

La modelización matemática a través del *International Mathematical Modeling Challenge*

César Gallart Palau
Paz Mata Codes

(Colegio CEU San Pablo de Valencia. España)

Fecha de recepción: 21 de abril de 2022
Fecha de aceptación: 06 de octubre de 2022

Resumen

En este artículo presentamos el concurso “International Mathematical Modeling Challenge” a partir de la experiencia de un equipo de alumnos de Secundaria y Bachillerato y su profesora responsable. Mostraremos parte de su producción y analizaremos los debates surgidos entre alumnos y profesora durante la resolución del problema propuesto en la edición del 2021 de este concurso. Para el docente, supervisar el trabajo de sus alumnos, pero sin interferir en su progreso ni proporcionarles ayudas directas, puede suponer un importante reto. Es por ello que prestaremos una especial atención al papel que desempeña durante esta actividad. Veremos cómo sus intervenciones a nivel estratégico y organizativo resultarán de gran importancia.

Palabras clave

modelización matemática, actividad extracurricular, concurso IMMC, educación Secundaria-Bachillerato, intervenciones del profesor.

Abstract

In this article we present the "International Mathematical Modeling Challenge" contest based on team experience of High school students that also includes their teacher assistance. We will show their production and analyze the debates that had taken place among the students and teacher when solving the problem proposed in the 2021 edition of this contest. For the teacher, supervising the work of their students, but without interfering with their progress or providing them with direct help, can be a significant challenge. That is why we will pay special attention to the role it plays during the activity. We will see how their interventions at a strategic and organizational level will be of great importance.

Keywords

mathematical modeling, extracurricular activity, IMMC contest, High school education, teacher interventions.

1. Introducción

Cada vez se da más importancia en la enseñanza de las Matemáticas a la conexión entre los conocimientos matemáticos, sus aplicaciones y la realidad (Blum y Niss, 1991, NCTM, 2000, Burkhardt, 2006, OCDE, 2017). Esta conexión, entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, puede establecerse gracias a la construcción de modelos que permitan estructurar, analizar y explicar esa realidad a partir del conocimiento matemático del alumno (Blum y Niss, 1991, Blum, 1993, Haines y Crouch, 2007, Verschaffel, Greer y De Corte, 2002).



Las prácticas de modelización matemática pueden implementarse como parte de las clases ordinarias, pero también pueden encontrarse en actividades extracurriculares como los concursos (Garfunkel, Niss y Brown, 2021). Precisamente, el *International Mathematical Modeling Challenge* (al cual nos referiremos a partir de ahora, siguiendo el acrónimo oficial, como IM²C) es un concurso de modelización dirigido a equipos de alumnos de Secundaria-Bachillerato que “busca desarrollar y mejorar la capacidad de los estudiantes para visualizar, comprender y aplicar las matemáticas en contextos del mundo real” (Comité australiano del IM²C, s.f.). Los equipos participantes están formados por un máximo de cuatro alumnos, de entre 3º de ESO y 2º Bachillerato, supervisados por un profesor responsable.

Durante las prácticas de modelización se espera que los alumnos trabajen de manera colaborativa, asumiendo el protagonismo y el control de su trabajo, en detrimento del control del profesor. Para aquellos alumnos nóveles en este tipo de actividades o cuando hay un verdadero bloqueo, es posible un mayor apoyo por parte del profesor (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Sin embargo, en actividades de carácter extracurricular, como el IM²C, el entorno de aprendizaje es diferente con respecto al de una clase habitual (Garfunkel, Niss y Brown, 2021, p. 373). El papel del profesor queda sujeto y limitado por las propias bases del concurso: no podrá interferir en el trabajo de sus alumnos ni proporcionarles ayudas directas. Pese a esta limitación, su supervisión puede resultar clave.

2. Marco Teórico

2.1. La modelización en la educación Secundaria

Según Blum y Niss (1991) y Blum (1993), la modelización matemática engloba todo el proceso de resolución de un problema real: su traducción al lenguaje matemático, lo que nos proporciona un modelo matemático de esa realidad inicial; su resolución mediante el uso de las herramientas matemáticas pertinentes; la interpretación de la solución matemática obtenida de nuevo en la realidad; y la validación del proceso y su comunicación final. La modelización transita pues entre el mundo real y el mundo de las matemáticas (y viceversa), en un ciclo que puede repetirse un número indefinido de veces mientras el resolutor (o resolutores) afinan su resolución, ajustando su modelo y adecuando su solución (Borromeo-Ferri, 2006).

Si nos centramos en la educación no universitaria, el uso de la modelización presenta una doble perspectiva (ver Julie y Mundalay, 2007, Calabuig et al., 2015): por un lado, la introducción de problemas de modelización en el aula propicia el desarrollo integrado de las competencias matemáticas en general y de las competencias en resolución de problemas reales en particular (Maaß, 2006, Gallart, 2016); por otro lado, el uso de la modelización y las aplicaciones matemáticas permite presentar contenidos matemáticos de forma significativa y contextualizada, generando una comprensión más profunda y una mayor predisposición en el alumno (Maaß, 2006, Zbiek y Conner, 2006).

Estas dos perspectivas (complementarias y no excluyentes) empiezan a coger fuerza en nuestro sistema educativo, promoviendo además un cambio de paradigma en el modo de enfocar y dirigir la enseñanza de las matemáticas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009, Blum, 2011). Ciertamente, la introducción de ejemplos de modelización en el aula supone un cambio en cuanto al rol del profesor y del alumno y la manera de presentar el propio contenido matemático (Burkhardt, 2006). Existen

numerosos ejemplos que nos permiten ilustrar estos cambios, tanto a nivel de infantil-primaria (Alsina y Salgado, 2021, Albarracín et al., 2015) como de Secundaria-Bachillerato (Gallart y Mata, 2020, Trelles-Zambrano et al., 2019, Ferrando y Navarro, 2015, Sierra et al., 2011), así como diferentes tipos de actividades, como los problemas de Fermi (Ferrando et al, 2017), las Modelling Eliciting-Activities (Lesh y Doerr, 2003), o los proyectos matemáticos realistas (Sol, 2008).

