EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i3p029-061

# Ver, perceber, representar, visualizar: uma reflexão sobre o acesso aos objetos matemáticos e sua relação com os modos de pensar na matemática

# See, perceive, represent, visualize: a reflection between access to mathematical objects and the way of thinking within mathematics

# Ver, percibir, representar, visualizar: una reflexión sobre el acceso a los objetos matemáticos y su relación con los modos de pensar en matemáticas

# Voir, percevoir, représenter, visualiser : une réflexion sur l'accès aux objets mathématiques et sa relation avec les modes de pensée en mathématiques.

Alessandra Hendi dos Santos [1]
Universidade Estadual de Maringá
https://orcid.org/0000-0002-2620-3135

Valdeni Soliani Franco [2]
Universidade Estadual de Maringá
https://orcid.org/0000-0002-9202-4434

José Carlos Cifuentes[3]
Universidade Federal do Paraná
https://orcid.org/0000-0002-8005-6965

## Resumo

Esse estudo tem por objetivo promover discussões e reflexões sobre a visualização matemática, tomando como base sua relação com a visão, a percepção e a representação. Tal pesquisa foi apoiada pelos estudos do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, no qual a visualização e suas diferentes compreensões vêm sendo estudadas. O percurso metodológico dessa reflexão teórica se fundamenta em uma pesquisa de natureza exploratória, visando buscar o que há de característico e particular nas concepções analisadas. Portanto, é uma pesquisa de abordagem qualitativa no paradigma interpretativo. Para frutificar esse olhar sobre a visualização, de natureza tão polissêmica, são utilizados como subsídios teóricos as ideias de

[1] alessandra.hendi@gmail.com
[2] vsfranco@gmail.com
[3] jccifa@gmail.com

visão, percepção e representação, que não apenas dão base para o estudo, mas também evidenciam suas diferenciações e aproximações. Uma das questões emergentes nesta pesquisa é: Como agem as representações de um objeto na experiência de sua visualização? Para essa discussão, considera-se a visualização como uma forma de pensamento, ou seja, a visualização é uma forma de pensar dentro da própria matemática. Compreende-se que a correspondência entre essas concepções se desenvolve em torno da atividade matemática, na interpretação do que é visto, na descoberta de novas relações, na representação do que não está ao alcance dos olhos e na concretização dessa atividade matemática.

***Palavras-chave:*** Visualização, Ensino e Aprendizagem de Matemática, Educação Matemática.

## Abstract

This study aims to promote discussions and reflections on mathematical visualization, based on its relationship with vision, perception and representation. The research was supported by the studies of the Research Group in Geometry Teaching – GPEG, in which visualization and its different understandings have been studied. The methodological course of this theoretical reflection is based on an exploratory research, aiming to seek what is characteristic and particular in the analyzed conceptions. Therefore, a qualitative approach research in the interpretive paradigm. To bring to fruition this look at visualization, which has a polysemic nature, the ideas of vision, perception and representation are used as theoretical subsidies, which provides the basis for the study and shows their differences and approximations. One of the emerging questions in this research is: How do the representations of an object act in the experience of its visualization? For this discussion, visualization is considered as a way of thinking, i.e., visualization is a way of thinking within mathematics itself. It is understood that the correspondence between these conceptions develop around mathematical activity, in the interpretation of what is seen, in the discovery of new relationships, in the representation of what is not within the reach of the eyes and in the concretization of this mathematical activity.

***Keywords**:* Visualization, Mathematics Teaching and Learning, Mathematics Education.

**Resumen**

Este estudio tiene como objetivo promover discusiones y reflexiones sobre la visualización matemática, a partir de su relación con la visión, la percepción y la representación. Esta investigación fue apoyada por los estudios del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Geometría – GPEG, en los cuales se ha estudiado la visualización y sus diferentes comprensiones. El curso metodológico de esta reflexión teórica se basa en una investigación exploratoria, con el objetivo de buscar lo que es característico y particular en las concepciones analizadas. Por lo tanto, es una investigación de enfoque cualitativo en el paradigma interpretativo. Para perfeccionar esta mirada sobre la visualización, de carácter tan polisémico, se utilizan como subsidios teóricos las ideas de visión, percepción y representación, que no sólo fundamentan el estudio, sino que también muestran sus diferencias y aproximaciones. Una de las preguntas emergentes en esta investigación es: ¿Cómo actúan las representaciones de un objeto en la experiencia de su visualización? Para esta discusión, la visualización se considera como una forma de pensar, es decir, la visualización es una forma de pensar dentro de las propias matemáticas. Se entiende que la correspondencia entre estas concepciones se desarrolla en torno a la actividad matemática, en la interpretación de lo visto, en el descubrimiento de nuevas relaciones, en la representación de lo que no está al alcance de los ojos y en la realización de esta actividad matemática.

***Palabras clave:*** Visualización, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Educación Matemática.

**Résumé**

Cette étude vise à promouvoir des discussions et des réflexions sur la visualisation mathématique, basée sur sa relation avec la vision, la perception et la représentation. Cette recherche est soutenue par les travaux du Groupe de Recherche en Enseignement de la Géométrie – GPEG, dans lequel la visualisation et ses différentes compréhensions ont été étudiées. Le déroulement méthodologique de cette réflexion théorique s'appuie sur une recherche exploratoire, visant à rechercher ce qu'il y a de caractéristique et de particulier dans les conceptions analysées. Donc, une recherche d'approche qualitative dans le paradigme interprétatif. Pour faire fructifier ce regard sur la visualisation, si polysémique, les notions de vision, de perception et de représentation sont utilisées comme subsides théoriques, qui fondent l'étude, et montrent aussi leurs différences et approximations. L'une des questions émergentes de cette recherche est : comment les représentations d'un objet agissent-elles dans l'expérience de sa visualisation ? Pour cette discussion, la visualisation est considérée comme une façon de penser, c'est-à-dire que la visualisation est une façon de penser au sein même des mathématiques. On comprend que la correspondance entre ces conceptions se développe autour de l'activité mathématique, dans l'interprétation de ce qui se voit, dans la découverte de nouvelles relations, dans la représentation de ce qui n'est pas à la portée des yeux et dans la concrétisation de cette activité mathématique.

***Mots clés :*** Visualisation, Enseignement et Apprentissage des Mathématiques, Enseignement des Mathématiques.

**Ver, perceber, representar, visualizar: uma reflexão sobre o acesso aos objetos matemáticos e sua relação com os modos de pensar na matemática**

A visualização, uma das principais formas de acesso ao conhecimento matemático (e assunto desta pesquisa) é, no contexto da educação matemática, de um entendimento polissêmico, entendimento que inicialmente se fez pela vertente cognitiva. Pelos diferentes *status* concedidos à visualização, como: uso exclusivo de imagens, ferramenta para o ensino e aprendizagem, provas sem palavras, entre outros, fez-se importante a busca por significações e conceitualizações em relação ao termo. É nesse panorama que o presente estudo se constituiu, sendo necessário incluir um levantamento de pesquisas desenvolvidas que, de alguma forma, trouxessem a visualização matemática como elemento de discussão e reflexão.

Na literatura, as palavras “representação” e “visualização” são, às vezes, entendidas como sinônimas. Mas o que propulsiona tal ambiguidade? De que forma tais vocábulos se relacionam? Portanto, o principal objetivo foi o de estudar e explorar esses termos, com o intuito de propiciar uma análise introdutória sobre o conceito de “visualização” a fim de estabelecer sua “legitimidade” como forma de acesso ao conhecimento matemático.

Para cumprir tal objetivo e trazer uma síntese sobre a visualização, esta pesquisa, de natureza teórico-exploratória, buscou o que há de característico e particular nas concepções analisadas. Portanto, constituiu uma abordagem qualitativa no paradigma interpretativo.

