NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 111, julio 2022, páginas 91-113

Simplificar y la simplicidad (aparente) de la geometría
Problemas Comentados LX

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Soluciones a los problemas expuestos en anterior artículo mediante distintas formas de pensar y ejecutar los procesos de resolución.. Se resuelven aplicando relaciones de orden, álgebra, ensayo y error, modelización, ir hacia atrás, organización de la información, uso de tablas de doble entrada o eliminación. Se presentan más de un enfoque resolutivo, con aportaciones de nuestros lectores. Al tener distintos niveles de dificultad, son un material utilizable tanto para toda la Secundaria como, en algunos ejemplos, para Primaria. Se plantean nuevos retos , esta vez de geometría.

Palabras clave Métodos de resolución de problemas. Problemas, Primaria, Secundaria, Geometría

Abstract Solutions to the problems exposed in the previous article through different ways of thinking and executing the resolution processes. They are solved by applying order relationships, algebra, trial and error, modeling, going backwards, information organization, use of double tables. entry or removal. More than one solving approach is presented, with contributions from our readers. Having different levels of difficulty, they are a usable material both for the entire Secondary School and, in some examples, for Primary. New challenges arise, this time geometry.

Keywords Solving problem methods, Problems, Primary, Secondary, Geometry.

¡OZÚ! 60 ARTÍCULOS. ¡CASI NADA!

Recordamos, de entrada, las respuestas a los retos que propusimos en el artículo anterior. El primero era el de **Los Sobres**, del cual indicamos su origen en la Olimpiada Matemática de Albacete.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, profesores jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

LOS SOBRES

Tenemos un conjunto de diez tarjetas, cada una mostrando uno de los dígitos de 0 a 9. Se reparten entre cinco sobres, de manera que haya dos cartas en cada sobre. La suma de los dos números que hay en su interiorestá escrito en cada sobre:

¿Qué números podrían estar dentro del sobre "8"?

Les ofrecemos tres maneras distintas de afrontar la resolución. Las dos primeras son nuestras, experimentadas también con alumnos de ESO en colegios cercanos. La tercera es la de nuestro habitual colaborador Paco Morales. Se diferencian unas de otras principalmente en las herramientas escogidas para trabajar y el orden procesual elegido. Queremos hacer ver a nuestros lectores que la resolución de problemas es una tarea personal. Partiendo de un proceso común y un repertorio amplio de herramientas lógicas, estrategias y diagramas, el camino a seguir es una elección personal y, por tanto, puede dar lugar a procesos ligeramente diferentes o totalmente diversos.

Proceso de Resolución (1)

COMPRENDER

Datos Diez tarjetas, cada una mostrando uno de los dígitos de 0 a 9. Cinco sobres. Las tarjetas se reparten de manera que haya dos cartas en cada sobre.

Objetivo Qué números podrían estar dentro del sobre "8".

Relación La suma de los dos números que hay escrito en cada sobre es: 7, 8, 13, 14, 3.

Diagrama Tabla

PENSAR

Estrategias MODELIZACIÓN, ENSAYO Y ERROR, ORGANIZAR LA INFORMACIÓN + ELIMINAR

EJECUTAR Mediante **Modelización**: Utilizando cinco sobres pequeños y nueve tarjetas de visita con las cifras del 0 al 9 podemos hacer una simulación. Con sistematicidad se puede conseguir alguna solución.

Mediante **Ensayo y Error**: Haciendo ensayos sucesivos es posible encontrar alguna solución, aunque es muy cansada la realización de la tabla.

Mediante **Organizar la Información** + **Ensayo y Error + Eliminar**: Buscamos primero todas las posibilidades organizando la información en una tabla. Después elegimos el sobre donde haya menos opciones y hacemos un ensayo y error para cada opción. Finalmente eliminamos en el resto de las columnas las opciones inviables.

Elaboramos una tabla para estudiar que tarjetas pueden estar colocadas en cada sobre.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1

5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Podemos hacer los ensayos en las columnas 14 o 3.

Para cada columna hay dos ensayos posibles.

Caso 1: Para 9 y 5 en la columna 14. Eliminamos las parejas donde aparezca 9 o 5.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5		2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 13 están los números 7 y 6. Eliminamos ahora todas las parejas donde aparezca el 7 o el 6.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5		2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 8 están el 8 y el 0. En el sobre 7 están el 4 y el 3. Forzosamente han de quedar el 2 y el 1 para el sobre 3. Tenemos una solución:

7	8	13	14	3
4 y 3	8 y 0	7 y 6	9 y 5	2 y 1

Caso 2: Para 8 y 6 en la columna 14.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4		3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 13 están los números 9 y 4. Eliminamos las parejas que tengan el 9 o el 4.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4		3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

A) Con un 7 y un 0 en el 7, habrá un 5 y un 3 en el 8, y un 2 y un 1 en el 3.
B) Con un 5 y un 2 en el 7, habrá un 7 y un 1 en el 8, y un 3 y un 0 en el 3.

