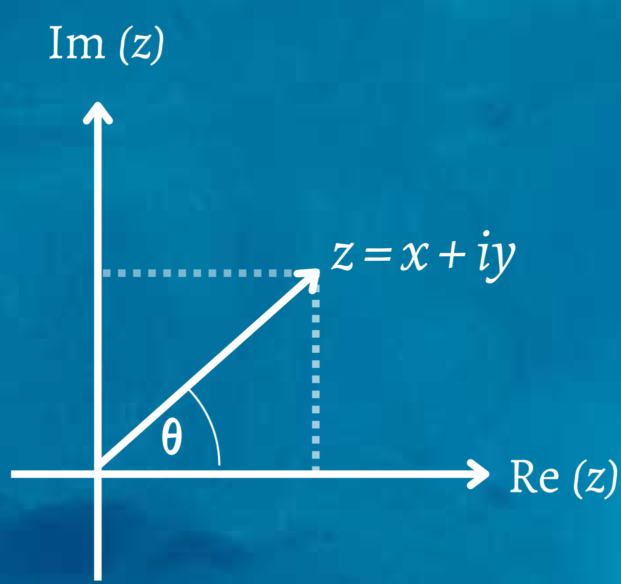
ELEMENTOS DE VARIABLE COMPLEJA



LUIS FERNANDO RAMÍREZ OVIEDO

Elementos de variable compleja

Luis F. Ramírez

San José, Costa Rica

Elementos de variable compleja

Luis F. Ramírez

San José, Costa Rica

515.9
R174e Ramírez Oviedo, Luis Fernando.
Elementos de Variable Compleja/ Luis F. Ramírez Oviedo. - - 1ª ed. - - San José, Costa Rica : L. Ramírez O., 2023.
1 recurso en línea (88 páginas): ilustraciones a color, 633kb.

Libro digital, PDF
Archivo Digital: descargable

ISBN 978-9968-03-380-0

1. FUNCIONES [MATEMÁTICAS] 2. VARIABLES COMPLEJAS 3. ÁLGEBRA

Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Índice general

Prólogo

El profesor Luis Fernando Ramírez Oviedo labora en la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED) y tiende a cargo las últimas asignaturas que se imparten en el programa de la carrera de Enseñanza de la Matemática.

El profesor Ramírez se ha caracterizado por ser un docente muy preocupado por la buena formación de los futuros docentes en la Enseñanza de la Matemática es por esto que, al no existir un texto producido en la UNED, en donde se introduzca y desarrolle el tema de los números complejos, él decide escribir uno al cuál denomina Elementos de Variable Compleja y que está dirigido a los estudiantes de Ingeniería en Telecomunicaciones.

El texto está dividido en cinco apartados a saber: 1. Los Números Complejos, 2. Funciones Elementales, 3. Funciones Holomorfas, 4. Integración de Contornos y 5. Series e Integración por Residuos, esta distribución le permite al lector introducirse en el tema y desarrollar nuevos conceptos del Campo de los Números Complejos que le ayudan a introducirse en el Análisis Complejo (Variable Compleja), herramienta fundamental para los futuros ingenieros, ya que este conocimiento les ayuda modelar y resolver nuevas situaciones.

Estoy seguro que con el profesionalismo del profesor Ramírez, este texto será de gran utilidad para cualquier persona que desee incursionar en el Campo de los Números Complejos y más aún estoy completamente seguro que este texto será de gran utilidad para los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones de la UNED.

Profesor Allan Gen Palma

Encargado de la cátedra de Matemática Educativa de la UNED.
San José C.R. 2023

1 — Los números complejos

Sumario

*Álgebra de números complejos
*Axiomas de Cuerpo
*Operaciones con números complejos
*Módulo de un número complejo
*Forma polar
*Fórmula de Moivre
*Regiones en el plano complejo

Resumen

En este primer capítulo se definen las operaciones de suma y producto de los números complejos y a partir de ellas se establecen los axiomas de cuerpo. Además se estudia la representación de números complejos en forma polar y exponencial. Se introduce la fórmula de Moivre, de gran utilidad para estudiar las raíces n-ésimas de un número complejo y finalmente se introducen los diferentes tipos de regiones en el plano complejo.

Objetivos

- Conocer los axiomas de cuerpo de los números complejos
- Realizar operaciones aritméticas con números complejos
- Representar números complejos en diferentes notaciones
- Determinar las raíces de un número complejo
- Identificar diferentes tipos de regiones en el plano complejo.

1.1 Álgebra de números complejos

Desde el siglo XVI, matemáticos italianos manipulaban raíces cuadradas de número negativos para resolver ecuaciones cúbicas, sin embargo, estas prácticas no eran reconocidas por la comunidad matemática. En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) introdujo un nuevo número $i = \sqrt{-1}$, sobre el cual se definieron operaciones de suma y multiplicación. Al asumir la existencia de un número no real i tal que $i^2 = -1$ (en ocasiones denotado este número como $i = \sqrt{-1}$) y llamado *unidad imaginaria* se puede establecer el conjunto de los números complejos de la siguiente forma

$$\mathbb{C} = \{z = a + i \cdot b : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

al número a se le conoce parte real $\mathrm{Re}(z)$ y al número b como parte imaginaria $\mathrm{Im}(z)$. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ puede considerarse como un subconjunto del conjunto de los números complejos, es decir, los números reales son aquellos números complejos cuya parte imaginaria es cero.

Sobre el conjunto de los números complejos se definen dos operaciones binarias elementales, la suma y el producto

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ (a+ib) + (c+id) = a+c+i(b+d)$$

$$\bullet : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ (a+ib) \cdot (c+id) = ac - bd + i(bc+ad)$$

Al considerar estas dos operaciones, es posible comprobar que los números complejos satisfacen las propiedades de campo, es decir, satisfacen cada una de las siguientes propiedades.

Para todo número complejo z_1, z_2 y z_3 se cumplen los siguientes axiomas

A1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (conmutatividad de la suma)

A2. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (conmutatividad del producto)

A3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociatividad de la suma)

A4. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (asociatividad del producto)

A5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (distributividad)

A6. Para todo z_1 existe un único número complejo 0 tal que $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$ (existencia del elemento neutro de la suma)

A7. Para todo z_1 existe un único número complejo 1 tal que $1 \cdot z_1 = 1 \cdot z_1 = z_1$ (existencia del elemento neutro del producto)

A8. Para cada z_1 existe un único número complejo w_1 tal que $z_1 + w_1 = w_1 + z_1 = 0$. Usualmente se denota a w_1 como $-z_1$ (existencia del inverso aditivo)

A9. Para cada $z_1 \neq 0$, existe un número complejo $w_1 \neq 0$ tal que $z_1 \cdot w_1 = w_1 \cdot z_1 = 1$. Usualmente se denota a w_1 como z_1^{-1} (existencia del inverso multiplicativo)

Con respecto al axioma A9 es importante agregar que para cada número complejo $z = a + ib$ distinto de cero, se tiene que su inverso multiplicativo z^{-1} se puede representar como $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ y además,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se define como $\bar{z} = a - ib$. Por la forma en que está definido satisface algunas propiedades

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$ para $z_2 \neq 0$.

Ejemplo 1.1

Realice las operaciones indicadas con los números complejos $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = -4 + 8i$ y exprese el resultado en forma simplificada

a. $z_1 + 2z_2 - z_3$

b. $z_1^2 \cdot z_3$

c. $\dfrac{z_2}{z_3}$

d. $\overline{z_1 - z_2}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
z_1 + 2z_2 - z_3 &= 3 + 4i + 2(-3i) - (-4 + 8i) \\
&= 3 + 4i - 6i + 4 - 8i \\
&= (3 + 4) + i(4 - 6 - 8) \\
&= 7 - 10i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1^2 \cdot z_2 &= (3 + 4i)^2 \cdot (-3i) \\
&= (9 + 24i - 16)(-3i) \\
&= (-7 + 24i)(-3i) \\
&= 72 + 21i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_3} &= z_2 \cdot z_3^{-1} \\
&= -3i \cdot \frac{-4 - 8i}{(-4)^2 + 8^2} \\
&= -3i \cdot \frac{-4 - 8i}{16 + 64} \\
&= \frac{(-3i)(-4 - 8i)}{80} \\
&= \frac{12i - 24}{80} = -\frac{3}{10} + \frac{3}{20} \cdot i.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}\\ &= 3 - 4i - (3i)\\ &= 3 - 7i.\end{aligned}$$

Observe que en la solución de las operaciones (c) y (d) del ejemplo anterior se pudo proceder de otra manera. En el caso (c) se está aprovechando la representación del inverso establecida previamente, sin embargo, otra forma sin utilizar dicha representación es la siguiente

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_3} &= \frac{-3i}{-4+8i}\\ &= \frac{-3i}{-4+8i}\cdot\frac{-4-8i}{-4-8i}\\ &= \frac{(-3i)(-4-8i)}{(-4+8i)(-4-8i)}\\ &= \frac{12i-24}{16+64}\\ &= -\frac{3}{10}+\frac{3}{20}\cdot i.\end{aligned}$$

En el caso (d) se pudo realizar primero la resta y luego determinar el conjugado

$$\begin{aligned}\overline{z_1 - z_2} &= \overline{3+4i-(-3i)}\\ &= \overline{3+7i}\\ &= 3-7i.\end{aligned}$$

Si se considera cada número complejo $z = a + ib$ como un par ordenado (a, b), este puede representarse como un punto del plano cartesiano, donde el eje coordenado X representa la parte real de cada número complejo y el eje coordenado Y representa la parte imaginaria. El plano cartesiano que se utiliza para representar números complejos es conocido como plano de Argand o plano complejo.

Ejemplo 1.2

Represente los números complejos z_1, z_2 y z_3 del ejemplo anterior en el plano complejo.

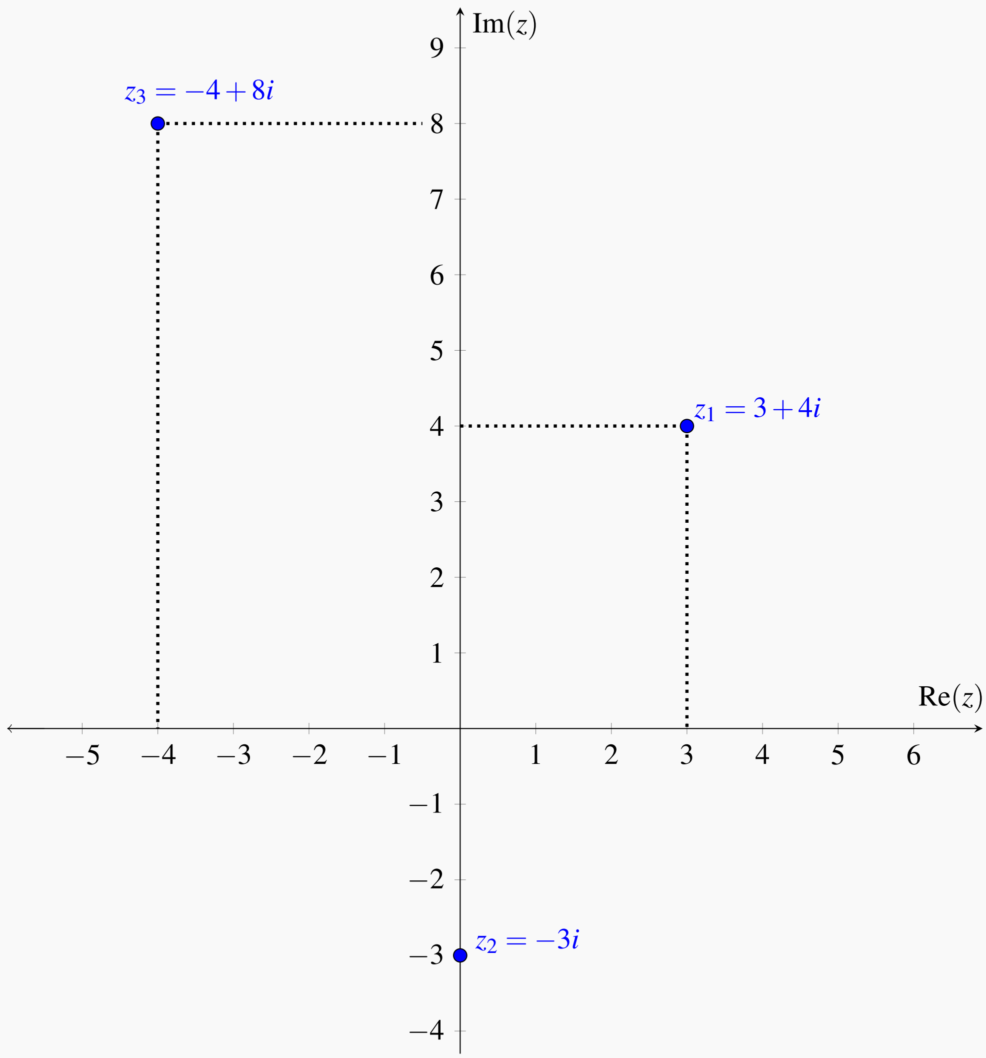


Figura 1. Representación de puntos en el plano de Argand

1.2 Módulo de un número complejo

Al considerar los números complejos como puntos del plano de Argand, se puede definir el módulo o norma de un número complejo de forma similar a como se estudia en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1 Módulo

Dado un número complejo $z = a + ib$ se define su módulo como el número real no negativo dado por

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Algunas propiedades del módulo de un número complejo son

- $|z| \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$
- $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$ (desigualdad triangular)
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

De la tercera propiedad se obtiene que $|z^n| = |z|^n$.

Ejemplo 1.3

Realice las operaciones indicadas con los números complejos $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 4i$, $z_3 = -3 + 5i$ y exprese el resultado en forma simplificada

a. $|z_1^3 \cdot 2z_3|$

b. $|-3\overline{z_2}|$

Solución

$$\begin{aligned}
|z_1^3 \cdot 2z_3| &= |z_1|^3 \cdot 2|z_3| \\
&= |2 - 4i|^3 \cdot 2|-3 + 5i| \\
&= \left(\sqrt{2^2 + (-4)^2}\right)^3 \cdot 2\sqrt{(-3)^2 + 5^2} \\
&= \left(\sqrt{20}\right)^3 \cdot 2\sqrt{34} \\
&= 80\sqrt{170}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|-3\overline{z_2}| &= |-3| \cdot |\overline{z_2}| \\
&= 3 \cdot |z_2| \\
&= 3 \cdot |4i| \\
&= 3 \cdot \sqrt{0^2 + 4^2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{16} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

1.3 Forma polar

Al considerar los números complejos y su representación en el plano, se puede considerar un cambio en el sistema de coordenadas, pasando de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En muchos casos, trabajar con números complejos por medio de su representación polar facilitará algunos procesos.

Definición 1.2

Dado un número complejo $z = x + iy$ distinto de cero, se puede representar en forma polar a partir de los cambios de variable

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\,\text{sen}(\theta)$$

donde r y θ están definidos como

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \;\text{ y }\; \tan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

Obteniendose

$$z = x + iy = r \cdot [\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)]$$

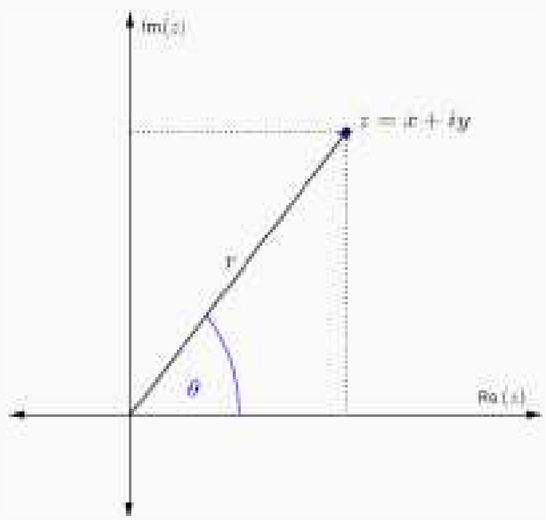


Figura 2. Representación de un número complejo de forma polar

En el caso en que la parte real de z es cero, se tiene que $\theta = \pm\pi/2$ mientras que si la parte imaginaria es cero se tiene que $\theta = 0$.