Este estudo, para a construção de significações, se desenvolveu da seguinte forma: primeiramente, direcionou-se o olhar para as concepções de visão e de percepção, desde seus sentidos literais até as compreensões sobre os diferentes modos de ver e perceber. Na sequência, foram abordadas as ideias sobre representação, utilizando como base os estudos paradigmáticos de Raymond Duval. A esse respeito, as reflexões sobre a visualização foram incorporadas na estrutura do texto, buscando dialogar com as compreensões apresentadas no momento em que as inquietações emergiam.

Este artigo é parte substancial da pesquisa de doutorado em Educação Matemática da primeira autora sob a orientação e coorientação do segundo e terceiro autores respectivamente, sendo apoiada pelos estudos realizados no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, em que um dos principais assuntos de interesse é a visualização.

## Do imediatismo do olhar a uma visão reflexiva

A visão pode ser interpretada em diferentes perspectivas, como um evento anatômico, fisiológico, psicológico, físico, biológico ou químico. Relacionadas a esse termo, encontram-se ainda denominações como: ponto de vista, aparição de algo sobrenatural, contemplação direta sem percepção sensível, imaginação, entre outras.

Conhecendo a abrangência e os diferentes sentidos atribuídos à palavra “visão”, é importante destacar que, neste estudo, a compreensão de visão se direciona ao olhar, enxergar, ver. Assim, a ideia perpassa desde o que se vê no imediatismo, até um olhar reflexivo, que é construído, educado, aprimorado. Para exemplificar esse entendimento, apresenta-se, por meio de uma representação (conceito que será mais bem discutido adiante), uma das iterações do fractal conhecido como triângulo de Sierpinski (Figura 1):

Figura 1.

*Triângulo de Sierpinsk - Iteração 2 (Autores).*

Nessa figura, pode-se “ver” um ou vários triângulos, primeiramente os pretos ou os brancos, o que constituiria o resultado de um olhar imediato. Dessa forma, não se está visualizando, apenas se está vendo. Somente quando esse ato de ver implica na busca de compreensões do que é visto, podem-se revelar alguns princípios da visualização, que permite a construção de um olhar reflexivo, como, por exemplo, buscar as relações entre os triângulos, um padrão, uma generalização. De acordo com Duval:

> Assim, como texto ou raciocínio, o entendimento envolve apreender toda a sua estrutura; **não há entendimento sem visualização**. E é por isso que a visualização não deve ser reduzida à visão, ou seja: a visualização torna visível tudo o que não é acessível à visão. (Duval, 1999, p. 13, grifo nosso)

Pode-se ainda entender a expressão “(...) tudo o que não é acessível à visão...” parafraseando Paul Klee[4]: “a visualização não reproduz o visível, ela torna visível” (Klee, 1974, p. 88).

Do ponto de vista cognitivo, Duval (1999) apresenta duas funções essenciais para a visão: a função epistemológica e a função sinóptica. A primeira consiste em dar acesso direto a qualquer objeto físico. Nesse sentido, a visão se apresenta como oposto à representação, que se dá no lugar de outra coisa e a visão está na função de acesso direto ao que se vê, real, concreto. Já a função sinóptica desempenha uma apreensão global, ou seja, quando se vê algo não se vê apenas algumas das partes, se vê o todo, porque o todo dá sentido às partes. De acordo com Duval (1999, p. 12): “nesse sentido, a visão é o oposto do discurso, da dedução, que requer uma sequência de inferências justificadas, numa cadeia de afirmações”, ou seja, a visão não envolve um processo lógico, entendido este como uma sequência de argumentos articulados, que se utilizam do rigor do discurso e do raciocínio lógico dedutivo.

Mas, o que seria ver o todo e não apenas as partes? Significa ver as partes e seu contexto. Desse modo, a visão, em sua função sinóptica, é contextual, pois quando se vê alguma coisa,

[4] A frase original de Paul Klee é a seguinte: “A arte não reproduz o visível, ela torna visível” (Klee, 1974, p.88).

essa coisa está inserida num contexto. O sentido atribuído à palavra “contexto” é sobre “o que está ao redor”, e não ao sentido de “contextualização”, que associa um conhecimento ao seu ponto de origem, aplicação, muito utilizado nas discussões de ensino e aprendizagem. De acordo com Cifuentes:

> Contextualizar [no sentido de identificar o contexto de] um objeto é dar um referencial espaço temporal ao objeto, de modo que, do ponto de vista estético, o contexto passa a formar parte do próprio objeto como sugerido por Aristóteles, embora a “realidade” do contexto possa ser diferente da realidade do objeto. (Cifuentes, 2005, p. 66)

É importante destacar que a visão, por mais imediatista que seja, traz consigo as pré-concepções de quem vê, portanto não se reduz em um olhar estático e imediato. A dinamicidade encontrada no olhar reflexivo envolve as práticas visuais no âmbito da história e da cultura (Flores, 2010). Portanto, o objeto sensível não envolve somente o sentido da visão, mas também o entendimento que se faz dele.

Na fenomenologia de Merleau-Ponty (2003, p. 224) “ver é sempre ver mais do que se vê”; sendo assim, o visível e o invisível são indissociáveis. De acordo com Caminha (2014), ao abordar a perspectiva da concepção de “visão”, discutida por Merleau-Ponty:

> A visão não alcança uma visão plena do que aparece. Aquilo que é visível tem sempre aspectos invisíveis. Os olhos que se dirigem ao mundo para ver ganham uma relação de proximidade com as coisas visíveis, mas também ganham uma relação de distância daquilo que não se vê, revelando uma cegueira da visão. As limitações de nosso olhar atual não conseguem ver o visível na sua plenitude. (Caminha, 2014, p. 64)

Essa questão da cegueira da visão perpassa a ideia do aparecimento da coisa visível, pois também considera o momento em que a pessoa que vê torna a coisa visível do seu modo. Para elucidar tal reflexão, apresenta-se o exemplo a seguir, contido na Figura 2.

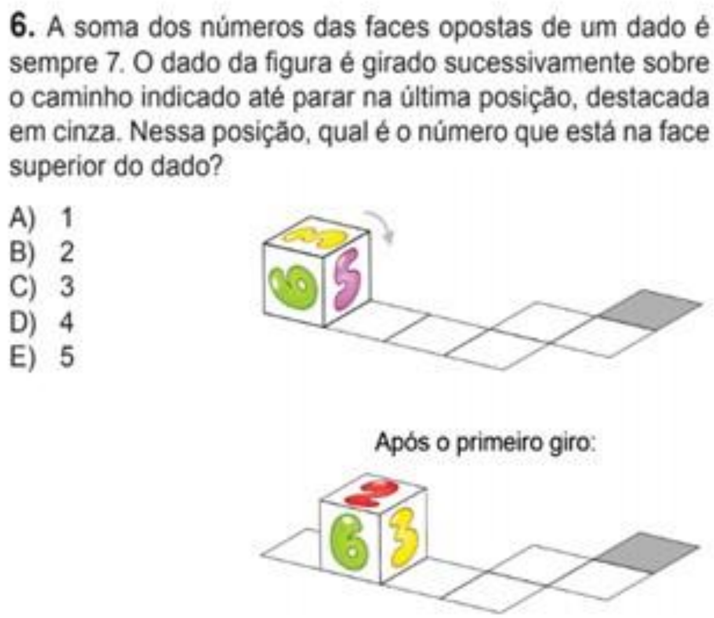



Figura 2.

*Questão OBMEP 2016 nível 2 (Obmep, 2016).*

Na Figura 2, é possível ver algumas faces de um cubo, mas quem vê pode se utilizar dos diferentes modos de se fazer algo visível, ou seja, neste caso, de fazer visíveis as outras faces do cubo. De acordo com Caminha (2014, p. 64), "A experiência de ver nos lança para o horizonte aberto do visível que não se reduz ao aparecimento de um objeto isolado".

