (aqui a validação no quadro de um trabalho que será avaliado). A passagem para a escrita é, em si, de grande complexidade, à qual se soma a de aprender o padrão particular de discurso na aula de matemática (Duval, 1998). A sugestão ao professor de deixar o aluno "se expressar em sua própria linguagem" tem um caráter paradoxal, ao esvaziar sua ação do sentido em que se baseia. Fazê-lo por meio de uma progressão que levaria pouco a pouco à aquisição de diferentes aspectos da “expressão de um raciocínio dedutivo” é uma proposição que pode ser eficaz do ponto vista técnico, permanece aquela do lado funcional da relação entre resolução e validação; ou seja, “a necessidade de provar” (Équipe académique Mathématiques, 2003, p. 11).

Em geral, e, portanto, para o aluno reconhecer a necessidade de provar, depende da avaliação dos desafios do contexto da atividade. Pode ser a resposta a uma injunção, a do enunciado do problema apresentado durante um exame, ou atestar o endosso da responsabilidade por uma tomada de decisão, resolução de um problema ou conclusão de uma tarefa. As duas problemáticas são indissociáveis em sala de aula pela própria natureza da relação entre os alunos e o professor, mas o respectivo peso da injunção e do necessário pode ser ajustado, agindo sobre as características da situação.

Situação de validação no sentido da teoria das situações didáticas

As características da situação em que o aluno se encontra determina especialmente os níveis elementares, se ele assume ou não a responsabilidade pela validade da solução de um problema. Assumir essa responsabilidade, ou seja, não a deixar para o professor ou delegá-la a outro aluno, é o motor da aprendizagem da prova, seu papel, seus métodos e critérios, suas formas. A teoria das situações didáticas modela tais situações para compreendê-las e concebê-las. Não vou apresentar em detalhes o conceito de situação de validação, vou simplesmente relembrar a ideia que Brousseau teve quando a forjou no final dos anos 1960, porque dá um direcionamento à reflexão que devemos conduzir hoje para ir ao encontro das ambições dos programas:

O aluno deve estabelecer a validade de uma afirmação, deve dirigir-se a si mesmo como sujeito a outro sujeito passível de aceitar ou não suas afirmações, pedir-lhe que forneça provas do que está apresentando, e fazer outras afirmações contra ele. Essas trocas ajudam a tornar as teorias matemáticas explícitas, mas também a estabelecer a matemática como um meio de testar aquelas que concebemos. Um processo de prova é construído em uma dialética de validação que leva o aluno a utilizar de forma espontânea as figuras de retóricas e depois a abandoná-las. As relações que o aluno deve ser capaz de estabelecer para isso são específicas dessa dialética. (Brousseau, 1998, p. 127).

O modelo de uma situação de validação é um jogo social em que o que está em jogo é a validade de uma afirmação que deve poder ser explicitamente defendida ou rejeitada pelos protagonistas em pé de igualdade quanto à legitimidade de reivindicar a validade ou de refutá-la. As trocas requerem o compartilhamento de um sistema de representação, linguagem e/ou não linguagem, e uma referência (saberes, meio material, recursos documentais).

Uma *situação de validação* orientada para a aprendizagem explícita da prova deve incluir a necessidade de reconhecer a necessidade de regras, de enunciá-las e de pactuar coletivamente, bem como de um acordo sobre a estrutura do discurso e seus critérios de aceitação. A situação de resolução de problemas sobre a qual a situação de validação é construída deve gerar não apenas o debate da prova, mas também da natureza e a legitimidade dessa prova. Para isso, cada aluno tem como "antagonista"[25] o meio "contra o qual" está resolvendo o problema, e os demais alunos "contra os quais" defende a validade de sua solução ou a legitimidade de sua refutação de uma solução defendida por outro aluno.

O esquema da Fig. 12 retoma o esquema inicial das situações de validação (ibid., p.110) explicitando, no modelo do jogo com dois jogadores alternadamente proponentes e oponentes, do ponto de vista do "jogador A", o meio para a validação, que inclui o meio para a resolução do problema, e o "jogador B".

[25] Retomou aqui os termos usados por Guy Brousseau (Brousseau, 1998, p. 93) para definir o meio no sentido da teoria das situações didáticas.

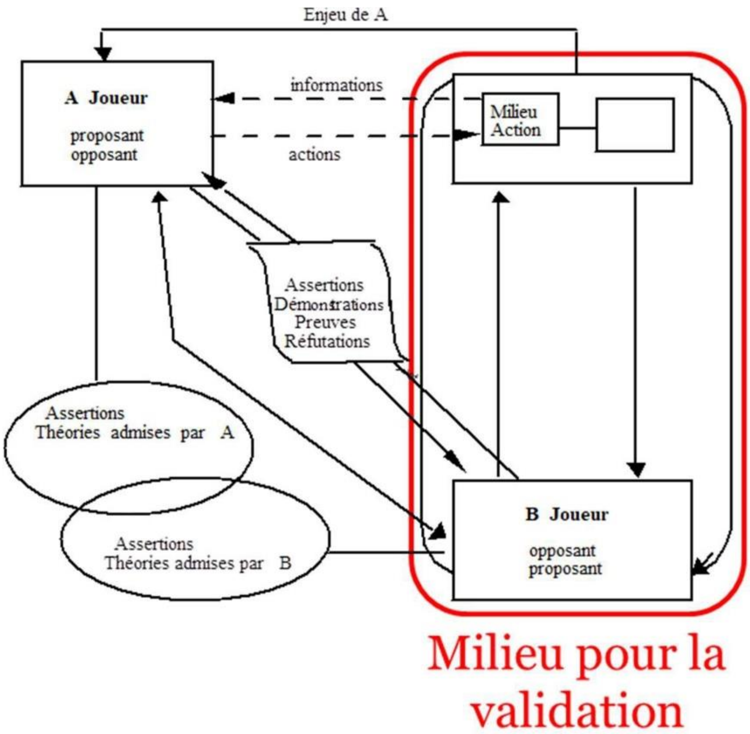


Figura 13.

