ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p278-328

Percurso de estudo e pesquisa: um dispositivo de pesquisa e formação profissional

Study and research path: A device for research and professional formation

Recorrido de estudio e investigación: un dispositivo para la investigación y la formación profesional

Parcours d'étude et de recherche : un dispositif pour la recherche et la formation professionnelle

Rita Lobo Freitas [1]
Universidade de Estado da Bahia (UNEB)
Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-6914-1483

Saddo Ag Almouloud [2]
Universidade Federal do Para (UFBA)
Doutor em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Neste texto nós apresentamos a estruturação de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) realizado no âmbito da formação inicial de futuros professores de matemática, cursistas do estágio supervisionado em uma universidade pública no Brasil. Um dos objetivos da pesquisa se configurou na constituição de um dispositivo teórico-metodológico capaz de promover pesquisa e formação continuada de professores sobre tópicos de Geometria Analítica Plana. O trabalho construído em torno da questão geratriz do PEP, “como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?”, trouxe a possibilidade de responder à questão geral da pesquisa promovendo um processo de formação profissional, a partir de um dispositivo teórico-metodológico com certas características. Os momentos de planejamento identificados nas atividades realizadas pelos professores estagiários foram bastante significativos, apesar de não ser possível identificar nas gravações as possíveis praxeologias pensadas para o ensino de GAP. Globalmente, o PEP-FP desenvolvido se mostrou ser em um dispositivo teórico-metodológico que tem um potencial para a pesquisa científica em Didática da Matemática e para a formação profissional de futuros professores.

[1] rlobo@uneb.br
[2] saddoag@gmail.com

Palavras-chave: Geometria analítica plana**,** Teoria antropológica do didático, Percurso de estudo e pesquisa, Formação profissional, Dispositivo teórico-metodológico.

Abstract

In this text, we present the structuring of a study and research path (SRP) carried out within the scope of the initial education of pre-service mathematics teachers attending the curricular supervised teaching practice at a public university in Brazil. One of the research objectives was the constitution of a theoretical-methodological device capable of promoting teachers' research and continuing education on plane analytic geometry (PAG) topics. The work built around the generative question of the SRP, "How to teach the analytic geometry of the point and the line?", brought the possibility of answering the general question of the research promoting a process of professional formation from a theoretical-methodological device with specific characteristics. The planning moments identified in the activities executed by the pre-service teachers were quite significant. However, we could not identify in the recordings the possible praxeologies thought for the teaching of the PAG. Overall, the SRP-PF developed proved to be a theoretical-methodological device with the potential for scientific research in the didactics of mathematics and the professional formation of pre-service teachers.

Keywords: Plane analytic geometry**,** Anthropological theory of the didactic, Study and research path, Professional formation, Theoretical-methodological device.

Resumen

En este trabajo presentamos la estructura de un Trayecto de Estudio e Investigación (PEP) realizado en el contexto de la formación inicial de futuros profesores de matemática, estudiantes de pasantía supervisada en una universidad pública de Brasil. Uno de los objetivos de la investigación fue la constitución de un dispositivo teórico y metodológico capaz de promover la investigación y la formación continua de profesores sobre temas de Geometría Analítica Plana. El trabajo construido en torno a la pregunta generadora del PEP "¿cómo enseñar la geometría analítica del punto y de la recta?", trajo la posibilidad de responder a la pregunta general de investigación promoviendo un proceso de formación profesional, a partir de un dispositivo teórico metodológico con determinadas características. Los momentos de planificación identificados en las actividades realizadas por los profesores en formación fueron bastante significativos, aunque no fue posible identificar en los registros las posibles praxeologías pensadas para la enseñanza de la GAP. En general el PEP-FP desarrollado, demostró ser en un dispositivo teórico y metodológico que tiene un potencial para la investigación científica en Didáctica de la Matemática y para la formación profesional de futuros profesores.

Palabras clave: Geometría analítica plana, Teoría antropológica de la didáctica, Recorrido de estudio e investigación, Formación profesional, Dispositivo teórico y metodológico.

Résumé

Dans ce texte nous présentons la structure d'un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) réalisé dans le contexte de la formation initiale des futurs professeurs de mathématiques, étudiants en stage supervisé dans une université publique au Brésil. L'un des objectifs de la recherche présentée a été configuré dans la constitution d'un dispositif théorique-méthodologique capable de promouvoir la recherche et la formation continue des enseignants sur les thèmes de la Géométrie Analytique dans le plan (GAP). Le travail construit autour de la question génératrice du PER "comment enseigner la géométrie analytique du point et de la droite ?", a apporté la possibilité de répondre à la question générale de la recherche en promouvant un processus de formation professionnelle, à partir d'un dispositif méthodologique théorique avec certaines caractéristiques. Les moments de planification identifiés dans les activités réalisées par les enseignants stagiaires ont été assez significatifs, bien qu'il n'ait pas été possible d'identifier dans les enregistrements les possibles praxéologies pensées pour l'enseignement de la GAP. Dans l'ensemble, le PER-FP développé, c´est montré être un dispositif théorique et méthodologique qui a un potentiel pour la recherche scientifique en didactique des mathématiques et pour la formation professionnelle des futurs enseignants.

Mots-clés : Géométrie analytique plane, Théorie anthropologique de la didactique, Parcours d'étude et de recherche, Formation professionnelle, Dispositif théorique et méthodologique.

Percurso de estudo e pesquisa: um dispositivo de pesquisa e formação profissional

As pesquisas que se desenvolveram em torno da Teoria Antropológica do Didático (TAD) tanto na França como na Espanha, desde 1999, trazem contribuições que nos permitem afirmar que a teoria passou, e talvez possa ainda passar, por um processo de transformação. Tais transformações emergem, cada vez mais, com o objetivo de dar conta de analisar e explicar os fenômenos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Incluímos em tais fenômenos as atividades e funções do professor, quando se propõe a ensinar algo a seus alunos, ou ainda, a formação desse professor quando está diante do desafio que a tarefa de ensinar lhe impõe.

Neste processo, a transposição didática que se dá no interior da instituição sala de aula, na prática do professor, é influenciada, consciente ou inconscientemente, pelo equipamento praxeológico do professor, que inclui diferentes conhecimentos inerentes à profissão e construídos ao longo da formação. Tais conhecimentos incluem os conhecimentos didáticos, os quais estão, em nosso ponto de vista, no cerne da atividade de transposição didática dos saberes matemáticos em jogo.

O enfoque antropológico da TAD prima pela atividade matemática interpretada ou modelada enquanto uma atividade humana como outra qualquer, em contrapartida unicamente à ideia de um sistema de conceitos ou processos cognitivos.

No sentido dado por Sierra (2006), a atividade matemática institucional inclui a atividade matemática escolar como caso particular. O modelo proposto pela TAD é o de um modelo de conhecimento matemático que permita descrever a matemática escolar como um caso particular do processo didático. Corroboramos com esse autor no que se refere à didática, no âmbito desse enfoque, como sendo tudo que está relacionado ao estudo, produção e disseminação (ou reprodução) do conhecimento matemático nas diferentes instituições sociais.

Essa perspectiva coloca o ensino e a aprendizagem da matemática escolar como aspecto geral, o todo, e o processo didático como a particularidade, o caso particular. No sentido de Chevallard (2009a, p. 27), a didática das disciplinas "é a ciência das condições e restrições da difusão das praxeologias em instituições da sociedade". Nesta perspectiva, nosso estudo partiu de uma visão global do conhecimento matemático, para o caso particular do problema didático de ensinar e aprender certos conceitos de Geometria Analítica Plana.

É nesse contexto teórico que se insere a nossa pesquisa, realizada com vinte e oito estagiários de um curso de Licenciatura em Matemática na Bahia, Brasil, inscritos no estágio supervisionado curricular e participantes voluntariamente de uma proposta de formação de professores a respeito de tópicos de Geometria Analítica Plana (GAP). Nesta formação, o

Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Profissional (PEP-FP) foi constituído com base nos estudos de Sierra (2006), Sierra e Gascón (2018) tendo o amparo teórico da TAD.

Ressaltamos que, no âmbito da TAD, os estudos desses autores se configuraram como as primeiras abordagens do PEP-FP enquanto possibilidade de Formação de Professores (FP) na Espanha. Em nosso estudo utilizamos a expressão "formação profissional", justamente pelo aporte teórico adicional de Shulman (1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006). Tal aporte fundamentou a concepção de conhecimento docente, enquanto parte constituinte do equipamento praxeológico do professor ou futuro professor, nesse sentido, caracterizando-se o PEP enquanto formação profissional, PEP-FP.

Do ponto de vista global, o PEP-FP desenvolvido com certas características, especificamente na fase experimental, coadunou em um dispositivo teórico e metodológico que tem um potencial para pesquisa científica em Didática da Matemática e para formação profissional de futuros professores, e acrescentamos, como possibilidade de aplicação deste dispositivo em microestratégias didáticas, ou seja, estratégias de ensino em situações de sala de aula.

Aspectos teóricos fundamentais

Retomando a discussão a respeito do processo de evolução da TAD, as diversas pesquisas que se debruçaram sobre esta teoria também, contribuíram, em nosso ponto de vista, para a consolidação, segundo Chevallard (2009), dessa engenharia didática: o "*Parcours d`Étude et de Recherche*", mais popularmente conhecido como PER, em francês, ou Percurso de Estudo e de Pesquisa (PEP), em português brasileiro, ou ainda "*Recorrido de Estudio e Investigación"* (REI), em espanhol. Adotamos em nosso estudo a sigla brasileira PEP.

Dito isto, destacamos alguns elementos teóricos que, em nosso entendimento, ajudam a explicar o funcionamento do dispositivo PEP-FP/TAD no âmbito da formação professional.[3]

Antes da abordagem teórica proposta neste texto, vale ressaltarmos a estratégia, a forma da escrita da TAD, desenvolvida por Yves Chevallard em diversos dos seus textos. É o uso de símbolos matemáticos e representações algébricas para explicar as estruturas teóricas apresentadas em sua teoria. Chevallard (2020) enfatiza a importância do uso e compreensão desta linguagem e das funções que ela tem para uma melhor compreensão de sua teoria. Nesse

[3]Mantivemos a expressão formação profissional, pela versão do estudo concebida e apresentada no 6° Congresso Internacional da TAD, realizado de 22 a 26 de janeiro de 2018, Autrans, França. PEP de formação profissional, em vez de formação de professores.

sentido, tal linguagem é também muito utilizada na obra a respeito do PEP, e nos esforçaremos por justificar e explicar estas simbologias.

Sierra e Gascón (2018) desenvolveram um PEP de formação de professores sobre sistema de numeração, com professores do ensino secundário espanhol (como educação básica no Brasil), utilizando uma estratégia para a construção de uma praxeologia matemática para o ensino. Esta estratégia consiste, em linhas gerais, em expandir uma rede de questões que surgem à medida em que o processo de experimentação se realiza, e incluem-se novas questões que fazem parte da razão de ser do objeto matemático de estudo, a qual deseja-se destacar para os participantes. Apoiados na investigação desenvolvida por esses autores, construímos e discutimos o que denominamos de funcionamento *do dispositivo teórico PEP-FP/TAD,* que foi a base de nossa experimentação. A noção chave de PEP foi o ponto de partida desta investigação. A definição proposta por Chevallard (2009, p. 2, tradução nossa) para o sistema didático da engenharia é a seguinte:

> X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, um jornalista etc.) e Y uma equipe (em geral reduzida: y pode até ser um conjunto vazio) de ajuda ao estudo e de diretores de estudo (professor, tutor, orientador de pesquisa, diretor de redação etc.). O objetivo da construção desse sistema didático é estudar Q, isto é procurar fornecer uma resposta R que satisfaça certas restrições *a priori,* inclusive de pôr a prova pela confrontação com o *milieu x adidático* apropriado. A síntese do trabalho esperado de X sob a orientação e supervisão de Y pode ser escrita como $S(X, Y, Q) \rightarrow R$.

Em nossa investigação, retomamos os elementos constituintes do sistema didático $S(X, Y, Q) \rightarrow R$, em que definimos:

- X é o grupo de estudantes da licenciatura que participam do estágio curricular supervisionado, que denominamos apenas de estagiários ou professores estagiários. Poderia estar incluído nesse grupo o professor de estágio, mas em nossa pesquisa esse ator não se configura como sujeito de análise, pois não participou efetivamente em nossa fase experimental, porém, levamos em conta certas restrições institucionais que se relacionem com as ações do professor de estágio.
- Y é o conjunto composto pela primeira autora deste capítulo, quem conduziu e organizou o estudo, sob a supervisão do segundo autor. O investigador principal é a pesquisadora, tendo o professor de estágio e o supervisor a função de viabilizarem a realização dos encontros de estudo e apoiarem as atividades, no entanto, é a pesquisadora que organizou e conduziu a realização dos episódios.
- Q_0 é uma questão geratriz, ou seja, geradora do estudo e de outras questões;

- R é a resposta para questão Q_0, R deve satisfazer ao conjunto de restrições *a priori*;

O sistema didático S é a base da organização do *estudo*. No âmbito da TAD, o *didático* é tudo que está relacionado com o estudo em desenvolvimento, englobando as noções de ensino e aprendizagem normalmente utilizadas na cultura "pedagógica"1; a palavra "estudo" tem uma visão ampla. O *estudo* é, portanto, tudo aquilo que é realizado em uma determinada instituição com o objetivo de fornecer as respostas às perguntas ou mesmo realizar as tarefas "problemáticas", se estas aparecerem. Mas a atividade de estudo não deve ser restrita ou confinada, como ressalta Sierra (2006).

Segundo esse mesmo autor, a noção de estudo, no caso da matemática, aparece como uma noção integradora que permite analisar, sob uma mesma ótica, o trabalho que realiza o matemático investigador, que realiza o professor quando ensina matemática, e o aluno quando aprende na escola.

A atividade de estudo, segundo Sierra (2006), se realiza em comunidade, o que ele denomina de *comunidades de estudo*, tanto no caso em que se constrói matemática nova como quando se ensina e se aprende matemática conhecida (situação do professor e dos alunos). Tal atividade se realiza com a ajuda de vários diretores de estudo, o investigador principal e o professor, e é guiada por um programa de estudo, em forma de programa de investigação e de currículo. Neste esquema o professor aparece como diretor ou um dos diretores, de uma comunidade de estudo formada por ele mesmo ou seus alunos.

A TAD parte do princípio de que o saber matemático se constrói como resposta ao estudo de questões problemáticas, aparecendo assim como resultado, o produto de um processo de estudo. Essa ideia está fortemente presente no desenvolvimento de um PEP.

Nesse sentido, o PEP parte de uma questão geratriz Q_0 proposta dentro de um sistema didático $S(X; Y; Q)$, ou seja, segundo Chevallard (2009), o objetivo em construir este sistema didático é estudar Q. Procurar fornecer uma resposta R, que satisfaça certas restrições *a priori*, inclui pôr a prova por meio de confrontação *com o meio adidático* apropriado. Adidático, porque os aprendizes desconhecem a intenção *do professor*. A síntese que se espera do trabalho de X sob a supervisão de Y pode ser escrita, segundo autor, como: $S\ (X, Y, Q) \rightarrowtail R$.

Chevallard (2009, p.1) denomina esse domínio de pesquisa de *didática da investigação codisciplinar.* O autor explica que este tipo de investigação raramente mobiliza uma ferramenta praxeológica, de uma única disciplina, na produção da resposta R; normalmente, precede uma heterogênese. Significa dizer que, com algumas exceções, a pesquisa "trabalha" com ferramentas praxeológicas de várias disciplinas, portanto, é uma abordagem multidisciplinar.

O autor ainda afirma que engajar-se nesta investigação equivale a participar de PEP, motivado por esta mesma investigação. Para elaborar uma resposta R, é necessário reunir e organizar um ambiente de trabalho (meio) que contenha recursos antigos e novos que X utilizará. Nesses recursos, incluem-se algumas respostas “prontas” para Q_i, que são validadas pela instituição ou outras instituições. Essas respostas serão aquelas que supostamente receberam um “selo” institucional e denotam-se por ${R^\lozenge}_i$, ou seja, são respostas que se justificam e fazem parte de um repertório no interior da instituição. A análise dessas respostas fornecerá materiais para a construção da resposta R, ela mesma denotada por $R^\heartsuit$, por Chevallard (2009).