Aunque ya se incluye la modelización y la resolución de problemas reales como una competencia específica en los currículos de muchos países (en nuestro país, BOE, núm. 76 del 30 de marzo de 2022, p. 41727), hay que señalar que no se ofrecen indicaciones claras sobre cómo implementarla en el aula, lo que, pese a los beneficios que la modelización puede aportar a la enseñanza de las matemáticas, supone una dificultad añadida (Blum y Niss, 1991, Burkhardt, 2006, Cabassut y Ferrando, 2016). Con el fin de facilitar al profesor novel su introducción en las prácticas de modelización, podemos encontrar referencias en la literatura especializada (algunos ejemplos han sido citados anteriormente), además de congresos y seminarios (como los enfocados a las competencias CTEM). En este sentido, el IM²C también puede ayudar a dar a conocer estas prácticas entre profesores y alumnos, proporcionando situaciones donde se destaque la importancia y el potencial de las matemáticas para comprender, analizar y resolver estos problemas de la vida real.

2.2. El *International Mathematical Modeling Challenge*

El IM²C es un concurso internacional en el que participan más de 30 países de todo el mundo. El comité organizador de cada país presenta dos equipos, pudiendo decidir libremente cómo seleccionar a sus representantes. En España, el concurso se desarrolla en dos fases: una fase nacional y una fase internacional. En la fase nacional los equipos deben presentar, al igual que en la fase internacional, una propuesta de resolución a un problema de modelización¹. En la edición del 2021, el problema planteado en la fase nacional fue diseñar la organización de la vacunación de la COVID-19. Los equipos dispusieron para ello de tres semanas de trabajo, desde el 17 de enero al 8 de febrero. La organización seleccionó a los cuatro equipos que habían presentado las mejores propuestas para que pudieran resolver el problema de la fase internacional, aunque solo dos de las resoluciones serían enviadas al jurado internacional como representantes de España. En la fase internacional, los alumnos se enfrentaron al problema de desarrollar un modelo que permitiera determinar quién es el mejor deportista. Para ello, se proponía que primero diseñaran el modelo para elegir a la mejor tenista, implementándolo sobre la base de los resultados del Grand Slam de 2018. Posteriormente, deberían extender su modelo para encontrar al mejor deportista de cualquier disciplina individual, y, finalmente, aplicarlo también a deportes por equipos. En esta fase cada equipo tuvo solo cinco días para trabajar, pudiendo escoger ellos esos cinco días, entre mediados de marzo y principios de mayo.

Los problemas del concurso se sitúan en un contexto real, que tendrá gran importancia en su resolución, pudiendo aportarse información inicial, tanto de carácter cuantitativo como cualitativo. Precisan de diferentes contenidos y procedimientos matemáticos, siendo posible experimentar diversas vías y enfoques en su planteamiento, además de poder apoyarse en el uso de las TICs (calculadoras gráficas, hojas de cálculo y software matemático) para su resolución. La solución, en todo caso, no tiene por qué ser única. No existen respuestas correctas o incorrectas, sino respuestas más eficaces o adecuadas que otras, en función de los razonamientos y procesos utilizados por los alumnos.

Cada equipo deberá presentar un informe con su propuesta de resolución, que será evaluado por un comité de expertos (y que tendrá que ser redactado en inglés en la fase internacional). El informe, de una extensión máxima de 20 páginas, debe incluir, además de la propia solución al problema, las suposiciones consideradas, los argumentos y las matemáticas utilizadas, las conclusiones a las que se llegan, así como las posibles fuentes y referencias utilizadas. Debe incluirse, además, un resumen, de



una única página de extensión, a modo de “declaración directa hacia las personas que necesitan resolver el problema del mundo real” (Galbraith y Holton, s.f., p. 59), redactado en lenguaje cotidiano, como si los usuarios finales de este informe no tuvieran una capacidad matemática alta.

Las bases del concurso internacional pueden consultarse en su página web². También podemos acceder a las webs de los distintos países participantes³, donde podemos encontrar información y material muy útil (como los problemas de ediciones anteriores y los informes de los equipos finalistas, así como los comentarios de los comités evaluadores) para la preparación y supervisión de los equipos participantes. Entre otras consideraciones, se destaca la importancia de mejorar la comunicación en y con las matemáticas de los alumnos (en particular, la redacción de informes), así como una buena planificación de los tiempos y organización del equipo (Galbraith y Holton, s.f., pp. 57-59).

3. Objetivo del estudio

El objetivo del presente artículo es describir y analizar la actividad desarrollada por un equipo de alumnos y su profesora responsable durante la resolución del problema propuesto en el concurso IM²C en su edición del 2021, poniendo un especial interés en el papel desarrollado por el docente y sus intervenciones. Para realizar este análisis utilizaremos el material recogido por la profesora y que es además coautora del presente artículo: las transcripciones de las conversaciones mantenidas con los alumnos durante la actividad y el informe generado por este equipo.

A continuación, describiremos con detalle los participantes: formación, selección, experiencia previa en modelización y condiciones de trabajo.

4. Los participantes

El equipo participante está formado por cuatro alumnos: un alumno de 4ºESO (15 años), dos alumnas de 1º Bachillerato (16 años) y una alumna de 2º Bachillerato (17 años), todos ellos con unos resultados excelentes en matemáticas y pertenecientes a un mismo centro privado de Valencia. Tres de ellos habían participado ya en la anterior edición nacional del concurso. Este equipo fue uno de los cuatro seleccionados para resolver el problema de la fase internacional, aunque su resolución no fue finalmente escogida para representar a España (recordemos que solo se permiten dos propuestas por país).