Representação da situação de validação

Assim, a interação social é necessária em situações em que o objeto é a aprendizagem explícita da prova, o meio material não é suficiente (Margolinas, 1993, p. 84). Neste jogo de validação, a competência linguística é o instrumento da dialética do verdadeiro e do falso, inclui técnicas específicas dos registros semióticos da matemática (por exemplo, escrita algébrica, representação e codificação de objetos geométricos) e as figuras retóricas da disciplina. Se houver um acordo sobre a especificidade do discurso matemático e um consenso sobre os critérios de boa forma de uma demonstração na comunidade de matemáticos[26], não é mais o caso quando se trata de concordar sobre a natureza e a forma desejável e aceitável de uma prova em matemática no contexto de seu ensino. Assim, a observação da evolução dos programas franceses ou das escolhas feitas em vários países (Knipping, 2003; Miyakawa, 2016) mostra que os padrões e as práticas podem diferir significativamente. A fonte dessas diferenças deve ser buscada na diversidade das culturas subjacentes, das normas sociais de

[26] Este consenso não exclui questionamentos, por exemplo, quando o uso de recursos de TI foi possível

debate e das epistemologias subjacentes. A aprendizagem da prova, além da aprendizagem de técnicas, envolve a aculturação às práticas discursivas.

Essa aprendizagem traz problemas para o professor dos níveis elementares, subestimados pela instituição; são também um desafio para a pesquisa. Os numerosos trabalhos de pesquisa experimental e empírica mostram essas dificuldades, reterei dois deles para ilustrar esta apresentação: os de Andreas J. Stylianides, que propõe uma conceituação da prova no ensino fundamental, e os de Carolyn Maher, que discutem a evolução da "ideia de prova matemática" de um aluno ao longo de cinco anos.

Ilustração 4: a soma de dois números ímpares é sempre par? Uma atividade coletiva no curso elementar 2

A pesquisa de Andreas Stylianides sobre o ensino da prova no primário foi realizada na perspectiva das pesquisas de Deborah Ball, que identificou três problemas que os professores enfrentam: (1) a representação dos conhecimentos matemáticos (Ball, 1993, p. 378 ff), (2) respeitar os estudantes como ator em matemática (pensador matemático - ibid., p.384 ss.), (3) criar uma comunidade de discurso matemático (ibid., p. 388 ss.). Andreas Stylianides sustenta que a prova no ensino fundamental "deve ser conceituada de modo que seja, ao mesmo tempo, honesta para a matemática como uma disciplina e homenageando os alunos como aprendizes da matemática." (Stylianides, 2007, p. 3). Para estudar a possibilidade disso, conta-se com uma caracterização por quatro elementos:

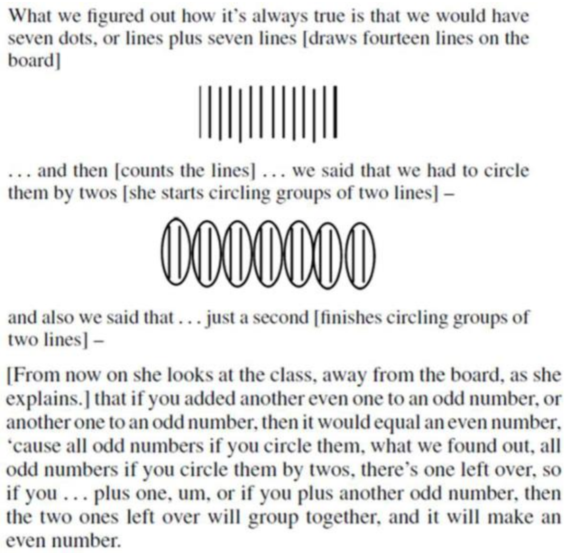
> Os quatro elementos são o fundamento da argumentação (ou seja, o que constitui a sua base: definições, axiomas etc.), formulação (ou seja, como é desenvolvido: como uma dedução lógica, como uma generalização a partir de casos particulares etc.), representação (ou seja, como ela é expressa: utilizando a linguagem cotidiana, algebricamente etc.) e a dimensão social (ou seja, como ela se desenvolve no contexto social da comunidade em que é criada). (Ibid., p. 2)

Para apoiar essa proposição, Stylianides (2007) toma como exemplo uma sequência filmada como parte do Projeto Ensinar e Aprender a Ensinar (Teaching and Learning to Teach

Project) da Universidade de Michigan[27] na sala de aula de Deborah Ball (ibid., Seção 4). Esta turma do terceiro ano - aquela do final do ciclo 2 na França - procura responder à seguinte questão: a soma de dois números ímpares é sempre par?