O autor ressalta que outras obras O provenientes da cultura fornecerão ferramentas para analisar as respostas $R^\lozenge$ e a construção da reposta esperada $R^\heartsuit$. As obras de O serão, em parte, resultados de várias disciplinas estabelecidas, mesmo se algumas delas provenham de disciplinas não reconhecidas, porque são emergentes ou culturalmente depreciadas.

Em nosso ponto de vista, no âmbito do dispositivo teórico voltado para a formação do professor de matemática, os diferentes elementos de $O = \{O_1, O_2, \ldots O_n, O_{n+1} \ldots O_m\}$ podem ser aqueles que emergem da cultura escolar, sob a ótica do professor que ensina, por exemplo, os conhecimentos oriundos da tecnologia e da pedagogia, ou até mesmo do conhecimento cotidiano dos sujeitos, os quais nem sempre possuem o selo institucional. Significa dizer que os O_m poderão auxiliar como ferramentas de análise das respostas ${R^\lozenge}_1$, ${R^\lozenge}_2, \ldots$ ${R^\lozenge}_n, \ldots$ de cada questão gerada no decurso do PEP, e tudo isto corrobora para a resposta esperada $R^\heartsuit$.

Segundo Chevallard (2009), a síntese detalhada do trabalho de investigação se inscreve no que chamou sistema herbatiano, denotado de forma condensada pela representação: $(S(X;Y;Q) \Rightarrow M) \Rightarrow R^\heartsuit$, no qual $S(X;Y;Q)$ representa o sistema didático desenvolvido sobre a sujeição de um meio M de condições e restrições. Este sistema corrobora para se chegar à resposta $R^\heartsuit$. Expandindo a expressão de seus termos, temos:

$$[S(X;Y;Q) \Rightarrow \{ {R^\lozenge}_1, {R^\lozenge}_2, \ldots {R^\lozenge}_n, O_{n+1}, \ldots O_m \Rightarrow M\}] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

A noção de PEP, segundo Chevallard (2009), vai possibilitar incluir em um contexto mais amplo, um conjunto de práticas sociais de conhecimentos, mais ou menos discrepantes, seja uma pesquisa científica, uma investigação policial ou jornalística etc. Nesse sentido, incluímos os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, ou outras áreas, como na física, na química etc.

No âmbito dessas práticas sociais, a Educação Matemática, enquanto área em constituição, se beneficia da metodologia de engenharia didática de PEP, tanto no âmbito da pesquisa como no âmbito dos processos de ensino e de aprendizagem. O sistema antropológico da TAD está no cerne da constituição e da análise das práticas que são desenvolvidas por meio do funcionamento do dispositivo *TAD/PEP-FP*, tendo a base nas praxeologias matemáticas.

O autor esclarece que

> [...] O estudo escolar é, no entanto, o que parece menos prestar-se a uma modelização em termos de PEP, na verdade, podemos descrever as formas tradicionais dizendo que, se ela supõe uma enquete sobre Q, isto é feito pelo professor e opera-se em outra cena que a classe (Chevallard, 2009. p. 2, tradução nossa).

O PEP nos traz a possibilidade de romper com o modelo tradicional de ensino e ascender para um outro, em que o aluno é responsável por sua aprendizagem e retoma o processo de investigação científica. Ao que parece, é nesse sentido que Chevallard (2009) explica, na sequência, que o esquema «herbartien» evoca uma forte obrigação de uma democracia a cumprir, quando cada cidadão ou coletivo de cidadãos deve ser capaz de investigar qualquer assunto que goste ou tenha interesse, usando em particular o equipamento praxeológico que a base de sua formação escolar lhe forneceu.

Em nosso ponto de vista, uma suposta contradição, na verdade, depõe a favor de um modelo emancipatório e democrático, e por esta razão é que o PEP é difícil de ser implementado no âmbito escolar. No entanto, várias pesquisas na França, Espanha e no Brasil, por exemplo, vêm conseguindo implementar o PEP, o que significa dizer que as dificuldades estão sendo contornadas durante o processo de investigação com essa engenharia didática.

No caso de um estudo com futuro professores, como os *professores estagiários*, o equipamento praxeológico, no sentido de Chevallard (2009), deve incluir, além dos conhecimentos adquiridos na formação escolar (educação básica), aqueles adquiridos durante a formação inicial de professor (na licenciatura), incorporados em seu repertório. Nossa hipótese é que o seu equipamento praxeológico também possa ser ampliado, e os saberes associados possam também ser ressignificados, durante as sessões (episódios) do PEP. Estamos supondo que um PEP-FP poderá possibilitar aos professores estagiários incorporar conhecimentos novos e/ou ressignificar aqueles já existentes, em termos de saberes docentes.

O PEP-FP, ou PEP de formação profissional, se refere ao fato de estarmos incluindo na formação desses *professores estagiários* conhecimentos que, em nosso ponto de vista, são básicos para a profissão de professor. ParaTardif (2012), os saberes profissionais são aqueles transmitidos pelas instituições que formam professores, das ciências da educação. Nesse sentido, o estágio supervisionado na licenciatura deve ser um desses espaços de formação.

Evocamos conhecimentos específicos necessários à formação inicial do professor de matemática que muito mais se aproximam de conhecimentos relacionados ao conteúdo específico da matéria, na perspectiva de Shulman (1986; 1987), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006) e Shulman (1987), denominados 'conhecimentos pedagógicos gerais do conteúdo'. Ao mesmo tempo, buscamos identificar o lugar do conhecimento pedagógico no âmbito da formação do professor de matemática no Brasil. Em nosso ponto de vista, esse corpo de conhecimento é fundamental por trazer os aspectos gerais da atividade escolar e da educação como um todo, no entanto, sem abarcar os aspectos das especificidades dos processos de ensino e aprendizagem próprios da Matemática.

Shulman (1986) levanta questionamentos a respeito dos saberes que o professor mobiliza quando age na tarefa de ensino. Em nosso ponto de vista, são questões bem pertinentes, seja para o professor já atuante como profissional, seja para o futuro professor em formação inicial.

Com relação às fontes do conhecimento do professor, para fins desta pesquisa, podemos afirmar que o construto de saberes docentes que corresponde aos conhecimentos dos futuros professores (professores estagiários) tem como ponto de partida o período desde a formação escolar desses sujeitos até a formação universitária, podendo ter incluídos nesses conhecimentos aqueles adquiridos nas experiências temporárias (contratos temporários de trabalho no sistema público de ensino) de docência, em classes de ensino básico.

Ball, Thames e Phelps (2008) dão continuidade ao estudo de Shulman (1986), mais tarde, por meio de suas próprias pesquisas. De acordo com esses autores, os saberes docentes se constituem de domínios do conhecimento para o ensino.

Tais domínios se dividem em duas categorias: a primeira está relacionada ao conhecimento ou saber sobre um assunto, e a segunda, ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Na primeira categoria estão incluídos o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento do horizonte do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo. E na segunda categoria, o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, o conhecimento do conteúdo e do currículo e, por fim, o conhecimento do conteúdo para o ensino. Os domínios de conhecimentos estão sintetizados pelos autores na Figura 1.

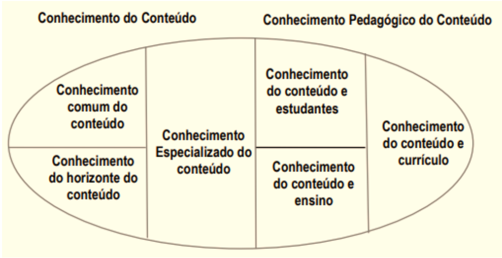


Figura 1.

Domínios de conhecimento para ao ensino (adaptado de Ball, Thames e Phelps, 2008, p. 404)

Uma outra linha de raciocínio, também apoiada no trabalho de Shulman, aparece a partir da ideia de intersecção de conhecimentos, nos estudos de Mishra e Koehler (2006). Esses autores incorporam ao corpo de conhecimentos do professor o conhecimento tecnológico e suas intersecções com os conhecimentos pedagógicos e matemáticos, por exemplo, o conhecimento tecnológico do conteúdo. Esta mesma ideia de “conhecimento da intersecção” é evocada por Lima e Silva (2015), incorporando, além do pedagógico, o matemático e o tecnológico e o conhecimento didático.

Esta última categoria, embora esteja presente nas ideias dos demais autores apresenta-se mais forte em nosso estudo, tendo como base as concepções de Didática da Matemática, da escola francesa. Esta intersecção de conhecimentos é exemplificada segundo Silva e Lima (2015), que sintetizam o saber docente em quatro blocos de conhecimentos: conhecimento pedagógico (CP), conhecimento do conteúdo (CC), conhecimento tecnológico (CT) e conhecimento didático (CD). Esses autores ainda propõem a intersecção desses quatro blocos de conhecimentos, gerando mais onze categorias. Cada uma destas onze categorias é uma combinação que envolve ao menos duas das quatro apresentadas (CP, CC, CT e CD).

A categoria CDPTC, conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo, é aquela que engloba os quatro blocos de conhecimento ao mesmo tempo, o qual, é nosso ponto de vista, representaria, *a priori*, um conhecimento “mais completo” na formação do professor, sobre um determinado objeto matemático a ensinar.

A respeito da formação inicial do futuro professor, em nosso estudo, delimitamos, enquanto parte constituinte do equipamento praxeológico desse futuro professores, o conhecimento matemático e didático como sendo o centro da formação profissional. Esta base pode possibilitar agregar outros conhecimentos importantes para tal formação, como, por exemplo, o conhecimento pedagógico e tecnológico, e formar novas combinações de saberes não categorizados.

O conhecimento didático do professor, em nosso ponto de vista, também integra o conhecimento das teorias da Educação Matemática e da Didática da Matemática, no entanto, na formação inicial do professor de matemática no Brasil, especialmente, nos cursos de Licenciatura em Matemática na Bahia, o currículo dos componentes curriculares da área de educação, como, por exemplo, o estágio supervisionado, ainda não contempla um estudo consistente das teorias de Didática da Matemática. Mesmo enquanto componente curricular da licenciatura, esse componente é por muitas vezes desenvolvido em uma perspectiva da didática geral, ou de teorias gerais da educação, um equívoco da interpretação curricular, em nossa análise.

Elementos básicos da TAD se fizeram presentes e foram desenvolvidos no repertório dos futuros professores, no desenvolvimento de nosso PEP. Além desses elementos, outros aspectos do que denominamos de conhecimento didático passaram pelo processo de aquisição e/ou ressignificação por parte dos sujeitos ao longo do estudo.

Assim, para nós, o conhecimento didático *engloba tudo aquilo que se refere ao conhecimento teórico da Didática da Matemática, seus elementos, aplicações, ou ainda tudo aquilo que se refere ao conhecimento específico dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, tais como discutidos no âmbito da Didática da Matemática*.

O conhecimento matemático em jogo integrou o saber relativo a tópicos de Geometria Analítica Plana (GAP). Nesse sentido, o trabalho desenvolvido com o PEP se apoiou em um Modelo Epistemológico de Referência (MER) geral para GAP, o qual (re)delimitamos em um modelo epistemológico de referência alternativo (MERA) para o estudo de GAP do ponto, da reta e dos sistemas de coordenadas. Este último modelo se configurou com uma das várias possibilidades de escolha de pesquisa e o MER incluiu o da Geometria Analítica Plana, sendo, portanto, uma fonte organizada para novos estudos, pesquisas com GAP, no âmbito da Didática da Matemática.

O MER (Figura 2) foi construído a partir da análise da dimensão epistemológica e serviu de referência nos estudos das dimensões econômica e ecológica, assim como na construção do Modelo Epistemológico Dominante (MED) e do Modelo de Referência Alternativo (MRA) (base de sustentação do PEP-FP).

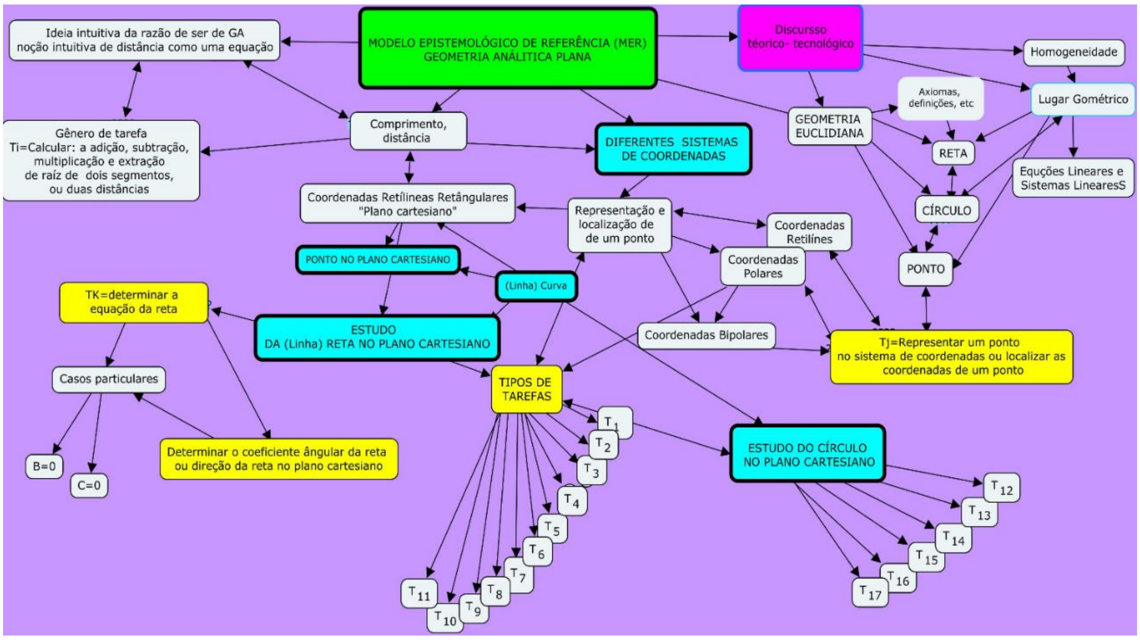


Figura 2.

Ilustração do Modelo Epistemológico de Referência (MER) (Freitas, 2019, p. 161)

As siglas representadas de forma genérica por T_i ($1 \leq i \leq 17$) indicam as tarefas atreladas a algumas dimensões do MER[4].

O estudo das dimensões econômicas e ecológicas do problema didático, apoiando-se no MER, permitiu identificar o modelo epistemológico dominante (MED) para o ensino da GAP nas diferentes instituições (ensino fundamental, médio e universidade) (Figura 3).

Em coerência com o MER e o MED construídos, com base neles, elaborou-se um Modelo Epistemológico de Referência Alternativa (MERA) (Figura 4) do que significa «ensinar e aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo. O MER construído serviu de apoio para o desenvolvimento da fase experimental do PEP-FP.

[4] Cf. Lista das tarefas no apêndice

232)

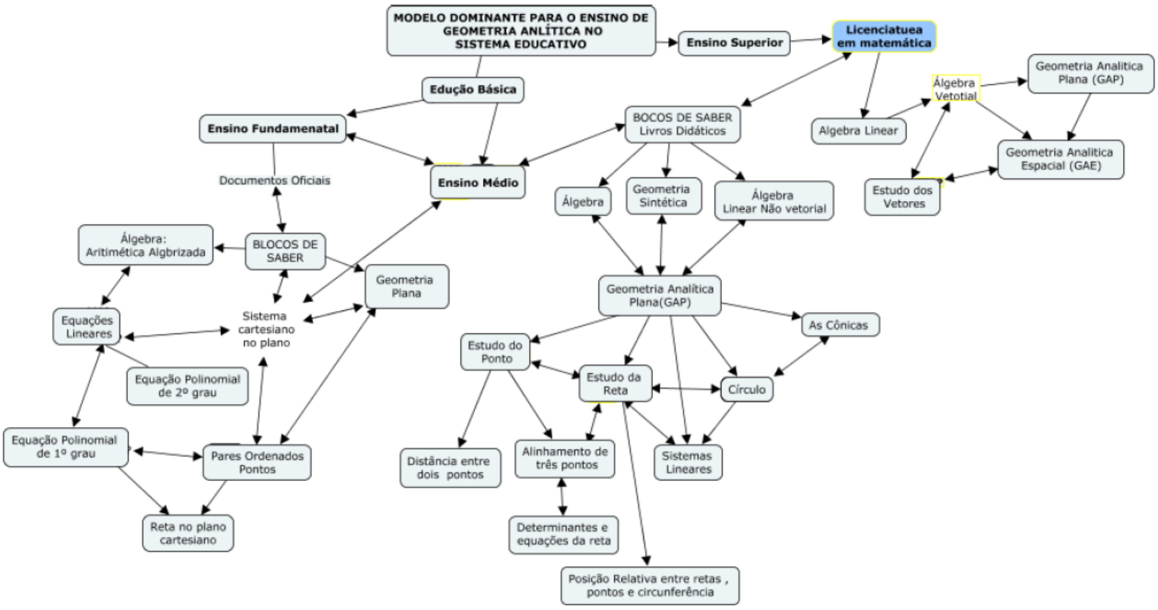


Figura 3.

Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo brasileiro (Freitas, 2019, p.

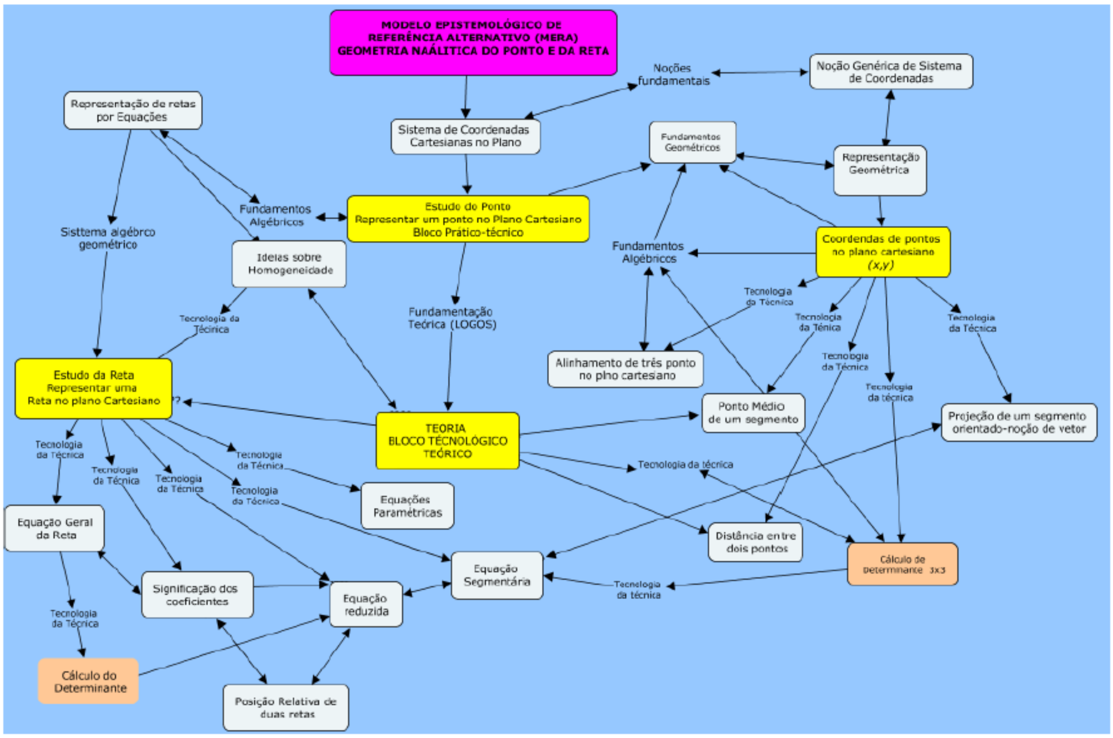


Figura 4.

Modelo Praxeológico de referência Alternativo (MERA) (Freitas (2019, p. 237)

Os aspectos e ideias teóricas, bem como as considerações levantadas sobre a formação do professor de matemática no Brasil, foram fundamentais para a constituição do PEP, pois é necessário conhecer as condições e restrições de difusão dos conhecimentos inerentes à formação de professores, bem como o “milieu” de trabalho.

Momentos didáticos dos episódios de estudo

Para realização da experimentação e desenvolvimento do PEP, recorremos aos pressupostos da engenharia didática tradicional, segundo Artigue (1998), para a realização do desenho *a priori* dos episódios de estudo, resguardando certas adaptações.

A organização dos episódios de estudo teve como fundamentos internos os momentos de estudo ou momentos didáticos. Segundo Chevallard (1999), como em toda organização praxeológica, uma organização didática articula-se em tipos de tarefas, normalmente cooperativas, em tecnologias e teorias. As questões que se põem, no âmbito dessa pesquisa são: Como descrever essa organização? Quais os principais tipos de tarefas?

Chevallard (1999, p. 19) assevera que o termo “momentos didáticos” se refere a uma estrutura temporal do processo de estudo apenas na aparência. Significa dizer que o sentido dado a esta palavra se refere a uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator em um processo multifatorial. O autor explica, ainda, que uma boa gestão do estudo requer que cada um dos *momentos didáticos* seja realizado no momento adequado, pois um *momento de estudo* geralmente se realiza em várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios distribuídos no tempo. Os *momentos didáticos* são uma realidade do funcionamento do estudo e não uma realidade cronológica, ou seja, a ordem dos diferentes *momentos* é arbitrária. Os momentos são seis sintetizados, segundo Chevallard (1999).

O momento do *primeiro encontro* corresponde ao primeiro contato dos sujeitos com a organização matemática, pelo menos, o contato com um tipo de tarefa dessa organização. O segundo momento é de exploração do tipo de tarefas e de elaboração da técnica, *momento exploratório*.

O terceiro é o momento constituição do ambiente *tecnológico-teórico* [q/Q] relacionado com a técnica τ_i. De forma geral, é o momento de estreita inter-relação com os outros momentos. No caso do primeiro encontro com um tipo de tarefa, normalmente há uma relação com o ambiente tecnológico-teórico, anteriormente elaborado.

O quarto momento é o do trabalho *da técnica*, que deve ao mesmo tempo melhorá-la, tornando-a mais eficiente e confiável. O quinto momento é a *institucionalização*, e tem como objetivo esclarecer o que exatamente a organização matemática elaborou, além de distinguir quais elementos farão parte definitivamente da organização e quais não serão integrados a ela.

Por fim, o sexto momento é da *avaliação*. É um momento de reflexão e se articula com a institucionalização (em alguns aspectos, pode ser considerado um submomento) em que se avalia o que foi aprendido. Principalmente, é o momento quando se aprecia o controle ou o domínio da organização matemática criada, e ainda se avalia a organização matemática e sua validade.

Cada um desses momentos pode ser realizado várias vezes, não somente porque procedem de episódios de tempo, mas também porque, por exemplo, um episódio de trabalho de uma técnica pode conduzir a retocar a organização matemática estabelecida e, portanto, eventualmente realizar, ou viver, um novo episódio tecnológico, em todo o caso, considerar um outro episódio de *institucionalização.*

Em linhas gerais, os momentos de estudo constituem uma grade para a análise dos processos didáticos, e nesse sentido, são incorporados ao processo de análise *a priori* e *a posteriori* do desenvolvimento do processo de estudo com seus episódios.

O primeiro passo para a constituição dos episódios de estudo é a identificação de uma questão geratriz. A questão inicial é norteadora e motivadora do processo de estudo, e ela deve ser capaz de gerar outras questões que, ao final do processo de estudo, produzem uma praxeologia desenvolvida com os professores estagiários (no caso de nossa pesquisa), tendo como base o *MERA.*

De acordo com Sierra (2006), o processo de estudo é conduzido por esta questão geratriz, embora o que seja derivado dela não seja, *a priori*, totalmente determinado, tendo em vista que muitas das decisões terão que ser tomadas para realizar o PEP que esta questão implica. A determinação de Q_0 perpassa por algumas questões relacionadas às restrições que, *a priori*, foram identificadas anteriormente em um estudo piloto (também realizado com estagiários) bem como nos modelos dominantes. Sierra (2006) promove reflexões a respeito dessa escolha.

Segundo esse mesmo autor, os processos de estudo devem estabelecer um tempo relativamente amplo, pois o trabalho matemático vai requerer o desenvolvimento da organização matemática no âmbito de várias sessões sucessivas, com o intuito de permitir ao sujeito aprofundar e trabalhar de uma maneira útil e eficaz. Consequentemente, considera-se que um processo de estudo deve conter um objeto matemático amplo e não se deve propor processos de estudos isolados.

Nessa perspectiva, a dosagem do conteúdo frente ao tempo de estudo foi fundamental, diante das restrições institucionais que encontramos na instituição, local onde o estudo foi realizado. Delimitamos o estudo em torno dos objetos fundamentais de GA (o estudo do ponto e da reta e os sistemas de coordenadas) e o tempo relativamente suficiente para o desenvolvimento da proposta em torno de quatro meses.

Conforme descrevemos em nosso modelo alternativo *MERA* ou simplesmente M_A, a questão que propomos visou, *a priori*, desenvolver organizações matemáticas em torno dos objetos que definimos para o estudo. Formulamos em primeira instância a questão Q_0 = *como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?*

Esta questão, *a priori,* foi o motor do processo de estudo de geometria analítica do ponto e da reta. Denotamos pela sigla GAP_{PR} a Geometria Analítica no Plano do Ponto e da Reta, e para evitar repetições no texto, utilizamos as seguintes nomenclaturas e abreviações

- Q_0: questão inicial (questão geratriz)
- OM_{sc}: organização matemática de sistema de coordenadas
- OM_P: organização matemática do ponto
- OM_R: organização matemática da reta
- GAP_{PR}: organização matemática geometria analítica do ponto e da reta

O trabalho engendrado das organizações matemáticas pontuais geradas a partir de Q_0, permitirá a construção da organização matemática desejada GAP_{PR}, conforme ilustrado:

$$Q_0 \Rightarrow OM_{sc} \Rightarrow OM_P \Rightarrow OM_R \Rightarrow GAP_{PR}.$$

Apoiamo-nos em Chevallard (2009) para afirmar que os trabalhos (matemáticos) desenvolvidos a partir deste tipo de questão em um PEP poderão ser caracterizados por uma infraestrutura intramatemática. Segundo o autor, como alguns trabalhos matemáticos, que são elaborados para permitir o trabalho de engenheiros, químicos ou biólogos. A estrutura deste trabalho levou a estudar, por um lado, muitos problemas, a maioria *intramatemáticos*. Por outro lado, o dispositivo de pesquisa deve fazer emergir outros problemas racionados aos processos de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático, de uma técnica, ou de uma tarefa sobre esse objeto. Por exemplo, como ensinar a equação da reta? São problemas que geram questionamentos a respeito do processo de ensinar, da tarefa do professor, da transposição didática.

Exemplificamos de outra forma: durante o desenvolvimento de uma tarefa matemática, o dispositivo de pesquisa deve fazer emergir para os professores estagiários questões acerca de como desenvolver a mesma tarefa para os seus futuros alunos do ensino médio. Deve levá-los a questionar: A tarefa é adequada? Por quê? Qual a melhor técnica? Qual a abordagem da técnica que facilita aprendizagem dos alunos? Qual teoria o aluno precisa saber para desenvolver a técnica? Quais dificuldades de aprendizagem podem ser geradas a partir da escolha de um tipo de transposição didática?

De fato, tais questões vêm de problemas (didáticos) que suscitam nos professores estagiários o questionamento da transposição didática. Denominamos esses problemas de *intradidáticos*, porque estão no interior da dinâmica didática do ensino. A propósito do problema didático posto como questão geradora do estudo Q_0, (como ensinar GA...), seu desenvolvimento no âmbito do dispositivo de pesquisa fará emergir, e ao mesmo tempo (re)significar, os conhecimentos em torno de GAP voltados para a transposição didática no ensino médio.

É o próprio dispositivo de pesquisa, como ele é engendrado, que, *a priori*, faz viver, no âmbito do trabalho desenvolvido com as organizações matemáticas e didáticas, os conhecimentos docentes: o conhecimento do conteúdo, no caso GAP, os conhecimentos didáticos do conteúdo, o conhecimento didático tecnológico do conteúdo, o conhecimento didático pedagógico do conteúdo e por fim o conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo.

Optamos por utilizar uma representação mais sintéticas sobre estas categorias, que elegemos, *a priori*, a partir de uma representação simbólica, ou uma abreviação que respectivamente corresponde a cada categoria de conhecimento: conhecimento de GAP = C_{GAP}, conhecimento didático de GAP = CD_{GAP}, conhecimento didático pedagógico de GAP = CDP_{GAP} e conhecimento didático pedagógico tecnológico de GAP = $CDPT_{GAP}$.

Tendo em conta esse conjunto de conhecimentos, definidos no dispositivo de pesquisa como categorias que se compõem numa instância cognitiva do sujeito, assumimos que são conhecimentos que estão em conformidade com as relações entre os *sujeitos* e os *objetos*, segundo Chevallard (2007a).

Significa dizer que existe uma *relação pessoal*, $R(x, o)$, entre o professor (ou futuro professor) e um objeto (ou conjunto de objetos de GA, por exemplo), e uma *relação institucional* do sujeito dentro de uma instituição $R_I(p, o)$ com um objeto, que compõe, portanto, o *equipamento praxeológico do professor* $EP(x)$ e das relações relativas aos assuntos da instituição I na posição p dentro dela $EP_I\,(p)$. Essa articulação se apoia em Chevallard (2007a, p.11), quando afirma que:

> Falava-se das relações pessoais e institucionais $R\,(x, o)$ et $RI(p, o)$ a um objeto o. Pode-se agora falar de conjunto de praxeologias de uma pessoa x, o que chamamos (cavalheiramente o equipamento praxeológico x, e que eu denoto $EP(x)$, e evidentemente, daqueles relativas aos assuntos de uma instituição I na posição p dentro dela, $EPI(p)$. A relação de x a o é então de alguma forma o "corte" de $EP(x)$ pelo objeto

o. Ele será constituído a partir de praxeologias que o $EP(x)$ ativam, *o* de uma maneira ou de outra- por exemplo no plano técnico, ou no registro tecnológico, etc. A teoria praxeológica assume e assim, amplia a teoria das relações, para a qual sempre se pode retornar se necessário (tradução nossa).

A partir dos elementos teóricos, com o aporte da TAD, identificados, propomos a articulação dos elementos da formação profissional docente, no caso da nossa pesquisa, com as categorias definidas *a priori*. Assim, partimos para o desenho *a priori* da experimentação.

A análise *a priori* tradicional propõe um detalhamento preciso, tanto quanto mais precisa for possível, do conjunto de comportamentos que os sujeitos poderão ter *a priori*, diante do saber em jogo, por meio de situações. No caso do PEP-FP, designamos o de desenho *a priori*, pois é mais ou menos aberto, ainda que a análise *a priori* tradicional implique em um PEP mais ou menos fechado. Em outras palavras, o mecanismo de pesquisa como proposto em nosso estudo necessita de algum nível de ações de controle, diferentemente do sentido inicial dado por Chevallard (2009) para o PEP completamente aberto. Para cada episódio de estudo, previmos um tempo em torno de três horas aula de sessão de trabalho com os estagiários.

Vale ressaltar que, embora o PEP não seja preestabelecido, a análise *a priori* visa estudar o poder gerador de Q_0, por um processo aberto e largo (*cronogênese)*, pelo qual as questões são engendradas a partir da questão inicial (Q_0), depois as respostas intermediárias e, assim o ciclo recomeça com novas questões, até chegarmos a uma resposta para a questão geratriz (Q_0) ($Q_0 \curvearrowright R^{\heartsuit}$), conforme ilustraremos mais adiante no texto.

Ilustramos cada episódio de estudo por meio de mapas de questões e/ou esquemas, os quais visam identificar cada etapa do estudo. As questões geradas de Q_0 produzirão respostas intermediárias, e estas levantarão novas questões que nutrem o processo de inquérito. A dialética de questões e respostas contribui para autoalimentar o processo, designado por Chevallard (2009) de *cronogênese*.

As respostas obtidas precisam ser testadas com dados empíricos e com conhecimentos disponíveis para serem integradas ao meio, e essa integração leva a novas questões Q_i, *(mesogênese*). O autor chama essa dialética de "*mídia-meio*". O meio evolui durante o processo de inquérito, e a dinâmica é descrita em termos de dialética (Chevallard, 2003). A dinâmica de trabalho entre os sujeitos está permeada por um contrato didático de partilha de responsabilidades, ou seja, os sujeitos envolvidos no processo de inquérito partilham a responsabilidade, por meio de planejamento, levantando questões, organizando e priorizando relatórios e os validando, chegando a um acordo para uma resposta final e defendê-la (*topogênese*).