Tenemos dos nuevas soluciones:

7	8	13	14	3
7 y 0	5 y 3	9 y 4	8 y 6	2 y 1

7	8	13	14	3
5 y 2	7 y 1	9 y 4	8 y 6	0 y 3

Caso 3: Para 3 y 0 en la columna 3. Eliminamos todas las parejas donde aparezca el 3 o el 0.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

A) Con un 6 y un 1 en el 7, no habrá números posibles para el sobre 8.
B) Con un 5 y un 2 en el 7, habrá un 7 y un 1 en el 8, habrá un 9 y un 4 en el 13, y un 8 y un 6 en el 14. ¡Pero ésta es la solución tercera que habíamos encontrado!

No tenemos nuevas soluciones.

Caso 4: Para 2 y 1 en la columna 3. Eliminamos todas las parejas donde aparezca el 2 o el 1.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

A) Con un 7 y un 0 en el 7, habrá un 5 y un 3 en el 8, habrá un 9 y un 4 en el 13, y habrá un 8 y un 6 en el 14. ¡Pero ésta es la solución segunda que habíamos encontrado!
B) Con un 4 y un 3 en el 7, habrá un 8 y un 0 en el 8, habrá un 7 y un 6 en el 13, y un 9 y un 5 en el 14. ¡Pero ésta es la solución primera que habíamos encontrado!

No tenemos nuevas soluciones.

Solución

Las tres siguientes:

7	8	3	4	3
4 y 3	8 y 0	7 y 6	9 y 5	2 y 1

7	8	13	14	3
7 y 0	5 y 3	9 y 4	8 y 6	2 y 1

7	8	13	14	3
5 y 2	7 y 1	9 y 4	8 y 6	0 y 3

RESPONDER

Comprobación En todos los sobres la suma de los dos números colocados en su interior da el valor que figura por fuera. En cada solución están los diez números sin repetir ninguno.

Análisis Solución múltiple. Hay tres soluciones diferentes y las tres válidas.

Respuesta **Dentro del sobre “8” pueden estar los números: el 8 y el 0, el 5 y el 3 o el 7 y el 1.**

Proceso de Resolución (2)

COMPRENDER

Datos Diez tarjetas, cada una mostrando uno de los dígitos de 0 a 9. Cinco sobres. Las tarjetas se reparten de manera que haya dos cartas en cada sobre.

Objetivo Qué números podrían estar dentro del sobre "8".

Relación La suma de los dos números que hay escrito en cada sobre es: 7, 8, 13, 14, 3.

Diagrama Tabla.

PENSAR Estrategias MODELIZACIÓN. ENSAYO Y ERROR. ORGANIZAR LA INFORMACIÓN + ELIMINAR

EJECUTAR Mediante **Modelización**: Utilizando cinco sobres pequeños y nueve tarjetas de visita con las cifras del 0 al 9 podemos hacer una simulación. Con un proceso sistemático se puede conseguir alguna solución.

Mediante **Ensayo y Error**: Haciendo ensayos sucesivos es posible encontrar alguna solución, aunque es muy cansada la realización de la tabla.

Mediante **Organizar la Información + Ensayo y Error + Eliminación**: Buscamos primero todas las posibilidades organizando la información en una tabla. Después elegimos uno de los sobres o el sobre donde haya menos opciones y hacemos un ensayo y error para cada opción. Finalmente eliminamos en el resto de las columnas las opciones inviables.

Elaboramos una tabla para estudiar que tarjetas pueden estar colocadas en cada sobre.

7	8	13	14	3

7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Estudiamos qué ocurre en el resto de los sobres para cada una de las sumas posibles en el sobre con el 8, eliminando los sumandos usados para el 8.

En verde la suma 8, en rojo las sumas que no pueden formarse, y en azul las sumas posibles para los otros sobres, de las que se extraen los sumando no utilizables en un siguiente paso.

Seleccionamos 8 + 0				
7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				

Eliminamos 8 y 0				
7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Quedan 9+5 para 14 y 2+1 para 3				

Eliminamos 9 y 5 y 2 y 1.				
7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Nos queda 7 + 6 para 13				

Eliminamos 7 y 6				
7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Queda 4 + 3 para 7				
Solución:2+1, 4+3, 8+0, 7+6 y 9+5				

Seleccionamos 7 + 1				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				

Eliminamos 7 y 1				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Queda 3 + 0 para 3				

Eliminamos 3 y 0				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Queda 5 + 2 para 7				

Eliminamos 5 y 2				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3				
Queda 9+4 para13 y 8+6 para 14				
Solución:3+0, 5+2, 7+1, 9+4 y 8+6				

Seleccionamos 6 + 2				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3				

Eliminamos 6 y 2				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3				
Queda 9+5 y 3+0				

Eliminamos 9, 5, 3 y 0				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3				
Imposible: no hay sumas para 7 y 13.				