Un resultado de suma importancia que se conecta con la forma polar de un número complejo está dado por la fórmula de Euler que permite representar un número complejo en forma exponencial

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$$

de donde

$$z = x + iy = r \cdot [\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)] = r \cdot e^{i\theta}$$

La representación de un número complejo en forma polar no es única debido a la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Ejemplo 1.4

Exprese en forma polar y forma exponencial el número complejo $z = 3 - 3i$.

Solución

Observe que para $z = 3 - 3i$ se tiene que $r = |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$, mientras que para calcular θ se utiliza la función arcotangente[1]

$$\tan(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \Leftrightarrow \theta = \arctan(-1) \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Ahora, se puede obtener la representación en forma polar de z

$$z = 3 - 3i = 3\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

y a partir de ésta su forma exponencial

$$z = 3 - 3i = 3\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

En el ejemplo anterior, se encontró una representación en forma polar, pero también podría considerarse como válida

$$z = 3 - 3i = 3\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

ya que por la periodicidad de las funciones seno y coseno se tiene que

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

y

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

Esto lleva a múltiples representaciones equivalentes de un número complejo que se obtienen de sumar o restar múltiplos de 2π a θ, por ello se vuelve necesario definir el argumento de un número complejo.

Definición 1.3

Dado un número complejo $z = r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$ se define su argumento como el conjunto

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cuando θ satisface la desigualdad $-\pi \leq \theta < \pi$, se le conoce como el argumento principal y

[1] Recuerde que la función Arcotangente usualmente se define de $\mathbb{R}$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

> se denota como $\operatorname{Arg}(z) = \theta$.
>
> Es usual que para representar un número complejo en forma polar o exponencial se seleccione el argumento principal, aunque son equivalentes las expresiones con otros valores de su argumento.

Retomando el ejemplo anterior, el argumento principal de $z = 3 - 3i$ está dado por $\operatorname{Arg}(3-3i) = -\dfrac{\pi}{4}$ mientras que en general el argumento de z corresponde a $\arg(3-3i) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.
Algunas propiedades del argumento son

Dados dos números complejos z, w, se satisfacen

- $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg(1/w) = \arg(\overline{w}) = -\arg(w)$, con $w \neq 0$
- $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$, con $w \neq 0$

Ejemplo 1.5

Para los números complejos $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ y $w = 3i$. Determine $\arg(z)$, $\arg(w)$, $\arg(z \cdot w)$ y compruebe la propiedad 1.

Solución

Para $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ se tiene

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

de donde $\arg(-2 + 2\sqrt{3}i) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Luego, para $w = 3i$ se tiene que $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$, por ende $\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, $z \cdot w = (-2 + 2\sqrt{3}i)(3i) = -6\sqrt{3} - 6i$, al determinar su argumento principal

$$\theta = \arctan\left(\frac{-6}{-6\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

esto permite encontrar el argumento de $z \cdot w$, $\arg(z \cdot w) = \dfrac{\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$.
Finalmente, observe que

$$\arg(z) + \arg(w) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{6} + 2(k+n)\pi$$

lo cual comprueba la identidad.

La relación entre la forma polar y la forma exponencial de un número complejo, permite obtener un resultado de gran utilidad, la fórmula De Moivre.

Dado un número complejo $z = re^{i\theta} = r[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]$, al tomar su $n-$ésima potencia se obtiene que

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n \cdot \left(e^{i\theta}\right)^n = r^n \cdot [\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]^n$$

Luego por las propiedades de las potencias, también se tiene que

$$z^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n = r^n \cdot e^{i\cdot n\theta} = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$$

de donde se obtiene la identidad conocida como **fórmula De Moivre**

$$[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

Ejemplo 1.6

Realice la siguiente operación con números complejos y exprese el resultado en forma simplificada $(1-i)^7$.
Solución

El número $z = 1 - i$ puede expresarse en forma polar como $z = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$, entonces

$$\begin{aligned}
(1-i)^7 &= (\sqrt{2})^7 \cdot e^{-7\pi i/4} \\
&= 8\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-7\pi}{4}\right)\right] \\
&= 8\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= 8 + 8i.
\end{aligned}$$

El ejemplo anterior pudo resolverse de una forma más extensa, ya sea realizando las multiplicaciones de $(1-i)$ por si mismo de forma consecutiva o utilizando la expansión de $(a+b)^7$ mediante el método del triángulo de Pascal o el cálculo de los coeficientes binomiales, en todo caso dichos procesos conllevan más tiempo y esfuerzo.

Otro ejemplo sobre la utilidad de la forma polar en los números complejos es el cálculo de raíces $n-$ésimas.

Ejemplo 1.7

Determine todas las raíces cúbicas del número complejo $z = 8i$.
Solución

El número $z = 8i$ puede expresarse en forma polar como $z = 8e^{\pi i/2}$, entonces, sea w el número complejo tal que $w^3 = 8i$, es decir, $w^3 = 8e^{\pi i/2}$ y en general $w^3 = 8e^{\pi i/2+2k\pi i}$ $k \in \mathbb{Z}$.

Luego

$w^3 = 8e^{\pi i/2+2k\pi i} \Rightarrow w = \left(8e^{\pi i/2+2k\pi i}\right)^{1/3} \Rightarrow w = 8^{1/3}\left(e^{\pi i/2+2k\pi i}\right)^{1/3} \Rightarrow w = 2 \cdot e^{\pi i/6+2k\pi i/3}$

Ahora, tomando valores para k

Si $k = 0$ se obtiene $w_0 = 2 \cdot e^{\pi i/6}$

Si $k = 1$ se obtiene $w_1 = 2 \cdot e^{\pi i/6+2\pi i/3} = 2 \cdot e^{5\pi i/6}$

Si $k = 2$ se obtiene $w_2 = 2 \cdot e^{\pi i/6+4\pi i/3} = 2 \cdot e^{3\pi i/2}$

Los tres valores de k tomados generan tres números complejos diferentes w_0, w_1 y w_2 y que satisfacen que $w^3 = 8i$. Ahora bien, si se toman valores de k como $k = 3$, $k = 4$, ... se obtiene de forma cíclica valores complejos equivalentes a los tres anteriores. Observe

Si $k = 3$ se obtiene $w_3 = 2 \cdot e^{\pi i/6+6\pi i/3} = 2 \cdot e^{\pi i/6+2\pi i} = 2 \cdot e^{\pi i/6} = w_0$.

Cada vez que se represente en el plano de Argand las raíces $n-$ésimas de un número complejo se obtendrá un polígono regular de exactamente n lados en el cual, cada vértice corresponde a una de la raíces.

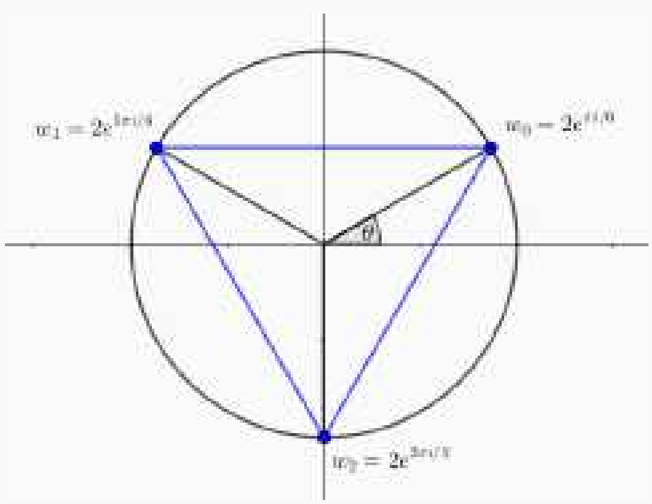


Figura 3. Polígono de las raíces cúbicas de $z = 8i$

En general, si se desea determinar las raíces $n-$ésimas de un número complejo $z = re^{i\theta}$, basta considerar los valores

$$w_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\theta i}{n}},\ w_1 = \sqrt[n]{r} \ldots e^{\frac{(\theta+2\pi)i}{n}},\ w_2 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{(\theta+4\pi)i}{n}}, \cdots,\ w_{n-1} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{(\theta+2(n-1)\pi)i}{n}}.$$

1.4 Regiones del plano complejo

En el presente apartado se estudian algunos tipos de subconjuntos de números complejos que serán de utilidad en las diferentes secciones de este texto.

Definición 1.4

Para un número complejo z_0 un $\varepsilon-$**entorno** del mismo es el conjunto de puntos z en el plano complejo que se encuentran a una distancia de z_0 menor que ε, es decir, el conjunto formado por todos los puntos en el interior del círculo con centro en z_0 y radio ε, excepto el mismo punto z_0 y los puntos que se encuentran en el borde o circunferencia. Usualmente se denota como $D_\varepsilon(z_0)$

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

En la figura 4 se representa un $\varepsilon-$entorno de z_0.

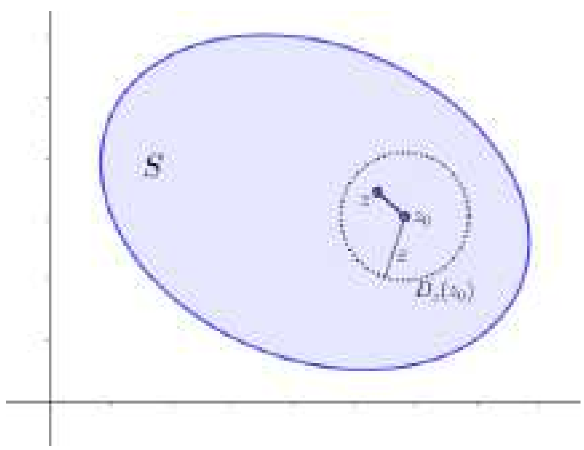


Figura 4. $\varepsilon-$entorno de z_0.

Definición 1.5

Dado un conjunto S de números complejos, se dice que un punto z_0 es un **punto interior** de S si existe al menos un $\varepsilon-$entorno de z_0 totalmente contenido en S. El punto z_0 se denomina **punto exterior** de S si existe al menos un $\varepsilon-$entorno de z_0 que no contiene un solo punto de S. Aquellos puntos para los cuales todo $\varepsilon-$entorno contenga tanto puntos interiores como puntos exteriores se conocen como **puntos frontera**.

Al conjunto de todos los puntos interiores de S se le conoce como **interior** de S, al conjunto de todos los puntos exteriores de S se le conoce como **exterior** de S y al conjunto de puntos frontera de S se le denomina la **frontera** de S.

En la figura 5, el punto z_0 es un punto interior de S, el punto z_1 es un punto frontera de S y el punto z_2 es un punto exterior de S.

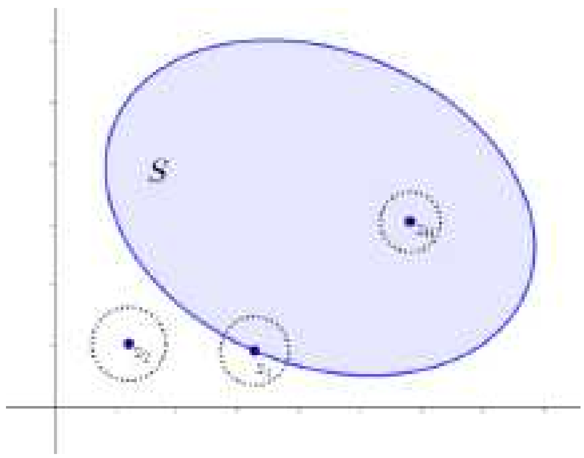


Figura 5. Punto interior, exterior y frontera.

Definición 1.6

Dado un conjunto S de números complejos, se dice que S es abierto si todos sus puntos son interiores y se dice que S es cerrado si éste contiene a todos sus puntos frontera. Todo $\varepsilon-$entorno de un punto es un conjunto abierto.

Un conjunto S de números complejos, se dice que S es acotado si existe un número real M tal que para todo $z \in S$ se cumple que $|z| < M$.

Un conjunto S de números complejos se dice conexo si cada par de puntos z_1, z_2 en S pueden ser unidos por una línea poligonal que se encuentra totalmente contenida en S. A los conjuntos que no son conexos se les conoce como disconexos.

Se denomina **región** a un conjunto S que sea abierto y conexo.

Algunos subconjuntos de $\mathbb{C}$ no son abiertos ni cerrados, como el caso de $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z - z_0| < 1\}$ que se ilustra en la figura 6a. El conjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < 1\}$ es abierto mientras que el conjunto $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_2| \leq 1\}$ es cerrado (ver figura 6b y 6c respectivamente).

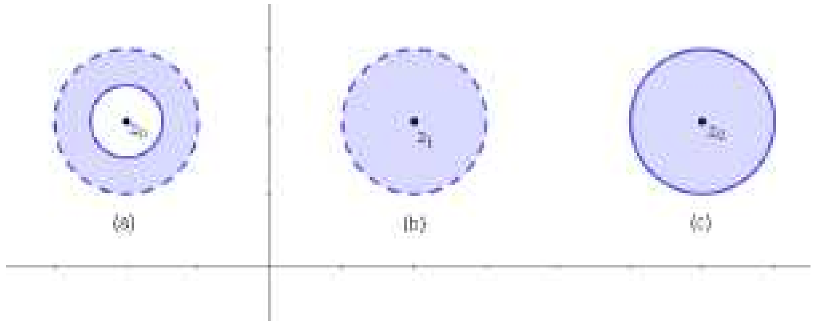


Figura 6. (a) Ni abierto ni cerrado, (b) abierto, (c) cerrado.

El conjunto S representado en la figura 7 es abierto y conexo, por lo tanto se considera una región.

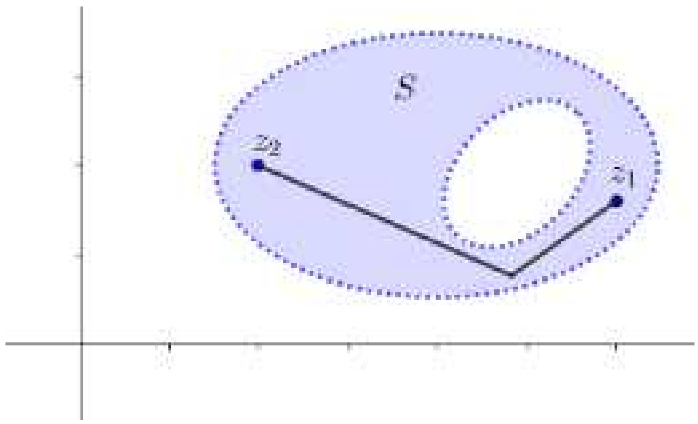


Figura 7. conjunto conexo

Ejercicios 1.1

Realice las operaciones con números complejos y exprese el resultado en forma simplificada

1. $(-2+3i)(-1-4i)+5i$
2. $(1-3i)(8-2i)^{-1}$
3. $(-1+2i)^3$
4. $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{i}{3-i}$
5. $(2\sqrt{2}-2i)^7$

6. Determine las raíces quintas del número complejo $z = 1+i$ y representelas el el plano complejo.

Para los números complejos $z=(5-3i),\ w=1-i$ determine

7. $|z\cdot w|$
8. $|5i\cdot w|$
9. $\mathrm{Im}(2i\cdot z)$

Represente los siguientes números complejos en forma polar y exponencial

10. $z = 4i$
11. $z = -1 + i$
12. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$
13. $z = 3 - 2i$

Para los siguientes números complejos, determine si se encuentran en el interior, exterior o en la frontera de la región $1 \leq |z - i| \leq 2$

14. $z = 2 + i$
15. $z = -1 + 2i$
16. $z = 2 - \sqrt{3}i$
17. $z = -2 + 2i$
18. $z = \frac{1}{2} + i$

2 — Funciones elementales

Sumario

*Polinomios
*Funciones racionales
*Función exponencial
*Funciones trigonométricas
*Función logaritmo
*Función potencia compleja
*Funciones hiperbólicas
*Funciones trigonométricas inversas

Resumen

En este apartado se definen algunas funciones complejas de variable compleja, la mayoría son conocidas del Análisis Real, pero además aparecerán funciones del tipo multivaluadas en las cuales una preimagen podrá tener varias imágenes, lo cual puede parecer un poco contradictorio ante el hecho de que en el Análisis Real esto no sería considerado una función.