A noção de mídia (Chevallard, 2007b) significa qualquer sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social endereçado a um determinado público, por exemplo, um curso de um professor de matemática, um tratado de química, um *site* na internet, um jornal de um apresentador de televisão etc.

Experimentação: descrição e análise *a priori* e *a posteriori* dos episódios de estudo

Na etapa de experimentação da pesquisa, intitulada de "*Ateliê de modelização didática sobre GAP*", participaram inicialmente 28 professores estagiários, e no decurso do projeto 14 continuaram até o final do ateliê.

O objetivo principal do projeto, enquanto procedimento de pesquisa, foi coadunar para a resposta da questão geral de investigação: *quais conhecimentos podem ser adquiridos por professores estagiários em geometria analítica plana, com a ajuda de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), e quais benefícios poderão obter para projetar (conservá-los) esses conhecimentos no ensino médio?*

A engenharia de PEP-FP a partir de seus pressupostos contribuiu na construção de um conjunto de respostas para a questão de pesquisa suscitada, a qual não deve ser confundida com a questão geratriz do PEP Q_0: *como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?*

Selecionamos alguns episódios de estudo, ainda que seja um recorte da etapa de experimentação, considerando que ao todo aconteceram treze sessões de trabalho, mesmo tendo sido previstas, *a priori*, dez sessões. Nesse sentido, a descrição e as análises, *a priori* e *a posteriori*, se constituíram um pouco extensas, por conta do detalhamento necessário enquanto dados da pesquisa, e assim, traremos parte da experimentação para fins do objetivo desse texto em explicar o funcionamento do dispositivo PEP-FP/TAD.

No primeiro episódio de estudo, os estudantes deveriam ter o primeiro contato com a organização matemática (OM) e a organização didática (OD) em torno de questões iniciais que seriam propostas: Q_0: C*omo ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?* Q_1^D*: A quem ensinar GA?* Q_2^D*: Onde ensinar GA?* Q_1^M*: O que é GA?*Q_2^M*: De forma geral, o que diferencia GA de outras geometrias?* Q_3^M: O que GA estuda?Q_1^{DM}*: o que devo ensinar de GA na educação básica?*

Previmos, *a priori*, que os estudantes poderiam tomar dois caminhos na construção do estudo: questionar no âmbito de uma dimensão puramente didático-pedagógica ou em uma outra dimensão didático-matemática, mas ainda de forma desarticulada. As questões iniciais propostas formam perguntas simples que norteariam o início do processo de estudo. Na escolha das questões levamos em conta as duas dimensões: matemática (M) e didática (D).

Este primeiro episódio deveria atender a duas funções: realizar o primeiro encontro com a *razão de ser* da organização matemática, Geometria Analítica Plana do Ponto e da Reta (GAP_{PR}) que se pretendia reconstruir com algumas das questões que a OM deveria responder, e ao mesmo tempo viver um primeiro encontro com a organização didática (OD) que estruturaria o processo de estudo. O primeiro aspecto que destacamos é o aspecto da inter-relação entre o matemático, a atividade que se pretende realizar e o didático, a maneira como os futuros professores propõem organizar tal atividade.

Enquanto parte constituinte do estudo, conforme previsto *a priori*, os estudantes receberam a tarefa de debruçar-se a respeito da questão inicial e de outras que poderiam surgir, tendo como base seus conhecimentos prévios, em que as seguintes representações foram adotadas: Q_i^D corresponde a questões de natureza didática (D), i é a variação dos diferentes questionamentos, Q são questões que seriam progressivamente sendo geradas ($i = 0,1,2,3$) a cada sessão de estudo. Seguindo esta ideia em Q_i^M, são questões de natureza matemática ou intramatemática (M), ou seja, evocam a ou mobilizam esse saber. No caso de Q_i^D questões de natureza didática, ou seja, evocam ou mobilizam esse tipo de conhecimento, e por fim, Q_i^{DM} evoca conhecimentos matemáticos e didáticos de forma articulada (DM).

Previmos que os estudantes buscariam ajuda nas mídias digitais, como computador, celular ou *tablet* que possuam em mãos. Poderiam também buscar mídias tradicionais como livros na biblioteca ou a ajuda da pesquisadora (que compartilha o papel de professore e condutora do estudo). Essa dialética *mídia-milieu* possibilitaria aos sujeitos encontrarem respostas intermediárias, geradas por Q_0, para a primeira sessão, $R^{\lozenge}{}_A = \{ R_1^D; R_2^D; R_1^M; R_2^M; R_3^M; Q_1^{DM}\}$. A sigla $R^{\lozenge}{}_A$ corresponde ao conjunto de respostas intermediárias para o conjunto de questões da sessão (A), respectivamente dadas por R_i^D resposta de natureza didática (D), e i varia como variam as questões postas para a sessão (A). Essas nomenclaturas foram progressivamente adaptadas à sessão A, B, C etc.

Reforçamos o sentido que já destacamos: o PEP não pode ser predeterminado, no entanto, previmos relativamente possíveis direções ou caminhos, os quais o estudo poderia levar aos estudantes, tendo em conta que as questões iniciais não fazem parte de um *meio* de dificuldade, *a priori*.

Supomos, portanto, que os estudantes conheciam o currículo da educação básica ou pelo menos saberiam onde encontrá-lo. Deveriam buscar nesses documentos ou diretamente na internet outras fontes que abordassem o tema ou poderiam solicitar a ajuda da pesquisadora para indicar fontes de pesquisa, como livros didáticos e outros, na perspectiva de fornecer as respostas R_1^D, R_2^D e R_3^{DM}. O contexto dessas respostas envolve claramente uma inter-relação entre o matemático, em torno dos objetos, e o didático, mais precisamente os elementos do currículo. O estudo das questões deveria conduzir os professores-estagiários a se debruçarem no currículo em torno de GA. Destacamos que, a respeito do conhecimento docente, o conhecimento do conteúdo e do currículo é definido no quadro de Ball, Thames e Phelps (2008), no entanto, para fins de nossa pesquisa incluímos essa definição na categoria conhecimento didático pedagógico matemático ($CDPM_{GAP}$).

As respostas (R_1^D e R_2^D) poderiam ser sintetizadas, em linhas gerais, da seguinte forma: o currículo da educação básica prevê o ensino de noções de geometria analítica plana no 7º e 8º ano, GAP no 3º ano do ensino médio e que a GA também seja ensinada nos cursos da área de ciências exatas, como matemática, engenharias, física etc.

As questões $\mathrm{Q}_1^{\mathrm{M}}$ e $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{M}}$, tendo como respostas $\mathrm{R}_1^{\mathrm{M}}$ e $\mathrm{R}_2^{\mathrm{M}}$, poderiam apresentar as primeiras noções a respeito de GA. Tais noções poderiam ser encontradas na internet, ou em outras mídias, como já expusemos. Os professores-estagiários poderiam, ainda, trazer como respostas uma perspectiva histórica de GA (trabalhos de Fermat e de Descartes); ou uma perspectiva das disciplinas de GA cursadas por eles durante a licenciatura, ou aquela do livro didático do ensino médio etc. É possível que identifiquem como resposta R_2^M (para a questão $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{M}}$) a diferenciação das geometrias a partir da incorporação de um sistema de coordenadas. Em qualquer caso, os objetos, ponto, reta, sistema de coordenadas, segmentos orientados, entre outros, como cônicas e vetores *a priori* apareceriam no conjunto da resposta R_3^M.

A questão Q_1^{DM}, embora pareça uma resposta bem simples: "ponto e reta", visto que é evidente na questão inicial, quando submetida ao dispositivo de pesquisa poderia fazer emergir nas descobertas dos professores-estagiários OM e OD em torno dos objetos ponto e reta. O sistema de coordenadas poderia aparecer como objeto, por meio do qual ponto e reta podem ser estudados e explorados.

A *priori*, o funcionamento do dispositivo deveria permitir aos professores-estagiários validar, por meio da avaliação nos pequenos grupos e no coletivo, as respostas intermediárias. Assim (re)construiriam, mobilizariam respostas intermediárias $R^{\lozenge}{}_{ij}$ para integrá-las ao *meio*, e desse modo continuar o processo de estudo com vista a encontrar $R^{\heartsuit}$.

Para a socialização coletiva das construções, os professores-estagiários poderiam usar todos os recursos disponíveis, tanto tecnológicos, como datashow, ou mapas mentais etc. Tais orientações serão fornecias ao logo do trabalho. Cada grupo exporia suas respostas para todo o coletivo envolvido. Nesse processo analisam-se, avaliam-se e classificam-se as mensagens emitidas, justificando as vantagens e os inconvenientes, e o professor-pesquisador pode fazer uma síntese dos resultados obtidos em conjunto com os estudantes.

Os momentos das socializações coletivas neste primeiro episódio deveriam acontecer, *a priori*, em duas etapas: uma etapa para as respostas de $R_1^D;R_2^D;\ R_1^M;R_2^M$ e um segundo momento para que o coletivo discutisse sobre como iria construir a resposta de Q_1^{DM}. No final dessa socialização, os professores estagiários seriam orientados quanto ao relatório do trabalho, desenvolvido neste episódio.

O relatório poderia ser construído digitalmente e postado no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do *Moodle*. O que se esperava é que fosse uma construção coletiva da turma, que auxiliaria no relatório final do ateliê. Para tanto, os estudantes poderiam se articular com a responsabilidade de partilhar as tarefas. Nesse sentido, organizarem-se para dar continuidade ao estudo a fim de responder à questão Q_1^{DM} que seria norteadora do episódio seguinte. Sintetizamos o percurso *a priori*, como um possível desenvolvimento para $Q_0{}^{(\boldsymbol{A})}$, sendo A uma indicação ao estudo do primeiro episódio: definindo geometria analítica, a primeira rodada de trabalho experimental, esquematizado por meio da Figura 5.

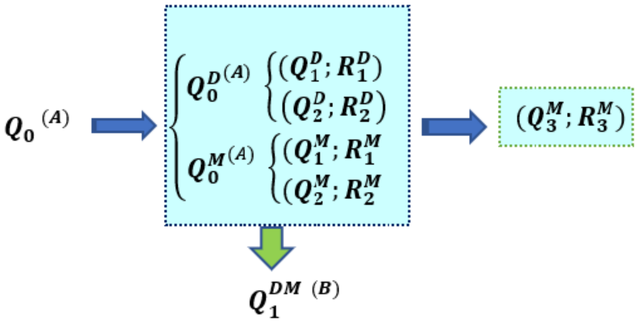


Figura 5.

Cronogênese de "A", possível desenvolvimento $Q_0{}^{(A)}$ (Freitas, 2019, p. 263)

Analisando *a posteriori* o primeiro episódio, a maior parte das ações pensadas *a priori* foi desenvolvida como o planejado: primeiramente, apresentamos a questão inicial Q_0: *como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?* Após a apresentação da questão, os estudantes começaram a discutir em grupos como responder a esse questionamento. Participaram do trabalho sete grupos, compostos por quatro estudantes cada. Unanimemente, todos os grupos responderam que seria necessário aprofundar e desenvolver algum tipo de pesquisa para responder à referida questão.

Explicamos que a questão Q_0 seria a que nortearia todos as sessões de trabalho subsequentes, que seriam desenvolvidas ao longo do percurso de formação previsto para o ateliê, e que a resposta para o questionamento seria construída ao longo do percurso. Discutimos acerca da importância de estudar e do fazer científico norteado por questionamento, ou questões no sentido da TAD, do paradigma de questionamento do mundo. Logo em seguida, propomos outras questões, a partir dos elementos que compõem Q_0. Nesse sentido, sugerimos mais três perguntas que visavam elucidar o que estaria por trás de Q_0 : A quem ensinar GA? Onde ensinar GA? O que é GA?

Os estudantes retomaram o trabalho de discussão no grupo, agora em torno das novas questões propostas. Destacamos as respostas de quatro dos sete grupos, tendo em vista que, dos sete, apenas quatro disponibilizaram o relatório escrito desse momento. Ressaltamos que cada grupo deveria viabilizar o áudio do trabalho da equipe, pelo aplicativo de celular WhatsApp, e o relatório escrito das conclusões ou reflexões feitas no grupo. Para tanto, em cada grupo tinha um monitor de áudio e um relator da parte escrita. A ideia foi que a cada sessão de trabalho essas funções fossem trocadas, de forma que todos os membros do grupo pudessem colaborar na produção do material (e dos dados).

Ressaltamos que, sobre a produção de cada grupo, além da descrição geral do trabalho, destacamos, com as falas propriamente ditas dos sujeitos, as informações que julgamos significativas para a pesquisa e para a composição das análises, deixando os demais dados disponíveis para pesquisas futuras. Como os grupos não foram compostos pelos mesmos alunos em cada sessão, eles são reorganizados conforme a frequência dos participantes. Em termos da avaliação do PEP, levamos em consideração a produção do coletivo participante como um todo.

A posteriori, destacamos o trabalho do Grupo A, que iniciou a discussão questionando os colegas sobre a GA no ensino superior, ou na pós-graduação e na educação básica. Buscaram na internet repostas, especialmente o que é GA, e discutiram sobre a diferença entre GA e a Geometria Euclidiana, como previsto *a priori*. Uma parte do grupo defendeu que: o que diferencia as duas geometrias é a presença da álgebra, e a outra parte do grupo defendeu que o que diferencia é o surgimento da geometria cartesiana. O grupo utiliza a pesquisa na internet para identificar o que é GA, e nesta pesquisa encontraram as seguintes afirmações: “conexão entre geometria e a álgebra; junção da geometria euclidiana com a álgebra”.

Sobre as construções das respostas, este grupo afirmou que a GA deve ser ensinada na educação básica e no ensino superior, na rede pública e privada de ensino. Um dos membros do grupo afirmou que na rede particular este ensino é mais aprofundado. Outro membro do grupo achou que a discussão não seria pertinente para a pergunta proposta, pois faz uma comparação entre o ensino público e o privado.

Na sequência, buscaram construir a resposta para a segunda pergunta: o que é GA? Um dos membros do grupo relata que encontrou que GA é a conexão entre a geometria e a álgebra. O estudante afirmou: *com meus alunos foi essa a explicação que dei para o que é GA*. Em seguida outro membro do grupo afirmou que era a junção da geometria cartesiana e da álgebra, e perguntaram entre si: *a geometria é um ramo da matemática?* Um outro estudante respondeu que sim, que a geometria assim como a álgebra é um ramo da matemática. O grupo, conforme previsto, buscou um documento que fundamente as respostas, por exemplo, do porquê se ensinar GA no terceiro ano do ensino médio. Afirmou, portanto, que se ensina GA no terceiro ano conforme o livro didático e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Um dos colegas perguntou:

> Por que analítica? O que é o analítico? Alguém no grupo responde: analítico vem de análise... Detalhado, agora detalhar o que é? Plano cartesiano? Alguém reponde: analítica vem de análise, análise do plano cartesiano através da álgebra polo: o polo cartesiano? Geometria analítica é o quê? Ramo da geometria que estabelece a relação entre álgebra e geometria...

No contexto deste estudo, ocorreu, como previmos, o momento do primeiro encontro com a razão de ser de GA, mais especialmente, com os questionamentos a respeito do que é essa Geometria. Os professores estagiários também mobilizaram seus conhecimentos a respeito do currículo escolar, no sentido de identificar qual a etapa adequada para se ensinar geometria analítica, sendo que um dos grupos consultou a BNCC, e identificou alguns assuntos referentes à GA que são estudados ainda no ensino fundamental e no ensino médio, por exemplo.

> - E encontramos que, no 6° ano, os alunos, tomam conhecimentos primórdios do plano cartesiano - o que é o plano cartesiano, o que são pares ordenados no plano cartesiano, o que são quadrantes no plano cartesiano – e terão um pouco mais de aprofundamento no 8°ano com a demarcação de pares ordenados no plano, conhecimento dos mapas geográficos e coordenadas cartesianas. Mas é na 3° série do ensino médio que a geometria analítica toma corpo, com o estudo do ponto, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta, condição de alinhamento de três pontos, estudo da reta, inclinação de uma reta, coeficiente angular de uma reta, equação fundamental da reta, posições relativas de duas retas no plano, distância de um ponto a uma reta, área de uma região triangular, estudo da circunferência, estudo das cônicas, parábola, elipse e hipérbole (Transcrição do Grupo B).