Su profesora responsable contaba con cierta experiencia en modelización, habiendo dirigido en la edición pasada del concurso a dos equipos de este mismo centro (con los tres alumnos mencionados) en la fase nacional del concurso (en la edición pasada no consiguieron clasificarse para la siguiente fase).

En esta edición del concurso se inscribieron dos equipos de este mismo centro (aunque solo uno tuvo la oportunidad de resolver el problema de la fase internacional), ambos supervisados por la misma profesora. Los alumnos fueron inicialmente seleccionados por la propia profesora, en base a su predisposición y gusto por las matemáticas (y no solo por sus calificaciones), quien les informó del objetivo y las bases del concurso. Todos ellos decidieron, voluntariamente, participar, demostrando una gran motivación. Con el fin de conseguir dos grupos equilibrados entre sí y que contaran con perfiles lo más variados posibles, la configuración de los equipos fue decisión también de la profesora.

El equipo, junto a su profesora, y con el objetivo de “entrenar” de cara al concurso, se reunió, de forma presencial, una vez por semana y en horario extraescolar, desde el mes de octubre de ese curso escolar. Durante estas sesiones preparatorias, se presentó a los alumnos un ciclo de modelización simplificado (ver Figura 1), con el fin de ayudarles a entender cada una de las fases implicadas en el proceso de modelización.

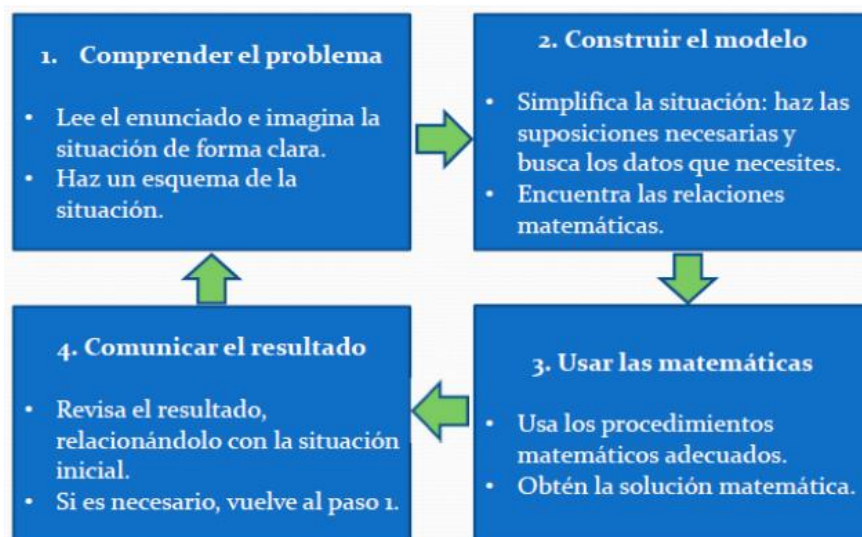


Figura 1. Ciclo de modelización utilizado como guía durante las sesiones de entrenamiento del concurso

Se trabajaron en estas sesiones distintos problemas de modelización. Entre ellos, se incluyeron problemas de Fermi, de corta duración (ver Figura 2), además de otros problemas más largos y complejos, incluidos problemas propuestos en ediciones anteriores. Hay que destacar que, pese a lo recomendado por el concurso, no se creyó conveniente hacer una asignación previa de roles entre los miembros del equipo, dejándose esto a criterio de los propios alumnos.

- Problema 1. ¿Cuántas “stories” publicamos en Instagram, cada día, entre todos los habitantes de la provincia?
- Problema 2. ¿Cuántos balones de fútbol caben en esta clase?
- Problema 3. ¿Cuántas gotas de té se necesitan para llenar esta taza?

Figura 2. Problemas de corta duración empleados durante las sesiones preparatorias.

Una vez clasificados para la fase internacional, el equipo, asesorado por su profesora, escogió, para no interferir con la marcha ordinaria de sus clases, los días 1 al 5 de abril, no lectivos, como sus cinco días para participar en el concurso. Así, decidieron trabajar desde sus casas mediante la plataforma Microsoft Teams⁴, programando dos reuniones por día de trabajo, en horario de mañana y tarde. Hay que resaltar que todos conocían perfectamente el uso de Teams, ya que durante el confinamiento debido a la pandemia del curso anterior, los alumnos habían seguido sus clases a través de esta plataforma.

5. Análisis de las sesiones de trabajo

En el presente artículo nos hemos centrado en el análisis de un caso único, este grupo de cuatro alumnos. La profesora responsable grabó todas las reuniones mantenidas por este equipo mediante la plataforma Teams a lo largo de los cinco días de trabajo. Hemos analizado las transcripciones de estas reuniones a partir de los elementos señalados en la Tabla 1, identificando el rol asumido por la profesora (según la clasificación propuesta por Burkhardt, 2006 y Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2018), el tipo y nivel de su intervención (según la taxonomía de Morera, 2013 y Borromeo-Ferri y Blum, 2011) y su desencadenante.

Rol del profesor	Intervenciones didácticas del profesor y participación de los alumnos		Nivel de la intervención	Desencadenante
	Gestión de la discusión	Participación de los alumnos		
Observador Asesor Gestor de recursos Moderador Experto	Recapitulación			
	Establecimiento de consenso	Validación		
	Petición de formalización, de argumentación, de generalización, de conexión, de comprobación	Aclaración		
	Validación	Complemento de la explicación	Contenido	Demanda directa de los alumnos
	Invitación a la formalización, a la argumentación, a la generalización, a la participación	Refutación o contraste de soluciones	Estratégico	
	Ampliación de la explicación	Asentimiento	Organizativo	Iniciativa del profesor
	Formalización	Petición de aclaración	Afectivo	
	Aclaración	Exposición		
	Corrección de vocabulario o de procedimiento Matemático			

Tabla 1. Elementos de análisis para los debates surgidos entre alumnos y profesor durante la resolución del problema.