Objetivos

- Definir las principales funciones en los números complejos
- Establecer las propiedades de las diferentes funciones de números complejos
- Establecer identidades sobre diferentes tipos de funciones de números complejos
- Calcular imágenes y preimágenes de funciones con números complejos

2.1 Funciones polinomiales y racionales

Se denomina polinomio a la siguiente expresión

Definición 2.1 Polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \cdots, n,\ a_n \neq 0.$

En la definición anterior, cada uno de los elementos a_i se conoce como coeficiente, estos pueden ser números reales o complejos, la variable z representa un valor complejo y es importante mencionar que el grado del polinomio “n” se refiere al mayor exponente de la variable z. Considere los siguientes ejemplos

Ejemplo 2.1

$p(z) = 3z^2 + 4z - 3$
$q(z) = -3z^5 + 2z^3 - 2z^2 - (2+i)z - 3 + \sqrt{2}i$

Observe que el polinomio $p(z)$ tiene grado 2 y todos sus coeficientes son números reales, mientras que el polinomio $q(z)$ posee grado 5 y algunos de sus coeficientes son reales y otros complejos (aunque se podría indicar que todos sus coeficientes son complejos ya que cada número real es considerado un número complejo cuya parte imaginaria es cero).
Las funciones cuyo criterio es un polinomio se denominan funciones polinomiales

Definición 2.2 Función polinomial

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \cdots, n,\ a_n \neq 0.$

En algunos casos será de mucha utilidad expresar estas funciones en términos de sus componentes real e imaginaria, es decir, considerando a z como $x + y \cdot i$ donde $x, y \in \mathbb{R}$, los polinomios pueden escribirse como $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + v(x,y) \cdot i$, donde $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ denominadas **componente real** y **componente imaginaria** de $f(z)$ respectivamente.

Ejemplo 2.2

Considere la función $f(z) = 4iz^2 + (4+3i)z + 5$ y determine las componentes real e imaginaria de $f(z)$.

Considere $z = x + y \cdot i$, sustituyendo en el polinomio se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= 4i(x+iy)^2 + (4+3i)(x+iy) + 5 \\ &= 4i(x^2 - y^2 + 2xyi) + 4x + 4yi + 3xi - 3y + 5 \\ &= 4ix^2 - 4iy^2 - 8xy + 4x + 4yi + 3xi - 3y + 5 \\ &= (4x - 8xy - 3y + 5) + (4x^2 - 4y^2 + 3x + 4y)i \end{aligned}$$

de donde

$$u(x,y) = 4x - 8xy - 3y + 5 \text{ y } v(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + 3x + 4y.$$

Un teorema de suma importancia sobre polinomios es el siguiente

Teorema 2.1 Fundamental del Álgebra

Todo polinomio de grado mayor o igual que uno posee al menos una raíz.

En general, este teorema permite establecer además, que un polinomio de grado n posee en realidad n raíces (algunas pueden estar repetidas).

Ejemplo 2.3

Determine las raíces del polinomio $p(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$.

Este polinomio se puede factorizar[2] como $p(z) = (z^2+4)(z-1)^2$, de donde $z_1 = 1$ es una raíz (con multiplicidad[3] 2) de $p(z)$ y las otras dos raíces son $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$, estas dos últimas se pueden obtener mediante la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.

Observe que el polinomio $p(z)$ posee tres raíces distintas, pero una de ellas está repetida, es decir, que se debe contar dos veces, de modo que la cantidad de raíces coincide con el grado del polinomio.

Las funciones cuyo criterio es un cociente de polinomios se denominan funciones racionales

[2] Para obtener la factorización de $p(z)$ utilice "división sintética" o regla de Ruffini

[3] Una raíz z_0 del polinomio $p(z)$ se dice tener multiplicidad k si existe otro polinomio $q(z)$ tal que $p(z) = (z-z_0)^k q(z)$

Definición 2.3 Función racional

$$f:\mathbb{C}-\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}\to\mathbb{C},\; f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $z_1,z_2,\ldots,z_k$ son raíces de $q(z)$.

Ejemplo 2.4

Determine el dominio de la función con criterio $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3-2iz^2+3z}$

Se deben determinar las raíces de $q(z)=z^3-2iz^2+3z$. Al factorizar se obtiene

$$\begin{aligned} z^3-2iz^2+3z &= z(z^2-2iz+3)\\ &= z(z-3i)(z+i)\end{aligned}$$

de donde, las raíces de $q(z)$ son $z_1=0$, $z_2=3i$ y $z_3=-i$, por lo tanto, el dominio de f está dado por $\mathbb{C}-\{0,3i,-i\}$.

2.2 Función exponencial

Similar a la definición de función exponencial en los números reales se puede establecer la función exponencial para números complejos, esta es de mucha utilidad para representar otras funciones.

Definición 2.4 Exponencial

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\; f(z)=e^z$$

En ocasiones es práctico representar la función exponencial utilizando sus componentes real e imaginaria. Sea $z=x+iy$, entonces

$$f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(\cos y+i\operatorname{sen} y)=e^x\cos y+i\cdot e^x\operatorname{sen} y.$$

Algunas propiedades de la función exponencial son las siguientes

- $e^z\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}$.
- $e^z\cdot e^w=e^{z+w}$
- $\dfrac{e^z}{e^w}=e^{z-w}$
- $(e^z)^n=e^{nz}$
- $|e^z|=e^x$
- $e^{z+2k\pi}=e^z$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.

Comprobar estas propiedades es un ejercicio útil, como ejemplo se va a comprobar la segunda propiedad, utilizando para ello la definición así como las propiedades de las potencias y las funciones trigonométricas seno y coseno en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5

Compruebe que para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$
Sean $z = x_1 + iy_1$ y $w = x_2 + iy_2$, entonces

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= (e^{x_1} \cos y_1 + i \cdot e^{x_1} \operatorname{sen} y_1)(e^{x_2} \cos y_2 + i \cdot e^{x_2} \operatorname{sen} y_2) \\
&= e^{x_1} \cos y_1 \cdot e^{x_2} \cos y_2 + i \cdot e^{x_1} \cos y_1 \cdot e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 \\
&\quad + i \cdot e^{x_1} \operatorname{sen} y_1 \cdot e^{x_2} \cos y_2 - e^{x_1} \operatorname{sen} y_1 \cdot e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 \\
&= e^{x_1} \cos y_1 \cdot e^{x_2} \cos y_2 - e^{x_1} \operatorname{sen} y_1 \cdot e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 \\
&\quad + i \cdot (e^{x_1} \cos y_1 \cdot e^{x_2} \operatorname{sen} y_2 + e^{x_1} \operatorname{sen} y_1 \cdot e^{x_2} \cos y_2) \\
&= (e^{x_1} \cdot e^{x_2})(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) \\
&\quad + i \cdot (e^{x_1} \cdot e^{x_2})(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2) \\
&= (e^{x_1} \cdot e^{x_2})(\cos(y_1 + y_2)) + i \cdot (e^{x_1} \cdot e^{x_2})(\operatorname{sen} y_1 + y_2) \\
&= e^{x_1 + x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i \cdot \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\
&= e^{x_1 + x_2} \cdot e^{i(y_1 + y_2)} \\
&= e^{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = e^{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = e^{z+w}.
\end{aligned}$$

Una de las grandes ventajas de la función exponencial es que permite definir otras funciones a partir de ella como se verá en el siguiente apartado.

2.3 Funciones trigonométricas

Considerando la forma polar de un número complejo $z = r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, y asumiendo que $r = 1$, se cumple que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

además

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

Luego, al sumar estas dos expresiones, se obtiene

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Al despejar $\cos\theta$ se obtiene

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

De forma análoga (restando en lugar de sumar) se puede comprobar que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
Esta forma de expresar las funciones seno y coseno en términos de un número complejo, permiten definirla en variable compleja

[4]Recuerde que la función $\cos\theta$ definida sobre los números reales es par, es decir que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ para todo θ mientras que la función seno es impar, es decir, $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$.

Definición 2.5

$$\operatorname{sen}(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

En el siguiente ejemplo se calcula el valor de *seno* para un número complejo

Ejemplo 2.6

Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$ y expréselo en la forma $a+bi$

Utilizando la definición

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2i\right) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+2i)}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+2i)}}{2i}\\
&= \frac{e^{-2+\frac{\pi}{4}i}-e^{2-\frac{\pi}{4}i}}{2i}\\
&= \frac{e^{-2}e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2i}\\
&= \frac{e^{-2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))-e^{2}(\cos(\frac{\pi}{4})-i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))}{2i}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(e^{-2}-e^{2})+i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(e^{-2}+e^{2})}{2i}\\
&= \frac{\sqrt{2}\cdot(e^{-2}+e^{2})}{4}+(-i)\frac{\sqrt{2}\cdot(e^{-2}-e^{2})}{4}.
\end{aligned}$$

Las demás funciones trigonométricas conocidas como secante, cosecante, tangente y cotangente se definen en variable compleja a partir de las funciones seno y coseno similar a como se trabaja en $\mathbb{R}$, considerando las restricciones necesarias en su dominio.

Definición 2.6

$$\tan(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=\frac{i(e^{-iz}-e^{iz})}{e^{iz}+e^{-iz}},\qquad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cot(z)=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}},\qquad z\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sec(z)=\frac{1}{\cos z}=\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}},\qquad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

[5] Recuerde que $\frac{1}{i}=-i$.

$$\csc(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}, \qquad z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Las identidades trigonométricas conocidas para los números reales son válidas en variable compleja, a continuación se enlistan algunas identidades más comunes

- $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- $\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(z)$
- $\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) \pm \operatorname{sen}(w)\cos(z)$
- $\sec^2(z) = 1 + \tan^2(z)$
- $\csc^2(z) = 1 + \cot^2(z)$
- $\operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \operatorname{sen}(z),\ \ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(z + 2k\pi) = \cos(z),\ \ k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(z + k\pi) = \tan(z),\ \ k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{sen}(z) = 0$ si y solo $z = 0 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(z) = 0$ si y solo $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

Ejemplo 2.7

Compruebe la identidad $\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$

Para comprobar esta identidad se puede utilizar las identidades básicas o la definición de seno y coseno en términos de la exponencial.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2z) &= \frac{e^{i\cdot 2z} - e^{-i\cdot 2z}}{2i} \\
&= \frac{(e^{i\cdot z})^2 - (e^{-i\cdot z})^2}{2i} \\
&= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot (e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot 2 \\
&= 2\operatorname{sen}(z)\cos(z).
\end{aligned}$$

2.4 Función potencia y logarítmica

Las funciones potencia y logarítmica, son funciones multivaluadas, lo que quiere decir que una misma preimagen pueden tener varias imágenes. Usualmente se define este tipo de funciones utilizando como dominio una superficie de Riemann, que intuitivamente consiste de una cantidad infinita de copias de $\mathbb{C} - \{0\}$ superpuestas lo que permite establecer la biyectividad en este tipo de funciones y de este modo definirlas como funciones inversas.

Definición 2.7 Logaritmo complejo

$$\log(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z) = \ln|z| + i \cdot (\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2.8

Calcule $\log(1+i)$ y expréselo de la forma $a+bi$.

Primero observe que $z = 1+i$ se puede expresar como

$$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

De donde se obtiene que $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ahora, utilizando la definición de logaritmo

$$\log(1+i) = \ln|1+i| + i \cdot \arg(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

La función logaritmo puede definirse también en forma univaluada restringiendo el dominio a una sola copia de $\mathbb{C} - \{0\}$ la cual estará definida por una única "vuelta" completa del argumento z. Por ejemplo, al considerar que $\pi \leq \arg(z) < 3\pi$ se obtendría que

$$\log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \frac{9\pi}{4}$$

Cuando se trabaja con el valor principal del argumento (entre $-\pi$ y π) se utiliza la notación $\operatorname{Log}(z)$, es decir

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z)$$

donde $\operatorname{Arg}(z) = \arg(z)$ restringido al intervalo $[-\pi, \pi[$.

Algunas propiedades de los logaritmos como funciones multivaluadas

- $\log(e^z) = z + 2n\pi$ para todo $z \in \mathbb{C}$
- $\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w)$ para todos z, w distintos de cero
- $\log(z/w) = \log(z) - \log(w)$ para todos z, w distintos de cero
- $n\log(z) \subseteq \log(z^n)$
- $e^{\log(z)} = z$.

Debe tenerse cuidado con las propiedades de los logaritmos establecidas arriba, pues algunas podrían no cumplirse cuando se está trabajando con el argumento restringido a un intervalo en concreto.

Ejemplo 2.9

Compruebe que $3\cdot\log(i) \subset \log(i^3)$

Utilizando la definición,

$$\begin{aligned}
3\log(i) &= 3\ln|i| + i\cdot 3\cdot \arg(i)\\
&= 3\ln|e^{i\frac{\pi}{2}}| + i\cdot 3\cdot \arg(e^{i\frac{\pi}{2}})\\
&= 3\ln(1) + i\cdot 3\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}\\
&= i\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + 6k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\log(i^3) &= \log(-i)\\
&= \ln|-i| + i\cdot\arg(-i)\\
&= \ln|e^{-i\frac{\pi}{2}}| + i\cdot\arg(e^{-i\frac{\pi}{2}})\\
&= \ln(1) + i\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}\\
&= i\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}\\
&= i\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi + 2(n-1)\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}\\
&= i\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + 2(n-1)\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Observe que $i\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + 2(n-1)\pi\right) = i\cdot\left(\frac{3\pi}{2} + 6k\pi\right)$ si y solo si $n = 3k+1$ ya que todo valor $k\in\mathbb{Z}$ se puede escribir como $k = \frac{n-1}{3}$ con $n\in\mathbb{Z}$ pero **no** todo valor $n\in\mathbb{Z}$ puede expresarse como $3k+1$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Las potencias (multivaluadas) se definen a partir de logaritmos de la siguiente forma.

Definición 2.8 función potencia

$$z^w = e^{w\log(z)}$$

Recuerde que el logaritmo es una función multivaluada definida para todo número complejo z distinto de cero, por tal motivo, la función potencia también es multivaluada y de nuevo se encuentra bien definida para todo complejo z distinto de cero.