Globalmente, as respostas apresentadas por cada grupo foram semelhantes, mas somente o grupo B identificou detalhadamente os assuntos que se estudam em GA. Todos os grupos afirmaram que existe em GA uma "conexão" entre a geometria e a álgebra, e o Grupo C relacionou o sistema cartesiano ortogonal como plano coordenado.

> A geometria analítica é a parte da matemática que envolve a geometria por meio de uma abordagem algébrica, tendo como base o plano coordenado. Assim, constroem-se equações que se relacionam com um lugar geométrico no plano coordenado (GRUPO, C).

Após o momento de trabalho dos grupos, propomos uma partilha e socialização das respostas. Denominamos de partilha, porque todas as construções poderiam ser compartilhadas entre os grupos com o intuito de socializar os achados do coletivo.

No episódio 2 retomamos a discussão do episódio anterior referente à questão $Q_1^{DM\,(B)}$: *o que devo ensinar de GA na educação básica?* Supomos que os estudantes trariam algumas sugestões de resposta, no entanto, dadas as restrições a respeito do conhecimento matemático que identificamos no estudo piloto realizado, o mais provável seria que eles apresentassem temas de estudo como *sistema de coordenadas cartesianas, o ponto e a reta*, sem explorar e apresentar as organizações matemáticas. Ou ainda poderiam apresentar, apoiando-se em livros didáticos, uma OM, para a representação de um ponto num sistema de coordenadas cartesianas, alinhamento entre três pontos, a definição e equação de distância, a equação geral da reta, ou seja, aqueles elementos presentes nos manuais escolares. Uma terceira possibilidade era que os professores-estagiários construíssem um plano de aula com as etapas de cada passo e momentos didáticos, no sentido geral do termo, com ou sem as organizações matemáticas que seriam *a priori* ensinadas a seus futuros alunos.

Do ponto de vista da proposta de formação que visamos neste dispositivo de pesquisa PEP-FP/TAD, a condução do estudo, por parte da professora pesquisadora deveria permitir, no âmbito da procura pela resposta, desenvolver e introduzir elementos que permitiriam (re)compor o equipamento praxeológico dos sujeitos, futuros professores, reconstruindo o saber em jogo a partir de uma perspectiva alternativa aos modelos epistemológicos vigentes (dominantes).

Nesse sentindo, as "questões" que guiariam o estudo precisavam ser incorporadas nesses elementos de recomposição. Tais elementos não são apenas os objetos matemáticos em estudo, são também elementos teóricos da TAD, que, neste caso, se constituem ainda como parte do que designamos por conhecimento didático, por exemplo, as noções de *tarefa, técnica*, *tecnologia* e *teoria*, ou ainda os elementos como o construto de "*registro de representação semiótica" (*DUVAL, 1995), a diferenciação entre a *noção do objeto e sua representação.*

Destacamos, ainda do ponto de vista didático, matemático e pedagógico, a importância do momento exploratório em torno da gênese dos sistemas de coordenadas, pois são a base de GA.

Nesse sentido, um estudo exploratório das *técnicas* utilizadas para deduzir, organizar, ou produzir os sistemas de coordenadas que, neste caso, estão mais próximas de uma *tecnologia* (de um bloco tecnológico-teórico), trazem à tona a razão de ser desses sistemas, mesmo sem tratar do problema de Papus, desenvolvido por Descartes, segundo Ian Maire (1637).

Na Figura 3, ilustramos a cronogênese do desenvolvimento das sessões B e C, mostrando o funcionamento do dispositivo engendrado pelas tarefas do âmbito das questões geratrizes referentes às organizações matemáticas dos sistemas de coordenadas.

Diante disso, as questões que se desdobram a partir de $Q_1^{DM\,(B)}$ (Figura 3) têm por base os sistemas de coordenadas, como geradores do estudo do ponto. Assim, $Q_1^{DM\,(B)}$ deve gerar uma questão ($Q_{1,1}^{DM\,(B)}$), a qual, por sua vez, gera uma resposta provisória $R_{1,1}^{DM\,(B)}$que vai gerar uma nova questão $Q_2^{DM\,(B)}$, a qual, por sua vez, vai gerar nova resposta $R_2^{DM\,(B)}$. O ciclo recomeça com novas questões $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$, que vão gerar novas respostas, respectivamente $R_{2,1}^{DM\,(B)}$, $R_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $R_{2,3}^{DM\,(B)}$, e o ciclo recomeça *a priori*, em uma nova sessão de estudo, ou seja, esse funcionamento do dispositivo é cíclico, se impõe para a construção das próximas etapas de estudo, conforme descrevemos no mapa de questões, segundo a Figura 6.

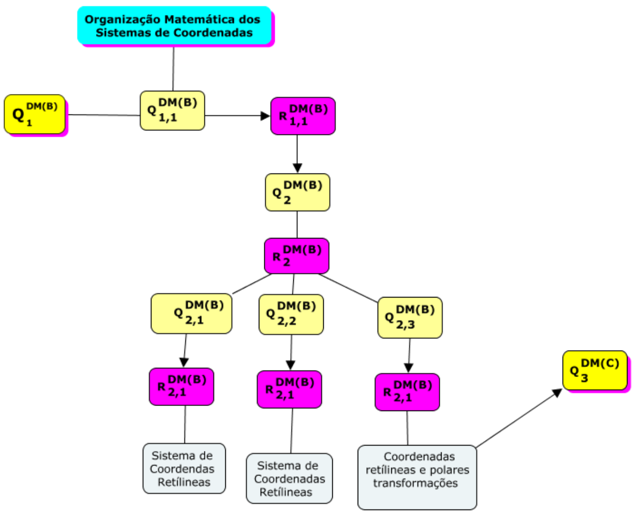


Figura 6.

Mapa de questões do dispositivo PEP-FP/TAD, sessão B e C (Freitas (2019, p.266)

Cada questão $Q_{i,j}$ e suas respectivas respostas $R_{i,j}$ envolve elementos da organização matemática e didática em estudo, engendradas para fazer surgir novas etapas. As respostas são classificadas como provisórias frente à resposta final, que será o conjunto das respostas de cada sessão ou episódio de estudo.

Neste segundo episódio, propomos o estudo a partir de um trecho do documento histórico analisado no MER, a respeito dos diferentes sistemas de coordenadas. O objetivo seria identificar as principais diferenças entre os sistemas de coordenadas, bem como sua ideia genérica enquanto organização matemática, confrontando-as com o equipamento praxeológico dos professores-estagiários a respeito desta temática. O segundo objetivo seria vivenciar o momento do primeiro encontro e o momento exploratório da OM, "sistemas de coordenadas". O estudo dos sistemas de coordenadas, inevitavelmente, inclui a representação do ponto, posteriormente da reta. Nesse sentido, as próximas etapas do estudo deveriam, *a priori*, seguir nessa direção.

O estudo do recorte desse documento histórico exploraria as técnicas para representação e localização de um ponto, no sistema retilíneo e polar. Nesse sentido, esta segunda atividade de estudo e pesquisa (AER_{Q2}) teria duas etapas: a primeira é o estudo do documento, que os estudantes fariam em um primeiro momento de trabalho; o segundo momento é a exploração do documento com o olhar direcionado para possíveis técnicas desenvolvidas. Aqui começamos a introduzir as noções básicas da TAD, principalmente a ideia de praxeologia, as noções de *tarefa*, *técnica* e *tecnologia*. Nesta atividade é a noção de técnica que precisaria ser trabalhada; em outros momentos, seria retomada e as demais noções introduzidas às demais etapas de estudo.

Para a segunda parte do estudo exploratório do documento, os estudantes receberiam as tarefas que são também questões do estudo: $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$: qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas? $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$: qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas retangulares? $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$: como representar um mesmo ponto no sistema de coordenadas retilíneas e no polar?

A priori, esperávamos que os sujeitos reconstruíssem o trajeto e a técnica utilizada pelos autores da obra (Briot e Bouquet, 1860), justificando cada passagem.

Conforme já salientamos, o que estamos denominando, nas tarefas descritas pelas questões $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$, de técnica, é na verdade o discurso tecnológico-teórico utilizado pelos autores citados na constituição dos sistemas de coordenadas.

Vale salientar que na condução do estudo, a professora pesquisadora forneceria alguns comandos, ou seja, os estudantes poderiam refazer o caminho, o percurso matemático desenvolvido pelo autor, empreendendo uma nova técnica, desde que justificassem cada etapa de construção. As respostas, $R_{2,1}^{DM\,(B)}$, $R_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $R_{2,3}^{DM\,(B)}$ para as questões propostas deveriam induzir à continuidade do estudo em torno da representação de pontos por meio de coordenadas retilíneas retangulares. Ao final desta segunda parte, os estudantes validariam e avaliariam o que construíram no momento de socialização dos grupos e discussão do coletivo.

A posteriori, ressaltamos que foi necessária a retomada das questões iniciais do estudo da sessão anterior, para a socialização e partilha das respostas, tendo em vista que: o que pensamos na análise *a priori* não foi alcançado no primeiro episódio de estudo.

Os grupos socializaram suas propostas, explicando o relatório escrito, e na sequência se reuniram para discutir a última questão da sessão anterior: *de uma forma geral, como GA se diferencia de outras geometrias?*

Após as discussões dos grupos e a partilha das respostas, os estudantes mostraram ter ampliado um pouco mais a visão da razão de ser de GA, quando relacionaram o sistema de coordenadas como parte integrante desta geometria. Os estudantes destacaram, no momento da partilha, que apesar de já terem cursado duas disciplinas de geometria analítica, em nenhum momento fizeram a reflexão sobre razão de ser de GA, ou seja, o que é GA?

O momento de partilha, também, mostrou que as respostas apontadas, como, por exemplo, conexão entre a geometria e álgebra, geometria de sistema de coordenadas, não representavam uma resposta final, pois havia ainda, segundo a fala dos sujeitos, mais informações que deveriam ser buscadas a fim de terem uma resposta conclusiva.

Destacamos que todo o processo de estudo e pesquisa, a partir das questões propostas, foi norteado pelo saber profissional docente, a respeito do conhecimento do currículo. Os estudantes mostraram conhecer quais fontes deveriam buscar para o currículo da educação básica, no caso os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e a partir desses documentos, indicarem a etapa de ensino adequada para os estudos de GA. No entanto, travaram longas discussões a respeito da real etapa de ensino em que os alunos começam a ver alguma noção de GA, pois alguns defendiam que era apenas no ensino médio, e outros, que começava com o plano cartesiano no ensino fundamental. Com relação ao estudo norteado pelas questões: $Q_{2,1}^{\mathrm{DM\,(B)}} =$ qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas? $Q_{2,2}^{\mathrm{DM\,(B)}}=$ qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas retangulares? $Q_{2,3}^{\mathrm{DM\,(B)}} =$ como representa-se um mesmo ponto no sistema de coordenadas retilíneas e no polar? – os três grupos se reuniram em torno do estudo, discutindo entre si o material proposto. Uma questão levantada foi a compreensão do que seria uma *técnica*. A professora pesquisadora interveio nesse momento para esclarecer o conceito de técnica segundo a TAD, e para explicar a importância de identificar a técnica em uma tarefa matemática. Além disso, foi sinalizada a noção de *tarefa*, *técnica* e outros elementos teóricos da TAD, *tecnologia e teoria*. Em seguida os sujeitos retomaram a discussão em grupos para finalização.

O terceiro episódio consistiu na conclusão do segundo episódio. Os estudantes novamente reuniram-se para estudar e discutir o material de apoio. Assim, não aplicamos a proposta pensada para o terceiro episódio neste momento.

Previmos que os estudantes buscariam livros didáticos, mas isto não se efetivou, pois eles buscaram referências complementares na própria internet, no entanto, por ser o texto traduzido de parte de originais antigos, os estudantes alegaram que ainda não conheciam a abordagem e que não encontraram algo semelhante. Alegaram ser o estudo algo novo para eles e que ainda não haviam tido contato com essa perspectiva histórica, mesmo nos componentes de GA já cursados.

Os grupos se imbuíram na tarefa tentando entender as concepções dos diferentes sistemas de coordenadas, retilíneos, retilíneos retangulares, polar e bipolar, bem como a ideia genérica para qualquer sistema de coordenadas, apoiados no material de apoio. Os estudantes também fizeram a correlação entre o sistema cartesiano atual e o sistema retilíneo e retilíneo retangular.

Durante as discussões dos grupos, foi possível identificar que, no processo de estudo, os estudantes tentaram refazer as etapas da técnica de cada sistema de coordenadas, validando o processo, desenvolvido pelos autores Briot e Bouquet (1860), do texto fornecido. Em alguns momentos, solicitaram a professora pesquisadora parar tirar dúvidas, ou seja, validar ou não aquilo que compreenderam dos procedimentos matemáticos, geométricos fundamentadores da representação, por exemplo de um ponto. Conforme previmos, foi o momento exploratório durante o estudo e discussão do material fornecido.

Acrescentamos que, de acordo com a fala dos sujeitos no trabalho de cada grupo, as noções geométricas fundamentadoras das técnicas utilizadas para organizar os sistemas de coordenadas foram mobilizadas durante as discussões, constituindo assim *o momento* de constituição do *ambiente tecnológico teórico*. As noções de perpendicularíssimo e projeção de segmentos no plano, de ortogonalidade foram mobilizadas para explicar a técnica do sistema de coordenadas cartesianas (retilíneas retangulares), por exemplo.

Para que os grupos avançassem na discussão do material de apoio de forma mais dinâmica, a professora pesquisadora propôs um momento de discussão coletiva do material, algo não previsto *a priori*, mas que se mostrou necessário frente às dificuldades dos estudantes em avançar na compreensão do texto e dos conteúdos nele contidos.

Durante este momento de estudo coletivo, alguns questionamentos foram levantados, por exemplo, a diferenciação entre a GA e as demais geometrias, a geometria Euclidiana, por exemplo. Foi também abordada, nessa discussão coletiva, a diferença entre a distância linear e a distância entre dois pontos num plano cartesiano (retilíneo retangular). Um dos estudantes afirmou que a diferença é devida ao sistema de coordenadas.

A professora pesquisadora institucionalizou como funciona o sistema de coordenadas cartesianas (retilíneo retangular) e a convenção dos sinais positivo e negativo, a direita e a esquerda da origem, respectivamente, e abordou a importância histórica da GA e de seu surgimento como conhecemos atualmente, bem como a importância dos estudos de Gáspar Monge, e tratou rapidamente do surgimento dos primeiros livros didáticos de geometria analítica, na França.

Este *momento de institucionalização* não foi previsto *a priori*, no entanto, durante o funcionamento do dispositivo, os próprios estudantes, por meio dos questionamentos, evidenciaram a necessidade de um *feedback*, de uma confirmação institucional do que compreenderam daquilo que estavam discutindo.

Após esse momento de institucionalização, o debate coletivo continuou a respeito do sistema de coordenadas polares, e passo a passo, o coletivo foi realizando a leitura e trazendo elementos para a discussão. A professora pesquisadora fez "micros" momentos de institucionalização a respeito dos sistemas de coordenadas apresentados pelos grupos. Nesta parte do episódio, a cada momento de partilha, de cada grupo, questionamentos, debatidos pelos professores estagiários durante as discussões no grupo, eram novamente levantados por eles na discussão coletiva, e a professora pesquisadora fazia momentos de institucionalização em torno de tais questões levantadas. Um dos pontos teóricos institucionalizados foi a questão do sinal positivo e negativo adotado no sistema cartesiano (ortogonal). A professora pesquisadora explicou a questão da adoção de uma notação, dando como exemplo o sistema óptico, que seria estudado mais tarde.

Nesses momentos de institucionalização, sempre que possível a professora pesquisadora realizava a abordagem ecológica, apontando que, no caso, por exemplo, do sistema cartesiano, a notação adotada no século XIX, a notação dos sinais dos eixos, permanece até os dias atuais. Mas as nomenclaturas, como, por exemplo, o próprio nome "geometria analítica", não existiam no século XVII e XVIII. Os tipos de sistemas, como por exemplo, o bipolar, polar etc., não aparecem no ensino básico atual, ou seja, desapareceram desse *habitat*, sendo estudados na atualidade, no ensino superior, em alguns cursos de gradação. Os relatos dos estudantes mostraram que eles não conheciam o sistema bipolar e tampouco a ideia da pluralidade de sistemas de coordenadas.