Essa ação de fazer visíveis as outras partes do cubo envolve o ato de experienciar, se faz um experimento mental para movimentar o cubo e fazer o que se pede. Desse modo, realizam-se os experimentos mentalmente no intuito de "visualizar" os objetos matemáticos, configurados por certas relações e transformações. Percebe-se, assim, que a experiência é intrínseca na visão, no olhar reflexivo, assim como na visualização.

Mas a qual noção de "experiência" se faz referência? Em Santos (2014), foi levantada a dicotomia entre experiência matemática e experiência nas ciências empíricas. Até certo ponto, tal distinção era imediata, pois na ciência supostamente se trabalha com objetos e fenômenos reais, enquanto na matemática com objetos abstratos. Desse modo, parecia necessário estabelecer tal entendimento. Porém, na perspectiva da ciência, o que significa ver um fenômeno físico? A física atual permite ver algumas coisas e não permite ver outras, por mais que elas existam. O que se vê, seja com ou sem a ajuda de instrumentos físicos, é o que a luz, em suas diversas manifestações (ondas eletromagnéticas), permite que se veja.

Por exemplo, atualmente, sabe-se que algumas coisas fisicamente existem, mas não são "visíveis" com nenhum tipo de luz, ou seja, existe algum tipo de matéria, a chamada de "matéria escura", que não interage com a luz eletromagnética de nenhum tipo e só se sabe que existe porque, além da força eletromagnética que faz visível a coisa, também existe a força gravitacional com a qual, de fato, ela interage. Desse modo, o fenômeno existe, mesmo que não ocorra interação com algum tipo de luz. Portanto, a experiência na física, que em essência é de caráter mental, parece ser tão complexa como na matemática, mas uma aproximação entre as duas consiste no fato de que em ambas, para efeitos da visualização, se estudam os objetos em movimento, em transformação.

Na concepção de Duval, existem duas situações que devem ser analisadas ao se tratar da visão: a) a efetividade na experiência de ver e b) a exigência de que as coisas sejam visíveis. Nessa perspectiva, "a visão tem ao mesmo tempo poder subjetivo, que realiza a experiência de ver, e poder ontológico, que nos dá acesso ao mundo em sua exterioridade" (Caminha, 2014, p. 64). A respeito do poder ontológico da visão, uma coisa é ver diretamente, o imediato, outra coisa é consolidar o que está sendo visto depois de uma interpretação. Ou seja, não é somente a percepção física em receber um impulso visual, é o intelecto agindo junto com o sensível. Esse poder ontológico pode ser entendido como a capacidade de criar o objeto que está sendo visto. Uma vez que se faz uma interpretação, há uma criação, uma criação intelectual do objeto. Portanto, o que está sendo visto está sendo criado, logo, não é uma visão ingênua.

Outra perspectiva sobre o modo de apreender por meio do olhar nos é apresenta por Duval (2012a), na seguinte classificação: apreensões perceptivas, discursivas e operatórias. A apreensão perceptiva se assemelha à ideia de visão apresentada neste estudo, em se tratando do reconhecimento visual imediato da forma, "a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são aqueles que aparecem espontaneamente" (Duval, 2012a, p. 120).

A apreensão discursiva se caracteriza pela utilização de um vocabulário, ou seja, é a apreensão de um objeto a partir das relações que o definem, e essas relações são expressas numa linguagem. Tais relações podem ser as hipóteses de um problema e até mesmo dos elementos textuais anexados à imagem, ao que é visto. Há um conflito entre as apreensões perceptivas e discursivas no momento em que as figuras mostram objetos que se destacam para além do enunciado.

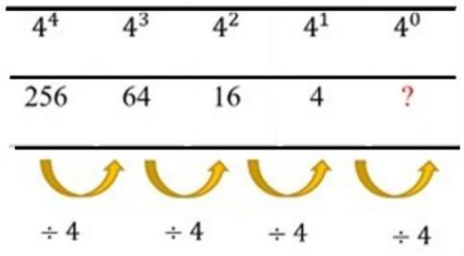
> (...) os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver. Lembram, também, que os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva: estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses. Isto pode ser observado pelas suas atitudes diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. (Duval, 2012a, p. 124)

Um exemplo é a apreensão da potência com expoente zero. Geralmente, os alunos fazem confusão com as propriedades das potências. Uma delas é que todo número não nulo elevado a expoente zero resulta em 1; já outra propriedade diz que todo número elevado a expoente um resulta no próprio número. Porém, ao questionar em sala de aula, há uma grande probabilidade em se escutar que todo número não nulo elevado a expoente zero resulta em zero ou que todo número elevado a expoente um resulta em zero. Buscando as relações que definem o objeto, constrói-se a Tabela 1.

O que se pode perceber com a Tabela 1 é que a potência vai decrescendo na razão quatro, desse modo sendo $4^1 = 4$, reduzindo na razão 4 para a próxima potência, tem-se que $4^0 = 4 \div 4 = 1$, logo $4^0 = 1$. Se for dada a continuidade dessa tabela, as apreensões dos expoentes negativos também podem ser efetivadas.

Tabela 1.

*Potência de base 4 (Autores)*



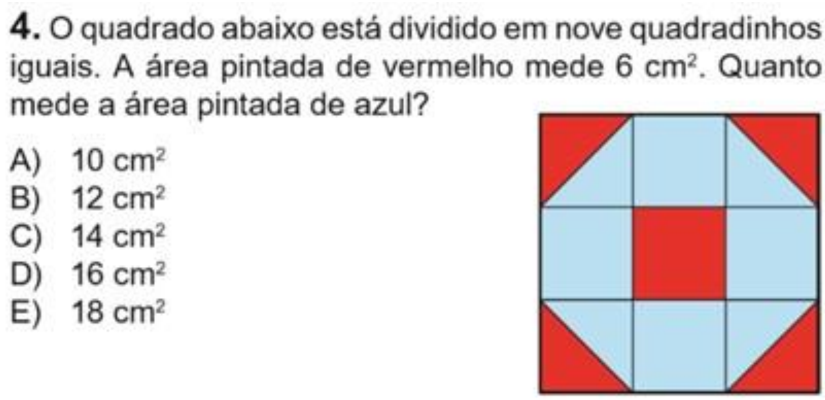

No entanto, voltando para a propriedade de expoente nulo, outra relação pode ser observada. A partir de outra propriedade, a da divisão de potências de mesma base, pode-se fazer inteligível a propriedade do expoente nulo.

$$4^0 = 4^{1-1} = \frac{4^1}{4^1} = 1.$$

Assim como a apreensão de um objeto é dada pelas relações que o definem, entende-se que a concepção de "figura" em Duval é relacional, baseada em relações, propriedades, condições primárias dadas como hipóteses e, neste estudo, esse entendimento é adotado.

> Se é possível "ver" um triângulo, um quadrilátero, pois o número de lados permite de certo modo "amarrá-lo" à realidade, também é possível visualizar, embora não da mesma forma, um polígono geral onde o número de lados não é especificado (a sensibilidade do abstrato). Essa visualização de um polígono geral se dá, mas não em termos de suas propriedades objetuais e sim de suas propriedades relacionais, o que supõe uma mudança na ontologia do que pode ser visualizado na direção do objetual ao relacional. (Cifuentes, 2010, p. 24)

> Em relação ao conflito entre a apreensão perceptiva e a discursiva, um exemplo é apresentado na Figura 3, em que o olhar inicial, a apreensão perceptiva, pode estar direcionado ao quadrado vermelho interno ou à parcela correspondente à figura em azul ou, ainda, o quadrado como um todo. Independente disso, é preciso relacionar a hipótese, o enunciado, com a figura representada. O enunciado direciona o olhar ditando uma só leitura: "o quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais"; dessa maneira, a visão não fica mais retida às cores, às divisões, e sim aos 9 quadradinhos.



