

Utilización de GeoGebra y la estereoscopia como auxiliares en la enseñanza de contenidos ligados a la Geometría Euclidiana

José Francisco Villalpando Becerra (Universidad de Guadalajara. México)
María José Aceves Sepúlveda (Universidad Autónoma de Guadalajara. México)

Fecha de recepción: 24 de marzo de 2022
Fecha de aceptación: 24 de octubre de 2022

Resumen

Este trabajo, que se inscribe en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, presenta la posibilidad de la utilización de GeoGebra y de la estereoscopia como auxiliares en el proceso de enseñanza de algunos contenidos ligados a la Geometría Euclidiana. Más específicamente, se pretende analizar la influencia de los anaglifos en la visualización de figuras tridimensionales y consecuentemente en la asimilación de conceptos que demandan una visión tridimensional. La observación de cuerpos geométricos y sus componentes a través de los anaglifos facilita la comprensión de los mismos, porque, además de los aspectos didácticos de la visión tridimensional, acerca una tecnología que resulta atractiva para los estudiantes.

Palabras clave

Anaglifos, estereoscopia, GeoGebra, Geometría Euclidiana, enseñanza

Title

Use of GeoGebra and stereoscopy as auxiliary tools in teaching content related to Euclidean Geometry

Abstract

This work, which is part of the field of mathematics teaching, presents the possibility of using GeoGebra and stereoscopy as auxiliaries in the teaching process of some contents related to Euclidean Geometry. More specifically, it is intended to analyze the influence of anaglyphs in the visualization of three-dimensional figures and consequently in the assimilation of concepts that demand a three-dimensional vision. The observation of geometric solids and its components through anaglyphs facilitates their understanding, because not only reinforces the didactic aspects of the three-dimensional vision, but also brings a technology that is attractive to students.

Keywords

Anaglyphs, stereoscopy, GeoGebra, Euclidean Geometry, teaching

1. Introducción

La fascinación por la tridimensionalidad no es reciente pues se remonta al periodo de la Grecia antigua. Ya en el siglo III a. n. e. el propio Euclides, en su obra denominada "Óptica" estudió el nexo que existe entre la visión tridimensional y el hecho de que los seres humanos dispongamos de un par de ojos. En el siglo II a. n. e. Galeno presentaría lo que pensaba era un estudio de una creencia de la vista en perspectiva por medio de los ojos. Encontró por medio de la observación que, al cerrar alguno de los ojos, la imagen de su alrededor se desplazaba ligeramente.



Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas
Luis Balbuena Castellano

A lo largo de la historia, varios científicos como Kepler, Descartes o Leonardo Da Vinci realizaron diversos trabajos relacionados con la representación de objetos de tres dimensiones en superficies de dos dimensiones.

En 1833, Charles Wheatstone, físico nacido en Escocia que desarrolló su labor mucho antes de que se concibiera la fotografía como tal, diseñó un dispositivo sencillo llamado estereoscopio (Figura 1), el cual era capaz de reproducir la sensación de tridimensionalidad. Lo llamarían el estereoscopio de Charles Wheatstone, este aparato fue el primero que llevaría a toda una serie de dispositivos para observar en tres dimensiones.



Figura 1. Estereoscopio diseñado por Wheatstone. (Cabezos, 2014).

El estereoscopio disponía de un par de espejos los cuales se situaban en cierta inclinación con relación al espectador y se colocaba una imagen frente a cada uno de los espejos (Figura 2). Generalmente dichas imágenes contenían alguna figura geométrica o dibujo. Wheatstone llegó a concluir que la diferencia visual que existe en cada ojo era lo que generaba la percepción de una tercera dimensión.

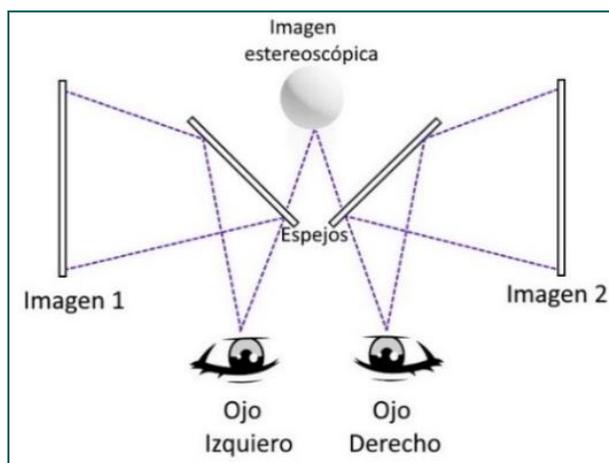


Figura 2. Partes del estereoscopio diseñado por Wheatstone.