A diferencia de Gallart, Ferrando y García-Raffi (2018), que describen una actividad curricular de modelización con un grupo completo de 3ºESO, la actividad que presentamos tiene un carácter extracurricular, en la que participa un único grupo de alumnos, desarrollada además fuera del horario lectivo. La finalidad de ambas actividades es por tanto distinta: ganar un concurso al que se presentan de forma voluntaria frente a una actividad de aula obligatoria y evaluable. Como veremos, esto hace que una parte del proceso de modelización difiera de una actividad a otra. Así, en nuestro caso, las fases de validación y comunicación no se producen durante el debate entre distintos grupos de alumnos cuando

presentan y comparan sus modelos finales (como si ocurre en Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2018), como tampoco observaremos al profesor desempeñando el rol de experto (emitiendo juicios o pareceres), pues su papel está limitado por las propias bases del concurso.

6. Sesiones de trabajo

A continuación, mostramos el análisis de cada una de las cinco sesiones de trabajo que tuvieron los alumnos para resolver el problema. Hemos dividido estos debates en episodios para facilitar su lectura y comprensión, de forma análoga a Morera (2013). Hemos seleccionado algunos de los episodios que consideramos más significativos para ilustrar el papel de la profesora responsable.

6.1. Primera sesión de trabajo (1 de abril de 2021)

Tras la entrega del enunciado del problema a sus alumnos, y después de una primera lectura individual, la profesora inicia la reunión con el objetivo de conocer sus impresiones iniciales y hacer una relectura conjunta que ayude a sentar las bases. También considera necesario recordar a los alumnos aspectos relativos a las bases del concurso. En particular, les recuerda la importancia del informe que deben redactar, lo que deben incluir en él y su formato. Otro aspecto que se apunta es el relativo a la organización del trabajo y la planificación de los tiempos.

Después de tratar los asuntos relativos a la organización, llega el momento de comenzar a trabajar, de intercambiar opiniones, de abrir el debate entre los alumnos. En la Tabla 2 recogemos la conversación surgida en torno a la elección de las variables que afectarán directamente a la creación del modelo.

Transcripción			Interpretación	
1	A1	¿Qué variables tenemos pensadas de momento?	<i>Exposición</i>	
2	A2	Puntuación en los partidos y las victorias conseguidas	<i>Aclaración</i>	
3	A1	Vale, pero ahora estamos hablando únicamente del Gran Slam en particular y no en general, ¿no?	<i>Petición de aclaración</i>	
4	A2	Sí, únicamente hablamos de las que podemos obtener de los datos iniciales. Ahora, para afinar el tema de las victorias, hay que pensar los factores que influyen para que una persona gane un partido.	<i>Asentimiento y exposición</i>	
5	A1	Vale, pero los puntos obtenidos en cada partido por cada jugador no nos hacen falta para contestar al apartado del Gran Slam, lo que cuenta es que ganen o pierdan. Sin embargo, sí que debemos tener en cuenta los puntos conseguidos para elaborar el ranking mundial. Por tanto, yo creo que, en principio, para conocer el ganador del torneo en sí, tendríamos que atender a los factores físicos y poco más. Entonces, una variable clara sería la fuerza del jugador	<i>Exposición</i>	
6	A3	Pero ¿la fuerza cómo la mediríamos? Supongo que existirá algún parámetro que haya medido los lanzamientos más fuertes o veloces de cada jugador...	<i>Petición de aclaración</i>	
7	A1	Lo buscaremos. A parte de la forma física del tenista, ¿qué otros factores podrían hacer que ganase el torneo?	<i>Exposición</i>	
8	P	Dentro de forma física, ¿entendemos que también se recogen las horas de entrenamiento, la experiencia, etc.?	<i>Invitación a la participación y</i>	<i>Rol: Observador</i>

			<i>petición de argumentación</i>	<i>Nivel: Contenido</i>
9	A2	No, yo lo del tiempo dedicado al entrenamiento había pensado que podría ser otra variable en sí misma, ¿no?	<i>Petición de aclaración</i>	
10	P	Claro, pensad que, a parte de las condiciones físicas innatas de un jugador, también el tiempo dedicado a su preparación es importante. Los deportes se entrenan	<i>Aclaración</i>	<i>Rol: Asesor Nivel: Contenido</i>
11	A3	Quizá la dieta y la edad del jugador también repercuten. Así podríamos encontrar muchas más, ¿no?	<i>Exposición y petición de aclaración</i>	
12	P	Recordad, que tener muchas variables está bien, pero hay que saber cuándo parar. A veces, si queremos abarcar demasiado, se nos hace complicado manejar tal cantidad de factores. Si se nos ocurre una buena variable, pero después de intentarlo, no sabemos cómo trabajar con ella, podemos obviarla y trabajar con otras más seguras. Es importante caminar con paso seguro	<i>Aclaración</i>	<i>Rol: Asesor Nivel: Estratégico</i>

Tabla 2. Extracto del debate durante la sesión 1.

Es importante señalar que la elección final de las variables (en la Figura 3) es el fruto de un debate en el que no intervino la profesora y en el que surgieron diferentes propuestas (nivel económico y cultural, estatus social, por ejemplo) pero que, finalmente, fueron descartadas por ser consideradas de menor relevancia. Son cinco las variables principales seleccionadas (*Physical conditions, Experience, Psychological factors, Country of origin, Sports behaviour*) algunas de las cuales quedan determinadas a su vez por otras subvariables.