Depois de verificar vários exemplos, os alunos conjeturam que a soma de dois números ímpares será sempre par. Deborah Ball os desafia a explicar por que essa conjectura é verdadeira; uma das alunas, Jeannie, duvida que isso seja possível porque há uma infinidade de números ("[elas] vão para sempre"), outras, como Ofala, acham que a verificação feita em 18 casos é suficiente. Poucos dias depois, Deborah Ball voltou à sua pergunta, explicando que os matemáticos buscariam entender quais propriedades dos números ímpares fazem com que a soma de dois deles seja um número par. Ajuda os alunos a lembrar as definições de números pares e ímpares (agrupamento de itens em uma coleção em pares, com ou sem o resto de um elemento). O desafio de provar a conjectura é renovado, utilizando a definição; os alunos trabalham em grupos. A terceira sessão começa com os relatórios dos grupos de alunos. Um primeiro aluno, Tembe, dá um novo exemplo (7 + 7 = 14), então uma aluna, Betsy, diz que tem uma prova - ela a expõe, repetindo o caso 7 + 7, mas com uma representação mostrando a propriedade utilizada (Figura 10). Deborah Ball resume a prova apresentada por Betsy e, em seguida, pede a opinião dos alunos. Enquanto alguns alunos contestam, porque 7 + 7 é um caso especial[28], Jeannie a aceita, observando: "[...] ela não disse que tinha que ser aqueles dois números, aqueles dois números ímpares, poderiam ser quaisquer dois números ímpares porque, um, sempre há um sobrando." O trabalho coletivo é retomado. Algum tempo depois, o representante de um grupo, Mark, é convidado a fazer um balanço: "E ainda estávamos recebendo respostas e estávamos pensando, estávamos tentando provar, e Betsy veio e ela provou isso, e então todos nós concordamos que iria funcionar". A aula segue em frente.

[27] O site deste projeto e seus recursos não estão mais disponíveis online.
[28] Não se observa que 7 + 7 é o dobro de 7 e que, portanto, a paridade tem duas origens, uma das quais não é genérica - exceto se alterar a propriedade para "o dobro de um número ímpar é par"



What we figured out how it's always true is that we would have seven dots, or lines plus seven lines [draws fourteen lines on the board]

. . . and then [counts the lines] . . . we said that we had to circle them by twos [she starts circling groups of two lines] –

and also we said that . . . just a second [finishes circling groups of two lines] –

[From now on she looks at the class, away from the board, as she explains.] that if you added another even one to an odd number, or another one to an odd number, then it would equal an even number, 'cause all odd numbers if you circle them, what we found out, all odd numbers if you circle them by twos, there's one left over, so if you . . . plus one, um, or if you plus another odd number, then the two ones left over will group together, and it will make an even number.

Figura 10

A sequência escolhida mostra a coexistência do empirismo ingênuo (Tembe), do exemplo genérico (Betsy) e da experiência mental (Jeannie). Por outro lado, essas possibilidades são debatidas apenas marginalmente. Ou melhor, a professora faz emergir posições, argumentos e divergências, mas os alunos não vão para o fim da discussão, para a qual ela permanece a mediadora que distribui a palavra, a recebe e a reformula. Além disso, este exemplo ilustra três dos elementos da caracterização proposta por Andreas Stylianides (os saberes, a estrutura do discurso, as representações), mas permanece confuso quanto ao quarto elemento, a dimensão social.

O professor desempenha um papel fundamental em toda a sequência, mas foge na fase final, que podemos imaginar passar despercebida; sua palavra não retransmite a de Marcos. Andreas Stylianides observa que a sequência termina sem institucionalização. Na verdade, o papel fundamental do professor ao longo dessa sequência é obscurecido pela análise centrada na troca de argumentos (ibid., Seção 4.5.3), resultando na ilusão de um debate de validação entre os alunos. No entanto, a insuficiência da sequência é observada:

> […] Podem-se tirar duas conclusões. Em primeiro lugar, o argumento de Betsy não pode contar como prova, porque não foi aceito como tal pela comunidade da sala de aula. Em segundo lugar, a comunidade da sala de aula ainda não havia desenvolvido, ou compartilhado socialmente, todas as regras de discurso necessárias que apoiariam a elevação do argumento de Betsy ao status de prova dentro da comunidade. (Ibid., p.15)

Na verdade, conforme relatado, o episódio termina com uma aceitação da declaração de Marcos, uma vez que a professora não a rejeita. O que se observa parece-me um efeito Topázio, em que a professora valida implicitamente a proposição de Betsy como prova, e os alunos são dispensados dessa atividade.

A questão da validação esteve presente na aula de Deborah Ball; alunos - não os alunos - desenvolveram um argumento que poderia ser candidato ao status de prova. O caso relatado por Andreas Stylianides ilustra que para que esse estatuto seja reconhecido, por um lado, as provas devem ser tomadas como objeto de debate, pela sua natureza e forma, e por outro, um processo que permita o seu reconhecimento e, em seguida, integração nas regras de funcionamento da classe.