Cuando el exponente w es un número entero, la función potencia es simple como z^2, z^3, z^{-1}, mientras que cuando el exponente es un número racional no entero, la función potencia es una raíz, por ejemplo

$z^{1/2}$ consiste de las raíces cuadradas de z que en este caso son dos distintas ya que

$$z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(z)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i\cdot\arg(z))} = e^{(\ln\sqrt{|z|}+\frac{i}{2}\cdot(\mathrm{Arg}(z)+2k\pi))} = e^{(\ln\sqrt{|z|}+i\cdot(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{2}+k\pi)}, \ k\in\mathbb{Z}$$

Se puede observar que cuando k es par se obtiene la primera raíz (repetidamente) mientras que cuando k e impar se obtiene la segunda raíz. Observe el siguiente ejemplo para un número complejo en particular.

Ejemplo 2.10

Determine el valor de $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/3}$

Considere que $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ y

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \ln\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i\cdot\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2ki\pi, \ k\in\mathbb{Z}\\ &= \ln(1)+i\cdot\frac{\pi}{3}+2ki\pi, \ k\in\mathbb{Z}\\ &= i(\cdot\frac{\pi}{3}+2k\pi), \ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = e^{\frac{i}{3}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}, \ k\in\mathbb{Z}$$

Ahora, considere los valores $k=0, \ 1$ y 2, al sustituirlos se obtienen tres valores diferentes

$$w_0 = e^{\frac{\pi i}{9}}$$

$$w_1 = e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{7\pi i}{9}}$$

$$w_2 = e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = e^{\frac{13\pi i}{9}}$$

Estos tres valores (por la periodicidad de la función exponencial e^z) se pueden representar de diferentes formas (tomando múltiplos de 2π)

$$\begin{aligned}w_0 &= e^{\frac{\pi i}{9}} = e^{i(\frac{\pi}{9}+2k\pi)}\\ w_1 &= e^{\frac{7\pi i}{9}} = e^{i(\frac{7\pi}{9}+2k\pi)}, \quad k\in\mathbb{Z}\\ w_2 &= e^{\frac{13\pi i}{9}} = e^{i(\frac{13\pi}{9}+2k\pi)}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/3} = \left\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{\frac{13i\pi}{9}}\right\}.$$

2.5 Funciones hiperbólicas y trigonométricas inversas

Las funciones hiperbólicas, similar a las trigonométricas se definen a partir de la exponencial e^z.

Definición 2.9

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Estas dos funciones se encuentran definidas para todo número complejo y tienen periodicidad 2π al igual que la exponencial e^z. A partir de estas se definen las demás funciones hiperbólicas

Definición 2.10

$$\tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \ \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$
$$\operatorname{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \ \operatorname{csch}(z) = \frac{1}{\operatorname{senh}(z)} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

Se debe considerar que $\tanh(z)$ y $\operatorname{sech}(z)$ están bien definida para todo complejo $z \neq k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, mientras que $\coth(z)$ y $\operatorname{csch}(z)$ para todo complejo $z \neq \frac{(2k+1)\pi i}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que de la definición de $\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ se puede establecer una relación con $\operatorname{senh}(z)$ de la siguiente forma

Para cualquier número complejo z considere el valor $w = iz$, entonces

$$\operatorname{sen}(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{i\cdot i\cdot z} - e^{(-i)\cdot i\cdot z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = (-i)\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\cdot\operatorname{senh}(z)$$

De una forma similar se pueden establecer o comprobar algunas de las siguientes identidades

- $\operatorname{sen}(z) = -i\operatorname{senh}(iz)$
- $\cos(z) = \cosh(iz)$
- $\cos(iz) = \cosh(z)$
- $\cosh(-z) = \cosh(z)$ (función par)
- $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$ (función impar)
- $\cosh(z \pm w) = \cosh(z)\cosh(w) \pm \operatorname{senh}(z)\operatorname{senh}(w)$
- $\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh}(z)\cosh(w) \pm \operatorname{senh}(w)\cosh(z)$

Observe que también de la definición de $\operatorname{senh}(z)$ y $\cosh(z)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\cosh^2 - \operatorname{senh}^2(z) &= \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(e^z+e^{-z})^2-(e^z+e^{-z})^2}{4} \\
&= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-(e^{2z}-2+e^{-2z})}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Lo que genera la identidad $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.

Ahora considere un número complejo z expresado como $z = x+iy$, entonces

$$\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh}(x)\cosh(iy) + \operatorname{senh}(iy)\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\cosh(x)$$

es decir

$$\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\cosh(x)$$

y de forma análoga se puede comprobar que

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$

Otras identidades se presentarán como ejercicios.

Al igual que la función potencia, las funciones trigonométricas inversas, se definen por medio de logaritmos, ya que las trigonométricas están definidas a partir de la exponencial. Se va a mostrar por medio de un caso concreto como se obtienen estas funciones.

Sea $z = \operatorname{sen}(w)$, por definición $z = \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$, luego

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw} = e^{-iw}(e^{2iw}-1)$$

es decir,

$$2iz = e^{-iw}(e^{2iw}-1)$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por e^{iw} se obtiene

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

de esta última igualdad se obtiene la ecuación cuadrática (con variable e^{iw})

$$0 = e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1$$

Al utilizar la fórmula general, se tiene que $\Delta = 4-4z^2$ y su solución[6] está dada por

$$e^{iw} = \frac{2iz + (4-4z^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

[6] usualmente al utilizar la fórmula general se indica que las soluciones de una cuadrática están dadas por $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ pero en este caso, al ser la raíz una función potencia bivaluada se tiene implícitamente los dos resultados que toma la raíz

Tomando el logaritmo a ambos lados se obtiene

$$iw = \log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

es decir,

$$w = (-i)\log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

De este último resultado, se obtiene la relación $\operatorname{sen}(z) = w$ si y solo si $w = (-i)\log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ lo que permite dar la siguiente definición

Definición 2.11

$$\operatorname{sen}^{-1}(z) = -i\log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

De una forma similar, se pueden establecer las demás funciones trigonométricas inversas las cuales son multivaluadas ya que dependen del logaritmo y raíces cuadradas.

Definición 2.12

$$\cos^{-1}(z) = -i\log\left(z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

Ejemplo 2.11

Calcule $\cos^{-1}(3i)$ y expréselo en la forma $a+ib$

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}(3i) &= -i\log\left((3i) + i(1-(3i)^2)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= -i\log\left(3i + i(1+9)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= -i\log\left(3i + i(10)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= -i\log\left(i[3+\sqrt{10}]\right) \\
&= -i\left(\ln(3+\sqrt{10}) + i[\arg(i(3+\sqrt{10}))]\right) \\
&= -i\left(\ln(3+\sqrt{10}) + i[\frac{\pi}{2} + 2k\pi]\right), \ k \in \mathbb{Z} \\
&= -i\ln(3+\sqrt{10}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ejercicios 2.1

Para los siguientes polinomios determine sus raíces con su respectiva multiplicidad

1. $p(z) = z^3 + (2-2i)z^2 - (1+4i)z - 2$
2. $p(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$
3. $p(z) = 3z^5 + z^4 + 12z^3 + 4z^2$
4. $p(z) = iz^2 - 2z - i$

5. Descomponer en fracciones parciales (fracciones simples) las siguientes funciones racionales

6. $Q(z) = \dfrac{1}{z^4+4}$
7. $Q(z) = \dfrac{2iz}{z^2+1}$
8. $Q(z) = \dfrac{z^2-4iz+4}{z^3+4z}$

Utilizando la definición $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ compruebe las propiedades

9. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
10. $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$
11. $(e^z)^n = e^{nz}$
12. $|e^z| = e^x$
13. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
14. $e^{z+2k\pi} = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

15. Determine el conjunto solución de la ecuación $e^{2z} + 4ie^z - 4 = 0$
16. Determine el conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen}(z) = 2i$

Verifique las siguientes identidades trigonométricas

17. $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$
18. $\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(z)$
19. $\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) \pm \operatorname{sen}(w)\cos(z)$
20. $\sec^2(z) = 1 + \tan^2(z)$
21. $\csc^2(z) = 1 + \cot^2(z)$
22. $\operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \operatorname{sen}(z), \;\; k \in \mathbb{Z}$
23. $\cos(z + 2k\pi) = \cos(z), \;\; k \in \mathbb{Z}$
24. $\tan(z + k\pi) = \tan(z), \;\; k \in \mathbb{Z}$
25. $\operatorname{sen}(z) = 0$ si y solo $z = 0 + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$
26. $\cos(z) = 0$ si y solo $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

Verifique las siguientes identidades trigonométricas-hiperbólicas

27. $\operatorname{sen}(z) = -i \operatorname{senh}(iz)$
28. $\cos(z) = \cosh(iz)$
29. $\cos(iz) = \cosh(z)$
30. $\cosh(-z) = \cosh(z)$
31. $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$
32. $\cosh(z \pm w) = \cosh(z)\cosh(w) \pm \operatorname{senh}(z)\operatorname{senh}(w)$
33. $\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh}(z)\cosh(w) \pm \operatorname{senh}(w)\cosh(z)$

Con base en la definición y propiedades de las funciones estudiadas, determine los siguientes valores

34. $\log(3-3i)$, $\log(-2)$, $\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i)$
35. $(3i)^{1/2}$, $(-1+i)^{1/3}$, $(i)^{1+i}$
36. $\operatorname{senh}(-2i)$, $\cosh(1+i)$, $\tanh(-1+i)$
37. $\operatorname{sen}^{-1}(1-i)$, $\tan^{-1}(2i)$, $\cos^{-1}(2i)$

3 — Funciones holomorfas

Sumario	Resumen
*Límites *Derivadas *Propiedades de las derivadas *Ecuaciones de Cauchy-Riemann *Funciones holomorfas *Funciones armónicas	En el presente capítulo se trabajará con conceptos conocidos del Cálculo en una y varias variables como límite, derivada, derivadas parciales e integración. Uno de los principales resultados a estudiar en este apartado son las ecuaciones de Cauchy-Riemann cuya verificación establece una condición necesaria para que función posea derivada.

Objetivos:

- Definir el concepto de límite de un número complejo
- Establecer las propiedades de los límites de números complejos
- Definir el concepto de continuidad en funciones complejas
- Establecer las propiedades de las funciones continuas
- Definir la derivada de una función compleja
- Establecer las principales propiedades de la derivada así como las reglas de derivación
- Definir las ecuaciones de Cauchy-Riemann y su relación con la derivada de una función compleja.

3.1 Límites

Definición 3.1

Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y un valor complejo z_0 en A, se dice que el límite cuando z tiende a z_0 es L si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, siempre que $0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$.

Se denota por

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

En otras palabras, el límite cuando z tiende a z_0 converge a L si para cada $\varepsilon-$entorno de L existe un $\delta-$entorno de z_0 tal que para toda $z \in D_\delta(z_0)$ su imagen $f(z) \in D_\varepsilon(L)$.

Ahora, pensando en que la función $f(z)$ se puede escribir como $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$. Considere $z = x + iy$ y $z_0 = a + ib$. Se puede indicar de forma equivalente que el límite cuando (x,y) tiende a (a,b) es L si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, siempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_\varepsilon$.
Una propiedad importante sobre la existencia de un límite es la siguiente

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \text{ si y solo si } \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L) \ \ y \ \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$$

Las propiedades de los límites en este caso son similares a las propiedades de los límites en $\mathbb{R}^2$:

Sea z_0 un número complejo tal que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$, entonces

- $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$
- $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = L - M$
- $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = L \cdot M$
- $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$, con $M \neq 0$
- $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$
- $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$

Ejemplo 3.1

Determine el valor de convergencia del siguiente límite

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 - iz + z - i}$$

Al evaluar $z = i$ se obtiene la forma indeterminada $0/0$, factorizando

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 - iz + z - i} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)^2}{(z-i)(z+1)} = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{z+1} = \frac{0}{i+1} = 0.$$

Definición 3.2
Dada una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ y un valor complejo z_0 en A, se dice que f es continua en z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Además, se dice que f es continua en la región $A\subseteq\mathbb{C}$ si f es continua para todo punto en A.

Ejemplo 3.2

- Los polinomios son funciones continuas en todo $\mathbb{C}$.
- Las funciones racionales son continuas en todo su dominio (en todo $\mathbb{C}$ excepto en las raíces del denominador)
- La función exponencial e^z es continua en todo $\mathbb{C}$
- Las funciones $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\bar{z}$ y $|z|$ son continuas en todo $\mathbb{C}$.

Además de indicar algunas funciones continuas, es importante rescatar algunas propiedades de las funciones continuas

Sean f,g funciones continuas en $z_0\in\mathbb{C}$, entonces

- $f+g$ es continua en z_0
- $f-g$ es continua en z_0
- $f\cdot g$ es continua en z_0
- $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0, siempre que $g(z_0)\neq 0$
- Si g es continua en z_0 y f es continua en $g(z_0)$, entonces $f\circ g$ es continua en z_0.

Ejemplo 3.3

Las funciones $\mathrm{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son continuas para todo $z\in\mathbb{C}$.

Observe que como se indicó anteriormente la función e^z es continua para todo $z\in\mathbb{C}$, por ende, considerando las propiedades anteriores, se puede asegurar que $\mathrm{sen}(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ y $\cos(z)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ya que consisten de la suma y resta de funciones continuas.

3.2 Derivadas

El concepto de derivada está estrechamente relacionado con el de límite, en Cálculo de variable real se suele interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, en variable compleja se abordará con un sentido más propio del análisis.

Definición 3.3 Derivada

Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y z_0 un valor complejo, se define la derivada de f en z_0 como el siguiente límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se denota por $f'(z_0)$.

Si f es derivable para cada punto de un $\varepsilon-$entorno de z_0 se dice que f es holomorfa en z_0 y si además f posee derivada para cada punto z de una región G se dice que f es una función holomorfa en G. Cuando una función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ se le conoce como función **entera**.

Una forma equivalente de definir la derivada es considerando el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Esta última forma permite establecer una fórmula general para la derivada mientras que la definición dada al inicio permite obtener el valor de la derivada en un valor concreto.

Ejemplo 3.4

Utilice la definición para calcular la derivada de $f(z) = z^2$ en el punto $z_0 = i$

$$\begin{aligned} f'(i) &= \lim_{z \to i} \frac{f(z) - f(i)}{z - i} \\ &= \lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i} \\ &= \lim_{z \to i} \frac{(z+i)(z-i)}{z - i} \\ &= \lim_{z \to i} (z+i) \\ &= 2i. \end{aligned}$$

Utilizar límites para derivar puede resultar mucho más complejo que utilizar las reglas de derivación conocidas del cálculo y que se obtienen a través de la definición de derivada. Se va a comprobar que $f'(z) = 2z$ para $f(z) = z^2$.

Ejemplo 3.5

Utilice la definición para calcular la derivada de $f(z) = z^2$

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2-z^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z^2+2hz+h^2-z^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hz+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2z+h) \\
&= 2z.
\end{aligned}
$$

Las derivadas de las funciones conocidas del cálculo son válidas en variable compleja, por ejemplo si $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ su derivada es $f'(z) = \cos(z)$, pero debe tenerse cuidado con las funciones multivaluadas ya que sus derivadas existen cuando su dominio se restringe adecuadamente para que esta sea univaluada, por ejemplo para $f(z) = \log(z)$, si se restringe a $-\pi \leq \arg(z) < \pi$ entonces $f'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Propiedades de la derivada

Dadas dos funciones f,g holomorfas en una región G, se cumple que

- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$
- $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}$ para $g(z) \neq 0$.
- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ (regla de la cadena)
- Si f tiene derivada en z_0 entonces f es continua en z_0.

Ahora considere una función $f(z)$ y su representación en términos de sus componentes real e imaginaria $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, si esta función posee derivada en z entonces existen sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ y además, satisfacen las igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Las dos igualdades anteriores se conocen como **Ecuaciones de Cauchy Riemann**.