El pintor español Salvador Dalí, entre los sesenta y setenta, fue capaz de plasmar verdaderas pinturas de forma tridimensional. Su método fue transferir a un lienzo imágenes que fueron tomadas con una cámara estereoscópica. En las pinturas de gran tamaño utilizó un aparato con espejos parecido al de Wheatstone para visualizarlas en tercera dimensión. Un ejemplo muy famoso de este tipo de pinturas estereoscópicas es el conocido como las Meninas, el cual consta de dos componentes, uno para ser visualizado por el ojo derecho y otro para ser visto por el ojo izquierdo (Figura 3). Estos componentes son conocidos como par estereoscópico.



Figura 3. Componente para cada ojo de Las meninas de Dalí.¹

Por su parte, Cabezos (2014) de forma acertada comenta que:

“Actualmente vivimos un momento de apogeo de la estereoscopia, sobre todo, en el mundo del cine, hecho que se ha venido repitiendo, a lo largo de la historia, cuando se han producido avances en los medios de reproducción y visionado. Sin embargo, los conocimientos de las técnicas que permiten desarrollar material estereoscópico, parecen pertenecer a esos artistas que logran la magia del cine y son prácticamente desconocidos en el ámbito docente e investigador donde, sin duda, tienen una gran aplicación”. (pp. 35-36).

2. Métodos para percepción de profundidad y tridimensionalidad

Existen diversos métodos que son utilizados para proporcionar al observador la percepción de tridimensionalidad y relieve del entorno que lo rodea. Entre los más importantes se tienen:

2.1 Perspectiva

Es la forma de representar en una superficie bidimensional un objeto de modo semejante al que es captado por nuestra visión, de manera tal que se consiga percibir su forma tridimensional, y su

¹ <https://efs.efeservicios.com/foto/pintura-salvador-dali-estudio-meninas1976-efeyv/8000510991>

característica más importante es que los objetos disminuyen aparentemente a medida que se incrementa la distancia al observador. En la Figura 4 puede apreciarse una imagen que utiliza este método.

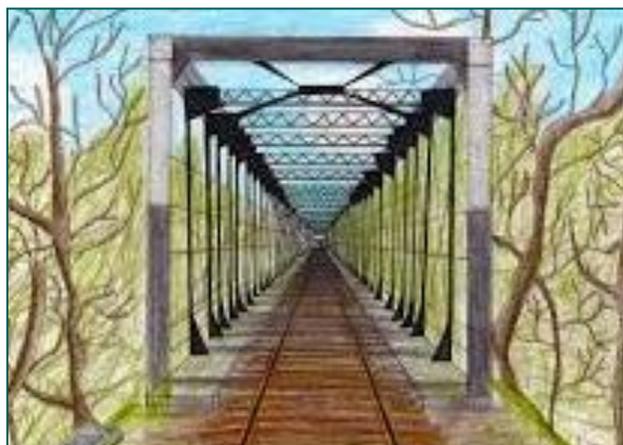


Figura 4. Imagen que utiliza el método de perspectiva.²

2.2 Solapamiento o interposición

El fenómeno de la interposición o solapamiento es un efecto visual en el que los objetos a menor distancia se superponen (ocultan) a los objetos a mayor distancia en la composición desde la vista del observador. Como se puede observar en la Figura 5, las esferas que se ubican más cerca ocultan o solapan a las que se encuentran a una distancia mayor.



Figura 5. Imagen que utiliza el método de solapamiento o interposición.³

² <https://kuilooa-enp.blogspot.com/2015/03/perspectiva-un-punto-de-fuga.html>

³ <https://www.istockphoto.com/es/fotos/bolas-de-colores>

2.3 La iluminación y el sombreado

De acuerdo con Cuenca (2018) “la iluminación y sombreado son características físicas proporcionadas por la luz que ayudan a definir un objeto como el relieve, teniendo en cuenta que entre más cercano el objeto tendrá mayor luminosidad”. En la Figura 6 se puede ver una imagen que utiliza dicho método.

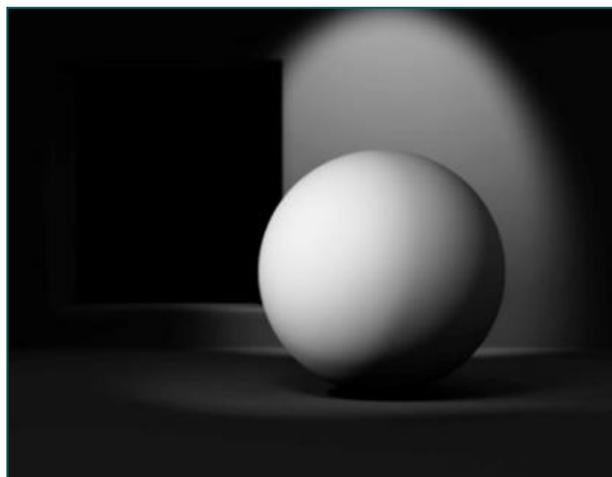


Figura 6. Imagen que utiliza el método de iluminación y sombreado.⁴

2.4 Atenuación

La atenuación es un fenómeno visual donde los objetos que se encuentran a una distancia mayor sufren un fenómeno visual en el cual aparecen más difuminados o desenfocados. En la Figura 7 se puede observar cómo los objetos lejanos se ven desenfocados.