Seleccionamos 5 y 3				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Eliminamos 5 y 3				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3	5 + 3			
Quedan 8+6 y 2+1				

Eliminamos 8, 6, 2 y 1				
7	8	13	14	3
7 + 0		9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1		8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2		7 + 6		
4 + 3	5 + 3			
Quedan 7+0 y 9+4				
Solución:2+1, 7+0, 5+3, 9+4 y 8+6				

Comprobamos que podemos conseguir las sumas para cada sobre en todos los casos menos uno: cuando 8 = 6 + 2.

Respuesta **Dentro del sobre "8" pueden estar los números: el 8 y el 0, el 5 y el 3 o el 7 y el 1.**

Podemos hacer los ensayos considerando las columnas 14 o 3, que contienen la menor cantidad de sumandos. Para cada columna hay dos ensayos posibles.

Caso 1: Para 9 y 5 en la columna 14. Eliminamos las parejas donde aparezca 9 o 5.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5		2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 13 están los números 7 y 6. Eliminamos ahora todas las parejas donde aparezca el 7 o el 6.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5		2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 8 están el 8 y el 0. En el sobre 7 están el 4 y el 3. Forzosamente han de quedar el 2 y el 1 para el sobre 3. Tenemos una solución:

7	8	13	14	3
4 y 3	8 y 0	7 y 6	9 y 5	2 y 1

Caso 2: Para 8 y 6 en la columna 14.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4		3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

En el sobre 13 están los números 9 y 4. Eliminamos las parejas que tengan el 9 o el 4.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4		3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

C) Con un 7 y un 0 en el 7, habrá un 5 y un 3 en el 8, y un 2 y un 1 en el 3.
D) Con un 5 y un 2 en el 7, habrá un 7 y un 1 en el 8, y un 3 y un 0 en el 3.

Tenemos dos nuevas soluciones:

7	8	13	14	3
7 y 0	5 y 3	9 y 4	8 y 6	2 y 1

7	8	13	14	3
5 y 2	7 y 1	9 y 4	8 y 6	0 y 3

Caso 3: Para 3 y 0 en la columna 3.

Eliminamos todas las parejas donde aparezcan el 3 o el 0.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	3 + 0
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

C) Con un 6 y un 1 en el 7, no habrá números posibles para el sobre 8.
D) Con un 5 y un 2 en el 7, habrá un 7 y un 1 en el 8, habrá un 9 y un 4 en el 13, y un 8 y un 6 en el 14. ¡Pero ésta es la solución tercera que habíamos encontrado!

No tenemos nuevas soluciones.

Caso 4: Para 2 y 1 en la columna 3. Eliminamos todas las parejas donde aparezca el 2 o el 1.

7	8	13	14	3
7 + 0	8 + 0	9 + 4	9 + 5	
6 + 1	7 + 1	8 + 5	8 + 6	2 + 1
5 + 2	6 + 2	7 + 6		
4 + 3	5 + 3			

Es necesario ahora hacer un nuevo ensayo para la columna del 7, por ejemplo.

C) Con un 7 y un 0 en el 7, habrá un 5 y un 3 en el 8, habrá un 9 y un 4 en el 13, y habrá un 8 y un 6 en el 14. ¡Pero ésta es la solución segunda que habíamos encontrado!
D) Con un 4 y un 3 en el 7, habrá un 8 y un 0 en el 8, habrá un 7 y un 6 en el 13, y un 9 y un 5 en el 14. ¡Pero ésta es la solución primera que habíamos encontrado!

No tenemos nuevas soluciones.

<u>Solución</u> Las tres siguientes:

7	8	13	14	3
4 y 3	8 y 0	7 y 6	9 y 5	2 y 1

7	8	13	14	3
7 y 0	5 y 3	9 y 4	8 y 6	2 y 1

7	8	13	14	3
5 y 2	7 y 1	9 y 4	8 y 6	0 y 3

RESPONDER

Comprobación En todos los sobres la suma de los dos números colocados en su interior da el valor que figura por fuera. En cada solución están los diez números sin repetir ninguno.

Análisis Solución múltiple. Hay tres soluciones diferentes y las tres válidas.

Respuesta **Dentro del sobre “8” pueden estar los números: el 8 y el 0, el 5 y el 3 o el 7 y el 1.**

Proceso de Resolución (3, Paco Morales)

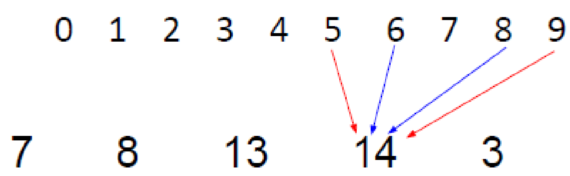
COMPRENDER

Datos: hay 10 tarjetas numeradas de 0 a 9. Hay 5 sobres. Cada sobre tiene un número. Hay 2 tarjetas en cada sobre.