Ilustração 5: a longa exploração de um problema de combinatória

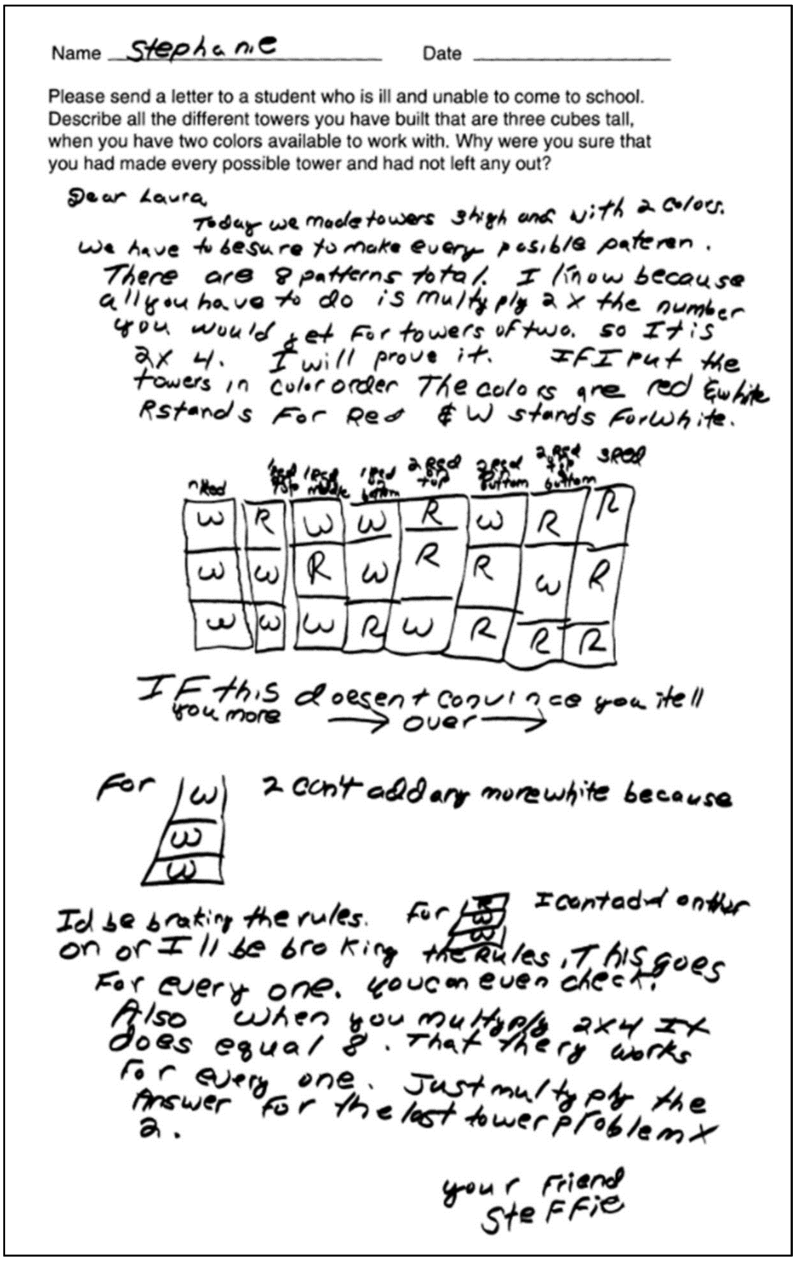
Maher conduziu um dos poucos estudos de resolução atenta de problemas em processos de provas de longo prazo na Rutgers University no início dos anos 1990; as observações foram realizadas, com um grupo estável de alunos, do primeiro ao quinto ano de escolaridade - ou seja, ciclo 2 e os dois primeiros anos do ciclo 3 na França. O objetivo foi deixar de lado a restrição de tempo e dos programas para permitir que os alunos construam, amadureçam, discutam as soluções que estão considerando. Os problemas pertenciam ao mesmo campo da combinatória elementar, favorável à invenção de métodos, de representações e à criação de um espaço de experiência autônomo sobre o qual o programa não pesa, mas rico do ponto de vista matemática (conceituação, formalização, argumentação). Retenho aqui um exemplo retirado do estudo de caso de Stéphanie (Maher & Martino, 1996a).

Dos dados recolhidos, extraiu-se um conjunto de episódios considerados "críticos" (vídeo-gravações, entrevistas), que lançam luz sobre a atividade de Stéphanie para resolver o problema da contagem das diferentes torres que podem ser construídas com um determinado número de cubos de duas cores; este número é pequeno, e foi definido pelo professor (4 em outubro de 1990, 5 e 6 em fevereiro de 1992)[29]. Os 11 episódios críticos resumem de forma compacta o período 1990-1992. Mostram a evolução dos meios de representação desenvolvidos por Stéphanie, passando da manipulação dos cubos à sua representação e codificação (*letter-grid*). A necessidade de controlar a contagem é a força motriz por trás da evolução das representações. As estratégias evoluem de tentativa e erro para raciocínio por caso: contar as voltas com um cubo vermelho, depois dois cubos vermelhos etc. A necessidade de validação está presente, mas continua a ser um requisito interno para a atividade de resolução até que a professora, até então em posição de neutralidade, convida os alunos a apresentarem-lhe uma prova da sua solução: "Como sabe que tem todos eles?" [...] Você pode me convencer de que você tem todas as possibilidades, que não há mais nem menos?" (Ibid. p.211 – evento 10, março de 1992). É certo que a professora pede aos alunos que a convençam, mas a tarefa efetivamente prescrita consiste em escrever uma carta destinada aos alunos ausentes, na qual seriam descritas as várias torres construídas com três cubos de duas cores, pelo que se assegura que todas as possibilidades estão presentes e nenhuma é esquecida (tradução livre, ver Figura 11).