Concluímos que os momentos de institucionalização, apoiados em nosso modelo epistemológico de referência alternativo começaram a impactar no andamento do processo de pesquisa e formação, para contornar as *condições* da formação matemática e didática dos sujeitos. Um dos professores estagiários sinalizou que o estudo de coordenadas polares é realizado por meio de números complexos, no ensino médio. A professora sinaliza a importância do estudo integrado entre a física e a matemática, por exemplo, no caso dos vetores, que devem ser estudados no ensino médio em matemática, e não como acontece, na física de forma desconectada da matemática.

Na continuação do estudo coletivo, a professora pesquisadora pergunta o que diferencia o sistema de coordenadas retilíneas retangulares do sistema de coordenadas retilíneas. A resposta geral do coletivo é a ortogonalidade dos eixos coordenados.

Em seguida, os estudantes começaram a discutir sobre a questão $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$. Os áudios do trabalho dos grupos, em linhas geras, revelaram que os estudantes reconstruíram a técnica para representarem um ponto no sistema de coordenadas retilíneos, utilizando a mesma técnica das retas paralelas, do sistema retilíneo retangular, conhecido como sistema cartesiano.

Por fim, na sessão seguinte, os próprios estudantes explicaram o funcionamento dos sistemas, sem a necessidade de institucionalização pela pesquisadora. Consideramos esse trabalho como um *momento exploratório* e *do trabalho da técnica*, fundamental para a continuidade do estudo. Se caracterizou também como o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico, que fundamenta a razão de ser dos sistemas de coordenadas.

A professora pesquisadora retoma as questões geradas nesta etapa de estudo, solicitando a dois grupos que retomem a discussão coletiva apresentada sobre o sistema de coordenadas polar e bipolar. O primeiro grupo explica o sistema polar segundo o material de apoio, e um segundo grupo explica o sistema bipolar comparando-o com o anterior. Apesar de alguns estudantes verbalizarem que nunca viram o sistema bipolar, eles conseguiram explicar o funcionamento desse sistema de coordenadas e finalizaram com a generalização das características do sistema de coordenadas proposto no material de estuo.

Os objetivos desenhados *a priori*, foram alcançados, entre eles, citamos, por exemplo, identificar as principais diferenças e semelhanças entre os diferentes sistemas de coordenadas bem como as características comuns a todos eles. Há indícios de que esses aspectos constituíram uma base teórica-tecnológica que fundamenta a razão de ser de GA. Isto ficou mais claro à medida que o estudo foi avançando.

Destacamos a explanação de um dos grupos no coletivo, pois cada um deles apresentou suas respostas para as questões demandadas. A primeira questão retomou a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas. Par esta questão, um dos grupos apresentou no quadro para os colegas, conforme as construções escritas a seguir:

> A técnica empregada para encontrar as coordenadas de um ponto nesse sistema consiste em traçarmos retas passando pelo ponto ao qual desejamos encontrar suas coordenadas sendo essas (retas) paralelas a um dos eixos e concorrente ao outro simultaneamente, os pontos de interseção das retas com os eixos são as coordenadas. (Produção Grupo A)
> Utilizamos os conhecimentos prévios de ponto, reta, posição entre retas, espaço, interseção, ângulos. A partir do conceito de coordenada cartesiana, traçamos uma figura plana sendo que traçadas duas retas paralelas uma ao eixo x e a outra ao eixo y assim, a interseção entre as retas será o ponto situado no plano, ou seja, esse será nossa coordenada cartesiana, sendo que os eixos x e y não são ortogonais. (Produção Grupo B)
> Traçar retas paralelas ao eixo y e ao eixo x, as quais determinam pontos no plano (Produção Grupo C).

O episódio 4 foi pensado *a priori* como episódio 3, no entanto, como os dois primeiros episódios se excederam, algo perfeitamente esperado no desenvolvimento do PEP, o planejamento foi se reorganizando à medida que avançou a etapa experimental.

Neste episódio a professora–pesquisadora, deveria retomar as discussões do episódio anterior para dar continuidade ao estudo. A questão que surgiu, do ponto de vista epistemológico, é relativa às consequências das respostas da sessão anterior. A representação de pontos por meio de coordenadas retilíneas retangulares, que, *a priori*, seriam chamadas pelos estudantes de coordenadas cartesianas no plano, como este sistema é hoje chamado, ampliaria o estudo para que se possa compreender que outros objetos, podem ser construídos nesse sistema a partir de dois pontos, três pontos, segmentos de retas, vetores, polígonos regulares, curvas etc.

O comprimento de segmentos ou distância entre dois pontos, seria *a priori*, a base de cálculo a ser realizado nas tarefas que envolvam esse tópico cuja questão norteadora do estudo perpassaria por $Q_3^{DM\,(C)} =$ *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto*? A resposta para esta questão deveria, *a priori*, consolidar o conceito de segmento de reta, distância entre dois pontos e pontos alinhados, além disso consolidar a OM_P. É o momento *exploratório da técnica* e de constituição do ambiente *tecnológico-teórico*, em torno do estudo do ponto. Além disso, seria introdutório para o estudo da reta. Esperávamos que o desenvolvimento desta sessão engendrada com atividade de estudo exploratória, pudesse consolidar OM_P. Nesse sentido, a questão $Q_3^{DM\,(C)}$, geratriz desta sessão, traria outras questões, segundo o esquema da Figura 3, cujas respostas poderiam criar condições para alcançar o objetivo final. As questões intermediárias seriam “pano de fundo” desta sessão. $Q_3^{DM\,(C)}$: *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto?*$Q_{31}^{DM\,(C)}$: quais são as coordenadas de um ponto? De dois pontos? Etc?$Q_{32}^{DM\,(C)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos?$Q_{33}^{DM\,(D)}$: como ensinar o que são pontos alinhados? $Q_4^{DM\,(D)}$: como ensinar o objeto reta? O desenvolvimento seria engendrado, *a priori*, conforme ilustrado no mapa de questões da figura 7.

Como vemos, segundo a figura 7, a última questão surge a partir do desenvolvimento global da estrutura didático-matemática em torno da organização matemática do estudo do ponto no plano cartesiano, ou seja, no desenvolvimento das atividades de estudo, o objeto “reta” aparece em diferentes momentos, necessitando, assim, questioná-lo e estudá-lo. Nesse sentido, a questão que se levanta sobre o objeto reta, indica o rumo do estudo.

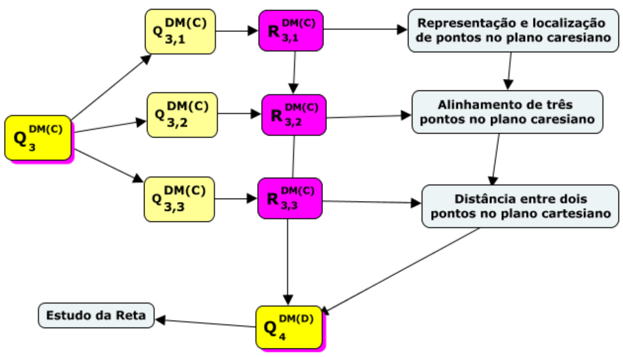


Figura 7.

Mapa de questões dos episódios três e quatro (Freitas, 2019, p. 273)

No desenvolvimento dos episódios quatro e cinco, propomos situações-problema, de modelização do contexto da óptica da visão humana. O objetivo foi estabelecer relações entre os elementos GAP, explorando o chamado “sistema de coordenadas cartesianas”, ou plano cartesiano (sistema de coordenadas retangulares), a localização de pontos, a determinação da expressão algébrica que permite calcular a distância entre dois pontos, e a condição de alinhamento entre pontos. Para o desenvolvimento de uma situação de modelização em torno do sistema óptico do olho humano, apoiamo-nos no estudo descrito no material de apoio que tratou de noções básicas de óptica e o funcionamento do olho humano.

Tabela 1.

Atividade de estudo e pesquisa AEP 1, introdução ao tema (Freitas, 2019, p.272)

De acordo com os meios de comunicação, diversos *sites* que tratam de saúde da visão, inclusive médicos, têm alertado para o aumento de problemas de miopia em crianças, adolescentes e até adultos por conta do uso excessivo e exposição a aparelhos eletrônicos, como smartfones, computadores, tablets etc. Além disso, o uso em excesso e a proximidade constantes dos aparelhos eletrônicos do globo ocular, podem causar ou aumentar os problemas com a visão, especialmente miopia. Aparelhos eletrônicos próximos aos olhos contribuem para

um esforço excessivo de acomodação ocular. Isso porque o músculo de nossos olhos, que trabalha como uma espécie de zoom para a captura da imagem, precisa fazer esse trabalho de maneira repetitiva, o que pode proporcionar o início da miopia.[5] ou seu agravamento. Diante deste contexto, a partir do material de estudo, faça uma investigação com o seu grupo de colegas apoiando-se nas seguintes questões norteadoras. a) Considere que cada sujeito tem um "ponto próximo" (P_p) e um ponto remoto ($P_{R)}$ localizado horizontalmente da retina (globo ocular). Qual "ponto próximo" de cada colega? E o ponto remoto? Represente geometricamente. b) Diante dos resultados identificados é possível indicar quais dos seus colegas têm problemas na visão?

Para a construção da resolução desta atividade exploratória (ou atividade de estudo e pesquisa -AEP), os estudantes deveriam começar por estudar o material de apoio, fazer a leitura e realizar o experimento com os colegas. E na sequência, fazer os registros do que conseguirem observar. Deveriam, *a priori*, fazer uso de uma régua comum.

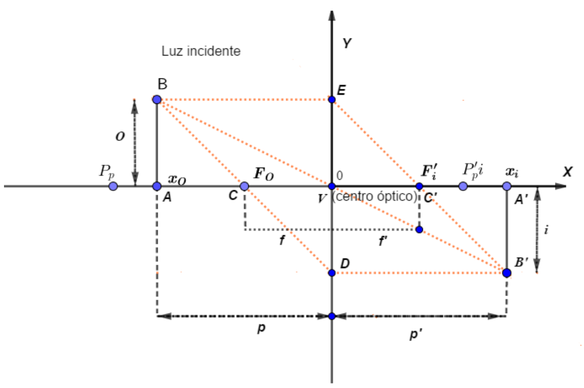
A partir de então, propomos a atividade exploratória 2 (Tabela 2), que visou trazer a situação real para uma análise geométrica e algébrica, tendo o aporte do estudo das lentes esféricas.

Tabela 1.

Atividade de estudo e pesquisa: lentes esféricas (Adaptado de Freitas, 20159 p. 312)

Seja um objeto de comprimento O situado a uma distância p do vértice do centro óptico ametrópico, segundo a figura 84, que aplica uma lente convergente de correção. Neste modelo de sistema, são representados vários pontos no plano que correspondem a um sistema óptico mínimo (olho reduzido). Analisando a figura, responda às questões a seguir, justificando e representando geometricamente suas repostas quando necessário.

Representação geométrica do sistema óptico reduzido



A) Como definimos, a partir da representação geométrica, $p, p', f \ e \ f'$?

B) Analisando os triângulos VAB e VA'B'; ABC e VDC, estabeleça relações matemáticas entre i, o, p e p' e $p, p' e \ f$.

C) Determine o comprimento do segmento VB e V'B' e justifique o porquê (argumente e prove) da sua construção.

A tarefa exploratória 2 teve como objetivo possibilitar aos estudantes realizar um estudo analítico do fenômeno, sob a perspectiva da geometria analítica. Este estudo analítico deveria permitir que os estudantes percebessem que o cálculo das lentes esféricas se apoia no conceito de distância entre dois pontos e de pontos alinhados, em um plano cartesiano. Além disso, havia

[5] Fonte: Disponível em: http://visaoparaofuturo.com.br/excesso-de-celular-pode-causar-miopia-saiba-mais/ .Acesso em: 19/02/2019.

a possibilidade de que, ao longo do desenvolvimento das tarefas propostas na atividade, pudessem identificar um discurso tecnológico-teórico que apoia as relações matemáticas que são estabelecidas entre as grandezas físicas. Para esta atividade de estudo e pesquisa, é necessário um apoio teórico da área da física e dos estudos do olho humano. Nesse sentido, foi fundamental trazer elementos básicos desses estudos, daí a importância do material de apoio utilizado. A atividade 2 deveria ser respondida com base na figura do Quadro 2. As atividades da AEP a serem realizadas estão descritas neste Quadro 2.

As tarefas propostas consistiam em definir relações matemáticas a partir de conceitos geométricos, que funcionam como discurso tecnológico-teórico, para fundamentar a existência de tais relações. Este é o momento de constituição do ambiente *tecnológico-teórico*, mas também se caracteriza como momento de *primeiro encontro* com a organização matemática do sistema óptico e o momento exploratório. O contexto da óptica se revela, portanto, uma variável didática rica e potencializadora dos momentos de ensino que vão potencializar o funcionamento do dispositivo (PEP-FP/TAD).

A partir do estudo de certos elementos, do sistema óptico humano, contidos no material de estudo foi possível concluir que as relações matemáticas definidas a partir da representação geométrica do fenômeno físico da formação das imagens e do uso de lentes esféricas corretivas têm, portanto, a geometria analítica plana como pano de fundo para justificar matematicamente as relações, ou seja, a GAP é a razão de ser matemática do fenômeno de formação da imagem. Nesse sentido, propomos realizar a modelização didática desse fenômeno, em termos dos conhecimentos de GAP, a serviço da formação matemática e didática dos professores estagiários.

As relações matemáticas que poderiam surgir foram várias, desde aquelas básicas desenvolvidas no estudo complementar sobre óptica, até a equação de Gauss e do aumento linear, a dedução da fórmula de distância entre dois pontos no plano, e as relações entre o alinhamento de três pontos (pontos colineares). Tais construções, com exceção do referencial de Gauss, já haviam sido escritas e descritas no estudo institucional realizado na construção do modelo epistemológico dominante. No entanto, aprecem na experimentação como fundamentadoras do problema, e deveriam ser evocadas pelos professores estagiários, porém num outro contexto. Analisamos as possíveis respostas que seriam fornecidas pelos sujeitos, o *momento do trabalho da técnica,* no qual os estudantes poderiam também, a partir do ambiente *tecnológico teórico* em torno da semelhança de triângulo e proporcionalidade, deduzir técnicas alternativas para a tarefa proposta.

A resposta da letra (A) por definição do sistema óptico, do olho reduzido, f representa a distância focal do objeto, ou seja, a distância linear ($f - 0 = f$) do vértice do centro óptico, situado na origem dos eixos coordenados até o foco do objeto. Analogamente, f' representa a distância focal da imagem do objeto, ou seja, a distância linear ($f' - 0 = f'$) do vértice do centro óptico até o foco da imagem objeto.

A resposta da letra (B) corresponde à dedução da equação do aumento linear e da equação do referencial de Gauss. Tomando a proporção $\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA}$ a partir dos triângulos semelhantes VAB e VA'B' e substituindo segundos valores mostrados na figura, temos $-\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$ (I), a equação do aumento linear, que exatamente estabelece relações entre i, o, p e p'.

Os triângulos ABC e VDC também são semelhantes, e temos que $\frac{AB}{AC} = \frac{VD}{VC} \Rightarrow \frac{o}{p-f} = \frac{-i}{f}$ $\Rightarrow f.o = -i(p-f) \Rightarrow \frac{f}{p-f} = \frac{-i}{o}$ (II). Podemos deduzir a equação de Gauss, importante no estudo da óptica a partir das equações encontradas. Espera-se, *a priori*, que os estudantes descubram esta construção por meio da pesquisa, sem que a tarefa seja solicitada. Portanto, se substituirmos (I) em (II), obtemos $\frac{p'}{p} = \frac{f}{p-f} \Rightarrow p'(p-f) = p.f \Rightarrow p.p' - p'f = p.f \Rightarrow$ $p.p' = p'f + p.f$; Multiplicando dois membros da última equação por $\frac{1}{p.p'.f}$, obteremos: $\frac{p.p'}{p.p'f} = \frac{p'.f}{p.p'.f} + \frac{p.f}{p.p'.f}$, que resulta em: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, Equação de Gauss. Esta construção é facilmente encontrada na internet em *sites* que tratam do estudo das lentes esféricas, como descrito no Apêndice 1.