Objetivo: saber las tarjetas que pueden estar en el sobre del 8.

Relaciones: las tarjetas se reparten en 5 sobres; se suman los números de las dos tarjetas que van juntas y se pone ese número en el sobre.

Esquema:



PENSAR Organización de la información y ensayo error

EJECUTAR Podemos comenzar por ver las combinaciones de números que dan la respuesta de los sobres. Algunos sobres tienen menos opciones. Comenzaremos por ellos.

3	0+3 1+2
14	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4
8	0+8 1+7 2+6 3+5

Probamos el sobre 3 con 0+3. Hay dos posibilidades con el 14. Comienzo con 5+9 y voy bajando, sabiendo que los números escogidos ya no se pueden volver a utilizar.

3	0+3 1+2	0+3
14	5+9 6+8	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4	1+6 2+5
8	0+8 1+7 2+6 3+5	1+7 2+6 NO

Probamos el sobre 3 con 0+3. Intento ahora con 6+8 en el sobre del 14 y voy bajando. En los demás casos, solo hay una opción posible.

3	0+3 1+2	0+3	0+3
14	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4	1+6 2+5	1+6 2+5
8	0+8 1+7 2+6 3+5	1+7 2+6 NO	1+7 2+6 SÍ

Probamos el sobre 3 con 1+2. Hay dos posibilidades con el 14. Comienzo con 5+9 y voy bajando.

3	0+3 1+2	0+3	0+3	0+3 1+2	0+3 1+2
14	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4	1+6 2+5	1+6 2+5	0+7 1+6 2+5 3+4	0+7 1+6 2+5 3+4
8	0+8 1+7 2+6 3+5	1+7 2+6 NO	1+7 2+6 SÍ	0+8 1+7 2+6 3+5	0+8 1+7 2+6 3+5 SÍ

Probamos el sobre 3 con 1+2. Intento la otra opción de 6+8.

3	0+3 1+2	0+3	0+3	0+3 1+2	0+3 1+2	0+3 1+2
14	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4	1+6 2+5	1+6 2+5	0+7 1+6 2+5 3+4	0+7 1+6 2+5 3+4	0+7 1+6 2+5 3+4
8	0+8 1+7 2+6 3+5	1+7 2+6 NO	1+7 2+6 SÍ	0+8 1+7 2+6 3+5	0+8 1+7 2+6 3+5 SÍ	0+8 1+7 2+6 3+5 SÍ

Hay 3 formas válidas que cumplen las condiciones, son: 8 = 1+7   8 = 0+8   8 = 3+5

3	0+3 1+2	0+3	0+3	0+3 1+2	0+3 1+2	0+3 1+2
14	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8	5+9 6+8
13	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7	4+9 5+8 6+7
7	0+7 1+6 2+5 3+4	1+6 2+5	1+6 2+5	0+7 1+6 2+5 3+4	0+7 1+6 2+5 3+4	0+7 1+6 2+5 3+4
8	0+8 1+7 2+6 3+5	1+7 2+6 NO	1+7 2+6 SÍ	0+8 1+7 2+6 3+5	0+8 1+7 2+6 3+5 SÍ	0+8 1+7 2+6 3+5 SÍ

RESPONDER

Comprobación ¿Se cumple la información clasificada en la FASE de COMPRENDER? Como se ve en la tabla, en las 3 opciones se utilizan todas las tarjetas y se forman los números de los sobres.

Análisis Hay tres posibles soluciones

Respuesta En el sobre del 8 podrían estar 1+7, 0+8 y 3+5.

Item más.

¿Y si no se obliga a dos tarjetas en cada sobre? Queda como tarea pendiente estudiar cómo se distribuirán los diez dígitos, si pueden colocarse una tarjeta en algún sobre y tres o cuatro en otros.

Vamos ahora con el resto de los retos propuestos en el anterior artículo.

¿QUIÉN MIENTE?

Pablo, Andrés y Lucas viven en la misma calle.
Andrés dice: "Mi casa es más alta que la de Pablo".
Lucas dice: "La fachada de mi casa tiene más ventanas que la de Pablo".
Sabiendo que uno solo de los dos dice la verdad, ¿cuál es la casa de Pablo? ¿Puedes decir quién miente?
Justifica tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos Pablo, Andrés y Lucas viven en la misma calle. Andrés dice: "Mi casa es más alta que la de Pablo". Lucas dice: "La fachada de mi casa tiene más ventanas que la de Pablo".

Objetivo Cuál es la casa de Pablo. Quién miente.

Relación Uno solo de los dos dice la verdad. En una ciudad bien urbanizada las casas tienen características de homogeneidad, como, por ejemplo, la relación entre altura y número de ventanas que posee.