Stephanie joga o jogo da comunicação conversando com outra aluna de sua classe, Laura. Ela expõe seus argumentos para garantir que exatamente 8 torres sejam construídas desenhando uma grade de letras que codifica as torres e sugere o modo de enumeração por caso com uma legenda no topo de cada (0 vermelho, 1 vermelho, 2 vermelhos, 3 vermelhos). Stephanie pondera que esse argumento pode não ser suficiente e acrescenta que ela não pode adicionar um cubo a uma torre branca sem quebrar a regra, o que pode ser interpretado como uma tentativa de argumentar a favor da completude deste caso. Da mesma forma, bastaria adicionar um cubo para trocar uma torre de três cubos brancos, o que não é possível, etc. "Isso vale para todos. Você pode até verificar." Toda essa argumentação e a redação de Stéphanie

[29] Esta situação foi precedida por uma situação semelhante, combinando camisas e jeans (3-2 depois 3-3).

vêm ao encontro de Carolyn Maher e Amy Martino, que apontam para a “invenção” da prova, baseadas em casos após uma longa evolução. Mas o leitor atento notará que Stéphanie enuncia a conjectura segundo a qual o número de diferentes torres de altura 3 é o dobro do de torres de altura 2. Ela ainda conclui sua carta, afirmando: “Basta multiplicar a resposta para o problema da última torre x2”; a prova de caso proposta não é relevante para validar esta conjectura (o que seria possível reorganizando as colunas).



Name Stephanie Date

Please send a letter to a student who is ill and unable to come to school. Describe all the different towers you have built that are three cubes tall, when you have two colors available to work with. Why were you sure that you had made every possible tower and had not left any out?

Dear Laura,
Today we made towers 3 high and with 2 colors. We have to be sure to make every posible pateren. There are 8 patterns total. I know because all you have to do is multyply 2 x the number you would get for towers of two. so It is 2 x 4. I will prove it. If I put the towers in color order The colors are red & white R stands for Red & W stands for White.

no Red	1 Red top	1 Red middle	1 Red bottom	2 Red top	2 Red bottom	2 Red top bottom	3 Red
W	R	W	W	R	W	R	R
W	W	R	W	R	R	W	R
W	W	W	R	W	R	R	R

If this doesent convince you I'll tell you more → over →

For W W W I can't add any more white because I'd be braking the rules. For R R R I cant add another on or I'll be broking the rules, This goes for every one. you can even check. Also when you multyply 2x4 it does equal 8. That thery works for every one. Just multyply the answer for the last tower problem x 2.

your friend
Steffie

Figura 11

A lacuna entre a conjectura apresentada por Stephanie e a argumentação que ela propõe para convencer outro aluno (ou o professor) oferece uma oportunidade de tomar a questão da prova como objeto de trabalho coletivo. A questão da enumeração é resolvida com um exemplo genérico, uma evolução do qual estabeleceria a conjectura. Outros alunos também notaram a relação de recorrência (Maher & Martino, 1996b, p. 442), notadamente Jeff, que posteriormente associou uma representação a ela (Figura 11), uma possível fonte de uma evolução da prova de Stéphanie.

Jeff: You multiply by two, the last number you got you multiply by two because you make branches off of them. [He referred to adding two branches to the top of each tower to represent the two possible colors which could be added to the top a tower.]

FIG. 24.8. Milin's method for finding all towers (b).

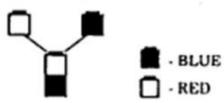


Figura 12

Da argumentação ferramenta à prova objeto

Seja qual for a sua natureza, as questões de validação e os processos de controle são constitutivos da resolução de problemas. Trata-se de despertar os alunos para o seu papel, tornando-os conscientes da sua especificidade em matemática e permitindo-lhes aprender as suas características e seus funcionamentos. Essa aprendizagem não pode vir apenas da instrução ou injunção, porque é a evolução de uma racionalidade que está em questão, a autonomia dos alunos é um componente crítico de sua possibilidade.

A teoria das situações modela as condições que maximizam a anulação das cláusulas de um contrato didático que colocariam em risco a autonomia dos alunos, ou seja, a sua responsabilidade, ou a relevância dos conhecimentos que mobilizam (por exemplo, tendo em conta os elementos anedóticos do contexto). As trocas no curso dessas situações e os argumentos sobre os quais os protagonistas estão de acordo permitem garantir a validade de um resultado, mas não requerem necessariamente a reflexão essencial para decidir em que e por quê se trata de uma prova. Na verdade, o trabalho de validação amplamente silencioso na atividade privada pode permanecer assim no trabalho coletivo porque procede de um acordo tácito que governa o trabalho comum de resolução de problemas.