**4.** O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm². Quanto mede a área pintada de azul?

A) 10 cm²
B) 12 cm²
C) 14 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²

Figura 3.

*Questão OBMEP 2019 nível 1 (Obmep, 2019).*

A apreensão operatória também se faz presente no exemplo da Figura 3, pois se refere às modificações e transformações da figura, sendo realizadas graficamente ou mentalmente. Uma das possibilidades é organizar os triângulos vermelhos de forma a construir quadrados, de maneira análoga com os triângulos azuis. Trata-se de um reagrupamento da figura inicial, isto é, uma reconfiguração, o que já é uma manifestação do caráter dinâmico da representação de figuras na visualização.

A visão pode ser entendida, também, pela perspectiva da obra de Bachelard (2011), especificamente em relação ao obstáculo epistemológico chamado de “a experiência primeira”. Essa experiência, denominada assim pelo autor, reflete a ideia de observação básica e opinião. Na área das ciências, pode-se entender esse obstáculo por uma experiência colocada antes e acima da crítica, uma experiência guiada pelo senso comum. “Ficará claro que a primeira visão empírica não oferece nem o desenho exato dos fenômenos, nem ao menos a descrição bem ordenada e hierarquizada dos fenômenos” (Bachelard, 2011, p. 37).

É importante destacar que Bachelard considera por “fenômeno” a cadeia de relações, em que a sua constituição se dá pelos processos de composição, ruptura, confrontos, acréscimos, contradições, etc., ou seja, um fenômeno nunca está acabado, pois qualquer relação estabelecida com ele pode modificá-lo em maior ou menor grau de complexidade. Portanto, esse fenômeno se dá numa relação dialógica entre a desordem e a ordem, seria descontruir para reconstruir, sendo esse processo contínuo. De acordo com Silva (2000, p. 72), “a dinamicidade do fenômeno gera o seu desenvolvimento através de uma trama de coisas velhas e novas dando-lhe novo conteúdo, nova forma e novo sentido”.

Na matemática, a compreensão desse obstáculo epistemológico pode se dar pelo uso ingênuo e primário da figura. Ou seja, ao resolver uma tarefa matemática que contém uma figura, o aluno se baseia exclusivamente na sua forma, sem fazer uma análise total e ampliada da figura e do enunciado que ela representa. “A primeira experiência ou também chamada de observação primeira é sempre um obstáculo inicial para a cultura científica. De fato, essa observação primeira se apresenta repleta de imagens; é pitoresca, concreta, natural e fácil” (Bachelard, 2011, p. 25).

Voltando ao exemplo da Figura 3, em uma primeira observação, as cores se destacam e podem induzir a uma conjectura, como, por exemplo, a área do quadrado vermelho interno, a área total da figura ou a contagem de quadradinhos, separando os vermelhos dos azuis, entre outras possibilidades. Porém, o enunciado já remete a outro olhar, que pode ser conflitante com um primeiro olhar ou até mais abrangente. Significa que o primeiro olhar pode levantar hipóteses para a solução do problema, mas, ao mesmo tempo, pode não estabelecer relação alguma. Portanto, após o levantamento de algumas abordagens e entendimentos sobre a visão, as compreensões se direcionam para um sentido imediato ao que se vê, porém, esse olhar não é neutro, ele é reflexivo, traz consigo o sujeito epistêmico.

Na sequência, antes de iniciar o estudo sobre a representação, é realizada uma breve análise sobre a percepção que, assim como a visão, também é subjacente ao processo de representação e de visualização.

## Percepção: a relação entre a sensação e o entendimento

O verbo "perceber" vem do latim *percipere*, de acordo com o Dicionário Michaelis (2022), "percepção é a sensação física manifestada por meio de uma experiência; capacidade de distinguir por meio dos sentidos ou da mente".

É possível verificar que, nos estudos sobre percepção, alguns termos aparecem com regularidade, tais termos são: sensação, impressão, pensamento, fenômeno e intuição. De acordo com Saes (2010):

> A percepção, por exemplo, é um conceito que ora pende mais para o sensível, ora mais para o intelectual. Assim como aparece ligado às noções de sensação, sensibilidades ou intuição sensível, o conceito também envolve o campo das ideias e da intuição intelectual. (Saes, 2010, p. 9)

A percepção que acontece por via dos cinco sentidos (visão, audição, olfato, paladar e tato) é discutida por Aristóteles (385-322 a.C.). Essa atividade da percepção não é instantânea; de acordo com o filósofo, os "sensíveis" são percebidos pelos "sentidos". Dessa forma, o sentido não é suficiente para movimentar as capacidades da percepção, é necessário colocá-lo em contato com objetos sensíveis. Portanto, o ato de perceber se concentra em acolher e assimilar a forma sensível dos objetos, ou seja, o que se recebe é a forma sensível, a "aparência" e não a matéria (Saes, 2010).

Diferente dos pressupostos de Aristóteles, René Descartes (1596-1650) justifica que a percepção não é uma atividade específica dos sentidos. Para esse filósofo, a percepção é intelectual. Nesse sentido, ele afirma que sentir é pensar, sendo a sensação uma atividade pressuposta na produção de qualquer ideia ou representação sensível. Na linguagem de Descartes, em vez de dizer que "vejo uma cor", o correto seria dizer que "penso que vejo uma cor", pois não basta o corpo ser afetado em seus órgãos, é preciso, além disso, que eu tenha a consciência de que ele foi afetado. Sentir implica, portanto, a consciência de sentir (Saes, 2010).

Existem discussões profundas sobre a relação entre inteligência e sensação; uma delas aponta que os sentidos podem ser enganosos, não apresentando conteúdos confiáveis. Por exemplo, ao se enunciar a seguinte descrição: “um polígono com lados congruentes, diagonais perpendiculares e ângulos internos adjacentes suplementares”, é quase imediata a percepção (mental) de um quadrado. Porém, por essa mesma descrição, outro polígono apresenta tais características, o losango.

Portanto, ao se enunciar a descrição, o intuito é de estabelecer as hipóteses em que se fundamenta a figura; porém, ao se pensar num primeiro momento no quadrado, está se colocando algo a mais do que foi enunciado, neste caso, a congruência dos ângulos internos, conjecturando, assim, o quadrado.

Ao experienciar uma descoberta matemática, em que ocorre um *insight* ou *aha*!, a pessoa que vive a experiência passa por uma percepção vívida, diferente daquela que apenas lê uma demonstração matemática sem vivenciá-la. Hume (1711-1776) argumenta sobre a relação de derivação entre as percepções, em que “todas as nossas ideias, na qualidade de percepções mais tênues, são cópias de nossas impressões ou percepções mais vívidas” (Saes, 2010, p. 20).

Outro filósofo do século XVIII, que apresenta algumas considerações sobre a percepção, é Immanuel Kant (1724-1804). Para esse filósofo, a percepção deve manter a relação entre fenômeno e coisa em si. O fenômeno pode ser percebido, enquanto a coisa-em-si está acima da realidade sensível. Dessa forma, o que aparece com a experiência são os fenômenos, genuínos da percepção.

A concepção de “fenômeno” para Kant consiste em como a coisa se apresenta aos olhos de quem a vê. Desse modo, o fenômeno não é a coisa em si, mas a aparência, pois o que se observa é apenas uma parcela, sendo que se percebe a realidade por meio dos fenômenos. Mas essa observação não é neutra, ela é composta por um entendimento de quem observa. Ao contrário de Aristóteles, Kant considera a percepção como algo do intelecto e não dos órgãos do corpo, “percepção é uma sensação acompanhada de consciência” (Saes, 2010, p. 23).

É importante salientar que, na concepção de Kant, não há subordinação do entendimento sobre a sensibilidade nem da sensibilidade sobre o entendimento, pois a experiência se concretiza quando existe uma conciliação entre as duas faces, diferente do que afirma Hume ao considerar as percepções mais tênues como cópias das percepções mais vívidas, ou seja, a subordinação do intelectual ao sensível.