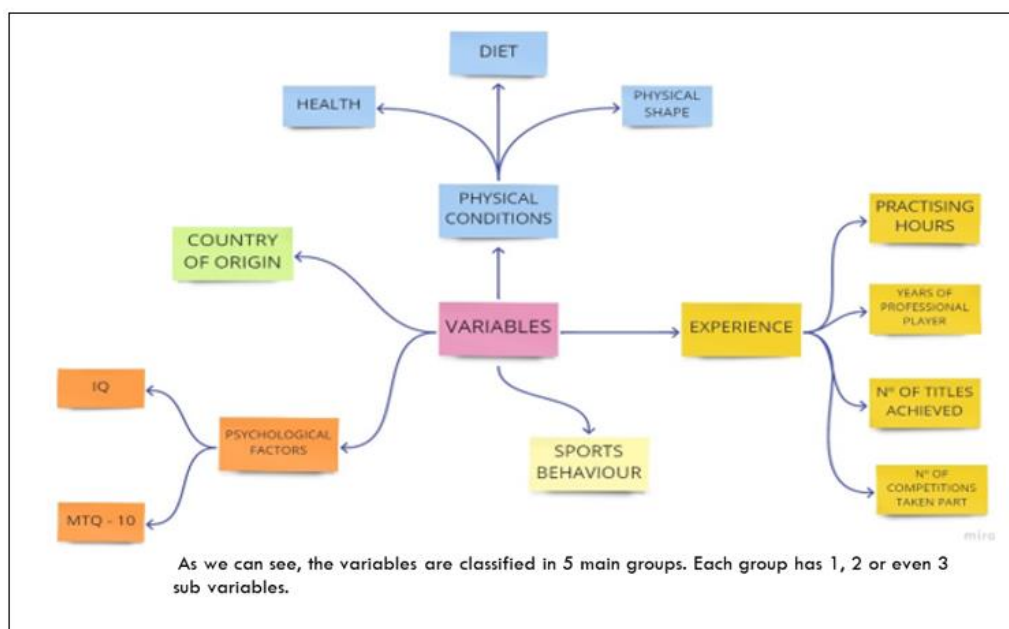


Figura 3. Extracto del informe final del equipo de alumnos, en relación a la elección de variables.

6.2. Segunda sesión de trabajo (2 de abril de 2021)

Ya en la segunda sesión, y una vez elegidas y consensuadas las variables, llega el momento de sumergirse en la construcción del modelo, lo que les llevará varias sesiones de trabajo. La Tabla 3 muestra el diálogo surgido en este momento del proceso.

Transcripción		Interpretación		
1	A1	Para la dieta se me ocurre que podríamos ver todas las dietas que existen: mediterránea, etc. y hacer con ellas un baremo. A medida que la dieta sea más sana, afectará de una manera más positiva al algoritmo. Para la salud podríamos calcular el índice de salud haciendo como una pequeña fórmula previa, que incluyera factores como la masa, las proporciones del cuerpo, etc. El resultado de esa fórmula lo incluiríamos en el algoritmo	<i>Exposición</i>	
2	A3	Sí, podríamos hacer lo mismo con el resto de las variables, ¿no?	<i>Petición de aclaración</i>	
3	P	Os referís a estudiar y trabajar previamente cada variable, con su modelo particular, y, después, volcar los resultados obtenidos al algoritmo general. Podría ser, pero en ese caso debéis prestar especial atención a cada uno de los modelos construidos para cada variable. De esta forma, cuando estéis validando, si los resultados no son correctos, os será más fácil localizar dónde está el error y subsanarlo. Si decidís hacerlo así, os podéis distribuir el trabajo y cada uno puede encargarse de estudiar una variable o un grupo de ellas. Pero antes, por favor, es importante que consensuéis entre todos, a grandes rasgos, cómo vais a trabajar con cada una de ellas.	<i>Invitación a la formalización</i> <i>Establecimiento de consenso</i>	<i>Rol: Asesor</i> <i>Nivel: Estratégico</i> <i>Rol: Asesor</i> <i>Nivel: Organizativo</i>
4	A1	Sí, lo vamos a hacer así. En principio, yo me encargo de la dieta. A2, puedes encargarte de la salud. A3, si quieres puedes encargarte de las condiciones físicas	<i>Asentimiento y exposición</i>	
5	P	Para el que le cueste un poco arrancar: siguiendo el plan que habéis trazado, ahora llega el momento de empaparse y aprender cada uno lo máximo posible de las variables de las que se haya hecho cargo. Por ejemplo, si alguien se va a encargar de analizar al detalle la variable de condiciones físicas, quizá es buena idea ponerse en la piel de un entrenador o un ojeador de tenistas y preguntarse a sí mismo: ¿qué condiciones debe tener un tenista para que yo lo seleccione para trabajar conmigo? Quizá debería tener una gran velocidad, buenos reflejos... Y, a partir de ahí, se busca información. Después, se debe pensar qué hacer con todo ello, cómo traducirlo a lenguaje matemático. ¿De acuerdo?	<i>Aclaración</i>	<i>Rol: Asesor</i> <i>Nivel: Organizativo</i>
6	A1	Dentro de la variable experiencia, ¿qué entraría? ¿las horas de entrenamiento o las horas que ha invertido jugando torneos?	<i>Petición de aclaración</i>	
7	A2	Lo segundo y también la cantidad de años de su vida que lleva dedicándose a jugar al tenis, las horas que ha dedicado a cursos de formación, etc. ¿Serán muchos factores?	<i>Petición de aclaración</i>	
8	P	Si queréis, podéis reducir la variable experiencia a tan sólo la cantidad de torneos jugados anteriormente.	<i>Aclaración</i>	<i>Rol: Asesor</i> <i>Nivel: Contenido</i>
9	P	Sí, creo que es mejor.	<i>Asentimiento</i>	

Tabla 3. Extracto del debate durante la sesión 2.