Durante seu curso intitulado “Racionalidade e demonstração matemática”, ministrado na quinta escola de verão de didática da matemática, Marc Legrand formulou a hipótese segundo a qual “É mais razoável esperar ser capaz de introduzir indutiva e naturalmente estudantes ou alunos na racionalidade matemática a partir de uma pedagogia centrada nas situações-problema, do que acreditar que eles acabarão ingressando nessa racionalidade graças a uma pedagogia da simples mostração” (Legrand, 1990, p. 386). Essa hipótese é sustentada tanto pela prática docente quanto pela pesquisa experimental, que apresenta muitas dificuldades em localizar o papel do professor e seus meios. As situações de “debate científico” (Legrand et al., 2011) buscam fornecer uma resposta operacional para sair do que parece ser um dilema tanto para o ensino quanto para a instituição. Baseiam-se num forte empenho por parte do professor, que inicia situações tendo uma “consistência epistemológica”, uma “boa adequação com a natureza dos saberes a ensinar [... e ...] ao meio dos conhecimentos efetivamente disponíveis para os alunos/estudantes” (ibid., p. 115), e seu relativo afastamento como árbitro de trocas até o momento de uma institucionalização necessária “para ordenar a desordem que o debate inevitavelmente introduz e para introduzir e explicar o que nenhum debate pode fazer, apresentar e/ou explicar a um custo razoável” (Ibid. P.116).

O que Marc Legrand designa, e no qual insiste, é o conjunto de regras do debate para a aceitação da prova e, correlativamente, da refutação na matemática. Para explicitar essas regras, devemos *passar da argumentação, ferramenta de validação* baseada em regras tácitas, *para o debate sobre a argumentação como objeto, cujas características explícitas condicionam sua admissibilidade como prova*. Em outras palavras, a questão da validade da solução do problema precisamente em jogo deve ser superada para dar lugar ao dos critérios de verdade, que nada mais é do que lançar as bases para a produção do conhecimento matemático.

As dificuldades em ensinar a demonstração muitas vezes levaram a favorecer o ensino das regras de produção da prova e as formas de sua formulação reduzidas ao aprendizado da lógica. Assim, a aquisição do esquema fundamental do modus ponens ($A, A \rightarrow B \vdash B$) e suas condições de uso parece ser o objetivo principal. Essa prioridade coloca em segundo plano o fato de que a validação de um enunciado não deriva sua legitimidade apenas do status dos enunciados mobilizados pelo problema considerado, mas do conjunto daqueles aos quais estão vinculados dentro de um conjunto estruturado; uma teoria que deve ser reconhecida para tal[30]. Com todos os cuidados que o uso desse vocabulário exige, o que está em pauta é o ingresso dos alunos em uma problemática teórica[31].

A comparação do ensino na França e em outros países confirma esta observação: a natureza localmente organizada dos conhecimentos envolvidos na produção de uma prova em livros escolares franceses contrasta com a organização quase axiomática no Japão (Miyakawa, 2016, seção 3.3.3), o que não exclui a existência e o uso de um repertório de teoremas que constituem o saber oficial (Knipping, 2003, p. 6/10), mas é outra coisa. A referência a um referencial teórico explícito como contexto da atividade matemática está presente em uma série de estudos, mas não foi tematizada até a proposta de definir "*teorema matemático*" como o sistema de relações mútuas entre três componentes: um enunciado, sua prova e a teoria dentro da qual esta prova faz sentido (Mariotti et al., 1997, pp. 182-183; Boero, Ferri, & Garuti, 1997, pp. 182–183).

Além do domínio das competências de raciocínio (lógica) comumente relatado como um requisito mínimo, a aprendizagem da prova em matemática envolve a tomada de consciência do que a separa da argumentação natural adquirida por meio de interações sociais

[30] Isso me levou a afirmar que "o ponto forte que separa a argumentação da prova é a necessidade de esta última existir relativamente a uma axiomática explícita." (Balacheff, 1999) e rejeitar a ideia de uma argumentação matemática baseada nos trabalhos das ciências da linguagem (ibid.). Esse ponto de vista pode ser reconsiderado introduzindo-se, com relação ao valor epistêmico de um enunciado, seu valor ôntico. Menciono esse desenvolvimento na conclusão, desenvolvi-o durante minha apresentação no CORFEM em junho de 2019.
[31] Transição de estudante praticante para estudante teórico (Balacheff, 1988, vol. 1, p.54).

diárias, e uma ruptura epistemológica para entrar em um problema teórico, cuja natureza é essencialmente diferente do conhecimento comum.

Modelar as situações que possibilitem lidar com essa ruptura continua sendo o principal problema que enfrentamos. Tais situações devem atender às condições para que a argumentação, o cerne da resolução de problemas, seja tomada como um objeto para compreender e aprender o que é uma prova em matemática. A aprendizagem ocorrerá em uma dialética da prática e da teoria no sentido da dialética ferramenta-objeto conceituada por Régine Douady em que, deve ser lembrado, o objeto é mais do que a soma de suas características lógicas e discursivas:

> Por objeto, entendemos o objeto cultural tendo seu lugar em um edifício maior que é o saber dos matemáticos, em um determinado momento, socialmente reconhecido. O objeto é definido matematicamente, independentemente de seus usos. O status de objeto permite a capitalização do saber e, portanto, a extensão do corpo de conhecimentos. Também permite o reinvestimento em novos contextos que podem estar muito distantes do contexto original. (Douady, 1992, p. 134)

Conclusão

Controle, prova e demonstração são três regimes de validação cujos respectivos pesos variam ao longo do continuum que vai desde a resolução de um problema até a comunicação de sua solução de acordo com um padrão decretado pela instituição. Suas interações mútuas e sua dependência das concepções subjacentes, que os tornam possíveis e suscitam sua evolução, constituem um sistema cuja natureza determina a da própria matemática.