Pelas ideias de Kant, a percepção requer formas de recepção para que seja captada. Levando essa consideração para uma compreensão da visualização, existem formas de recepção para que a visualização seja concretizada? A dinamicidade que a visualização requer para se manifestar como forma de pensamento parece indicar que não.

Se existissem formas de recepção, a visualização poderia ser ensinada e aprendida, assim como se ensina a construir um gráfico no plano cartesiano, por exemplo. Porém, esse passo-a-passo, o modelo e os padrões não correspondem à visualização, se assim fosse, existiria um modo de visualizar que poderia ser repassado de maneira única e pragmática. Talvez esse entendimento seja a maior dificuldade em se aceitar a visualização como um modo do pensar matemático, por utilizar de atos livres, porém não arbitrários. Utiliza-se de uma racionalidade para fazer a “melhor” escolha, sendo a palavra “melhor” empregada em seu sentido epistemológico, na dicotomia entre “melhor” e “pior”. Para algo ser ensinado, ele precisa ser delimitado, definido, mas a visualização não se presta a uma definição, pois é mais que algo concreto, é uma ação, ou seja, se manifesta por meio de ações dinâmicas e não de conceitos.

Há várias abordagens sobre a visualização, duas delas podem ser pensadas com base no contraponto em teorizar e experienciar. Desse modo, uma abordagem consiste em teorizar a visualização por meio de conceitos e outra em experienciá-la por meio de ações guiadas pela sensibilidade matemática.

Na filosofia contemporânea, Merleau-Ponty (1908-1961) concebe a percepção como um acesso originário ao mundo, um conhecimento de existências pressuposto por todos os atos da consciência humana. Aos seus olhos, as empreitadas analíticas de algumas filosofias clássicas acabaram deixando de lado o próprio fenômeno perceptivo. Mas essa perda ocorreu porque, em vez de dar atenção à experiência perceptiva como um todo, tenderam a fazer do objeto percebido um alvo quase exclusivo (Saes, 2010, p. 28). Ao mencionar que se deixou de lado o próprio fenômeno perceptivo, o filósofo indica que a atenção sobre a percepção ficou restrita às operações de conhecimento e não aos atos da consciência num horizonte de sentido, ou seja, ficou restrita à percepção do fenômeno, e não ao fenômeno em se perceber um fenômeno.

A percepção não pode ser separada em operações sensoriais e intelectuais, pois o fenômeno perceptivo acontece como um todo e não individualmente. Esse todo perceptivo está ligado ao seu contexto, incorporando afetos e valores no percebido; por exemplo, pode-se perceber que certa função afim é crescente, mas esse fenômeno de ser crescente é parte de outras coisas do contexto dela, como seu coeficiente angular ser ou não positivo. Desse modo, o fenômeno percebido está na coexistência de outras coisas, não é isolado.

Um exemplo para justificar essa relação do todo percebido é retirado da psicologia da Gestalt, a relação figura-e-fundo mostra que a percepção tem uma estrutura que não pode ser obtida e descrita separadamente (Figura 4).

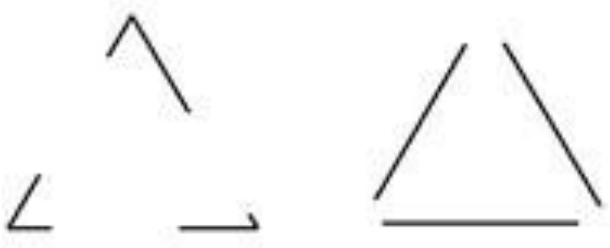


Figura 4.

*Triângulo incompleto (Autores).*

Na Figura 4 acima, é possível perceber a representação de um triângulo mesmo que ele não esteja completo, ou seja, a percepção se dá pela totalidade, não é projetado na figura nada que já não esteja lá desde o início (Saes, 2010). É o que em arte se chama pregnância.

De acordo com Merleau-Ponty, o que sentimos e percebemos são totalidades dotadas de sentido, sendo o todo significativo que confere o sentido à percepção. Além disso, o que é percebido é organizado em formas e estruturas. Como no exemplo da Figura 4, a percepção imediata faz enxergar as partes, mas é necessário fazer uma recomposição da figura a fim de preencher o que falta. E esse processo de "preenchimento" também se observa na visualização, pois, do ponto de vista epistemológico, ela não está completa até que se preencha o que falta, ou seja, até que se visualize a essência do fenômeno matemático.

Faz-se importante, nessa discussão, compreender o que se considera por fenômeno matemático. Uma coisa é o objeto matemático, como, por exemplo, o número primo 5; já o fenômeno seria algo que acontece com esse objeto, por exemplo, o número primo 5 é divisor de 25, essa é uma propriedade do número 5. Portanto, o fenômeno matemático se aproxima da ideia de propriedades matemáticas em que certos objetos intervêm.

Com as diferentes abordagens sobre percepção, que variam desde a perspectiva da sensação gerada pelos sentidos (órgãos do corpo), à percepção intelectual, até a percepção como totalidade do que é percebido, observa-se o modo como ela impulsiona a atividade da representação e o processo da visualização. Portanto, as discussões levantadas, tanto sobre a visão quanto sobre a percepção, fundamentam a construção do tópico em consideração.

## Representação e visualização como formas de acesso ao objeto matemático

O termo "representação" vem do latim *representare* (colocar à frente de fazer presente, apresentar de novo) e para o sentido da palavra encontram-se denominações de interpretação filosófica, teatral, jurídica entre outras: "a representação é, em grande medida, um fenômeno cultural e político, um fenômeno humano" (Pitkin, 2006, p. 16). Pode-se perceber que, na língua portuguesa, a palavra “representar” direciona para diferentes significações, como atuação, em sentido teatral e também político, ou também no sentido de se colocar no lugar de alguma coisa, ou alguém.

O propósito em estudar algumas concepções sobre a representação se justifica na necessidade em se conhecer sua significação elementar, as múltiplas abordagens a fim de relacioná-la com a visualização, um campo de discussão complexo. Porém, para minimizar o escopo de abrangência, o direcionamento dado aqui será para a representação no ensino e aprendizagem de matemática. Por esse motivo, as discussões e reflexões serão desenvolvidas principalmente em torno das ideias de Duval (1999, 2003, 2004, 2012).

O substantivo “representação” refere a um objeto inanimado, uma figura, uma escrita, um símbolo, como, por exemplo, um quadrado, um número, um gráfico, o plano cartesiano. Sobre o uso das representações no ensino e aprendizagem de matemática, Duval aponta que:

> Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra “representação”. Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal “representar”. Uma escrita, uma notação, um símbolo, representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo (sic), uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações “inertes” que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. (Duval, 2012b, p. 268)

Um exemplo dessa distinção entre o objeto e sua representação pode ser captado pela conceitualização de reta. Uma representação da reta muitas vezes não apresenta a sua infinitude, a menos que seja acompanhada de “reticências”, tendo estas um valor representativo, indicando essa infinitude de forma tácita. Portanto, a representação de uma reta pode ser facilmente confundida com segmento de reta ou até mesmo com semirreta. Pela definição de Euclides, “linha é o comprimento sem largura”, “extremidades de uma linha são pontos” e linha reta é “a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma” (Euclides, 2009, p. 97). Essas definições constituem a conceitualização euclidiana de reta. O objeto matemático “reta” é a concretização “ideal” dessa definição de Euclides, o qual não pode ser confundido com nenhuma de suas possíveis representações, as quais podem ser entendidas como formas “epistêmicas” de inteligibilidade do objeto.