Así pues, cada una de las variables principales se modeliza con un algoritmo propio, atendiendo a las subvariables que la definen, indicando, entre paréntesis, su peso, en forma de porcentaje, como puede verse en la Figura 4.

PHYSICAL CONDITION (35%)	$\frac{\text{Diet} + \text{Physical shape} + \text{Health}}{3} \cdot 0,35$
SPORT BEHAVIOUR (15%)	$\left(\frac{\text{Highest fine} - \text{fines received}}{\text{Tens of the highest fine}} \right) \cdot 0'15$
PSYCHOLOGICAL FACTORS (15%)	$\left(\frac{\text{MTQ} - 10 + \text{IQ}}{20} \times 0,35 \right)$
COUNTRY OF ORIGIN (5%)	$\frac{\text{N}^\circ \text{ of professionals recognized from the same country}}{\text{N}^\circ \text{ of all the professionals recognized}} \cdot 0'05$
EXPERIENCE (30%)	$\frac{(\text{Competitions' length} - \text{number of competitions taken part in} + \text{hours of practising per day} \cdot \text{practising days in a year}) \cdot \text{years being player} + \text{n}^\circ \text{ titles achieved}}{10 \cdot 000} \cdot 0,3$

Figura 4. Extracto del informe final que muestra la modelización de las variables.

La distribución de los pesos, así como la elección de las variables y subvariables, se basa en sus propios conocimientos y experiencia personal en el mundo del deporte y no en criterios matemáticos. Nótese que en la variable *Psychological factors*, con un peso del 15 %, los alumnos comenten un error al transcribir su algoritmo al informe final, ya que lo multiplican por 0,35 en lugar de por 0,15. Se trata de un error de transcripción que no afecta a sus cálculos y que no fue detectado.

El trabajo en estos modelos comienza en la segunda sesión y continuará durante las dos sesiones siguientes, con distintas revisiones, ajustes y cambios, hasta llegar a su diseño final (Figura 4). En la Figura 5 podemos ver el algoritmo que utilizarán para determinar cuál es el mejor deportista.

The algorithm will be applied according to the sport in which it is wanted to know its best player. In this way, we have created the following algorithm:

$$\{((\text{Country of origin} \times 0.05) + (\text{Sports behaviour} \times 0.15) + (\text{Physical conditions} \times 0.35) + (\text{Psychological factors} \times 0.35) + (\text{Experience and amount of time} \times 0.3)) \times 10$$

Figura 5. Extracto del informe final en relación al algoritmo creado.

De nuevo, comenten otro error al transcribir este algoritmo al informe final (aunque tampoco afecta a sus cálculos), pues la variable, *Experience and amount of time*, es la que debe estar multiplicada por 10 y no toda la suma (como indican erróneamente las llaves), pues es la única con una escala sobre 10 (las restantes variables están sobre 100).

6.3. Tercera sesión de trabajo (3 de abril de 2021)

Tras la construcción del modelo, llega el momento de su validación. A nuestro entender, es uno de los momentos más críticos, puesto que a los alumnos les supone un reto, no sólo a nivel matemático sino también a nivel emocional. Debemos tener en cuenta que, a estas alturas del proyecto, los alumnos llevan a sus espaldas tres días de duro e intenso trabajo. Unos resultados desfavorables en el proceso de validación pueden llevarles a la frustración, pues les quedan, únicamente, dos días para corregir y completar el trabajo. Durante esta sesión, la profesora les pide que detallen en qué consistirá su validación y cómo piensan llevarla a cabo. Mostramos un fragmento de este debate en la Tabla 4.

Transcripción			Interpretación	
1	A1	Para la validación podemos coger los datos relativos a las semifinales. Si queréis cada uno nos podemos encargar de comprobar el algoritmo con dos tenistas y ponemos lo obtenido en común.	<i>Exposición</i>	
2	A4	Sinceramente veo demasiado comprobarlo con tantas, lo haría solamente con una, por ejemplo, Serena Williams, y comprobaría el algoritmo con su caso particular con todo lujo de detalles	<i>Aclaración</i>	
3	A2	Una creo que es poco, ¿y si cogemos solamente las tenistas de la final en lugar de la semifinal? Así serían seis	<i>Exposición</i>	
4	A4	Vale, lo hacemos así y luego vemos qué nos dicen los resultados	<i>Asentimiento</i>	
5	A2	Vale, podemos hacerlo primero con las seis y vemos quién es la mejor y, después, desarrollamos más a fondo la mejor de todas para encontrar, por decirlo de alguna manera, los factores ideales de una tenista	<i>Validación</i>	
6	P	Veo que para analizar muchas de las variables habéis creado baremos. Recordad que esos baremos han de estar desarrollados al detalle para que, ahora, cuando os repartáis esas seis tenistas para comprobar con ellas el algoritmo, lo hagáis siguiendo exactamente el mismo criterio. No dejéis nada a la subjetividad de cada uno. Si no, la validación no estaría siendo correcta.	<i>Validación, corrección de procedimiento</i>	<i>Rol: Asesor Nivel: Contenido</i>
7	A3	Entonces tenemos que afinar el tema del rendimiento físico y después seguimos con nuestro plan de validación.	<i>Asentimiento y exposición</i>	
8	P	Recordad que podéis utilizar la hoja de cálculo del Excel para que os sea más fácil y rápido el trabajo de validación.	<i>Aclaración</i>	<i>Rol: Gestor de recursos Nivel: Estratégico</i>
9	A2	Sí, lo haremos. Además, traduciremos parte de esas tablas en gráficos de sectores para que sea más visual	<i>Asentimiento y exposición</i>	

Tabla 4. Extracto del debate durante la sesión 3.

De este modo, los alumnos prueban su modelo utilizando los datos de varias tenistas del Grand Slam del 2018 y comparan su clasificación con la oficial de la Asociación de Tenis Femenino (WTA). Comprueban que dos de las tres primeras tenistas de esta clasificación oficial se encuentran también entre las tres primeras de su clasificación, lo que consideran una validación suficiente de su modelo. En la Figura 6 pueden verse los resultados de su algoritmo.