Diagrama De orden.

PENSAR

Estrategias Organizar la información

EJECUTAR Organizaremos la información de que disponemos haciendo una suposición. Primero para el caso que Andrés diga la verdad y después para el caso contrario.

A) Si Andrés dice verdad y Lucas miente:

Andrés: "Mi casa es más alta que la de Pablo".

Lucas: "La fachada de mi casa tiene más ventanas que la de Pablo".

Casa de Andrés > casa de Pablo > casa de Lucas

B) Si Andrés miente y Lucas dice la verdad:

Andrés: "Mi casa es más baja que la de Pablo".

Lucas: "La fachada de mi casa tiene más ventanas que la de Pablo".

Casa de Lucas > casa de Pablo > casa de Andrés

Solución En cualquiera de los casos siempre queda determinado que la casa de Pablo es la situada en medio, es decir, la casa de Pablo es la de altura intermedia. Pero no podemos determinar quién miente porque ambos casos son posibles.

RESPONDER

Comprobación Verificar que se cumplen las condiciones de las frases en ambos casos.

Análisis Solución única para la primera pregunta. No hay solución para la segunda.

Respuesta: **La casa de Pablo es la de altitud intermedia. No podemos determinar cuál de los dos amigos ha mentido.**

La solución del siguiente problema "El juego de los montones" es, una vez más, de nuestro amigo Paco Morales.

EL JUEGO DE LOS MONTONES

En cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes dos reglas:

(1) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.

(2) Si un montón tiene un numero par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo numero de piedras cada uno.

Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y el otro tiene 51.

Determina si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas (1) y (2), que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra.

Proceso de Resolución

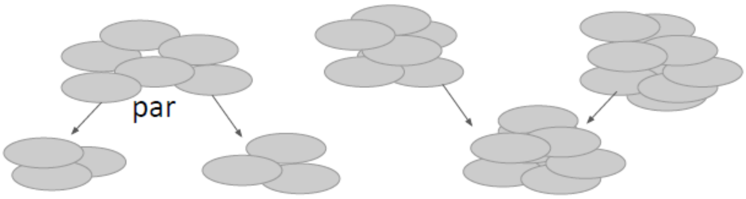
COMPRENDER

Datos: hay tres montones, uno con 5 piedras, otro con 49 y otro con 51.

Objetivo: saber si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas, que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra.

Relación: se pueden juntar dos de los montones en uno solo. Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.

Esquema:



PENSAR Organización de la información

EJECUTAR Si comenzamos por la situación final, a la que queremos saber si se puede llegar…

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\ldots = 105$$
$$1+1+1+1+1+1+1+2+2+1+1+1+1+1+2+1+1+1+1\ldots = 105$$
$$1+1+1+1+1+2+4+1+1+1+1+1+2+1+1+1+1\ldots = 105$$

Teniendo en cuenta que un par se divide en 2 partes iguales, para llegar al primer 1, hemos tenido que partir de un grupo con 2. Y para llegar al primer 2, hemos necesitado dividir un 4 por la mitad. Y este vendría de dividir un 8… habría que obtener una potencia de 2. De la unión de 51+5, saldrían múltiplos de 7 más 49. De la unión de 51+49, saldrían múltiplos de 5 más 5. De la unión de 49+5, saldrían múltiplos de 3 más 51.

RESPONDER

Comprobación Con las condiciones del problema, no es posible llegar a los montones de una piedra. En función de los agrupamientos iniciales, siempre estaremos con cantidades múltiplos de 3, 5 o 7, pero no con potencias de 2, que son los que nos permitirían llegar a la unidad.

Análisis No hay solución.

Respuesta No es posible hacer los 105 montones.

Ya hemos comentado alguna vez que el Seminario Newton Canarias de Resolución de Problemas agrupa a muchos profesores de matemáticas de las Islas Canarias que se reúnen un sábado al mes (a veces, dos) para aprender a resolver problemas y la didáctica adecuada para acercar esta manera de trabajar a sus alumnos de manera cooperativa. En estos años de pandemia las reuniones presenciales han sido sustituidas por el trabajo a través del **meet** de **Google**.

Uno de los coordinadores del Seminario, Nicolás Gómez, nos hace llegar un problema y su solución para el mismo. El problema fue publicado en la revista Suma de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, número 98. Y dice así:

LAS TRES BARRAS

En una caja hay tres barras de oro, plata y bronce, siendo cada una de ellas de distinta longitud, distinto peso y distinto metal. Se sabe que:

- La más pesada no es la más larga.
- La de plata no es la más corta.
- La de plata pesa más que la de bronce.
- La más liviana no es la más corta.
- La de bronce es más ligera que la más larga.
- La más corta no es la de peso medio.

Averigua cuál es la longitud, peso y material de cada barra.