Teorema 3.1

Si $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ posee derivada en z, entonces sus derivadas parciales existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Ejemplo 3.6

Considere la función $f(z) = \cos(z)$, esta función es derivable en todo $\mathbb{C}$, es decir, $f(z) = \cos(z)$ es una función entera, compruebe que satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Primero, recuerde que $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, se debe expresar como $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Para ello considere $z = x + iy$, entonces

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} \cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos(x) + i\,\text{sen}(y)) = e^{-y}\cos(x) + ie^{-y}\,\text{sen}(y)$$

$$e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} = e^{y} \cdot e^{-ix} = e^{y}(\cos(x) - i\,\text{sen}(x)) = e^{y}\cos(x) - ie^{y}\,\text{sen}(x)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}\cos(x) + ie^{-y}\,\text{sen}(y) + e^{y}\cos(x) - ie^{y}\,\text{sen}(x)}{2} \\
&= \frac{\cos(x)(e^{-y} + e^{y})}{2} + i \cdot \frac{\text{sen}(x)(e^{-y} - e^{y})}{2}
\end{aligned}$$

Observe que $u(x,y)=\dfrac{\cos(x)(e^{-y}+e^{y})}{2}$ y $v(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)(e^{-y}-e^{y})}{2}$, aplicando las reglas de derivación parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\operatorname{sen}(x)(e^{-y}+e^{y})}{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos(x)(-e^{-y}+e^{y})}{2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos(x)(e^{-y}-e^{y})}{2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\operatorname{sen}(x)(-e^{-y}-e^{y})}{2}=\frac{-\operatorname{sen}(x)(e^{-y}+e^{y})}{2}$$

Al comparar las derivadas parciales se puede observar que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\operatorname{sen}(x)(e^{-y}+e^{y})}{2}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos(x)(-e^{-y}+e^{y})}{2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Debe tenerse cuidado con la interpretación del teorema anterior, este permite establecer aquellos valores complejos en los que una función no posee derivada, pero no es suficiente para garantizar en qué puntos la función si es derivable, un ejemplo clásico es el introducido por el matemático Dmitrii Menchoff con la función

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z\neq 0\\ 0 & \text{si } z=0\end{cases}$$

esta función satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann para $z=0$ sin embargo, no es derivable en este punto.

Ejemplo 3.7

Pruebe que $f(z)=|z|^2$ no es derivable en $z=i$

Considere $z=x+iy$, entonces $f(z)=f(x+iy)=|x+iy|^2=x^2+y^2$, es claro que las componentes real e imaginaria de $f(z)$ están dadas por $u(x,y)=x^2+y^2$ y $v(x,y)=0$.
Ahora, las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y existen y están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Al evaluar $z=i$ en las derivadas parciales se tiene que una de las ecuaciones de Cauchy Riemann no se cumple $\dfrac{\partial u}{\partial y}(i)=2\cdot 1\neq 0=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(i)$.

Por lo tanto f no es derivable en $z = i$.

El siguiente teorema permite establecer cuando una función es derivable en un punto dado.

Teorema 3.2

Si $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ poseen derivadas parciales continuas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces f es derivable en z_0 y además

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ejemplo 3.8

Compruebe que la función $f(z) = z^2 + 2z + 1$ es entera.

Al considerar $z = x + iy$, la función $f(z)$ puede expresarse como

$$f(z) = x^2 + 2x - y^2 + 1 + i(2xy + 2y)$$

Luego, al determinar sus derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2$$

Estas derivadas parciales son continuas pues corresponden a polinomios y se verifica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y que } \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

para todo par (x,y) en $\mathbb{R}^2$, es decir, que f satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann para todo valor complejo $z \in \mathbb{C}$, entonces, por el precedente teorema f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Definición 3.4 Funciones armónicas

Una función de dos variables $u(x,y)$ se dice armónica si satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Teorema 3.3

Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función definida en una región G. f es holomorfa en G si y solo si u y v son funciones armónicas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Cuando las funciones u, v son armónicas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann se dice que son **armónicas conjugadas**.

Ejemplo 3.9

Pruebe que la función $f(z) = z^3$ es entera.

Considere $z = x + iy$, entonces $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, observe que se las componentes real e imaginaria de la función $f(z)$ están dadas por $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ y $v(x,y) = 3x^2y - y^3$

Sus primeras derivadas parciales vienen dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

Es claro que u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann.
Ahora, al calcular el Laplaciano para $u(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + (-6x) = 0$$

De la misma forma para $v(x,y)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6y + (-6y) = 0$$

Observe que tanto u, v satisfacen la ecuación de Laplace para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces por el teorema anterior $f(z) = z^3$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$.

El siguiente ejemplo, permite determinar una función holomorfa f a partir de sus partes real e imaginaria.

Ejemplo 3.10

Determine la función armónica conjugada de $u(x,y) = 2x - 2xy$.

Se debe determinar una función armónica $v(x,y)$ que con $u(x,y)$ cumplan con las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Esta función $v(x,y)$ debe cumplir que $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \end{cases}$

Al integrar $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ con respecto a y, se obtiene

$$v(x,y) = \int (2-2y)\, dy = 2y - y^2 + g(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

Luego, al integrar $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ con respecto a x se obtiene

$$v(x,y) = \int 2x\, dx = x^2 + h(y) + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

Al considerar la función $v(x,y)$ obtenida por las dos integrales anteriores se tiene que

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

La forma en que se obtuvo la función v garantiza que satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann, pero se va a comprobar además que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0$$

La función $f(x+iy) = 2x - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2y + c)$ se puede expresar en términos de z como $f(z) = iz^2 + 2z + ic$. Esta función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Ejercicios 3.1

Utilice las propiedades sobre los límites para determinar cada uno de los siguientes

1. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2+2z}{z^3+zi}$
2. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{2z^2+(1-2i)z-i}$
3. $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{(z^2-(1+i)z)e^z}{z^2-(1+2i)z-(1-i)}$
4. Una versión de la regla de L'Hôpital para variable compleja establece que si f,g son holomorfas en un entorno de z_0, y cumplen que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

   Utilice esta regla para determinar el límite $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3z)}{2z}$.
5. Determine si la función $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z+i} & \text{si } z \neq -i \\ -2i & \text{si } z = -i \end{cases}$ es continua en $z_0 = -i$
6. Utilice la definición de derivada para calcular $(\operatorname{sen}(z))'$

Utilizando las reglas de derivación, determine la primera derivada de las siguientes funciones

7. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-1}$
8. $f(z) = \dfrac{\cos(3iz)}{z^2+2z+1}$
9. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$
10. $f(z) = e^{\tan(z)}$
11. $f(z) = \log(z^2)$ para $-\pi \leq \arg(z) < \pi$

12. Determine para qué valores de z la función $f(z) = \bar{z}$ satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Compruebe que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

13. $f(z) = z^3 - z^2 + z$
14. $f(z) = \text{sen}(z)$
15. $f(z) = \dfrac{2z-i}{z^2+4}$ $z \neq \pm 2i$
16. $f(z) = \cosh(z)$
17. $f(z) = e^{z^2}$

18. Compruebe que $(\tan^{-1}(z))' = \dfrac{1}{1+z^2}$ para $z \neq i$, $z \neq -i$
19. Compruebe que la función $f(z) = \dfrac{z}{|z^2|}$ **no** es holomorfa en ninguna región del plano complejo.
20. Dada la función $f(z) = z \cdot \text{Re}(z)$, compruebe que $f'(0) = 0$ pero que $f(z)$ no es holomorfa para ninguna región G del plano complejo.
21. Verifique que la función $f(x,y) = e^x \cos(y)$ es armónica.
22. Determine la función armónica conjugada de $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 5$
23. Utilice el teorema 3.3 para establecer que la función $f(z) = 2e^{iz} \cdot \cos(z)$ es una función entera.

4 — Integración de contornos

Sumario

*Curvas
*Integral de línea
*Teorema de Cauchy
*Teorema de Morera
*Propiedades de la integral de línea
*Fórmula integral de Cauchy
*Teorema del valor medio de Gauss

Resumen

La integración en el plano complejo está vinculada con las integrales de línea del Cálculo en dos variables. En el presente apartado se expondrán una serie de resultados que facilitan la integración de funciones complejas en el plano complejo.

Objetivos

- Identificar diferentes tipos de curvas en el plano complejo
- Definir la integral de línea en el plano complejo
- Establecer las propiedades de la integral de línea en el plano complejo
- Aplicar la definición y los principales teoremas para el cálculo de integrales de línea en el plano complejo.

4.1 Curvas

Un herramienta clave en este apartado es la parametrización de curvas[7] en el plano complejo.

Definición 4.1

Una curva γ es una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ que describe un conjunto infinito de puntos en el plano complejo. Una curva γ queda descrita por sus componentes real e imaginaria $x = x(t)$ y $y = y(t)$ con $t \in [a,b]$.
Usualmente se escribe

$$\gamma : \{z \in \mathbb{C} : z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b]\}$$

Antes de iniciar con la definición de integral de línea en el plano complejo, considere algunas parametrizaciones elementales.

- El conjunto $|z - z_0| = r$ es una circunferencia de radio r y centro $z_0 = x_0 + iy_0$. Se parametriza como

$$z(t) = z_0 + r \cdot e^{it} = x_0 + r\cos(t) + i(y_0 + r\,\text{sen}(t)),\ \ t \in [0, 2\pi]$$

- El segmento de recta que une el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ con el punto $z_1 = x_1 + iy_1$ se parametriza como

$$z(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0) = x_0 + t(x_1 - x_0) + i(y_0 + t(y_1 - y_0)),\ \ t \in [0,1]$$

- La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se parametriza en el plano complejo como

$$z(t) = a\cos(t) + ib\,\text{sen}(t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Algunas clasificaciones que se dan a las curvas en el plano complejo (similar a Cálculo en dos variables) son

- **Simple no cerrada** cuando no se autointerseca, es decir, cuando $z(t_0) = z(t_1)$ si y solo si $t_0 = t_1$. (también se le conoce como **arco simple**) (ver figura (8a))
- **Simple cerrada** cuando no se autointerseca, salvo en los extremos, es decir $z(a) = z(b)$. (ver figura (8b))
- **No simple** esta curva se autointerseca una o varias veces, es decir, existen parejas de valores t_1, t_2 tales que $z(t_1) = z(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$. (ver figura (8c))
- **Suave** Una curva se conoce como suave si sus componentes $x(t)$ y $y(t)$ poseen derivadas continuas en $[a,b]$ que no se anulan (simultáneamente) para ningún t.
- **Suave por partes** Si la curva es la unión de una cantidad finita de curvas suaves. (ver figura (8d))

[7] A las curvas también se les conoce como contornos, caminos o trayectorias.

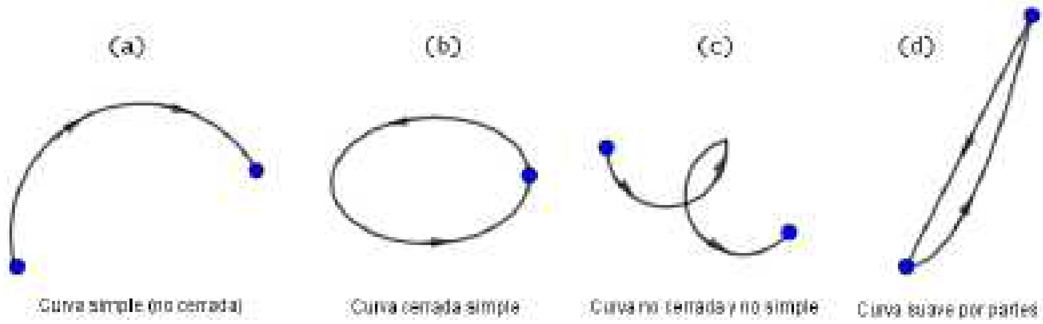


Figura 8. curvas

La orientación de la curva es importante en la integral de línea compleja. Usualmente se trabaja con curvas orientadas positivamente (asúmalo de esa forma por defecto cuando no se indique) en caso contrario se indicará para que lo tome en cuenta en su parametrización.
A partir de la definición de curva cerrada simple, se puede definir un nuevo tipo de región **simplemente conexa**.

Definición 4.2

Una región S del plano complejo se dice simplemente conexa si cualquier curva simple cerrada contenida en S contiene únicamente puntos de S. Una región que no es simplemente conexa se conoce como múltiplemente conexa.

Usualmente se dice que una región es simplemente conexa si no tiene "agujeros" (ver figura 9)

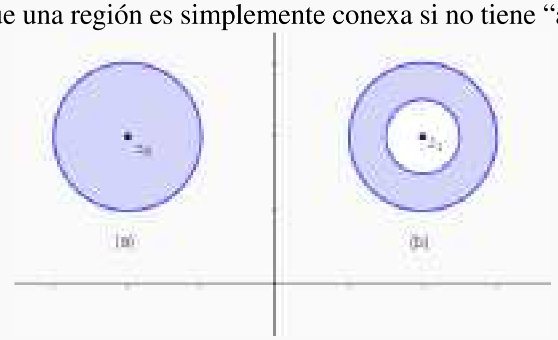


Figura 9. (a) región simplemente conexa, (b) región múltiplemente conexa

4.2 Integral de línea

Definición 4.3 Integral de línea compleja

Dada una función $f(z)$ sobre la curva suave $\gamma : \{z \in \mathbb{C} : z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b]\}$. Se define la integral de $f(z)$ a lo largo de la curva γ como

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt.$$

Siempre que la integral de la derecha exista.

La integral se puede expresar como $\int_a^b \mathrm{Re}[f(z(t))z'(t)]dt + i \int_a^b \mathrm{Im}[f(z(t))z'(t)]dt$

Ejemplo 4.1

Dada la función $f(z) = z^2$, determine la integral de línea sobre el segmento de recta que une el punto $z_0 = (1+i)$ con el punto $z_1 = 2+3i$.

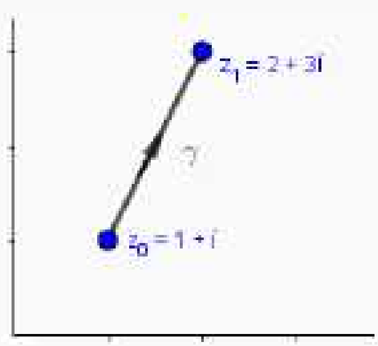


Figura 10. segmento.

La parametrización del segmento está dada por

$$z(t) = (1+t) + i(1+2t),\ t \in [0,1]$$

Luego

$$z'(t) = 1+2i,$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^2\, dz &= \int_0^1 (z(t))^2 z'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 ((1+t) + i(1+2t))^2 (1+2i)\, dt \\
&= \int_0^1 ((1+t)^2 + 2i(1+t)(1+2t) - (1+2t)^2)(1+2i)\, dt \\
&= \int_0^1 (-3t^2 - 2t + i(4t^2 + 6t + 2))(1+2i)\, dt \\
&= \int_0^1 ((-11t^2 - 14t - 4) + i(-2t^2 + 2t + 2))\, dt \\
&= \int_0^1 (-11t^2 - 14t - 4)\, dt + i \int_0^1 (-2t^2 + 2t + 2)\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{11t^3}{3} - 7t^2 - 4t\right]_0^1 + i\left[-\frac{2t^3}{3} + t^2 + 2t\right]_0^1 \\
&= -\frac{44}{3} + \frac{7i}{3}.
\end{aligned}
$$

Cuando la curva γ sea suave por partes, la integral de línea se define como la suma de las integrales de cada arco suave que conforma la curva γ.