A longa história do ensino da demonstração e seus fracassos para muitos alunos criou práticas que tendem a separar esses três regimes, separando resolução e validação, e introduzindo demonstração em rupturas com as práticas que a precedem. Nas últimas décadas, a doutrina institucional tem procurado mudar a epistemologia escolar resultante para uma relação com a matemática mais próxima das características epistemológicas desta disciplina. Assim, a aquisição de saberes é complementada, ou talvez contextualizada, por aquela de "competências" entre as quais os programas atuais referem-se à busca, *raciocínio e comunicação*.

Poderia a definição bastante ampla e não redutível a técnicas dessas competências permitir o surgimento de uma atividade que *dá profundidade ao discurso matemático e poderia dar vida na sala de aula a uma verdadeira pequena sociedade matemática*? Retomando, para formular essa questão, as palavras de Guy Brousseau (1998, p. 111). Claro, não existe uma resposta acabada e rápida. No entanto, os resultados de pesquisas tanto do ponto de vista epistemológico como da engenharia de situações efetivamente praticadas ou concebidas com fins experimentais constituem uma base sólida para a construção de um programa científico que permita dar resposta a elas.

Quando Guy Brousseau utiliza as expressões que tomo emprestado acima, ele está se referindo a "situações de prova". Esta expressão é encontrada apenas três vezes na obra de referência "Théorie des Situations Didactiques" (Brousseau, 1998, p. 43, 111 e 313), em particular na seção dedicada ao esquema de validação explícita (ibid., p.109 sqq). Como sabemos, é o conceito de "situação de validação" que se mantém como um dos conceitos fundadores da teoria. Para as questões que aqui consideramos, parece necessário, mas insuficiente: as situações de prova devem ter as características de situações de validação com a restrição adicional de criar as condições para uma necessidade intrínseca de análise, certificação e institucionalização dos meios da prova no contexto coletivo da sala de aula. Essas condições e os meios de criá-las ainda não foram determinados, em particular porque se sabemos com bastante precisão o que é uma prova em termos do objetivo de aquisição no final do ciclo 4, por outro lado não há caracterização precisa e compartilhada que pode servir de referência no curso da escolaridade anterior, do 2º ciclo.

Assim, dois temas principais devem estruturar o programa científico por vir: a caracterização da argumentação matemática e as formas de institucionalização das provas antes do momento muito particular da afirmação da demonstração como “meios matemáticos de acesso à verdade”, como os comentários os formulam (cf. § 2.1)

A expressão *argumentação matemática* deve ser pelo menos potencialmente admissível segundo os padrões da aula de matemática, ou seja, ser aceito como prova pela classe e confirmado pelo professor. Este é apenas um esclarecimento mínimo, levando em consideração a dimensão social. Proponho partir, no que diz respeito ao conteúdo e à forma, da proposição de Andreas Stylianides:

> Prova é um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Ela utiliza afirmações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de afirmações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidos e conhecidos por, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicado com formas de expressão (modos de representação de argumento) que são apropriadas e conhecidas, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula.[32] (Stylianides, 2007, p. 291)

Os termos “*prova*” e “*argumento matemático*” aparecem sinônimos, o que é mais frequentemente o caso na literatura anglo-saxônica. O interesse desta proposta é destacar três dimensões que correspondam razoavelmente a três dimensões que deverão ser resolvidas para que haja uma caracterização operacional. A primeira levanta a questão da criação de um referencial teórico, cuja forma deve ser modelada e a especificação das condições de criação; ela corresponde ao primeiro termo, Teoria, do tripleto definidor do Teorema (cf. § 3.5). A *memória institucional* é uma premissa disso, mas não é suficiente, na medida em que apareceria apenas como um repositório de recursos. A segunda e a terceira distinguem dois aspectos da argumentação, sua natureza (*modo de argumentação*) e sua expressão (*representação*

[32] Prova é um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Ela usa afirmações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de afirmações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidos e conhecidos por, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicado por formas de expressão (modos de representação de argumento) que são apropriadas e conhecidas, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula.

argumentativa). Essas duas dimensões estão de fato entrelaçadas no processo de produção da argumentação. Os numerosos problemas que levantam incluem, em particular, o da sua separação e o da sua modelação, que não pode ser abstraída dos conhecimentos que a sustentam - pense, por exemplo, no caso do exemplo genérico e no da experiência mental.

Por fim, as características definidoras da argumentação matemática não devem apenas distingui-la de outras formas de argumentação, mas também ser operacionais quando se trata de arbitrar as propostas dos alunos e possivelmente institucionalizá-las para organizá-las e capitalizá-las em sala de aula. A avaliação do caráter matemático não pode ser reduzida a julgamento sobre a única forma de argumentação. Como, por exemplo, arbitrar o caso do exemplo genérico que põe em equilíbrio permanente o geral e o particular, cujo equilíbrio se encontra no final de um jogo de interações entre esses dois polos, às vezes de mesmo compromisso?

Embora suas raízes históricas lhe deem legitimidade (Arsac, 1987), o conceito de argumentação matemática será um conceito didático, e não a transposição de conhecimentos matemáticos. Não podemos concebê-lo como uma transposição da demonstração, a menos que dela retenhamos apenas o que diz respeito à sua dimensão social no seio da comunidade científica. Seria um erro epistemológico e teórico. Trata-se de uma dificuldade evidenciada pelo vigor dos debates sobre a admissibilidade de provas “sem palavras” ou exemplos genéricos. A definição da argumentação matemática não pode escapar das demandas da institucionalização.