Explica cómo has encontrado tu respuesta.

El problema aparecía en un artículo denominado "Diseño de logicomios y sudokus para el taller de matemáticas" y firmado por José de Francisco Estaire. Indicaba en dicho artículo que el problema era el nº 25 del libro "Nuevos Problemas de Matemáticas" de J. Gallego-Díaz. Y, por supuesto, presentaba una solución trabajada con un diagrama lógico llamado **Integrama** presentado por la ya desaparecida revista "Cacumen", muy recordada en nuestros artículos. Ese diagrama consiste en utilizar varias tablas de doble entrada encadenadas entre sí.

La idea de Nicolás consiste simplemente en utilizar otro diagrama más sencillo. Una sola tabla de doble entrada. Y dado que conocemos todas las posibles soluciones del problema y tenemos que buscar sólo las correctas, la estrategia de eliminar nos permite trabajar de forma inversa a la usual. Es decir, llenar todas las casillas con todas las variables posibles y eliminar poco a poco las incorrectas hasta quedarnos con la única que verifica todas las relaciones del problema.

Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos: Tres barras. Material: oro, plata bronce. Peso: más pesada, peso medio, más liviana. Longitud: larga, mediana, corta.

Objetivo: Averigua cuál es la longitud, peso y material de cada barra.

Relaciones: Las seis pistas del enunciado. Las numeramos del 1 al 6:

1.- La más pesada no es la más larga.
2.- La de plata no es la más corta.
3.- La de plata pesa más que la de bronce.
4.- La más liviana no es la más corta.
5.- La de bronce es más ligera que la más larga.
6.- La más corta no es la de peso medio.

Diagrama: Tabla de doble entrada.

Utilizamos una tabla de doble entrada que permite organizar las tres categorías (metal, longitud y peso) de tal manera que en cada celda se pueda colocar el dato correspondiente en función del metal. En cuanto una celda se rellena, se produce la eliminación de las demás celdas de la misma fila y de la misma columna. Un mismo dato no puede ir en dos sitios a la vez. Son excluyentes.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud			
Peso			

PENSAR Elegir la estrategia y argumentar los motivos. Organización de la información. Eliminar.

EJECUTAR Para utilizar la estrategia de Eliminar rellenamos el diagrama con toda la información que nos facilita el enunciado y empezamos a eliminar la información que no corresponde al ir leyendo cada una de las relaciones.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

Comenzamos a eliminar posibilidades:

● De la relación 2 obtenemos que la de plata no es la más corta.

● De la 3 sabemos que la de Plata no es la liviana y la de bronce no es la pesada.

● De la 5 sabemos que la de bronce no es la más larga.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

De la relación 5 y la 1, tenemos que la de bronce es la liviana. Luego sabemos que la de oro no es liviana.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

De 4 tenemos que la de bronce es la mediana.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

Al eliminar, obtenemos que la de oro es la más corta, por lo que la de plata es la más larga.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

Para terminar, de 1 o 6 concluimos que la de oro es la más pesada y la de plata la de peso medio.

Metal	Oro	Plata	Bronce
Longitud	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta	Larga Mediana Corta
Peso	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana	Pesada Peso medio Liviana

Hemos eliminado todas las imposibilidades obteniendo así una solución.

RESPONDER

Comprobar: Si comprobamos las seis relaciones la solución obtenida las cumple.

Analizar: La solución es única, tenemos que asegurarnos que no hay otras soluciones, ya que al revisar todas las relaciones nos queden dos o más casillas sin eliminar, lo que conlleva que esas casillas se pudieran rellenar con varias opciones que serían diferentes soluciones del problema, cosa que no ocurre en este caso.

Responder: **La barra de oro es la más corta y más pesada, la de plata es la más larga y de peso medio y la de bronce es la mediana y la más liviana.**

En la última sesión del mencionado Seminario, celebrada el 30 de abril pasado, se propuso un problema muy interesante. Los asistentes se repartieron en equipos de trabajo y se dedicaron a buscar la solución. Al final del tiempo señalado volvieron a la sala común y los equipos fueron presentando sus respuestas al problema.

Nos han hecho llegar el problema y su proceso de resolución y queremos presentarlo aquí porque nos parece una ocasión única de ver una estrategia poco explicada en nuestros artículos. Este es el problema:

UNA MOTO COMÚN

Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una moto entre los cuatro, aportando cada cual sus ahorros. La moto cuesta 1800 €.
Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos.
Luis paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres.
Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres.
¿Cuánto dinero aportó Lucía?

Aparentemente es un problema complicado. Pero si nos fijamos bien podemos utilizar la estrategia de SIMPLIFICAR para resolverlo con sencillez. Esta estrategia es AUXILIAR, es decir, no resuelve por sí misma casi ningún problema, pero ayuda a entenderlo. Es una de las estrategias, junto a la ANALOGÍA, que de forma intuitiva utilizan todos aquellos que no se han formado en el uso de estrategias de pensamiento para la resolución de problemas.