Palavras como “objeto”, “conceito”, “conteúdo” e “representação” não são tomadas do senso comum; por esse motivo, faz-se importante uma breve discussão. A diferença entre um objeto e um conceito pode ser ilustrada, por exemplo, tomando como analogia a ideia de uma casa e a planta dessa casa. O conceito refere-se ao planejamento da planta da casa, a sua definição formal, é uma espécie de arquitetura, e ela pode ser representada de diversas maneiras no papel, enquanto que a casa construída é o objeto, sendo assim a concretização ontológica do conceito. Certamente quando se trata no contexto matemático, esse objeto é abstrato.

Para efeitos da visualização, o objeto deve ser entendido como “essência”, ou talvez como “forma”, pois se baseia nas definições mínimas que o delimitam. Mas além da essência, quando se faz aparecer o objeto em suas diversas representações, se está colocando nele diferentes conteúdos. Desse modo, “conteúdo” é o que se coloca no objeto (pensado como essência) para suas diversas manifestações de representação, para fazê-lo inteligível. É importante salientar que o verbo “colocar”, nesse contexto, pode se referir a algo de fora para dentro ou também a algo intrínseco ao objeto, ou seja, parte da constituição do próprio objeto. Esse é um ponto delicado, e como exemplo pode-se pensar, por analogia, na diferença entre a escultura e a modelagem. A palavra escultura vem de esculpir, ou seja, tem-se um material bruto (como uma rocha), esse material é esculpido até que apareça a imagem escultórica, mas essa escultura já estava ali dentro da rocha, a ação tomada é a de tirar os excessos para fazer aflorar a escultura. No entanto, na modelagem, é acrescentado material para, num processo construtivo, dar forma à representação do objeto. Neste último caso, tal ação é guiada por certa racionalidade para não produzir uma imagem deturpada do objeto na representação (Figura 5).

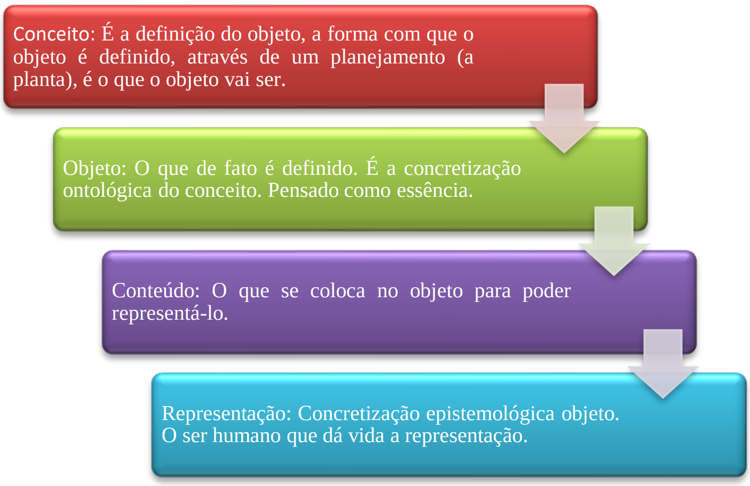



Figura 5.

*Relação entre o objeto, o conteúdo e a representação (Autores).*

Para que uma representação atue como tal, é necessário que ela dê acesso epistêmico ao objeto representado. Como forma de evitar a confusão entre o objeto e sua representação, Duval (2012b) sugere o uso de múltiplas formas de registros de representação (língua natural, registro figural, sistema escrito, gráficos cartesianos). Assim, "o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações" (Duval, 2012b, p. 270).

Uma discussão filosófica, que pode ajudar na compreensão em relação ao objeto e sua representação, é a diferença entre o "ser" e o "aparecer". O "ser" é singular, é a essência, a substância em termos de sua definição, é imutável. Mas esse "ser" não é visível, o que se vê são as suas "aparências", que são tomadas em várias perspectivas, pois se vê de um jeito, de um determinado ângulo, com diferentes enfoques, é a visão do ser epistêmico. A aparência é a manifestação do oculto, objetos da intuição e da experiência. Fazer visível é trazer ao mundo, no qual o ser epistêmico está no processo, ou seja, depende do humano.

O problema em confundir o objeto com a sua representação está no fato de se confundir a aparência com a essência: "passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto" (Duval, 2003, p. 22). Duval (2003) classifica os diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. Na Tabela 2, são apresentados os tipos de representações utilizadas na matemática.

Tabela 2.

*Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática) (Duval, 2003, p. 14)*

| | Representação Discursiva | Representação Não Discursiva |
|---|---|---|
| Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis | Língua Natural<br>Associações verbais (conceituais).<br>Forma de raciocinar:<br>• Argumentação a partir de observações, crenças...;<br>• Dedução válida a partir de definição ou de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configuração em dimensão 0, 1, 2 ou 3).<br>• Apreensão operatória e não somente perceptiva;<br>• Construção com instrumentos. |
| Registros Monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos. | Sistemas de Escritas<br>• Numéricas (binária, decimal, fracionária...);<br>• Algébricas<br>• Simbólicas (línguas formais)<br>• Cálculo. | Gráficos cartesianos<br>• Mudanças de sistema de coordenadas;<br>• Interpolação, extrapolação. |

Quando se tem duas representações de um mesmo objeto em registros diferentes, tais representações apresentam diferentes conteúdos. De acordo com Duval (2016, p. 7): "duas representações de um mesmo objeto produzidas por dois sistemas distintos têm conteúdos diferentes que podem até não ter semelhança alguma com o objeto representado".

Por exemplo, os números racionais podem ser apresentados por meio de: frações, números decimais, percentuais, que estão no mesmo registro de representação (algébrico), além das representações por meio de figuras (registro figural) ou no registro da língua natural, evidenciando, então, diferentes conteúdos das representações apresentadas. É por meio dessas representações que se pode visualizar esse número racional, mas o que significa visualizar esse número racional por meio de suas representações? Significa selecionar essas representações e despi-las de seus conteúdos (concretudes epistêmicas), ficando apenas com a essência de todas elas; essa é a visualização, ela torna inteligível o objeto por meio de suas representações. Portanto a visualização é o processo inverso da representação, uma espécie de reconstrução do objeto (que é dado por relações) a partir de sua representação a fim de torná-lo visível (Figura 6).

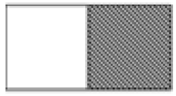
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Meio | $\frac{1}{2}$ | 0,5 | 50% |  |
| Língua Natural | Fração | Decimal | Percentual | Figural |

Figura 6.

*Representações de um mesmo número racional (Autores).*

A condição de destaque está na importância em se diferenciar um objeto de sua representação, o que causa problemas de natureza epistemológica, como, por exemplo, a representação de um hipercubo (cubo em 4 dimensões) e problemas de natureza cognitiva, como o objeto número, que não tem nenhuma semelhança perceptível com o objeto representado, como no caso dos números racionais representados por frações. De acordo com Duval (2003): “A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não poder ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível” (Duval, 2003, p. 21).

O que significam as representações semióticas de objetos de 4 dimensões para Duval? A primeira consideração se faz em relação ao conteúdo da representação que torna o hipercubo acessível, podendo ser pensado em relação ao seu número de vértices, número de lados, tentando relacionar, por analogia, com os “correspondentes” objetos que estão em 3 dimensões, levando para 4 dimensões. É uma espécie de generalização por analogia. Outra abordagem trata de trazer uma espécie de recomposição, movimentação, uma dinamicidade do processo em geral, no intuito de obter uma ideia global do hipercubo, embora não se consiga vê-lo. O hipercubo tem muitas coisas além do que se está colocando nele, sendo a visualização um modo de experienciar e construir a configuração desse desconhecido, levando a novas conjecturas e descobertas. Mas o que significa experienciar o objeto? Significa fazer uso das representações como mecanismos da experiência. Qual é a relação da experiência com as representações? Por exemplo, trabalhar com as representações do hipercubo de modo que tais representações sirvam como mecanismo da experiência matemática.