As pesquisas sobre a aprendizagem do raciocínio e da prova têm em comum o uso da engenharia das chamadas situações de pesquisa (por exemplo, problema aberto - Mantes & Arsac, 2007), ou pesquisa e prova (Georget, 2009). Baseiam-se em grande parte nas situações de validação em que a construção de uma prova é uma ferramenta da resolução. Mas os relatos desta pesquisa mostram que o fechamento dessas situações se dá na aceitação de uma solução

- que é o objeto discutido - e não no reconhecimento das características lógicas e ônticas da argumentação pelo que elas têm de geral e de necessário além da situação particular em que ela é produzida.

Por fim, as provas são tanto a base quanto as organizadoras do conhecimento. No decorrer da aprendizagem, ajudam a consolidar sua evolução e equipar sua reorganização. No ensino, elas legitimam os novos saberes e os constituem como sistema: conjunto, saberes e provas constituem a Teoria, no sentido de Mariotti. A função da institucionalização das situações de prova coloca a validação explícita sob a arbitragem do professor que é, em última instância, o fiador de seu caráter matemático. Essa dimensão social, no sentido de que o funcionamento científico depende de uma organização construída e aceita, está no cerne da dificuldade do ensino da prova em matemática.

Referências

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *8*(3), 48.

Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Paris : Hermann.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Doctorat ès-sciences). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, *10*(3), 2–8.

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175–192). Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat... [Newsletter]. Retrieved 28 September 2019, from La lettre de la preuve website: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115–135). Springer Berlin Heidelberg.

Balacheff, N. (2017). CK¢, a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El Calculo y Su Ensenanza, IX (Jul-Dic)*, 1–23.

Balacheff, N., & Boy de la Tour, T. (2019). Proof Technology and Learning in Mathematics: Common Issues and Perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Berlin: Springer.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. In F. Hitt, D. Holton, &

P. Thompson (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 16, pp. 207–234). https://doi.org/10.1090/cbmath/016/08

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In

A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1 – 32). Ball, D. L. (1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School

Mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397. https://doi.org/10.1086/461730

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–209). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cauchy, A. (1821). *Analyse algébrique ([Reprod. En fac-sim.])*. Retrieved from https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29058v

Cauchy, A. (1853). Note sur les séries convergentes don tles divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, *XXXVI*(11), 454–457.

Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, *34*(2), 309–329. https://doi.org/10.1007/s40961-016- 0086-2

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, *6*, 132–158.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261. https://doi.org/10.1007/BF00368340

Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer: Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31), 37–61.

Duval, R. (1998). Écriture et compréhension: Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ?

Produire et lire des textes de démonstration, *S4*, 79–98. Retrieved from http://www.numdam.org/article/PSMIR_1998__S4_79_0.pdf

EDUSCOL. (2009). *Raisonnement et démonstration*. Retrieved from http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdem onstration_223500.pdf

EDUSCOL. (2016). Raisonner [Institutionnel]. Retrieved 30 September 2018, from Éduscol website: http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonn er_547836.pdf

Équipe académique Mathématiques. (2003). *Initiation au raisonnement*. Retrieved from http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. *For The Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–18.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology ofMathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Retrieved from http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* (PhD Thesis). Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble, France.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertespar les communautés de pratique d'enseignants* (Didactique des mathématiques, Paris-Diderot). Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603

Granger, G.-G. (1981). Philosophie et mathématique leibniziennes. *Revue de Métaphysique et de Morale*, *86*(1),1–37. Retrieved from JSTOR.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6–13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49. Hanna, G. (2017). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Presented at the Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. Retrieved from https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

Hanna, G. (2018). Reflections on Proof as Explanation (draft). In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 3–18). https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_1

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J.Kaput, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234–283). https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07

Keskessa, B. (1994). Preuve et plans de signification : Une hypothèse. *Recherches En Didactique DesMathématiques*, *14*(3), 357–391.

Knipping, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement – analyses comparatives des classes allemandes et françaises en 4èmeIntroduction. *Bulletin de l'APMEP*, 10.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *9*(3), 365–406.

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L., & Parreau, A. (2011). *Le principe du 'débat scientifique' dans un enseignement*. Retrieved from http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996b). Yound children invent methods of proof: The gang of four. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431– 445). Retrieved from https://www.learner.org/workshops/pupmath/support/mahermartino96.pdf

Mantes, M., & Arsac, G. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. CANOPE -CRDP Lyon.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp. 180–195). Helsinki, Finland: University of Helsinki.

MENESR. (2015a). Cycle 1. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, *Spécial*(2), 21.

MENESR. (2015b). *Programme Mathématiques cycle 3*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708

MENESR. (2015c). *Programme Mathématiques cycle 4*. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717

MENESR. (2018a). Cycle 2. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 30.

MENESR. (2018b). Cycle 3. *Bulletin Officiel de l'éducation Nationale*, (30 (26-07-2018)), 35.

Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 37–54.https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse du rapport enrte argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313–347.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, *38*(3), 289–321.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the*

World (pp. 117–136). Retrieved from https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,*10*(2/3), 133–170.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (p. 96) [Rapport public]. Retrieved from Ministère de l'éducation nationale website: https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/