Figura 7. Imagen que utiliza el método atenuación.⁵

⁴ <https://www.elephantvfx.com/blog/2014/5/30/luz>

⁵ <https://es.photography-secret.com/10089513-tips-for-using-the-blur-filters-in-photoshop>

2.5 Enfoque

Es un método similar al de atenuación, pero con la variante de que los ojos se deben adaptar para tener en cuenta la distancia de lo que se está observando. Una muestra es la imagen de la Figura 8.



Figura 8. Imagen que utiliza el método enfoque.⁶

2.6 Transparencia

En este método se trata de aprovechar la transparencia del objeto para enfatizar la sensación de profundidad, tal como se observa en la imagen mostrada en la Figura 9.

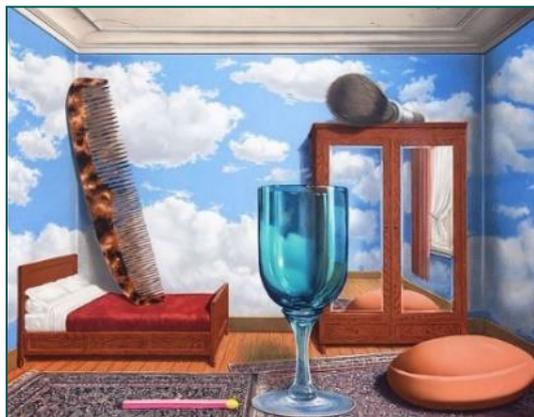


Figura 9. Imagen que utiliza el método transparencia.⁷

Aunque dichos métodos dan cierto efecto de profundidad y relieve, en muchos casos no logran generar la sensación de tridimensionalidad deseada que proporcionan los sistemas de visión estereoscópica.

⁶ <https://cursodefoto-madrid.com/enfoque-y-desenfoque/>

⁷ <https://palavrasemespanhol.blogspot.com/2011/05/magritte.html>

3. ¿Qué es la estereoscopia?

La visión humana es bidimensional, en otras palabras, el cerebro entiende el entorno por medio de un par de imágenes, las cuales son percibidas una en cada ojo, con una pequeña diferencia entre sí debida a la separación natural que existe entre ellos que, en el ser humano, es de unos 6.5 cm en promedio (aunque puede variar de 4.5 a 7.7 cm), además del ángulo del panorama visual de cada ojo.

Ramírez (2008) menciona que “la visión estereoscópica consiste en calcular diversas imágenes, una para el ojo izquierdo y otra para el ojo derecho; estas imágenes se presentan al ser humano de modo que vea la imagen correcta para cada ojo” (p. 9).

Mientras que Martín, et al. (2004) hacen hincapié en que “cuando dichas imágenes llegan al cerebro a través del nervio óptico, éstas se fusionan en una sola imagen aportándonos la sensación de tridimensionalidad o relieve” (p. 1). En esto se basa la denominada visión estereoscópica y se denomina estereopsis, del griego *στερεά* sólido y *ὄψις* visión (Figura 10).

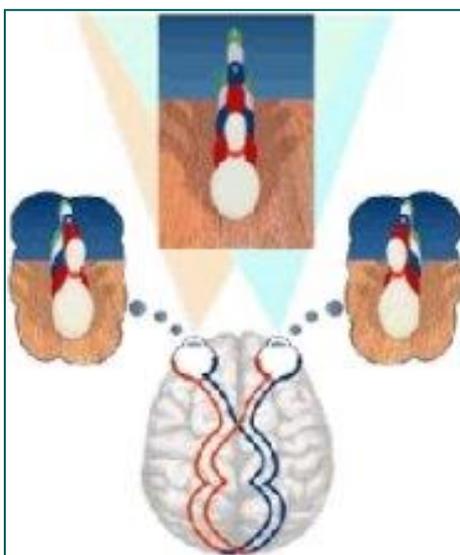


Figura 10. Proceso de estereopsis. (Ramírez, 2008).

El término estereoscopia proviene del griego *στερεός* sólido y *σκοπέω* acción de ver, y son aquellos métodos que permiten que en cada ojo se pueda observar una imagen diferente con la finalidad de obtener el efecto de relieve y profundidad; en otras palabras, el poder visualizar las imágenes bidimensionales de tal manera que se observen en tres dimensiones.