Certamente, compreender e tentar concretizar objetos tetradimensionais são ações complexas, pois o mundo em que se vive é de 3 dimensões. Mas se o mundo fosse constituído num espaço bidimensional, essa dificuldade permaneceria ao se tentar concretizar o tridimensional. Imagine-se vivendo num mundo de 3 dimensões, observando os “moradores” do espaço bidimensional (digamos o plano do chão numa sala), seria fácil de perceber que esses “moradores” são destituídos de altura, mas têm comprimento e largura; aliás, eles não têm a percepção da altura. A mesma coisa acontece para quem observa, de um espaço quadrimensional, os objetos do espaço tridimensional. Por isso, um modo efetivo para se compreender os objetos na dimensão 4 é por meio da analogia e, por conseguinte, a visualização das relações que se estabelecem pelas analogias.

Um exemplo da dualidade entre um objeto e a sua representação está no conceito de ponto. De acordo com Euclides, no livro I de *Os elementos*, “ponto é aquilo de que nada é parte” (Euclides, 2009, p. 97); então, um ponto geométrico, no sentido de Euclides, é a mesma coisa que a intersecção de duas retas? Ou a mesma coisa que um ponto desenhado para delimitar um segmento de reta? Não, pois, na definição de Euclides, tem-se a concretização ontológica do objeto ponto, enquanto na intersecção de duas retas tem-se a representação desse ponto, ou seja, a concretização epistemológica. A representação de um objeto é determinada, muitas vezes, pelo contexto do objeto. No caso das retas que se intersectam, o ponto é determinado pelo exterior do ponto. No caso do extremo do segmento, o ponto está determinado pelo segmento que tem aquele extremo.

Entre os diferentes modos de representar o objeto matemático ponto, quais deles correspondem ao objeto? “Do ponto de vista matemático, o que pode ser considerado o objeto em si é o enunciado de sua definição” (Duval, 2016, p. 16), apresentada no registro discursivo, ou seja, a definição proposta por Euclides.

A concepção de representação se apresenta em três situações distintas: a representação mental, a representação computacional e a representação semiótica, sendo que a diferença entre elas está centrada na função (Duval, 2012b). O exemplo citado anteriormente, sobre o ponto, pode ser considerado como uma representação mental, pois o ponto é ausente na interseção de duas retas, mas se coloca o ponto mentalmente como modo de concretizá-lo.

A primeira caracteriza-se pela evocação dos objetos ausentes, ou o que é evocado, tendo a função de objetivação. Relaciona-se ao conjunto de imagens que permitem uma visão do objeto na ausência de um significante, aqui se incluem, além de imagens, crenças, concepções, ideias, noções e até mesmo fantasias (Andrade Filho, 2013). A representação computacional está associada à codificação da informação, sua função é de tratamento automático ou quase automático, ou seja, pode-se conhecer um gráfico, por exemplo, mas sem entender seu significado e funcionamento.

As representações semióticas, segundo Duval (2012b, p. 269), “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”, realizando, assim, uma função de objetivação, uma função de expressão e função de tratamento intencional. Por exemplo, o ponto representado por par ordenado de números.

Para se fazer ciência, há inúmeros instrumentos físicos que dão suporte para os procedimentos que provocam novas descobertas. Porém, na matemática, quais seriam esses instrumentos físicos? Não há um instrumento físico que dê acesso aos objetos matemáticos, mas há instrumentos mentais, por exemplo, a régua (idealizada) e o compasso (idealizado), como usado nos *softwares* de geometria dinâmica. Na geometria grega, há um apelo ao processo construtivo; para dar concretude a um ponto, é possível usar como ferramenta a intersecção de duas retas. Outro exemplo, dois círculos que se cortam representam uma reta, já seja evocando-a, aquela que é determinada pelos pontos de interseção. Nesse último caso, intervém um dos axiomas, na sua forma construtiva, da geometria euclidiana: por dois pontos pode-se traçar uma reta.

Conforme aponta Duval (2016, p. 17), "a matemática é a única disciplina em que se trabalha exclusivamente com representações semióticas, haja vista que não existe outro modelo de acesso aos objetos matemáticos". Tal afirmação é questionável, pois pensar que a matemática é somente semiótica significa que ela é exclusivamente linguagem.

No entanto, não é exclusividade da representação semiótica esse acesso aos objetos matemáticos. A imaginação e a intuição também são meio para esse acesso. De acordo com (Gusmão, 2018):

> (...) a imaginação e a intuição são "mecanismos" que a experiência matemática nos dá para o acesso ao conhecimento dos objetos matemáticos, portanto, há um certo "empirismo" nesse processo que deve ser incorporado a essa concepção de matemática. Resumidamente, o empirismo que adotaremos para a matemática consiste em considerar a possibilidade de fazermos observações e experimentações com os objetos matemáticos mediadas pela imaginação e a intuição enquanto forma de experiência matemática. (Gusmão, 2018, p. 111)

A imaginação e a intuição são instrumentos mentais para a experimentação com os objetos matemáticos. Os objetos que são intuídos e imaginados não são os próprios objetos, ou seja, são os objetos enquanto entes relacionais e não enquanto entes concretos. São objetos que cobram existência por meio de suas relações, suas definições, e essas podem ser dadas por meio de representações semióticas.

A representação semiótica, para Duval (2012b), envolve algumas atividades cognitivas fundamentais, dentre elas o tratamento e a conversão de uma representação. Os tratamentos são transformações de representações dentro do registro no qual elas são formadas. Por exemplo, encontrar uma fração equivalente à outra, trata-se uma transformação, pois se mantém no mesmo registro de representação. Equações e sistema de equações, também, preservam o registro.

A conversão de uma representação consiste em mudar de registro, preservando os mesmos objetos. De acordo com (Duval, 2012b), "A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A descrição é uma conversão de uma representação não verbal em uma função linguística" (Duval, 2012b, p. 272), etc.

Retomando a proposta em se discutir e compreender a abrangência do termo "representação", destacam-se suas aproximações e distanciamentos com a concepção de visualização. Nas discussões apresentadas, pode-se perceber que a representação envolve atividades cognitivas profundas, sendo nesse processamento das representações que a visualização se faz presente.

Construir as classes de equivalência, determinadas por uma relação de equivalência entre diversos objetos, é uma forma de visualizar os objetos que essas classes determinam. Por exemplo, como se visualiza o objeto direção de uma reta? O que equivale perguntar: como se visualiza o ângulo de inclinação de uma reta? Selecionam-se todas as retas que são paralelas a essa reta e se define a classe de equivalência dessa reta a respeito da relação de paralelismo.

Além da comunicação, a representação também se coloca na função de tratamento e objetivação (tomar consciência). Já a visualização se relaciona a um modo de acesso não somente aos objetos por meio de suas representações, mas às relações entre objetos, propriedades e conceitos. Visualizar padrões, quando se referem às sequências numéricas, por exemplo, congruências quando se trata das correspondências entre objetos geométricos, enfim, “consiste em captar diretamente a configuração completa das relações e em discriminar o que é relevante nela” (Duval, 1999, p. 13). Assim, é importante salientar que o que é visualizado não é o objeto ao todo, e sim as relações que o definem, o que exige certo grau de abstração (Cifuentes & Santos, 2019).

A visualização não é o ponto de partida de um pensamento matemático nem o fim, ela é o processo. Se ela fosse considerada ponto de partida, estaria imediatamente se propondo a par da função da visão, o olhar imediato.

A representação pode ser considerada, em alguns momentos, como o ponto de partida, quando se inicia uma abordagem por algum tipo de representação, ou ponto de chegada, quando se realiza uma transformação ou conversão. Por exemplo, quando se trata de dois conjuntos numéricos, a representação geralmente é realizada conforme as Figuras 7 e 8.

$$\boxed{\frac{1}{6} \; ; \; \frac{4}{24}}$$

Figura 7.