Ejemplo 4.2

Dada la función $f(z) = 3z^2 + 2iz + 1$, determine la integral de línea sobre la curva cerrada γ que se muestra en la figura 11.

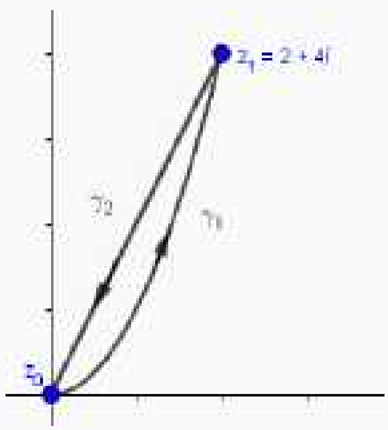


Figura 11. curva suave por partes.

La curva γ está conformada por γ_1 que es el segmento de la parábola $y = x^2$ y γ_2 que es el segmento de recta que une $z_1 = 2+4i$ con $z_0 = 0$.

Entonces, la integral buscada se puede expresar como la suma de dos integrales

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

La parametrización del segmento de parábola está dada por

$$z(t) = t + it^2,\ 0 \le t \le 2$$

con $z'(t) = 1 + 2it$.
Luego, la parametrización del segmento de recta está dada por

$$w(t) = (2-2t) + i(4-4t),\ 0 \le t \le 1$$

con $w'(t) = -2-4i$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (3z^2 + 2iz + 1)\, dz &= \int_{\gamma_1} (3z^2 + 2iz + 1)\, dz + \int_{\gamma_2} (3z^2 + 2iz + 1)\, dz \\
&= \int_0^2 [3(z(t))^2 + 2iz(t) + 1] z'(t)\, dt + \int_0^1 [3(w(t))^2 + 2iw(t) + 1] w'(t)\, dt \\
&= \int_0^2 [(-3t^4 + t^2 + 1) + i(6t^3 + 2t)](1 + 2it)\, dt \\
&\quad + \int_0^1 [(-36t^2 + 80t - 43) + i(48t^2 - 100t + 52)](-2-4i)\, dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 [(-15t^4-3t^2+1)+i(-6t^5+8t^3+4t)]\,dt \\
&\quad -(2+4i)\int_0^1 [(-36t^2+80t-43)+i(48t^2-100t+52)]\,dt \\
&= \int_0^2 (-15t^4-3t^2+1)\,dt + i\int_0^2 (-6t^5+8t^3+4t)\,dt \\
&\quad -(2+4i)\left[\int_0^1 (-36t^2+80t-43)\,dt + i\int_0^1 (48t^2-100t+52)\,dt\right] \\
&= \left(-3t^5-t^3+t\right)_0^2 + i\left(-t^6+2t^4+2t^2\right)_0^2 \\
&\quad -(2+4i)\left[\left(-12t^3+40t^2-43t\right)_0^1 + i\left(16t^3-50t^2+52t\right)_0^1\right] \\
&= -102-24i-(2+4i)(-15+18i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior se obtuvo que el resultado de la integral es cero, no es por casualidad, se debe en parte a que la curva es cerrada. Se va a establecer un teorema de mucha utilidad, que es similar al teorema fundamental el Cálculo.

Teorema 4.1

Sea f una función continua sobre una región G, con primitiva o antiderivada F holomorfa en G. Dados dos puntos $z_1,\ z_2 \in G$ y γ una curva suave (o suave por partes) contenida en G y que conecta a z_1 con z_2. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1).$$

Una consecuencia de este teorema es que si la curva γ es cerrada y $F(z_2)=F(z_1)$, entonces se tendrá que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1)=0$.

Usualmente, cuando se integra sobre una curva cerrada se utiliza la notación $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$.

Al retomar el ejemplo anterior pero ahora mediante el teorema precedente, el cálculo sería mucho más sencillo, ya que la curva γ es suave por partes y la función $f(z)=3z^2+2iz+1$ es continua en todo $\mathbb{C}$, además $F(z)=z^3+iz^2+z$ es una primitiva de $f(z)$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, por lo tanto, por el teorema 4.1 se tiene que

$$\oint_\gamma (3z^2+2iz+1)\,dz = 0$$

El resultado que acaba de observar en el teorema 4.1 permite calcular de forma un poco más simple algunas integrales, pero requiere que la función $f(z)$ posea primitiva, sin embargo, qué ocurrirá con una función como $f(z)=\bar{z}$ que es continua en todo $\mathbb{C}$ pero **no** posee antiderivada. Es aquí donde entra el teorema de Cauchy

Teorema 4.2 De Cauchy

Sea f una función holomorfa sobre una región G y γ una curva suave (o suave por partes) contenida en G. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

El teorema anterior también se conoce como teorema de Cauchy-Goursat gracias en reconocimiento al aporte del matemático francés Édouard Goursat. Además, en otros textos el teorema 4.1 puede analizarse como una consecuencia del teorema de Cauchy.
Una especie de teorema inverso al teorema de Cauchy es el teorema de Morera

Teorema 4.3 De Morera

Dada una región simplemente conexa G y una función $f(z)$ continua para toda $z \in G$, si se cumple que

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada y suave (suave por partes) γ entonces $f(z)$ es holomorfa en todo G.

El teorema anterior permite determinar si una función es holomorfa en una región a través de su integral de línea compleja.
Algunas propiedades de la integral de línea compleja

Sean f, g funciones integrables sobre la curva γ, k un valor complejo cualquiera, entonces

- $\displaystyle\int_{\gamma} (k \cdot f(z) + g(z))\, dz = k \int_{\gamma} f(z)\, dz + \int_{\gamma} g(z)\, dz$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz$
- Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \gamma$ y L es la longitud de γ, entonces $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| \leq M \cdot L.$

Ejemplo 4.3

Determine el valor de la integral $\displaystyle\int_{\gamma} \left(\cos(z) + 2iz^2\right)$, donde γ es el segmento de recta que une los puntos $z_1 = (-2+i)$ y $z_2 = 1+3i$.

Observe que la función $f(z) = \cos(z) + 2iz$ es entera, por ende continua en todo $\mathbb{C}$ y con

[8] La curva $-\gamma$ corresponde a la misma curva γ pero orientada negativamente, es decir, recorrida en sentido contrario.

[9] La longitud de una curva γ definida por $x(t)$ y $y(t)$ corresponde a $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + y'(t)]^2}\, dt$.

primitiva $F(z) = \operatorname{sen}(z) + \dfrac{2iz^3}{3}$, entonces, empleando el teorema 4.1

$$\begin{aligned}\int_\gamma (\cos(z) + 2iz)\ dz &= \left[\operatorname{sen}(z) + \frac{2iz^3}{3}\right]_{-2+i}^{1+3i} \\ &= \operatorname{sen}(1+3i) + \frac{2i(1+3i)^3}{3} - \operatorname{sen}(-2+i) - \frac{2i(-2+i)^3}{3}.\end{aligned}$$

Otro teorema de gran utilidad para calcular integrales de línea compleja es el que da la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 4.4 Fórmula integral de Cauchy

Sea G una región del plano complejo encerrada por la curva suave γ (o suave por partes) y sea $f(z)$ una función holomorfa en G y sobre γ. Si $z_0 \in G$ entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Además

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 4.4

Determine el valor de la integral $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z-3}\, dz$ sobre la curva a) $\gamma : |z| = 1$, b) $\gamma : |z| = 4$

Observe que la curva $|z| = 1$ es una circunferencia con centro $(0,0)$ y radio $r = 1$. Ahora, como la función $g(z) = \dfrac{e^z}{z-3}$ es holomorfa para todo punto en el interior y sobre γ por consecuencia del teorema 4.1

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z-3}\, dz = 0.$$

Para la curva $|z| = 4$ no se puede proceder de igual forma que con la curva $|z| = 1$ ya que se tiene una discontinuidad en $z = 3$, es decir, para este valor la función $g(z) = \dfrac{e^z}{z-3}$ no es holomorfa. Pero, considerando unicamente $f(z) = e^z$ una función entera, se puede expresar $g(z)$ como $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-3}$ y utilizar la fórmula integral de Cauchy para $z_0 = 3$

$$\begin{aligned} e^3 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z}{z-3} dz \\ \Rightarrow 2\pi i e^3 &= \oint_\gamma \frac{e^z}{z-3} dz.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5

Determine el valor de la integral $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-2i)^3}\,dz$ sobre la curva $\gamma : |z-i| = 2$

La curva $|z-i| = 2$ es una circunferencia con centro $(0,1)$ y radio $r = \sqrt{2}$. Ahora, considerando la función $f(z) = e^{iz}$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$, se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy para $z_0 = 2i$

Derivando $f(z) = e^z$ se obtiene $f'(z) = ie^{iz}$ y $f''(z) = -e^{iz}$, entonces al evaluar $z_0 = 2i$

$$-e^{i(2i)} = \frac{2!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-2i)^3}dz$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi i}{e^2} = \oint_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-2i)^3}dz.$$

Una consecuencia de la fórmula de Cauchy es el teorema del valor medio de Gauss

Teorema 4.5 Valor medio de Gauss

Sea G una región del plano complejo encerrada por la circunferencia $C : |z-z_0| = r$ y sea $f(z)$ una función holomorfa en G y sobre C. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

Ejemplo 4.6

Determine el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 3e^{it}\right)\,dt$

Considere la función $f(z) = \operatorname{sen}^2(z)$ holomorfa en todo el plano complejo y la región encerrada por la circunferencia (el círculo) $C : |z - \frac{\pi}{4}| = 3$, utilizando el teorema del valor medio de Gauss, se obtiene

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{4} + 3e^{it}\right)dt$$

Evaluando y despejando

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 3e^{it}\right)dt$$

Simplificando

$$\pi = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 3e^{it}\right)dt.$$

Otros teoremas que se desprenden de la fórmula integral de Cauchy son los siguientes.

Teorema 4.6 Desigualdad de Cauchy

Sea G una región del plano complejo encerrada por la circunferencia $C : |z - z_0| = r$ y sea $f(z)$ una función holomorfa en G y sobre C. Entonces

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Siempre que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$.

Ejemplo 4.7

Determine una aproximación para $\left|f^{(4)}(0)\right|$ si $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+4}$ en la región $G = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \dfrac{7}{4}\right\}$.

La función $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+4}$ es holomorfa para todo $z \in G$, además es acotada,

en efecto, $|z-1| \leq |z| + 1 \leq \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$ y $\left|z^2+4\right| \leq \left|z^2\right| + |4| = |z|^2 + 4 \leq (\frac{7}{4})^2 + 4 = \frac{65}{16}$, de donde,

$$\left|\frac{z}{z^2+4}\right| = \frac{|z|}{|z^2+4|} \leq \frac{44}{65}$$

para todo $z \in G$.

Aplicando la desigualdad de Cauchy

$$\left|f^{(4)}(0)\right| \leq \frac{\frac{44}{65} \cdot 4!}{(\frac{7}{4})^4} = \frac{270336}{132665} \approx 1{,}73$$

La desigualdad de Cauchy no devuelve el valor exacto, sin embargo, permite obtener una aproximación que puede ser de utilidad para funciones cuyas derivadas sean difíciles de obtener.

Teorema 4.7 Del módulo máximo

Sea G una región del plano complejo encerrada por una curva cerrada y suave (suave por partes) γ y sea $f(z)$ una función holomorfa en G y sobre γ, no constante. Entonces el valor máximo de $|f(z)|$ se encuentra sobre la curva γ.

Ejemplo 4.8

Determine el máximo valor que alcanza $|f(z)|$ en $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ si $f(z) = z^2 - 3z + 2$.

La función $f(z) = z^2 - 3z + 2$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$.

Como f es un polinomio de grado 2 (no es una función contante), se puede aplicar el teorema del módulo máximo para garantizar que $\left|z^2 - 3z + 2\right|$ alcanza su máximo para algún $z \in \gamma : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Como $\left|z^2 - 3z + 2\right|$ alcanza su máximo para algún $z \in \gamma$ se puede trabajar con la representación $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y la factorización $f(z) = (z-1)(z-2)$,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|z^2 - 3z + 2\right| \\
&= |(z-1)(z-2)| \\
&= |z-1| \cdot |z-2| \\
&= \left|e^{it} - 1\right| \cdot \left|e^{it} - 2\right| \\
&= |\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) - 1| \cdot |\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) - 2| \\
&= \sqrt{(\cos(t) - 1)^2 + \mathrm{sen}^2(t)} \cdot \sqrt{(\cos(t) - 2)^2 + \mathrm{sen}^2(t)} \\
&= \sqrt{(2 - 2\cos(t))(5 - 4\cos(t))} \\
&= \sqrt{8\cos^2(t) - 18\cos(t) + 10}
\end{aligned}$$

Derivando $|f(z)|$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|f\left(e^{it}\right)\right| = \frac{-8\cos(t)\,\mathrm{sen}(t) + 9\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{8\cos^2(t) - 18\cos(t) + 10}},\; t \neq 0,\; t \neq 2\pi$$

Si se iguala a cero para determinar los valores críticos y se resuelve la ecuación resultante obteniéndose $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$.
Al realizar un estudio de la monotonía de la función $\left|f(e^{it})\right|$ se obtiene que alcanza un máximo en $t = \pi$ y al evaluar $t = \pi$ en e^{it} se obtiene que $z = -1$, de donde $|f(z)| = 6$ es el máximo valor que alcanza $|f(z)|$ en la región G.

Ejercicios 4.1

Determine el valor de las siguientes integrales en el contorno dado

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z \cos(z)}{z^2+2}\, dz$ si $\gamma: \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$
2. $\displaystyle\int_\gamma z^3 e^{z^2}\, dz$ si γ es el arco que conecta $z_0 = 1-i$ con $z_1 = 2+i$
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz$ si $\gamma: \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$
4. $\displaystyle\int_\gamma (e^z - e^{-z})\, dz$ si γ es la curva descrita por $z(t) = t - i\ln(t)$, $t \in [1, e]$
5. $\displaystyle\int_\gamma z^2\, dz$ si γ es el cuadrado con vértices $A(-1-i)$, $B(-1+i)$, $C(1-i)$, $D(1+i)$
6. $\displaystyle\int_\gamma \tan(z)\sec^2(z)e^{\sec(z)}\, dz$ si γ es el segmento de recta que une $z_0 = \pi$ con $z_1 = 2\pi i$
7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{ze^{2z}}{z^3-1}\, dz$ si $\gamma: \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$
8. $\displaystyle\int_\gamma z \cdot \mathrm{Im}(z)\, dz$ si γ es la semicircunferencia centrada en $z_0 = 0$ y radio $r = 1$ que se encuentra en el semiplano superior.
9. $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$ si γ es la curva que se muestra en la figura 12.

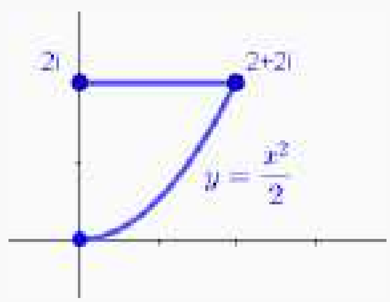


Figura 12.

10. $\displaystyle\int_\gamma \frac{|z|}{z^2+9}\, dz$ si γ es la curva que se muestra en la figura 13.