Dicha estrategia consiste en **Plantear una situación equivalente pero más simple**. Para ello podemos **Cambiar la forma del problema** para que sea más fácil de comprender, o bien, buscar un método más fácil de descubrir, o bien, sea más fácil de resolver. Como hemos dicho, se usa con otras estrategias porque por sí sola no ofrece un proceso claro y eficaz de resolución. Las técnicas que conlleva son: **Particularizar**, utilizando números más pequeños, o un orden más familiar, o ejemplos sucesivos; **Dividir un problema en partes**, estableciendo subproblemas, secuencias o casos.

En el problema de la compra en común de la moto podemos aplicar esta estrategia dividiendo el problema en subproblemas de la siguiente manera:

SubProblema 1: Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una moto entre los cuatro, aportando cada cual sus ahorros. La moto cuesta 1800 €. Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos. **¿Cuánto pone Juan?**

SubProblema 2: Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una moto entre los cuatro, aportando cada cual sus ahorros. La moto cuesta 1800 €. Luis paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres. **¿Cuánto pone Luis?**

SubProblema 3: Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una moto entre los cuatro, aportando cada cual sus ahorros. La moto cuesta 1800 €. Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres. **¿Cuánto pone Alberto?**

Subproblema 4: Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una moto entre los cuatro, aportando cada cual sus ahorros. La moto cuesta 1800 €. Si conocemos lo que ponen Juan, Luis y Alberto, **¿cuánto pone Lucía?**

Nosotros ofrecemos aquí las distintas maneras de resolver el problema que presentaron nuestros amigos del Seminario Newton Canarias y que, gentilmente, pusieron a nuestra disposición.

Proceso de Resolución

COMPRENDER **Datos:** hay 4 personas (Juan, Luis, Alberto y Lucía) que compran una moto. Cuesta 1800 €.

Objetivo: ¿Cuánto dinero aportó Lucía?

Relación: Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos. Luis paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres. Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres.

Esquema: Partes-Todo

PENSAR Modelización. Organización de la información partes/todo. Organización de la información con lenguaje algebraico y fracciones.

EJECUTAR Mediante **MODELIZACIÓN**: se utilizarán regletas como modelo para representar las relaciones del problema. Para cada uno de los tres amigos cuya relación se conoce se representará su parte con la regleta del UNO y las de los otros tres juntos con las regletas del TRES, del CUATRO y del CINCO, respectivamente. En cada caso queda suficientemente claro que la parte aportada por Juan es la TERCERA parte, por Luis la CUARTA parte y por Alberto la quinta parte. De ahí se obtiene la cantidad de dinero que ha aportado cada uno y finalmente lo aportado por Lucía.

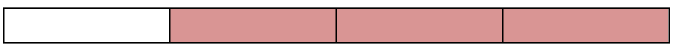
Mediante **ORGANIZAR LA INFORMACIÓN** por **partes/todo**: se utilizará el diagrama indicado en la fase de COMPRENDER para cada uno de los amigos.

Para **Juan**: Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos.

Si Juan pone la mitad que los otros tres, su parte es un tercio del total.

1/3 de 1800 = 600 euros

Para **Luis**: Luis paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres.



Si Luis pone la tercera parte de lo que ponen los otros tres, su parte es un cuarto del total.

1/4 de 1800 = 450 euros

Para **Alberto**: Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres.

Si Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres, su parte es un quinto del total.

1/5 de 1800 = 360 euros

Para **Lucía**:

Sabiendo lo que vale cada parte de Juan, Luis y Alberto, la parte de Lucía es la parte desconocida de las cuatro partes de valor de la moto.

Juan: 600 euros	Luis: 450 euros	Alberto: 360 euros	¿Lucía?	← 1800

La parte desconocida se calcula sumando las etiquetas de las PARTES conocidas y restando luego ese valor de la etiqueta del TODO. 600 + 450 + 360 = 1410 → 1800 – 1410 = 390 euros pone Lucía

Mediante **ORGANIZAR LA INFORMACIÓN** con **lenguaje algebraico**: se utilizarán las relaciones para establecer las ecuaciones que resuelven el problema. Llamamos x, y, z, w a las incógnitas de las aportaciones de Juan, Luis, Alberto y Lucía, respectivamente.

Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos.	$x = (y + z + w)/2$
Luis paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres.	$y = (x + z + w)/3$
Alberto pone la cuarta parte de lo que ponen los otros tres.	$z = (x + y + w)/4$
Juan, Luis, Alberto y Lucía compran una moto por 1800 €.	$x + y + z + w = 1800$

Estas cuatro ecuaciones componen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que puede ser resuelto por cualquiera de los métodos de resolución conocidos. Por ejemplo, mediante SUSTITUCIÓN:

$$x = (y + z + w)/2 \;;\; x + y + z + w = 1800$$

$$(y + z + w)/2 + y + z + w = 1800 \quad \rightarrow \quad y + z + w + 2y + 2z + 2w = 3600$$

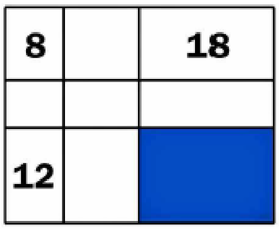
$$3\,(y + z + w) = 3600 \quad \rightarrow \quad y + z + w = 1200 \quad \rightarrow \quad x = 1200/2 = 600$$

Haciendo lo mismo con las otras dos se llega a resultados similares.

Pero también pueden resolverse de manera individualizada, teniendo en cuenta las RELACIONES FRACCIONARIAS que se dan.

$x = (y + z + w)/2 \rightarrow x = 1/3$ de $1800 \rightarrow x = 600$ euros
$y = (x + z + w)/3 \rightarrow y = 1/4$ de $1800 \rightarrow y = 450$ euros
$z = (x + y + w)/4 \rightarrow z = 1/5$ de $1800 \rightarrow z = 360$ euros
$w = 1800 – (600 + 450 + 360) = 1800 – 1410 = 390$ euros

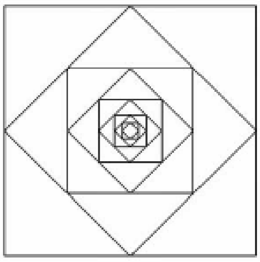
RESPONDER **Comprobación** ¿Se cumple la información clasificada en la FASE de COMPRENDER?



Juan pone 600, que es la mitad de lo que ponen los otros tres juntos, 450 + 360 + 390 = 1200 → 1200 : 2 = 600

Luis paga 450, que es la tercera parte de lo que ponen los otros tres, 600 + 360 + 390 = 1350 → 1350 : 3 = 450

Alberto pone 360, que es la cuarta parte de lo que ponen los otros tres, 600 + 450 + 390 = 1440 → 1440 : 4 = 360



Lucía pone 390 euros, que junto a lo que ponen Juan, Luis y Alberto, completan el precio total de la moto: 600 + 450 + 360 + 390 = 1800 euros

Análisis Solamente hay una solución.

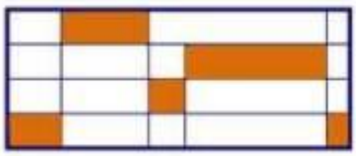
Respuesta Lucía aportó 390 €.

Nuevos retos

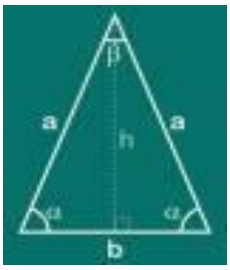
Después de dedicar varios artículos al trabajo de problemas de lógica, hemos decidido pasar a otro tema, tanto o más interesante que éste: **La geometría**. Hemos encontrado un sitio web denominado "Sobre todo matemáticas…" y cuya dirección es https://matemelga.wordpress.com/ . Allí hemos encontrado muchos problemas de geometría que hemos seleccionado para ofrecerlos a nuestros lectores como retos para la próxima aparición de la revista.

PARTE COLOREADA

Suponiendo que todos los ángulos que aparecen son rectos y que las líneas horizontales están igualmente separadas, **¿qué fracción de área de la figura es la coloreada**?



Triángulos isósceles



¿Cuántos triángulos isósceles distintos, de 25 cm de perímetro, pueden construirse si cada lado mide un número natural de centímetros?

Área del cuadrilátero

El cuadrilátero ***ABCD*** tiene ***AB*** = 4, ***BC*** = 5, ***CD*** = 6, ***DA*** = 3 y $\widehat{DAB} = 90^{\circ}$.

Determina el área del cuadrilátero *ABCD*

Áreas

Un rectángulo está dividido en 9 pequeños rectángulos. En la figura se indican los valores de las áreas de tres de ellos.

¿Cuál es valor del área del rectángulo azul en la esquina inferior derecha?

Cuadrados encajados

Consideramos un cuadrado de lado 8.

Al unir los puntos medios de cada par de lados adyacentes obtenemos un segundo cuadrado y si continuamos así, uniendo los puntos medios de los lados adyacentes de cada cuadrado dibujado, obtenemos un nuevo cuadrado.

¿Cuál es el área del sexto cuadrado construido?

Y eso es to.., eso es to…, eso es todo, amigos.

Bueno, ya saben, aunque seamos pesados terminaremos con nuestro *mantra* particular:

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan lo que les pedimos: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones (o las dudas y errores encontrados) para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a lo largo de este largo año deseando que la sexta ola haya terminado por fin y a la espera de la próxima edición de NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas la revista.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**