*Representação simbólica dos números racionais (Autores).*

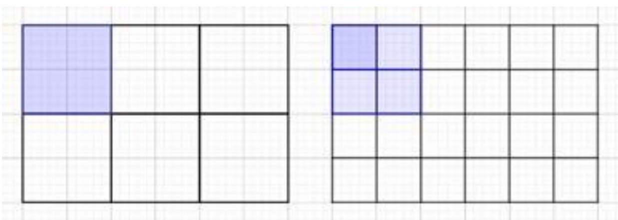


Figura 8.

*Representação geométrica dos números racionais (Autores)*

Na primeira representação, o que é possível visualizar além dos algarismos? Primeiramente, que não se trata do algarismo 1 e do algarismo 6 em suas individualidades, e sim do número $\frac{1}{6}$, da mesma forma para o número $\frac{4}{24}$. Além disso, o processo de visualização dá abertura para se pensar na relação entre as duas frações, um modo de conjecturar a equivalência.

Na segunda representação, pode-se extrair a fração que ela determina, mas, além disso, pela visualização é possível pensar na sobreposição das duas figuras e conjecturar a equivalência. Obviamente que outros conteúdos podem ser explorados por meio de tais representações, mas o objetivo aqui é evidenciar o processo da visualização e não o objeto representado.

Um exemplo apontado por Duval (1999) é a construção do gráfico correspondente a uma função. Construir o gráfico não implica que o aluno esteja visualizando, mas, sim, representando, processo que converte o registro escrito para o registro gráfico. Essa construção requer uma sucessão de passos e apreensões locais; a atenção está nas unidades e não na configuração final. Esse tipo de atividade da representação é um processo que requer um passo a passo, uma forma de se fazer, diferente da visualização que não requer um modelo ou uma regra de execução. Mas ambas, tanto a visualização quanto a representação, podem ser entendidas como um processo, sendo a primeira de natureza epistêmica enquanto a segunda é de natureza cognitiva.

A visualização tem o papel de revelar o objeto matemático por meio de seus registros representacionais e a função de experienciar a matemática por meios de suas relações. Pela ideia apresentada por Duval (1999), "a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica"; ampliando a proposta do autor, a visualização de um objeto é baseada na produção das representações semióticas do objeto.

Portanto, o que se pretende visualizar, os objetos ou suas representações? Certamente os objetos, pois as representações já são naturalmente visíveis, enquanto que visualizar os objetos requer utilizar-se de suas representações a fim de buscar suas equivalências para, desse modo, se acessar o objeto.

Seja num sentido ou em outro, é importante destacar que as relações apresentadas não esgotam as compreensões sobre a visualização, nem mesmo de representação.

## Considerações finais

Nesta pesquisa, pode-se observar, com base nas diversas abordagens apresentadas, como a visão, a percepção, a representação e a visualização se relacionam, se complementam e tornam-se significativas no processo da aprendizagem da matemática. Retomando a questão que conduziu às reflexões levantadas, principalmente sobre o modo pelo qual a visualização e a representação se relacionam no processo de aprendizagem da matemática, alguns pontos precisam ser evidenciados.

Primeiramente, antes de chegar às considerações sobre a representação, o estudo realizado sobre a visão traz discussões sobre as distinções entre ver e visualizar, bem como entre ver e representar. Isso não significa que tais atividades não se complementam, pois é a dinamicidade do olhar que enriquece a representação e a visualização. Entretanto, é importante diferenciá-las em suas significações para não serem utilizadas como sinônimos.

Além da visão, um estudo introdutório também foi apresentado sobre a percepção, em suas diferentes compreensões. A percepção não é exclusiva dos sentidos, da sensação, mas ela envolve a consciência de quem percebe, portanto, a percepção e a pessoa que percebe são indissociáveis. Assim também acontece na representação e na visualização, elas trazem consigo elementos da consciência de quem as representam e de quem as visualizam.

Sobre a relação entre a representação e a visualização, a primeira torna acessível o objeto matemático, já a segunda, ao despir as concretudes das representações, permite visualizar a essência do que foi representado. Esse olhar sobre a essência do objeto se dá pela visualização das relações, transformações, reconfigurações, enfim, pela dinamicidade atribuída ao processo de visualização.

Assim, as discussões e reflexões, levantadas neste estudo, perfilam um entendimento preliminar sobre a visualização, rompendo com algumas preconcepções. Ressalta-se que a visualização é entendida nesta pesquisa como um processo no modo de se pensar na matemática.

## Referências


Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia* (5ª ed.). (A. B. Benedetti, Trad.) Martins Fontes.

Andrade Filho, B. M. (2013). *Processos de Conversão de Registros em Língua Natural para Linguagem Matemática: Análise com base na teoria da relevância.* [Dissertação de Mestrado, Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão]. https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/3438/1/107703_Bazilicio.pdf

Bachelard, G. (2011). *A formação do espírito científico* (9ª ed.). Contraponto.

Caminha, I. d. (2014). A cegueira da visão segundo Merleau-Ponty. *Revista de Estudos Filosóficos* (13), 63-72. https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/revistaestudosfilosoficos/art5%20rev13.pdf

Cifuentes, J. C. (2005). Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. *Boletim GEPEM*, *46*, 55-72.

Cifuentes, J. C. (2010). Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: Uma "Odisséia Espiritual". In S. M. Clareto, A. R. Detoni, & R. M**.** Paulo. *Filosofia Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas*. (pp. 13-31). UFJF.

Cifuentes, J. C., & Santos, A. H. d. (2019). Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. *Revista Educere Et Educare*, *15*(33), 21. file:///C:/Users/Alessandra/Desktop/22530-87783-1-PB.pdf.

Dicionário Michaelis (2022). *Perceber*. Melhoramentos. https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/percep%C3%A7%C3%A3o/

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Morelos.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreesão em matemática. In S. D. Machado, *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* (pp. 11-33). Papirus.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* (M. V. Restrepo, Trad.). Peter Lang.

Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(1), 118-138. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, *7*(2), 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2016). Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. *Revemat*, *11*(2), 1-78. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p1

Euclides. (2009). *Os Elementos.* (I. Bicudo, Trad.). UNESP.

Flores, C. R. (2007). *Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva* (Vol. 4). Musa.

Flores, C. R. (2010). Cultura Visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares. *Zetetikê*, *18*, 271-294. doi:https://doi.org/10.20396/zet.v18i0.8646665

Gusmão, L. D. (2018). *A elaboração de uma "epistemologia da imaginação e da intuição" no campo da matemática e implicações para a educação matemática: diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard.* [Tese de doutorado educação matemática, PCM UEM, Maringá]. http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4661.

Klee, P. (1974) *Discurso,* Universidade de São Paulo. Departamento de Filosofia - vol. 5-7, p. 88. 262 páginas.

Merleau-Ponty. (2003). *O visível e o invisível.* Perspectiva.

Paulo, R. M. (2010). Diagramas: significado epistemológico e recurso na produção do conhecimento matemático. In S. M. Clareto, A. R. Detoni, & R. M. Paulo. *Filosofia Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas* (pp. 41-51). UFJF.

Pitkin, H. F. (2006). Representação: palavras, instituíções e ideias. *Lua Nova: Revista de Cultura e Política*, *67*, 15-47. http://www.scielo.br/pdf/ln/n67/a03n67.pdf

Saes, S. F. (2010). Percepção e imaginação. In M. Chaui, & J. S. Filho, *Filosofias: O prazer do pensar* (Vol. 6, p. 75). Martins Fontes.

Santos, D. V. (2011). Acerca do conceito de representação. *Revista de Teoria da História*, *6*(2), 27-53. https://www.revistas.ufg.br/teoria/article/view/28974

Silva, V. R. D. (2000). A construção do fenômeno pela (re)construção do pensamento: uma relação de complexidade. In J. B. R. Desaulniers. *Fenômeno: Uma teia de relações*. (pp.69-85). ediPUCRS.