PLACE	NAME	POINTS
1º	Angelique Kerber	69'65746
2º	Caroline Wozniacki	68'47587
3º	Simona Halep	66'45696
4º	Sloane Stephens	66'24935
5º	Naomi Osaka	62'66423
6º	Serena Williams	61,21935

Figura 6. Clasificación de las tenistas del Grand Slam obtenida a partir de su modelo, incluida en su informe final.

6.4. Cuarta sesión de trabajo (4 de abril de 2021)

Llega el momento de introducir los cambios necesarios en el modelo para conseguir mejorarlo y aplicarlo a otros deportes, como se pide en el problema. Todo esto se desarrolla en la cuarta sesión. A continuación, mostramos un fragmento del debate que se produce en torno a estos aspectos propios de la revisión del modelo, en la Tabla 5. Los alumnos comentan que han tenido que realizar ajustes en el algoritmo de la variable *Physical conditions*.

Transcripción			Interpretación	
1	P	¿Qué conclusiones habéis podido extraer del proceso de comprobación?	<i>Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador Nivel: Estratégico</i>
2	A2	Debemos modificar el baremo que hemos empleado para definir la variable de condición física. [se refiere a que, dentro de la variable <i>Condición Física</i> , han sumado dos subvariables con escalas diferentes, lo que les obliga a ajustarlas y rehacer los cálculos]	<i>Exposición</i>	
3	P	No hay problema. ¿Se trata de una modificación sustancial? ¿Habéis pensado cómo hacerlo?	<i>Invitación a la argumentación</i>	<i>Rol: Asesor Nivel: Contenido</i>
4	A3	No es demasiado, simplemente debemos cambiar algunos de los parámetros para que nos sea más fácil tenerla bajo control.	<i>Exposición</i>	
5	P	¿Algún ajuste más?	<i>Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador Nivel: Contenido</i>
6	A1	En principio, no. Creemos que, una vez introducido ese cambio, la validación dará unos buenos resultados.	<i>Exposición</i>	
7	P	Perfecto. De todas formas, recordad volver a validar después de introducir este ajuste. En caso de que fuera necesaria alguna modificación más, no hay problema, hay tiempo.	<i>Petición de comprobación</i>	<i>Rol: Asesor Nivel: Estratégico</i>

Tabla 5. Extracto del debate durante la sesión 4.

6.5. Quinta sesión de trabajo (5 de abril de 2021)

Es el último día. El trabajo ya está hecho en su gran parte, aunque quedan detalles por pulir: es necesario una buena presentación, clara, llamativa y visualmente atractiva. Una vez acabado el informe llega el momento de enviarlo a la organización del concurso, habiendo cumplido con el plazo fijado. La satisfacción por el trabajo bien hecho, el compañerismo y la sintonía entre los alumnos es el agradable estado de ánimo que impera en este momento final.

7. Conclusiones

De acuerdo con las guías y consejos que se facilitan en el concurso, ha sido una condición fundamental respetar el papel que debe desempeñar el profesor responsable de supervisar y no interferir en el proceso de resolución del equipo. Fue importante transmitir a los alumnos esta premisa, pues les ayudó a coger las riendas del proyecto desde el comienzo. Como hemos visto a través de estos episodios, la mayoría de las intervenciones de la profesora se dan a nivel organizativo-estratégico. A nivel organizativo, desempeñando un rol de asesor y observador, en aspectos más bien técnicos, relativos a las condiciones y bases del concurso y la planificación de los tiempos. A nivel estratégico, ayudándoles en aspectos generales del propio proceso de modelización, asumiendo el papel de asesor (selección de las variables, en la Tabla 2 y 3, y fase de validación, en la Tabla 4 y 5) y gestor de recursos (recomendándoles el uso de hojas de cálculo). Las intervenciones a nivel de contenido han sido las menos habituales, precisamente para no influir en sus decisiones (centradas en ajustes concretos del modelo debidos a la validación, por ejemplo, en Tabla 5). Destacar también su primera intervención, a nivel afectivo, con la intención de motivarles, y que ha consistido en la lectura conjunta y comentada del enunciado del problema. Esta primera intervención ha permitido superar los miedos iniciales que un problema a este nivel puede suponer para ellos. También, a nivel afectivo, en la última sesión, con el fin de reconocer el trabajo bien hecho y el tremendo esfuerzo realizado.

El concurso, en su fase internacional, dispone de un plazo muy limitado de tiempo para trabajar. Tan solo cinco días para diseñar el modelo y redactar el informe. Esta premura puede ocasionar, como hemos podido ver, errores de tipo formal y de notación al transcribir las propuestas de los borradores iniciales al informe final. La habilidad de redactar informes y de uso del lenguaje matemático, como señala el propio concurso en sus recomendaciones, son aspectos esenciales que conviene cuidar al máximo.

La selección de los alumnos participantes ha sido un pilar fundamental en el desarrollo de la actividad. La participación en un proyecto de estas características aporta una experiencia completa, tanto a nivel académico como a nivel personal. Por ello, el alumno debe estar preparado a ambos niveles. Son varias las características que definen el perfil de estos participantes. Por un lado, son alumnos que demuestran un gran gusto y motivación por las matemáticas, que les gustan los retos y que disfrutan imaginando y creando soluciones a diferentes problemas. Por otro lado, son alumnos a los que les gusta trabajar en equipo, que son tolerantes con las opiniones de los demás y que utilizan el diálogo y el debate como herramienta de consenso. Como hemos comentado, no se realizó una asignación al uso de roles entre los componentes del equipo, puesto que se trataba de un grupo ya consolidado en el que cada uno de los cuatro miembros conocía perfectamente los puntos fuertes y débiles del resto. Este conocimiento conlleva una asignación de roles espontánea, que no sucede en un momento en concreto y que se ve como algo natural entre ellos. De ahí, la importancia que tiene, para un proyecto de estas características, que hayan trabajado juntos previamente. En este sentido, las sesiones de “entrenamiento” han supuesto una oportunidad para conocerse y compenetrarse. Cabe destacar el hecho de que estas sesiones han de resultar motivadoras, deben representar un lugar de esparcimiento donde lo importante es disfrutar de



las matemáticas, compartir ideas y desarrollar el pensamiento crítico de una manera natural, lejos del estrés que, en ocasiones, pueden suponer las clases ordinarias.