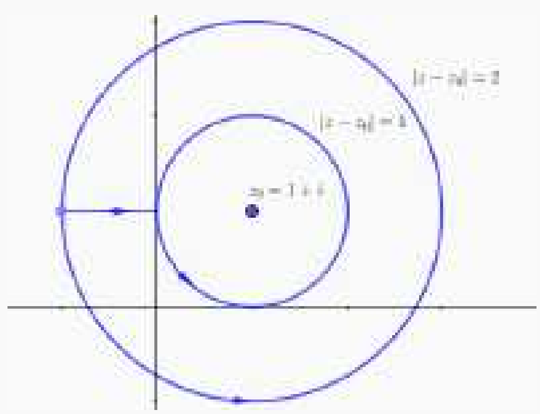


Figura 13.

11. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3(z^2+9)}\,dz$ si $\gamma : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
12. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+2z+5}{(z^2-9)^2}\,dz$ si $\gamma : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$
13. Considere la curva $\gamma : |z| = R$. Verifique que

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{2R\pi}{|R^2-1|}$$

14. Utilice el resultado anterior para verificar que si $R \to \infty$ entonces $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz \to 0$
15. Determine el máximo valor que alcanza $|f(z)|$ en $|z| < 2$ si $f(z) = \dfrac{2z+1}{2z-1}$

5 — Series e integración por residuos

Sumario

Resumen

El representar funciones tanto reales como complejas en términos de series de potencias es una herramienta que ayuda a estudiar propiedades de las funciones en una forma más eficiente, así como para el cálculo de integrales de contorno.

Objetivos

- Determinar la convergencia o divergencia de sucesiones y series de números complejos
- Representar funciones complejas mediante series de Taylor o series de Laurent
- Identificar singularidades de una función en el plano complejo
- Determinar el residuo de una función en una singularidad aislada
- Aplicar el teorema de los residuos para el cálculo de integrales de línea

5.1 Sucesiones y series

Definición 5.1 Sucesión

Una sucesión de números complejos es una función que asigna a cada valor natural n un valor complejo z_n que se puede describir como $z_n = x_n + iy_n$ donde x_n y y_n son sucesiones de números reales (parte real e imaginaria de la sucesión).

La sucesión z_n converge[10] a un valor $z_0 = x_0 + iy_0$ si y solo si x_n y y_n convergen a x_0 y y_0 respectivamente.

En caso que $|z_n| \to \infty$ se dice que z_n es una sucesión divergente.

La sucesión $z_n = \frac{1}{n} + i \cdot \frac{2n+1}{3n-1}$ converge a $z = \frac{2i}{3}$ ya que las sucesiones de números reales $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ y $y_n = \frac{2n+1}{3n-1} \to \frac{2}{3}$.

La sucesión $z_n = 3n + in^2$ diverge. Observe que $|z_n| = \sqrt{9n^2 + n^4} \to \infty$.

La sucesión $z_n = i \cdot \cos(n\pi)$ **no** converge pues $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)$ no existe ya que la sucesión oscila entre los valores 1 y -1 ni diverge ya que $|z_n| = |\cos(n\pi)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada una sucesión de números complejos z_n, considere la sucesión de sumas parciales S_n como

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_2 + S_1 \\ S_3 &= z_3 + S_2 \\ &\vdots \\ S_n &= z_n + S_{n-1} \end{aligned}$$

En general, S_n se puede representar como $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$.

Definición 5.2 Serie de números complejos

Una serie infinita de números complejos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \ldots$ converge a un valor S si la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ converge a S.

Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = x + iy \text{ si y solo si } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y.$$

[10] La definición formal de convergencia de una sucesión compleja es la siguiente. Una sucesión z_n de números complejos converge al valor z si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ejemplo 5.1

Determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{i}{n^2+n}\right]$ converge.

Observe que $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2$ (es una serie geométrica) y

además $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ (es una serie telescópica).

Como las series de la partes real e imaginaria convergen, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{i}{n^2+n}\right]$ converge a $2+i$.

Ejemplo 5.2

Determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{3n+1} + \frac{3i}{n^2}\right)$ converge.

La sucesión $z_n = \frac{4n}{3n+1} + \frac{3i}{n^2} \to \frac{4}{3} \neq 0$, por lo tanto la serie no converge.

Otro concepto útil para estudiar la convergencia de series complejas es la **convergencia absoluta**. Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge. Este concepto tiene una implicación directa y es que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge también la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge. La serie converge condicionalmente si converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ pero no converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Ejemplo 5.3

Determinar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5-4i}{n^2+1}$

Considere la serie de los módulos $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{5-4i}{n^2+1}\right|$ y observe que $|5-4i| = \sqrt{41}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{5-4i}{n^2+1}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{41}}{n^2+1} \leq \sqrt{41}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

La última serie es una $p-$serie de números reales ($p > 1$) por ende convergente, y por el criterio de comparación se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{5-4i}{n^2+1} \right|$ es convergente, esto implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5-4i}{n^2+1}$ también es convergente.

Criterio de la razón para series

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ con $z_k \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$, entonces

- Si $L < 1$ la serie converge
- Si $L > 1$ la serie diverge
- Si $L = 1$ el criterio no determina si la serie converge o diverge.

Criterio de la raíz para series

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ con $z_k \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_k|} = L$, entonces

- Si $L < 1$ la serie converge
- Si $L > 1$ la serie diverge
- Si $L = 1$ el criterio no determina si la serie converge o diverge.

Estos dos criterios serán de gran utilidad para establecer el radio de convergencia de una serie de potencias.

Definición 5.3 Serie de potencias

Una serie de potencias en la variable z y alrededor de z_0 es una suma de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

donde los valores a_k llamados coeficientes son números complejos.

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ es una serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$. Esta serie converge a la función e^z para todo $z \in \mathbb{C}$.

El radio de una serie de potencias se define como

$$R = \frac{1}{L} \text{ donde } L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

También, se puede calcular como

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

siempre que los límites existan.

La serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ converge para todo punto en el interior del círculo $|z-z_0|<R$ (círculo de convergencia).

Ejemplo 5.4

Determine el radio y el círculo de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Se debe calcular el límite

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2(n+1))!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1) = \infty$$

La serie converge para todo número complejo.

Definición 5.4 Función analítica

Una función f se dice analítica en z_0 si puede representarse como una serie de potencias alrededor de z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

para todo z en el círculo de convergencia $|z-z_0|<R$.

Se dice que f es analítica en $G \subseteq \mathbb{C}$ si es analítica en cada punto de G.

En algunos textos utilizan el término “analítica” en lugar de “holomorfa” pero en este caso no se utilizan como sinónimos pero se puede garantizar que toda función analítica es holomorfa y bajo ciertas condiciones toda función holomorfa es analítica.

Teorema 5.1 Taylor

Sea f una función analítica en el círculo de convergencia $|z-z_0|<R$, entonces $f(z)$ se puede representar como la siguiente serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

La serie converge a la función para todo z en el círculo de convergencia.

A la serie en el teorema anterior se le conoce como desarrollo de Taylor para la función $f(z)$.

Algunas representaciones de funciones analíticas en serie de potencias se obtienen a partir de desarrollos de Taylor.

Ejemplo 5.5

Determine el desarrollo de Taylor de la función $f(z) = e^z$ alrededor de $z_0 = 0$.

Se sabe que $f(z) = e^z$ es una función entera, y sus derivadas están dadas por

$$f'(z) = e^z,\ f''(z) = e^z,\ \cdots, f^{(n)}(z) = e^z$$

Al evaluar las derivadas en $z_0 = 0$ se obtiene

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Ahora, utilizando el teorema de Taylor,

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}(z-0)^1 + \frac{1}{2!}(z-0)^2 + \frac{1}{3!}(z-0)^3 + \cdots = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Luego, al calcular el radio de convergencia,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cdot k!}{k!} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$$

Al obtenerse que el radio de convergencia $R = \infty$ se tiene que la serie converge a e^z para todo $z \in \mathbb{C}$.

En la siguiente lista se muestran algunos desarrollos más comunes.

$$
\begin{array}{llcll}
1. & e^z & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \\
2. & \operatorname{sen}(z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \\
3. & \cos(z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \\
4. & \operatorname{senh}(z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \\
5. & \cosh(z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \\
6. & \dfrac{1}{1-z} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k & |z| < 1 \\
7. & \dfrac{1}{1-z^2} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} & |z| < 1 \\
8. & \log(1+z) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} & |z| < 1
\end{array}
$$

Ejemplo 5.6

Determine el desarrollo de Taylor de la función $f(z) = z^2 e^z$ alrededor de $z_0 = 0$.

Utilizando el desarrollo de e^z alrededor de $z_0 = 0$, se tiene que

$$z^2 e^z = z^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^2 \cdot \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{z^{k+2}}{k!}$$

Luego, al calcular el radio de convergencia se obtiene que $R = \infty$ y la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ahora considere una serie de la forma (para $w \neq 0$)

$$a_0 + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \frac{a_3}{w^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{w^k}$$

Claramente no cumple con la definición de serie de potencias, sin embargo, al considerar un cambio de variable $z = \dfrac{1}{w}$, la serie anterior se puede expresar como

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Se sabe que la serie de potencias converge absolutamente si $|z| < R$, de donde la serie $\sum \frac{a_k}{w^k}$ converge absolutamente si $|1/w| < R$ es decir si $1/R < |w|$.

Algunas funciones analíticas pueden representarse como una serie de la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

A este tipo de serie se le denomina **Serie de Laurent**. Usualmente las series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ convergen para $|z-z_0|<R$ mientras que las series de la forma $\sum_{k=-\infty}^{0} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}$ converge para $r<|z-z_0|$. En general, para que la serie de Laurent converja se debe cumplir que $r<|z-z_0|<R$.

Teorema 5.2 De Laurent

Sea f una función analítica en el anillo circular $r<|z-z_0|<R$, entonces se cumple que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

y además los coeficientes a_n se pueden escribir como

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

con $\gamma: |z-z_0| = \rho,\ r<\rho<R$.

La representación de funciones como series de Laurent constituirá una herramienta muy útil para el cálculo de ciertas integrales.

Ejemplo 5.7

Determine la representación en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{e^z}{z^3},\ z\neq 0$

En este caso, se puede considerar $f(z) = \frac{g(z)}{z^3}$, y tomar la representación en serie de Taylor para $g(z) = e^z$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Luego, al multiplicar por $\frac{1}{z^3}$, $z\neq 0$ se obtiene

$$\frac{1}{z^3}\cdot e^z = \frac{1}{z^3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-3}}{k!} = \sum_{k=-3}^{\infty}\frac{z^k}{(k+3)!}$$

La función $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ puede representarse como $\sum_{k=-3}^{\infty} \frac{z^k}{(k+3)!}$ para todo $0 < |z| < \infty$, es decir para todo valor complejo distinto de cero.

Ejemplo 5.8

Determine el desarrollo en serie de Laurent para $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)$ en el anillo circular $0 < |z-1| < 1$

Considere la representación en serie de Taylor para $\operatorname{sen}(w)$ y la sustitución $w = \frac{1}{z-1}$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{w^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! \cdot (z-1)^{(2k+1)}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-2k+1)!} \cdot (z-1)^{2k-1}
\end{aligned}
$$

La serie de Laurent está dada por

$$f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-2k+1)!} \cdot (z-1)^{2k-1}.$$

5.2 Residuos

Un concepto clave en el estudio de los residuos es el de singularidad.

Una función $f(z)$ holomorfa en una región $G \setminus \{z_0\}$ se dice que posee una singularidad aislada o simplemente una singularidad en z_0. Esta singularidad puede clasificarse como removible, polo o esencial.

- La singularidad será **removible** cuando $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$.
- La singularidad será un **polo** de orden $p \geq 1$ si p es el menor natural tal que $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{p+1} f(z) = 0$.

- La singularidad será **esencial** cuando **no** exista un natural p tal que $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{p+1}f(z)=0$.

Si z_0 es un polo de orden p de función $f(z)$ en la región G, entonces, $f(z)$ se puede escribir como $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^p}$ donde $g(z)$ es una función analítica en G.

Definición 5.5

Sea f una función analítica en la región $0<|z-z_0|<R$. Se define el residuo de f en z_0 como

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz$$

con $\gamma:|z-z_0|=\rho,\ 0<\rho<R$.

Este valor coincide con el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent para $f(z)$.

Al conocer explícitamente la serie de Laurent de una función $f(z)$ alrededor de z_0 resulta simple determinar el residuo de $f(z)$ en z_0, sin embargo, una forma más rápida de determinar los residuos de polos y que no requiere de la serie, es mediante los siguientes límites.

Si z_0 es un polo de orden uno ($p=1$ polo simple), entonces

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

Luego, si z_0 es un polo de orden p con $p\geq 2$, entonces

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}}[(z-z_0)^p f(z)]$$

En el caso de las singularidades esenciales si se requiere de las series de Laurent.

Ejemplo 5.9

Determine el residuo de la función $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$ para el polo $z_0=i$.

Es claro que $z_0=i$ es un polo de orden $p=1$ ya que

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2\cdot\frac{e^z}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)^2e^z}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^z}{z+i}=0$$

Luego,

$$\mathrm{Res}_i f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^z}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z+i}=\frac{e^i}{2i}=\frac{-ie^i}{2}$$

Ejemplo 5.10

Determine el residuo de la función $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^3}$ para el polo $z_0 = 0$.

Es claro que $z_0 = 0$ es un polo de orden $p = 3$ ya que

$$\lim_{z \to 0} z^4 \cdot \frac{\cos(z)}{z^3} = \lim_{z \to 0} z\cos(z) = 0$$

Luego,

$$\mathrm{Res}_0\, f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2}[z^3 \cdot \frac{\cos(z)}{z^3}] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\cos(z)] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0}[-\cos(z)] = -\frac{1}{2}$$

5.3 Integración por residuos

El cálculo de residuos facilita la integración de contornos para funciones que presentan singularidades.

Teorema 5.3 De los residuos

Sea G una región encerrada por la curva γ cerrada suave (suave por partes) y sea f una función analítica en G y sobre γ excepto en una cantidad finita de singularidades $z_0, z_1, \ldots, z_n$ en el interior de G. Entonces

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}\, f(z)$$

Ejemplo 5.11

Determine la integral $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3}$ donde γ es la circunferencia centrada en $z_0 = 1$ y de radio $r = 2$.

La función $f(z)$ presenta una única singularidad en $z_0 = 0$ (polo de orden $p = 3$), y es conocido del ejemplo anterior que $\mathrm{Res}_0\, f(z) = -\dfrac{1}{2}$, aplicando el teorema de los residuos se obtiene que

$$\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_0 \frac{\cos(z)}{z^3} = -\pi i$$

Como ejercicio, obtenga el desarrollo en serie de Laurent para $f(z)$ y compruebe que $a_{-1} = -\dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 5.12

Determine la integral $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$ donde γ es la circunferencia centrada en $z=1+i$ y de radio $r=2$.

La función $f(z)$ presenta tres singularidades, una en $z_0=0$, otra en $z_1=2i$ y una tercera en $z_2=-2i$, sin embargo, solamente dos de ellas se encuentran en el interior de la región encerrada por la circunferencia. La tercera es exterior, por lo tanto no debe tomarse en cuenta al aplicar el teorema de los residuos.

$z_0=0$ es un polo de orden 2, entonces

$$\text{Res}_0\, f(z) = \frac{1}{1!}\cdot \lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z}{z^2(z^2+4)}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z(z^2-2z+1)}{(z^2+4)^2}\right) = \frac{1}{16}$$

Luego, $z_1=2i$ es un polo de orden 1, entonces

$$\text{Res}_{2i}\, f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)e^z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{e^z}{z^2(z+2i)} = \frac{ie^{2i}}{16}$$

Aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}_0\frac{e^z}{z^2(z^2+4)} + \text{Res}_{2i}\frac{e^z}{z^2(z^2+4)}\right) = \frac{\pi}{8}(i-e^{2i}).$$

El teorema de los residuos además de facilitar el cálculo de ciertas integrales de contorno, ayuda a calcular integrales reales que pueden resultar difíciles de calcular con las herramientas comunes del Cálculo.