Como relação à letra C, temos que: o segmento de reta VB é a hipotenusa do triângulo retângulo AVB, cujos catetos são AB e AV. Usando-se o teorema de Pitágoras: $|VB|^2 = |AV|^2 + |AB|^2$. Temos aqui um segmento horizontal delimitado por dois pontos, cateto AV (coordenadas de dois pontos em x), e um segmento vertical delimitado por dois pontos A e B, (coordenadas de dois pontos em y). Portanto, os lados do triângulo têm, respectivamente, os seguintes comprimentos: AV= $(x_A - x_v)$ e AB= $(y_A - y_B)$, portanto, $|VB|^2 = |AV|^2 + |AB|^2 \Rightarrow d(VB) = \sqrt{(x_A - x_v)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(VB) = \sqrt{(x_o - 0)^2 + (0 - y_B)^2} \Rightarrow d(VB) = \sqrt{{x_o}^2 + {y_B}^2}$$

A priori, os estudantes poderiam fazer $d(VB) = \sqrt{o^2 + p^2}$. Analogamente, teremos A'V= $(x_i - x_v)$ e o AB= $(y_A - y_B)$. Donde: $|VB'|^2 = |A'V|^2 + |A'B'|^2$, e $d(VB) = \sqrt{(x_i - 0)^2 + (0 - y_B)^2}$. *A priori* os estudantes também poderiam fazer $d(VB') = \sqrt{i^2 + p'^2}$.

Esperava-se, *a priori*, a ativação das noções de segmento de reta, de segmento orientado e de reta no plano, também, mobilizadas pelos sujeitos nas discussões a respeito da figura. A resolução e discussão das questões no grupo, bem como as construções matemáticas e a dedução de equações, constituem-se como o momento do trabalho da técnica. A tarefa, portanto, visa promover o trabalho da técnica, ou seja, os estudantes devem, a partir das construções realizadas ter a capacidade de síntese e de estruturar o bloco prático-técnico com o tecnológico-teórico, visando tornar a técnica mais eficiente e confiável.

Toda a resolução do problema se apoiou no conceito de distância entre dois pontos, a partir da dedução das fórmulas utilizadas. Tomamos como possibilidade os estudantes empreenderem uma técnica alternativa, que poderia ou não ser exatamente igual àquela que propomos. No entanto, qualquer que fosse a técnica, perpassaria pelo discurso teórico-tecnológico que apresentamos.

A noção de localização de pontos no plano foi fundamental para a interpretação da figura do quadro 2. Nesse sentido, os estudantes representariam figuras (triângulos retângulos) auxiliares para a dedução das distâncias conjugadas.

No trabalho em grupo, os estudantes deveriam ter como objetivo apresentar uma técnica para a resolução do problema, buscando diferentes fontes de pesquisa, inclusive no material de apoio. Após a socialização dos grupos, a professora pesquisadora proporia uma institucionalização, que pudesse contemplar as dificuldades que surgiriam durante o trabalho dos grupos.

A avaliação deveria se articular com a institucionalização, em que os estudantes, em conjunto com a professora-orientadora, discutiriam a respeito das organizações matemáticas que foram construídas até então, avaliando o que foi construído e as limitações da técnica desenvolvida. O processo de institucionalização deveria esclarecer o que foi elaborado em termos de organização matemática e promover uma reflexão a respeito do que foi aprendido, além de possibilitar que os estudantes se articulassem para organizar a produção escrita como resposta parcial da questão inicial geradora do percurso. Para tanto, o relatório das atividades, além das produções, deveria ter como questões norteadoras, questões propostas inicialmente no desenvolvimento do dispositivo.

As noções aprofundadas nesta sessão como, o estudo da reta, deveriam ser retomadas nos episódios seguintes do estudo, podendo os estudantes buscarem outros meios de fonte de estudo como forma inclusive de validar suas construções matemáticas.

As atividades ocorreram conforme o desenho. Destacamos algumas respostas apresentadas pelos sujeitos:

O Grupo A começou a desenvolver o experimento tendo uma colega inicialmente como voluntária, ela explica o que se passa quando aproxima ou distancia um determinado objeto ou imagem do olho com base no experimento, e em seguida, na explicação fornecida no material de apoio. A equipe se apoiou muito mais no material de estudo que no experimento em si, e fez as deduções a respeito da distância e do ângulo do capo de visão. Ilustramos com um trecho da transcrição do áudio do trabalho do grupo (F1, F2, são falantes femininas).

> F1: - *Quando eu a... a distância foi menor que o ponto próximo...*
> *F1: - Não. Quando a gente pega o objeto e aproxima ele do olho, de imediato esse ângulo diminui, né, isso?*
> *F2: - Sim. É.*
> *F1: - Quando esse ângulo diminui a gente pode dizer que na verdade diminuiu o nosso campo? Né, isso? Ou seja, a gente... diminui o campo não, aumenta o campo de visão, mas diminui a nitidez, né, do objeto, da visão que nós temos em relação a esse objeto. Por quê é que acontece...? Isso acontece porque também onde o objeto ele estava... antes que a gente estava vendo com mais nitidez, ele estava após o ponto próximo, mas nesse momento agora esse passou a ter antes do ponto próximo. Então, toda a vez que nós tivermos um objeto antes do ponto próximo, a nitidez que nós temos... o ângulo em relação a ele é maior, né, isso?*
> *F2: - É.* (Transcrição de áudio, Grupo A)

Aparentemente, os membros do grupo, após esse momento inicial de trabalho não identificaram a distância do objeto como sendo o fator moderador de maior ou menor visão nítida. Na sequência, discutiram quando se deve utilizar as lentes convergentes e divergentes, a partir do material de apoio, e em seguida relacionar a distância de visão nítida com o uso de uma lente ou outra.

Esse momento de trabalho foi o *de primeiro* encontro com a noção intuitiva de distância, pois ainda não tínhamos uma organização matemática explícita, com relação a essa noção. Essa organização foi desenvolvida no momento didático seguinte. *A priori*, não dimensionamos precisamente o tempo didático para as atividades previstas sobre o sistema óptico, bem como de todos os episódios de estudo. O estudo do sistema óptico e as atividades propostas foram redimensionadas em três sessões, ou episódios, ao invés de um único.

Reta como lugar geométrico (episódios 5 e 6)

Esta etapa do estudo foi marcada pelo estudo da reta propriamente dita. Neste caso, alguns esclarecimentos são necessários. A partir do estudo piloto realizado no início da pesquisa, várias restrições do ponto de vista da formação matemática dos futuros professores foram identificadas. No quadro dessas restrições, encontra-se um aspecto que é fundamental no estudo de GA: trata-se da articulação entre o geométrico e o algébrico, por exemplo, identificar propriedades geométricas e representá-las por meio de equações. Esta articulação, atualmente, pode ser facilitada, ou não, com o uso de interfaces tecnológicas que possibilitem aos sujeitos, por meio delas, manipular as representações dos objetos. Nesse sentido, o uso do *software* dinâmico de geometria, o Geogebra, poderá se configurar como parte do *meio* no desenvolvimento das tarefas que forem propostas. É possível que a incorporação do uso desse tipo de tecnologia promova o aspecto econômico do problema didático posto: ensinar GA.

Outro aspecto importante a ser mencionado é a utilização de prova e demonstração, que tem sido uma restrição de difícil contorno nas pesquisas de campo desenvolvidas com os professores, e que o nosso estudo piloto também revelou. Aliado a tudo isso, o nosso PEP-FP, ora em desenvolvimento, deve ter globalmente duas perspectivas gerais: desenvolver o conhecimento matemático presente no estudo dos objetos, e desenvolver o conhecimento didático presente nesse mesmo estudo, contornando assim o problema didático de ensinar GA.

Por último, e não menos importante, há o aspecto ecológico no estudo de GA, o qual, como vimos no estudo dos modelos epistemológicos de referência e dominantes, revela várias lacunas no desenvolvimento de conhecimentos relacionados com GAP, tendo em vista o desaparecimento de algumas abordagens didáticas, do bloco tecnológico-teórico nas organizações matemáticas, e o desaparecimento de tarefas que incluem demonstrações, potencializadoras do desenvolvimento da teoria. Um exemplo disso é a tarefa de mostrar que três pontos estão alinhados sem usar a técnica do determinante, ou o discurso tecnológico-teórico apoiado na geometria sintética, e não na Álgebra linear. Tudo isso exposto, organizamos um mapa de questões que nortearam os episódios de estudo, de acordo com a figura 8.

Figura 8.

Mapa de questões dos episódios E a J (Adaptado de Freitas, 2019, p.283)

O mapa visou elucidar quais questões podem surgir quando partimos da questão $Q_4^{DM\,(C)}$ (como ensinar reta?), tendo em vista, o modelo alternativo, o qual considera os aspectos relevantes de cada modelo epistemológico levando em consideração os aspectos ecológico, didático e econômico. A partir da questão "como ensinar reta?", o que se questiona é o que é o lugar geométrico reta? A resposta para esta questão vai gerar várias questões delineadas em dois aspectos matemáticos: o geométrico e o algébrico. Estes dois aspectos mobilizam a questão didática da noção do objeto e de sua representação (geométrica, algébrica ou outras).

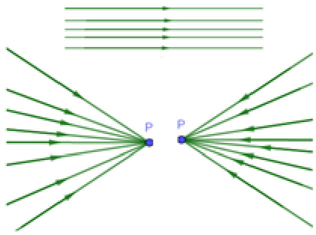
Era nesse caminho que os episódios de estudo se delinearam. O percurso do estudo e de (re)construção das organizações matemáticas e didáticas a respeito da reta, deveria permitir aos sujeitos responder à questão didática: ensinar reta, por meio das questões intermediárias do estudo. Reforçamos que as questões engendradas, representadas no mapa da Figura 8, são questões definidas *a priori*.

Cada temática relacionada nos blocos em azul-claro faz referência ao elemento específico da organização matemática em desenvolvimento e estudo.

As questões, a seguir, inserem-se em cada sessão de trabalho, a partir do estudo do lugar geométrico reta, descrevendo, por meio do mapa, suas relações com as respostas provisórias e os temas gerais da organização didática: $Q_{4,1}^{DM\,(E)}$: o que é o lugar geométrico reta, no plano? $Q_{4,2}^{DM\,(E)}$: qual(ais) relação(ões) matemática(s) envolve(m) uma reta no plano? $Q_{4,3}^{DM\,(F)}$: qual a direção de uma reta no plano? $Q_{4,4}^{DM\,(F)}$: como ensinar a equação geral de uma reta dada?$Q_{4,5}^{DM\,(G)}$: quais relações matemáticas podem ser estabelecidas entre pontos e retas no plano?$Q_{4,6}^{DM\,(H)}$: quais as posições relativas entre duas retas no plano? Com relação às questões $Q_{4,1}^{DM\,(E)}$ e $Q_{4,2}^{DM\,(E)}$, espera-se, globalmente, que os estudantes consigam deduzir a equação geral de uma reta dada.

Como vimos as sessões anteriores para que um observador enxergue um corpo, seus olhos devem receber a luz que esse corpo emite. Por exemplo, uma lâmpada, para representar a luz se propagando e atingindo os olhos do observador, utiliza-se linhas orientadas que fornecem a direção e o sentido de propagação da luz. Tai linhas são denominadas raios de luz, que se representa segundo a figura 85. Um feixe de luz é cilíndrico, quando seus raios são paralelos, é cônico quando todos os raios de luz têm direções que passam por um mesmo ponto P, sendo neste caso, convergente ou divergente. O ponto P é o vértice do feixe. Quando o feixe é composto por retas paralelas, o vértice está no infinito.
Tendo por base a figura, reconstrua no Geogebra esses tipos de imagem e seguida responda as questões.

Representação gráfica de feixes de luz



Adaptado de Sampaio e Calçada (1998, p. 2)

A) Quais entes geométricos podem ser associados os raios luminosos?
B) E se prolongarmos esses raios indefinidamente em um plano? o que acontece? simule outras situações.

Figura 9.

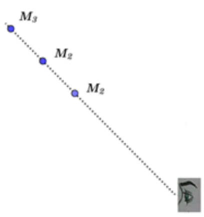
Atividade exploratória (Adaptação de Freitas, 2019, p.285)

Neste episódio, propusemos a continuidade das atividades interdisciplinares sobre óptica com a formação das imagens, realizadas nas sessões anteriores (lentes esféricas, do olho humano, ametropias etc. Momentos do primeiro encontro com OM_R (organização matemática da reta). Nesse sentido sugerimos algumas atividades exploratórias, cujo objetivo variou: na atividade 1, a manipulação da interface do Geogebra, segundo a Figura 9, e a visualização de certas propriedades geométricas.

Na segunda atividade (Figura 10), além da visualização das propriedades, os professores estagiários deveriam construir a representação geométrica no plano cartesiano usando a interface do Geogebra.

Um observador identifica três objetos que estão localizados no seu campo de visão, todos em uma mesma direção. Observe a figura.

Figura 87 – Ilustração da tarefa campo de visão



Fonte: Elaborado pela Autora

Utilizando o Geogebra reproduza uma representação geométrica no plano cartesiano, em seguida, análise essa construção com o seu grupo, indicando quais propriedades geométricas podem ser observadas, em seguida responda as questões.

A) Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas a partir dos pontos que representam os objetos no plano cartesiano?
B) Qual a equação da reta determinada pelos pontos M_1, M_2, sabendo que $P(x, y)$ é um ponto que percorre a reta?

Figura 10.

Atividade (Freitas, 2019, p. 286)

A ideia era que tomassem como ponto de partida um modelo matemático já conhecido por eles ou que fosse desenvolvido nesta construção, e por meio da livre exploração da interface do software, chegassem ao modelo de pontos alinhados. Neste modelo, a construção geométrica permitia aplicar o teorema de Tales, ou semelhança de triângulos, ou a noção de segmentos proporcionais, ou ainda, a dependência linear entre segmentos orientados. Este último conceito traz a noção de vetor, que não fazia parte do conteúdo em estudo.

Qualquer caminho que os sujeitos escolham, chegarão à equação que representa o determinante, portanto, a condição para alinhamento de três pontos.

Esse mesmo modelo deve ser o ponto de partida, como técnica utilizada pelos sujeitos para encontrar a equação da reta. Salientamos que esse modelo para a dedução da equação geral da reta não aparece no estudo do modelo de referência, apoiado em Briot e Bouquet (1860). No seu texto do século XIX, os autores apresentam de imediato a equação geral da reta, e todas as construções posteriores se apoiam nesta proposição para demonstrar que a equação: $Ax + By + C = 0$.

Por associar a representação geométrica da reta (por três pontos) ao cálculo do determinante, esse modelo surgiu depois do movimento da matemática moderna, já com a influência da álgebra linear.

Para a resolução da questão (a), o primeiro passo seria construir a representação geométrica no Geogebra, utilizando a opção ponto. Na interface podemos marcar vários pontos, em seguida, selecionar a opção reta por dois pontos e escolher dois dos quatro pontos, para traçar a reta. Traçamos os segmentos que determinam a localização de cada ponto por linhas tracejadas, o que vai determinar as coordenadas (x_1 , y_1), (x_2 , y_2) e (x_3 , y_3) de cada ponto M_1, M_2 e M_3 respectivamente (Figura 11).

Os pontos estão situados na mesma reta ou mesma direção, ou seja, estão alinhados. Significa dizer que os três pontos determinam sobre a reta segmentos proporcionais. As retas paralelas que determinam as coordenadas de cada ponto são um feixe de retas paralelas cortadas pela reta (r), e evocam o teorema de Tales.

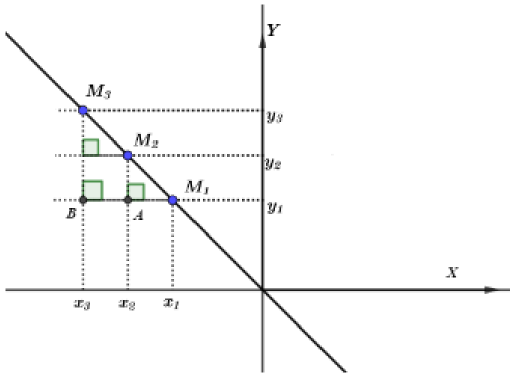


Figura 11.

Representação geométrica de três pontos alinhados letra (A) (Freitas, 2019, p.286)

Formam-se também triângulos (retângulos) semelhantes, M_1M_3B e M_1M_2A, e essas propriedades geométricas permitem estabelecermos que: $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$ e $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$. O desenvolvimento das igualdades nos permite chegar ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, que é, justamente, a condição para que os três pontos estejam alinhados.