Por último, destacar la importancia que ha tenido participar en este concurso como vía para introducir las prácticas de modelización, de una forma progresiva, en las aulas de Secundaria y Bachillerato, ya como una actividad más del curriculum. La experiencia que ha supuesto para la profesora la supervisión de los equipos, la publicidad, gracias al boca a boca, entre los propios alumnos, la motivación y el interés despertado, son un buen argumento para insistir en este tipo de actividades, tan importantes para cambiar la imagen que se tiene de las matemáticas escolares.

Bibliografía

- Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H., Gorgorió, N. (2015), Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Primaria. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 32(1), 19-33.
- Alsina, A. y Casado, M. (2021). Introduciendo la modelización matemática temprana en educación infantil: un marco para resolver problemas reales. *Modelling in Science Education and Learning*, 14(1), 33-56.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En Breiteig y otros (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester: Ellis Horwood Limited.
- Blum, W. (2011). Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (15-30). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2011). Are integrated thinkers better able to intervene adaptively? A case study in a mathematical modeling environment. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *CERME 7 - Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 927-936). Poland: University of Rzeszow.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 453-465.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 178-195.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. En G. Stillman, W. Blum, G. Kaiser (Eds). *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 223-232). Springer, Cham.
- Calabuig, J.M., Ferrando, I., Gallart, C., García-Raffi, L.M., Hurtado, D., Sierra, L. (2015). La modelización como competencia transversal en el sistema educativo español. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 69, 44-51.
- Comité australiano del IM²C (s.f.) Recuperado el 13 de abril de 2022 de <https://www.immchallenge.org.au/about-the-immc>.

- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en el aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92.
- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema*, 31(57), 220-242.
- Galbraith, P. y Holton, D. (s.f.). *Mathematical modelling. A guidebook for teachers and teams*. Recuperado el 27 de agosto de 2021, de <https://www.immchallenge.org.au/files/IM2C-Teacher-and-student-guide-to-mathematical-modelling.pdf>
- Gallart C., Ferrando, I. y García-Raffi, L.M. (2018). Análisis del rol del profesor en la gestión de una actividad de modelización mediante un estudio de caso único. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 33(2), 47-62.
- Gallart C., Ferrando, I. y García-Raffi, L.M. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-85.
- Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Gallart, C. y Mata, P. (2020). Formación del profesorado en modelización: primeros pasos de una profesora novel. *Modelling in Science Education and Learning*, 13(2), 43-56.
- Garfunkel, S., Niss, M., & Brown, J. P. (2021). Opportunities for modelling: An extra-curricular challenge. En F.K.S y otros (Eds.). *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 363-375). Springer, Cham.
- Haines, C.R., y Crouch, R.M. (2007). Mathematical modelling and applications: Ability and competence frameworks. En W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, & H-W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 417-424). New York: Springer.
- Julie, C., Mudalay, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). Heidelberg: Springer.
- Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- OCDE (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, PISA, OECD Publishing, Paris. Recuperado el 27 de agosto de 2021, de <https://doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., Garcia-Raffi, L. M., y Gómez Urgellés, J. (2011). *Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria*. Recuperado el 27 de agosto de 2021, de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf
- Sol, M. (2009). *Anàlisi de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys a una aula heterogènia*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.
- Trellers-Zambrano, C., Toalongo, X., Alsina, A. y Gonzales, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 102, 43-59.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. En K. Gravemeijer, R., Lehrer, B., Oers, B., van and L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257–276). Dordrecht, Netherlands: Springer.



Zbiek, R., Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89-112.

Notas al pie

¹ Pueden verse los problemas propuestos para la fase nacional en <https://immcpain.blogs.uv.es/problemas-immc-spain-ediciones-pasadas/> y los problemas de la fase internacional en <https://immchallenge.org/Pages/Sample.html>

² Web oficial del concurso IM²C, <https://immchallenge.org/Index.html>

³ Web del IM²C-España, <https://immcpain.blogs.uv.es/>

⁴ Microsoft Teams es una plataforma basada en la nube que permite compartir documentos, llamadas y reuniones de audio y video, cuyo principal objetivo es el trabajo en equipo.

César Gallart Palau es licenciado en Matemáticas por la Universitat de València (UV). Se doctoró en Matemáticas por la Universitat Politècnica de València en el año 2016. Es profesor de Secundaria-Bachillerato en el Colegio CEU San Pablo de Valencia y profesor asociado en la Universidad CEU Cardenal Herrera, donde imparte clases en el Máster de formación del profesorado. Imparte también cursos de formación del profesorado en el CEFIRE de Valencia y ha publicado diversos artículos relacionados con la modelización matemática.

Email: gallartcesar@hotmail.com

Paz Mata Codes es profesora de Secundaria y Bachillerato en el Colegio CEU San Pablo de Valencia. Cursó sus estudios universitarios en la Universidad Politécnica de Valencia, finalizando en 2011. Posteriormente, continuó su formación de postgrado en la Universidad CEU Cardenal Herrera. Ha publicado con anterioridad otro artículo relacionado con la modelización matemática y dirigido a equipos de alumnos en el concurso IMMC.

Email: pazmatacodes@gmail.com