Teorema 5.4

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \oint_\gamma f\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\cdot\frac{1}{iz}\,dz$$

donde γ es la circunferencia centrada en $z=0$ con radio $r=1$ y la función $f(\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una función racional de dos variable en términos de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$.

Observe que el teorema anterior surge de tomar la sustitución $z=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ y partiendo de que

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

de donde se obtiene que

$$\cos t = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

y además

$$z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt \Rightarrow dz = izdt \Rightarrow \frac{dz}{iz} = dt$$

Ejemplo 5.13

Determine la integral definida $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5+4\cos t}\,dt$.

Asumiendo que $\gamma : |z| < 1$ y utilizando el teorema 5.4

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5+4\cos t}\,dt &= \oint_\gamma \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{5+4\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{1}{iz}\,dz \\
&= \oint_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5+2\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}\,dz \\
&= \oint_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{\frac{2z^2+5z+2}{z}}\cdot\frac{1}{iz}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\oint_\gamma \frac{z^2+1}{2z^2+5z+2}\cdot\frac{1}{iz}\,dz \\
&= \frac{1}{2i}\oint_\gamma \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}\,dz
\end{aligned}$$

La función $g(z) = \dfrac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}$ se puede expresar como $g(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z+2)(2z+1)}$ lo cual permite observar que $g(z)$ posee tres singularidades, $z_0 = 0$, $z_1 = -1/2$ y $z_2 = -2$ de las cuales todas son polos simples, pero solamente $z_0 = 0$ y $z_1 = -1/2$ se encuentran en el interior de la región encerrada por la circunferencia γ.

Calculando los residuos de z_0 y z_1 se obtiene

$$\operatorname{Res}_0 g(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{z^2+1}{z(z+2)(2z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z+2)(2z+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{\frac{-1}{2}} g(z) = \lim_{z\to -1/2}(z-1/2)\frac{z^2+1}{z(z+2)(2z+1)} = \lim_{z\to -1/2}\frac{z^2+1}{2z(z+2)} = -\frac{5}{6}$$

Finalmente, al aplicar el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\oint_\gamma \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}\,dz &= \frac{1}{2i}\cdot(2\pi i)\cdot\left(\operatorname{Res}_0 \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)} + \operatorname{Res}_{-1/2}\frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}\right)\\ &= \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)\\ &= -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene el valor de la integral definida

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{5+4\cos t}\,dt = -\frac{\pi}{3}.$$

El siguiente teorema permite calcular integrales indefinidas de primera especie

Teorema 5.5

Sea $f(z)$ una función racional compleja para la cual su denominador es al menos dos grados mayor que su numerador y además $f(z)$ no posee polos sobre el eje real (sus polos no son números reales) y sea $a \geq 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(ax)\,dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z)\cdot e^{iaz}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\operatorname{sen}(ax)\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z)\cdot e^{iaz}\right].$$

Considerando solamente aquellas singularidades en las cuales $Ima(z_k)$ es mayor que cero.

Ejemplo 5.14

Determine el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Considere la función $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+2z+2)^2}$ la cual es una función racional cuyos polos son $z_0 = -1+i$ y $z_1 = -1-i$ ambos de orden 2 y pero solamente z_0 se encuentra por encima del eje real.

Al determinar el residuo $\text{Res}_{-1+i} f(z)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{-1+i} f(z) &= \lim_{z\to -1+i} \left[(z+1-i)^2 \frac{z}{(z^2+2z+2)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to -1+i} \left[(z+1-i)^2 \frac{z}{(z+1-i)^2(z+1+i)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to -1+i} \left[\frac{z}{(z+1+i)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to -1+i} \frac{-z+1+i}{(z+1+i)^3} \\
&= \frac{2}{-8i} = \frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 5.5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_{-1+i}} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Obteniéndose de esta forma el valor de la integral impropia.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 5.15

Compruebe que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}(2x)}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi}{2e^2} \cdot \text{sen}(2)$

Tomando la función $f(z) = \dfrac{z}{z^4+4}$ que presenta cuatro polos simples $z_0 = -1+i$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1-i$, $z_3 = 1-i$ de los cuales solamente $z_0 = -1+i$ y $z_1 = 1+i$ se encuentran en el semiplano superior.

Al calcular los residuos de $f(z)e^{2iz}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{-1+i} f(z)e^{2iz} &= \lim_{z\to -1+i} (z+1-i)\frac{ze^{2iz}}{z^4+4} \\
&= \lim_{z\to -1+i} \frac{z(z+1-i)e^{2iz}}{(z+1-i)(z+1+i)(z-1-i)(z-1+i)} \\
&= \lim_{z\to -1+i} \frac{ze^{2iz}}{(z+1+i)(z-1-i)(z-1+i)} \\
&= \frac{1}{8} \cdot ie^{-2-2i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Res}_{1+i} f(z)e^{2iz} &= \lim_{z\to 1+i}(z-1-i)\frac{ze^{2iz}}{z^4+4}\\
&= \lim_{z\to -1-i}\frac{z(z-1-i)e^{2iz}}{(z+1-i)(z+1+i)(z-1-i)(z-1+i)}\\
&= \lim_{z\to -1-i}\frac{ze^{2iz}}{(z+1-i)(z+1+i)(z-1+i)}\\
&= -\frac{1}{8}\cdot ie^{-2+2i}
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema 5.5

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\text{sen}(2x)}{x^4+4}\,dx &= \text{Im}\left[2\pi i\left(\frac{1}{8}\cdot ie^{-2-2i}-\frac{1}{8}\cdot ie^{-2+2i}\right)\right]\\
&= \text{Im}\left[2\pi i\left(\frac{1}{8}\cdot i\cdot e^{-2}(e^{-2i}-e^{2i})\right)\right]\\
&= \text{Im}\left[\pi i\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2i}\right)\right]\\
&= \text{Im}\left[\pi i\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot\text{sen}(2)\right)\right]\\
&= \frac{\pi}{2e^2}\cdot\text{sen}(2).
\end{aligned}
$$

Ahora se trabajará con integrales impropias a partir de funciones complejas racionales con singularidades en el eje real.

Al intentar calcular una integral como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(x)}{x}\,dx$ se tiene un problema diferente a las integrales impropias resueltas anteriormente ya que la función $f(x)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ tiene un polo simple en $x=0$. Entonces para poder calcular la integral impropia deben calcularse por separado las siguientes integrales

$$
\int_{-\infty}^{a}\frac{\text{sen}(x)}{x}\,dx,\ \int_{a}^{0^-}\frac{\text{sen}(x)}{x}\,dx,\ \int_{0+}^{c}\frac{\text{sen}(x)}{x}dx,\ \text{y}\ \int_{c}^{+\infty}\frac{\text{sen}(x)}{x}dx
$$

Estas integrales deben calcularse como límites por separado e independientes, sin embargo, un límite diferente llamado Valor Principal de Cauchy permite obtener un resultado equivalente cuando estas integrales convergen, cuando divergen podría obtenerse un valor finito en el sentido de Cauchy. Hay dos formas básicas de definir el valor principal de Cauchy para una integral impropia y van a depender de si la integral es de primera o segunda especie.

Si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, entonces

$$V.P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$

Si $f(x)$ posee un polo en $x_0 \in (a,b)$, entonces

$$V.P \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to 0} \left(\int_{a}^{x_0 - r} f(x)\,dx + \int_{x_0 + r}^{\infty} f(x)\,dx \right)$$

Si la integral impropia converge, también lo hará su Valor Principal de Cauchy y al mismo valor. El recíproco no es cierto, para una función dada su valor principal de Cauchy puede converger a un valor sin que la integral impropia converja.

Teorema 5.6

Sea $f(z)$ una función racional compleja para la cual su denominador es al menos dos grados mayor que su numerador y además todos los polos de $f(z)$ que se encuentran sobre el eje real son simples, entonces

$$V.P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m} \operatorname{Res}_{z_j} f(z) \right]$$

donde los polos z_k se encuentran por encima del eje real y los polos z_j se encuentran en el eje real.

Ejemplo 5.16

Compruebe que $V.P \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Considere la función $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ que posee polos simples en $z_0 = -1$, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, de ellos z_0 se encuentra en el eje real mientras que z_1 se encuentra por encima del eje real.

Se procede a calcular los residuos correspondientes

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{-1} f(z) &= \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^3+1}\\
&= \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{(z+1)(z^2-z+1)}\\
&= \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^2-z+1}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{(1+i\sqrt{3})/2} f(z) &= \lim_{z\to(1+i\sqrt{3})/2}(z-(1+i\sqrt{3})/2)\cdot\frac{1}{z^3+1}\\
&= \lim_{z\to(1+i\sqrt{3})/2}\frac{z-(1+i\sqrt{3})/2}{(z+1)(z-(1+i\sqrt{3})/2)(z-(1-i\sqrt{3})/2)}\\
&= \lim_{z\to(1+i\sqrt{3})/2}\frac{1}{(z+1)(z-(1-i\sqrt{3})/2)}\\
&= \frac{2}{-3+3i\sqrt{3}} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 5.6

$$\begin{aligned}
V.P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}_{(1+i\sqrt{3})/2}\frac{1}{z^3+1}+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{-1}\frac{1}{z^3+1}\right]\\
&= 2\pi i\left[-\frac{(1+i\sqrt{3})}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]\\
&= 2\pi i\left[-\frac{i\sqrt{3}}{6}\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Se obtiene el valor principal de Cauchy

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

En este ejemplo se determinó el valor principal de Cauchy, sin embargo, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ diverge.

Teorema 5.7

Sea $f(z)$ una función racional compleja para la cual su denominador es al menos un grado mayor que su numerador y además todos los polos de $f(z)$ que se encuentran sobre el eje real son simples y coinciden con los ceros de $\cos(ax)$ o $\operatorname{sen}(ax)$, $a>0$, entonces

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(iax)\,dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\left[\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z)e^{iaz} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\operatorname{Res}_{z_j} f(z)e^{iaz}\right]\right],$$

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(iax)\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\left[\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z)e^{iaz} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\operatorname{Res}_{z_j} f(z)e^{iaz}\right]\right]$$

donde los polos z_k se encuentran por encima del eje real y los polos z_j se encuentran en el eje real.

Ejemplo 5.17

Compruebe que $V.P\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3+x}\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

Considere la función $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z}$ que posee polos simples en $z_0=0$, $z_1=i$ y $z_2=-i$, de ellos z_0 se encuentra en el eje real mientras que z_1 se encuentra por encima del eje real.

Se procede a calcular los residuos correspondientes

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_0 f(z)e^{iz} &= \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{iz}}{z^3+z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{ze^{iz}}{z(z^2+1)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_i f(z)e^{iz} &= \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{e^{iz}}{z^3+z}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{z(z+i)(z-i)}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z(z+i)}\\
&= -\frac{e^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 5.7

$$\begin{aligned}
V.P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3+x}\,dx &= \operatorname{Im}\left[2\pi i\left[\operatorname{Res}_i\frac{e^z}{z^3+z}+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_0\frac{e^z}{z^3+z}\right]\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[2\pi i\left[-\frac{e^{-1}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\right]\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[2\pi i\left[\frac{1-e^{-1}}{2}\right]\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\pi i\cdot(1-e^{-1})\right]\\
&= \pi\cdot(1-e^{-1})
\end{aligned}$$

Se obtiene el valor principal de Cauchy

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3+x}\,dx=\pi\cdot(1-e^{-1})$$

Ejercicios 5.1

Determine si la siguientes sucesiones de números complejos convergen o divergen

1. $z_n=\dfrac{2+i}{n^2+1}$
2. $z_n=\dfrac{2n-1}{n+1}-i\dfrac{3n}{n+1}$
3. $z_n=e^{in\pi/2}$
4. $z_n=\cos(nz)$

Determine si la siguientes series de números complejos convergen o divergen

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i}{k^2+k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i}{k+i}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2i+1}{6}\right)^k$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{k+1}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\pi)+i\operatorname{sen}(k\pi)}{k}\right)$
10. Determine la representación en series de potencias para $f(z)=\operatorname{sen}^3(z)$ así como su círculo de convergencia
11. Determine la representación en series de potencias para $f(z)=\tan(z)$ así como su círculo de convergencia

12. Determine la representación en serie de Laurent para $f(z)=e^{1/z^2}$ así como su anillo circular de convergencia
13. Determine la representación en serie de Laurent para $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ si $0<|z|<1$
14. Determine la representación en serie de Laurent para $f(z)=\dfrac{\cos(z)-1}{z^5}$.

Determine el valor de las siguientes integrales de línea complejas

15. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+4}\,dz \quad \gamma:|z-i|=2$
16. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z-1)}\,dz \quad \gamma:|z|=1$
17. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z\,\mathrm{senh}(z)}{z^2+z+1}\,dz \quad \gamma:|z-1+i|=2$
18. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^2-2z+2}\,dz \quad \gamma:|z-i|=2$
19. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2+1}\,dz \quad \gamma:|z|=2$

Determine el valor de las siguientes integrales

20. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2 t}{5+4\cos t}\,dt$
21. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5+3\cos t}\,dt$
22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t)+2\,\mathrm{sen}(t)+3}\,dt$
23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$
24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$
25. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$
26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x^2+4}\,dx$
27. $\displaystyle V.P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^5-x}\,dx$
28. $\displaystyle V.P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^3(x)}{x^3}\,dx$

Bibliografía

[1] Ablowitz, M., Fokas, A. & Fokas, A. (2003). *Complex variables: introduction and applications*. Cambridge University Press.

[2] Acevedo, B. (2006). *Variable compleja*. Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

[3] Alpay, D. (2007). *Exercises on complex variables*.

[4] Apostol, T. M. (1976). *Análisis matemático*. Reverté.

[5] Bennewitz, C. (2006). *Complex Analysis*.

[6] Brown, J. & Churchill, R. (2009). *Complex variables and applications*. (8va ed.) McGraw-Hill.

[7] Curtiss, J. (1978). *Introduction to functions of complex variables*. Marcel Dekker, Inc.

[8] Derrick, W. (1987). *Variable compleja con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana.

[9] Ivorra, C.(2008). *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números*. Universidad de Valencia.

[10] Marín, J. (2014). *Teoría de funciones de variable compleja*. Editorial Universitaria.

[11] Mathews, J. & Howell, R. (2006). *Complex analysis for mathematics and engineering*. (5ta ed.) Jones & Bartlett Publishers.

[12] Purcell, E., Rigdon, S. & Varberg, D. (2007). *Cálculo*. (9a ed.) Pearson Educación.

[13] Reade, J. B. (2003). *Calculus with complex numbers*. CRC Press.

[14] Sacerdoti, J. (2005). *Análisis de Funciones de Variable Compleja*. Repositorio Institucional Elisa Bachofen, http://bibliotecadigital.fi.uba.ar/items/show/3768.

[15] Salcedo, L. (2018). *Variable Compleja*.

[16] Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J. & Spellman, D. (2009)*Variable Compleja*. (2da ed.). McGraw-Hill.

[17] Várilly, J. (2012). *MA-702: Variable compleja*.

ELEMENTOS DE VARIABLE COMPLEJA

La presente obra es una introducción al estudio de la variable compleja, tema fundamental en la formación inicial de ingenieros, particularmente para las áreas de electrónica y telecomunicaciones. El lector debe tener conocimientos básicos de Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables.

ISBN: 978-9968-03-380-0