Para a questão (b) (Figura 12), os estudantes poderiam utilizar a mesma técnica, apoiada nas relações geométricas de semelhança, no teorema de Tales e encontrar a equação da reta: $x(\,y_1 - y_2) + y\,(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$ (I).

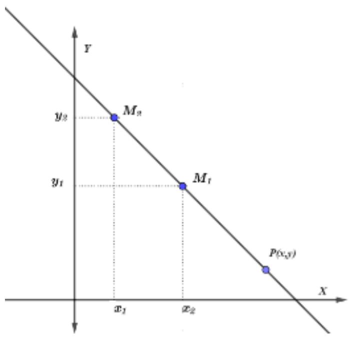


Figura 12.

Representação geométrica letra (B) (Adaptado de Freitas, 2019, p.288)

A análise da equação, apoiada na Figura 12, permite afirmarmos que temos valores constantes x_1, x_2, y_1 e y_2 e valores variáveis $x\ e\ y$. Desta forma, podemos substituir na equação (I), $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $(x_1y_2 - x_2y_1) = c$, e teremos: $ax + by + c = 0$, a equação geral da reta, relação principal procurada. Podemos também desenvolver diretamente o determinante $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e chegar à mesma conclusão.

Após a resolução da tarefa e a determinação da equação geral da reta a seguinte questão poderá ser proposta pela professora pesquisadora: o que acontece com a equação da reta se os pontos M_1 e M_2 forem pontos de intersecção entre a reta e os eixos x e y, respectivamente? Simule e represente geometricamente, utilizando o Geogebra, e mostre a equação resultante.

Para responder a essa questão, é necessário movimentar os pontos M_1 e M_2 de forma que eles pertençam, respectivamente, aos eixos coordenados x e y. Essa construção deverá ser feita no Geogebra para poder movimentar os pontos, obtendo-se a Figura 13.

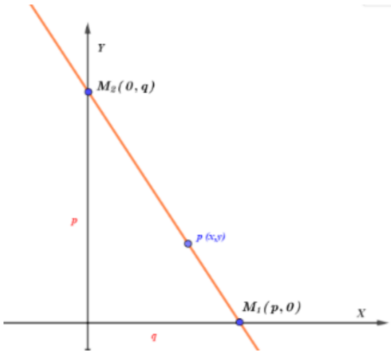


Figura 13.

Reta que intercepta os eixos X e Y (Freitas (2019, p.289)

Os pontos M_1, M_2 e $p\ (x, y)$ são colineares e, portanto, pertencem a uma reta, logo podemos concluir que: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desenvolvendo esse determinante temos que: $-qx - py + pq = 0$, e esta equação é equivalente a: $qx + \ py - pq = 0 \Rightarrow qx + \ py = pq$.

Podemos dividir a equação pelo produto pq para obtermos uma equação na qual x e y estejam isolados: $\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$. Temos assim a equação segmentária da reta r: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Note que os denominadores são exatamente as medidas dos segmentos que a reta r determina sobre os eixos coordenados x e y

Em síntese, os estudantes devem apresentar as relações matemáticas por meio das equações da reta, que podem ser de três tipos: $y = ax$, ou seja, uma reta que passe pela origem do sistema cartesiano, $y = ax + by$; uma reta que corte o eixo y, em um ponto diferente do ponto, origem do sistema cartesiano; e uma reta que seja paralela ao eixo x, definida como $y = b,$ sendo $y = ax + by$ o modelo algébrico genérico para a representação de uma reta qualquer. O modelo reduzido da equação da reta por meio do determinante permite também chegar à equação segmentada: $xp + yq = 1$, quando a reta intercepta os pontos de coordenadas (x, 0) e (0, y). É possível que os estudantes desenvolvam também este modelo.

As etapas seguintes do estudo serão fortemente influenciadas por este episódio, pois os estudantes deveriam desenvolver uma organização matemática com o intuito de estudar a reta e a sua equação geral. Não previmos, em detalhes, quais construções geométricas e algébricas seriam priorizadas pelos estudantes na sessão seguinte. A questão central que norteou o estudo é: como ensinar a equação da reta para seus potenciais alunos? A resposta desta questão será a síntese acrescida de objetivos didáticos, que consolidaria o momento tecnológico-teórico.

Em razão das limitações deste texto, não apresentamos uma análise detalhada das resoluções das tarefas realizadas pelos professores estagiários, nem os resultados dos episódios 7, 8, 9 e 10, que envolviam o estudo do coeficiente linear da equação da reta, relações ente pontos e retas e posições de retas. O que podemos afirmar globalmente é que eles cumpriram as tarefas apoiadas no mesmo modelo de técnicas pensadas *a priori*. No entanto, evoluíram, desde o início do estudo, para um processe de debate em torno do discurso tecnológico-teórico das técnicas por eles utilizadas, e o conteúdo pensado em termos didáticos para seus potenciais alunos, algo que foi sendo incorporado ao conhecimento desses sujeitos ao longo dos episódios de estudo.

Destacamos alguns resultados dos episódios 11 e 12, os quais se apoiaram na construção da tarefa proposta como atividade integradora do didático (Figura 14).

Parte 1: Construa um esquema ou mapa conceitual, representando globalmente a evolução do estudo realizado, em termos dos objetos matemáticos estudados.

Parte 2: A partir das reflexões realizadas no processo de formação do ateliê de modelização didática, desenvolva uma organização didática de estudo para os seus alunos do 3º ano do ensino médio, com base na seguinte questão: ***como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?***

Figura 14 .

Atividade integradora do didático (Freitas, 2019, p.295)

Ilustramos, por meio de um dos extratos dos diálogos dos professores estagiários, o empenho para o desenvolvimento das tarefas, dos pontos de vista matemático e didático:

H1 - A gente elaborou a atividade do alinhamento de três pontos, cinco questões para eles identificarem se eles entenderam como esse... se é alinhado e essa questão aqui que é mais... que envolve também função exponencial do primeiro grau. Aí agora falta para terminar? A atividade dos outros... dos outros dias. Porque aqui, olha, no primeiro dia a gente só escolheu uma questão, que é essa daqui, além dos exemplos que a gente vai dando, que vai ser mais de construção. A segunda também é construção. E depois, na terceira, vem essa daqui, e depois, para entender quando a gente pega... como a gente pegou aqui, a equação geral da reta. Com... com a equação geral da reta tem aqueles casos, quando "B" é zero e quando é paralelo ao "X". Aí agora o que foi que a gente pensou? Em colocar isso em no Geogebra, para a gente desenhar uma reta. E aí, a partir do... quociente, eles veem a... acontecer no Geogebra. Não no quadro, como a gente está vendo.
H2 - Ah, sim, sim.
H1 - Porque até tem vezes que até o desenho do... do quadro fica um pouco complicado para eles visualizarem. Pode não ser o melhor... ((sobreposição de vozes))
H2 - Visualiza, não é?
H1 - Agora... agora aqui eu estou na dúvida. Se for para continuar... porque, se for para continuar o conteúdo, vê equação reduzida, vê ângulo, no caso na inclinação da reta, e o ângulo. Aí depois vem a reta reduzida e a reta paramétrica, só que como a gente não... no mapa conceitual a gente só foi até a equação geral, a gente vai também no plano só até equação geral.
H2- (Quem que escreve) [00:01:44] Geogebra?
H1 - O Geogebra, toda vez que a gente escreve fica assim.
(Transcrição de áudio, produção do Grupo A),

Figura 15 .

Transcrição de áudio da produção do grupo (Freitas, 2019, p. 346)

Foi possível identificarmos nos áudios do trabalho dos professores estagiários o planejamento das tarefas para proporem no âmbito da organização didática e do plano de aula, o que eles classificaram como exercícios, tarefas de construção e tarefas de visualização com o uso do Geogebra. Questionamos até onde iriam no conteúdo, e eles decidiram que cumpririam a proposta do mapa mental construído em uma das sessões de estudo, segundo a Figura 15.

Conclusões

Diante do recorte apresentado neste texto, no que se refere à experimentação, à supressão de algumas sessões e a alguns resultados, destacamos alguns aspectos conclusivos dos episódios de estudo e aspectos gerais identificados como características do PEP realizado e consolidado como dispositivo teórico e metodológico para pesquisa e formação profissional.

Os momentos de planejamento identificados nas atividades realizadas pelos professores estagiários foram bastante significativos, apesar de não ser possível identificarmos nos áudios as possíveis praxeologias pensadas para o ensino de GAP. O trabalho dos estagiários, apesar das dificuldades de expressão em língua portuguesa formal, revela a atividade da prática de ser professor, planejador, organizador, dos pontos de vista didático e matemático, levando em conta, entre outras coisas, os aspectos pedagógicos.

Apesar de a atividade do estudo ter sido proposta para potenciais alunos, os professores estagiários absorveram a atividade para seus próprios alunos do estágio, e em nenhum momento expuseram que a proposta não seria real, ao contrário, alguns revelaram que iriam colocá-la em prática na primeira oportunidade que tivessem, em uma classe de terceiro ano de ensino médio, ainda no estágio.

Um outro aspecto que destacamos como importante, identificado nas construções dos sujeitos, é a necessidade de os sujeitos (estagiários) se colocarem na posição ora de professores, ora de seus alunos, com o objetivo de pensar o ensino e a aprendizagem destes. A explanação oral e a construção escrita do mapa conceitual indicam que os estagiários identificaram os elementos matemáticos desenvolvidos ao longo do estudo, e os articularam com aqueles didáticos e pedagógicos essenciais para se pensar o ensino e a aprendizagem dos objetos de GAP escolhidos.

Esta conduta foi marcante ao longo de todas as sessões de ensino mediadas pela pesquisadora. A cada sessão de estudo, nos momentos de partilha e de institucionalização, a pesquisadora incentivava e promovia o debate a respeito da aprendizagem e do ensino, das tarefas, técnicas e estratégias para a abordagem didática dos temas em estudo. Ao que parece, isso foi incorporado pelos estagiários no percurso.

No trabalho dos grupos, ficou evidenciada a importância das tecnologias que justificam as técnicas e do discurso tecnológico teórico, pois essas tecnologias aparecem nos mapas, como parte integrante do estudo, além da(s) teoria(s) que justificam as tecnologias, por exemplo: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e Semelhança de triângulos etc. Além disso, os grupos identificaram as técnicas mobilizadas para as tarefas, regra de Sarrus, matrizes e determinantes.

Um outro aspecto evidenciado na construção dos sujeitos foi a incorporação das tecnologias digitais como parte do processo de pensar o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos, por exemplo, o uso do Geogebra, Winplot e outros *softwares* no ensino de matemática.

Definimos que parte do conhecimento didático mobilizado pelos professores estagiários nas atividades pode ser caracterizada como a habilidade do professor de explicar um conteúdo matemático, e se fazer entender por seus alunos. Sobre essa habilidade, o trabalho de enquete sinalizou que ela pode ser potencializada pela praxeologia de uma tarefa durante os momentos de partilha e socialização realizados nas diferentes etapas do dispositivo.

Com relação aos aspectos gerais do PEP realizado, reforçamos que trouxemos um recorte com o intuito de caracterizá-lo enquanto dispositivo constituído, a partir de certas características já descritas teoricamente, as quais sintetizamos como características gerais que estiveram presentes na experimentação de um ponto de vista prático para nortear a constituição desse tipo de dispositivo:

- Desenho do processo, *a priori*, provisório, replanejamento ao longo do percurso;

- Inclusão de situações modelizáveis de um PEP interdisciplinar;
- Articulação entre o matemático e o didático nas situações modelizáveis;
- Momentos de partilha e socialização;
- Microgrupos de trabalho no âmbito do coletivo de estudo;
- Articulação entre matemático e o didático nos momentos de institucionalização;
- Modelização didática das organizações matemáticas;
- Questões norteadoras definidas *a priori* como parte do controle do pesquisador;
- Alternância entre os momentos didáticos de um PEP "aberto" e de um PEP "fechado", PEP misto;
- Coexistência de um PEP Regional e de outros PEP pontuais ao longo do estudo.

Este último item da lista só pudemos percebê-lo no final da pesquisa, boa parte suprimida deste artigo. No entanto, as noções de praxeologia pontual, regional e global nos inspiraram para definir os mini-PEP que ocorreram no âmbito de cada atividade, bem como o trabalho dos grupos no âmbito do coletivo de estudo.

Referências

Artigue, M (1988). Ingénierie didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques. **La Pensée Sauvage-Éditions,** 9(3), 281-308.

Ball, D. L.; D. L.; Thames, M. H. Phelps. G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** 59(5), 389-407.

Briot, C. ; Bouquet, J. C**.** (1860). **Leçons de Géométrie Analytique**. Dezobry, E. Magdeleine et C., Paris: Libraires-Éditeurs..

Chevallard, Y. (1999). Les analyses de pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique**.** Recherches en Didactique de Mathématiques. **La Pensée Sauvage-Éditions**, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Maury S. & Caillot, M. (Éd.). *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104)., Paris: Éditions Fabert. Acessado em de : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf

Chevallard, Y. (2007a). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. França, Acessado em 03 de julho de:

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf.

Chevallard, Y. (2007b). **Um concept en émergence**: la dialectique es médias et des milieux. Université de Provence, França.

Chevallard, Y. (2009a). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. **15e École d'Été de Didactique**

des Mathématiques. Clermont-Ferrand,. Acessado em 15 de abril de 2015 de: http://www.ardm.eu/book/export/html/676.

Chevallard, Y. (28 avril 2009b). La notion de PER: problèmes et avancées**.** Toulouse, . Acessado em 17 de abril de 2015 de:

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf.

Chevallard, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. **Educ. Matem. Pesq**., 22(4), 13-53.

Duval, R. (1995). **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang.

Freitas, Rita Lobo. (2019). **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD**: **constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.

Iezzi, G. *et al*. (2010). **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Editora Saraiva,.

Maire, I. (1637). La Géométrie, in Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et trouver la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie. Acessado em 28 de maio de 2018 de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594/f4.double.r.

Mishra, P.; Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Teachers College. **Record,** 108(6), 1.017–1.054.

Sierra, T. Á. D. (2006). **Lo matemático en el diseño y analisis de Organizaciones didácticas:** los sistemas de Numeración y la medida de magnitudes.Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid. Madri, España.

Sierra, T. Á; GascON, J. (2018). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, 38(1), 79-117.

Shulman, L. S. (1986). Those Who understand: Knowledge growth in teaching. **Education Researcher**, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Conhecimento e Ensino: Fundamentos da Nova Reforma. **Harvard Educational Review**, 57(1), 1-23.

Silva, M. J. F. da. Lima, G. L. de. (2015). Conhecimentos desenvolvidos em um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância. In *Anais* do XIV CIAEM-IACME, Chiapas, MX. México: CIAEM-IACME.

Tardif, M. (2012). **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes.

Apêndice

Quadro 1

Descrição de Tarefas

QUADRO DESCRITIVO DAS TAREFAS	
TIPO DE TAREFA	**DESCRIÇÃO**
T_1	*encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado*
T_2	*por um ponto dado, levar uma reta paralela a uma reta dada*
T_3	*levar uma reta por dois pontos dados*
T_4	*achar o ponto de intersecção de dois pontos dados*
T_5	*achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas*
T_6	*reconhecer se três pontos estão em linha reta. Na linguagem atual utilizamos o alinhamento de três pontos dados*
T_7	*reconhecer se três retas passam por um mesmo ponto dado*
T_8	*encontrar o ângulo de duas retas, o que os autores parecem propor é determinar ângulos entre duas retas dadas no plano*
T_9	*de um ponto dado, baixar uma perpendicular sobre uma reta dada, e achar o comprimento dessa perpendicular*
T_{10}	*por um ponto de intersecção de duas retas dadas levar uma reta perpendicular a uma reta dada*
T_{11}	*achar o lugar dos pontos igualmente distantes de dois pontos dados*
T_{12}	*encontrar a equação tangente a uma curva qualquer*
T_{13}	*encontrar a equação da tangente ao círculo*
T_{14}	*levar uma tangente ao círculo por um ponto exterior*
T_{15}	*levar uma tangente ao círculo paralela a um reta dada*
T_{16}	*encontrar o lugar de pontos cujas distâncias a dois pontos fixos sejam entres si em uma relação dada*
T_{17}	*achar os pontos de intersecção de dois círculos*