En el ojo derecho se contempla una imagen y en el izquierdo se contempla otra, la cual es levemente distinta a la primera. Esto se puede corroborar situando un dedo frente a la cara con los ojos inicialmente cerrados y, después, cerrando y abriendo cada uno de los ojos de forma alternativa.

Si se quiere captar una imagen en tres dimensiones en el cerebro, se necesitan datos de la distancia de los objetos. Estos se pueden obtener debido a que se tiene un par de ojos, de tal forma que en cada uno se visualiza el objeto desde un distinto ángulo, lo que da como resultado la triangulación necesaria para que el cerebro obtenga la distancia a la que se encuentra cada objeto.

3.1 Técnicas de estereoscopia

Hay diversas técnicas para visualizar objetos en tercera dimensión. Algunas de ellas pueden ser mejores para formatos impresos o para publicar en internet, otras son mejores para formatos de vídeo o de cine. No existe una técnica perfecta, ya que algunas requieren cierto esfuerzo por parte del observador, mientras que otras necesitan de equipo especializado, sin embargo, se puede encontrar la que más se ajuste a las necesidades de cada individuo.

Es posible obtener el efecto de tercera dimensión utilizando diversas técnicas. Las más comunes y económicas son: los estereogramas o de ojos paralelos (*parallel eyes*), los anaglifos y finalmente la denominada de ojos cruzados (*cross eyes*). Hay otras técnicas, aparte de las ya señaladas, pero en estas se requiere de equipo costoso y especializado como lentes de cristal líquido, lentes polarizados, monitores lenticulares, cascos de realidad virtual, etc.

Las técnicas de estereoscopia más comunes y económicas a continuación se detallan de una forma concisa, pero considerando sus elementos principales:

3.1.1 Técnica de ojos paralelos (*parallel eyes*)

Fue el primero y más antiguo sistema de visión en tercera dimensión. El espectador tiene que centrar la mirada en un sitio puntual situado hacia el infinito, y mantener los ejes de su vista en forma paralela. También hay que considerar la distancia focal, esto es, la distancia entre los ojos y la imagen. Esto se puede conseguir acercando la imagen y alejándola lentamente hasta que esté enfocada. En esta técnica cada ojo enfoca la imagen correspondiente, además de mantener el eje de los mismos en forma paralela como si se mirase al infinito.

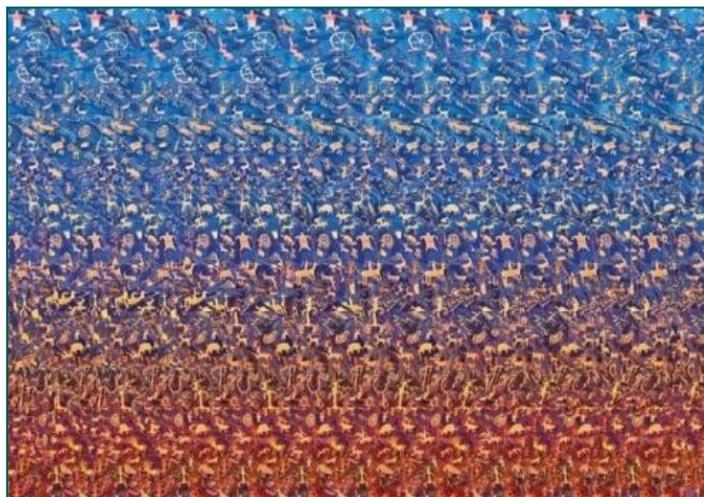


Figura 11. Estereograma de un dragón alado y la imagen que se debe observar.⁸

Este método se utiliza para visualizar imágenes con estereogramas de puntos aleatorios, que son esencialmente dos imágenes constituidas por puntos aparentemente distribuidos de forma aleatoria, pero

⁸ <https://www.amazon.com/-/es/Guardian-el-pasado-Dragón-estereograma/dp/B01NBK00S>

produciendo una sensación de relieve y profundidad, como si hubiera objetos más lejanos y más cercanos que la imagen. Muchos no logran observar las imágenes que se generan con esta técnica, además de que se requiere de entrenamiento y esfuerzo visual. Para comprobarlo hay que intentar ver el dragón alado generado en el estereograma de la Figura 11 (en la parte izquierda). En la derecha se muestra la imagen que se debería observar en tercera dimensión.

3.1.2 Anaglifos

Del griego ἀνάγλυφος (tallado en relieve), son imágenes creadas de una manera particular con el objetivo de provocar un efecto tridimensional en la visión del espectador. El efecto se crea en base al uso de dos colores diferentes. En la misma imagen, se dibujan dos figuras en dos colores diferentes, generalmente cian, una variación del azul, y magenta, una variación del rojo. Las figuras de diferentes colores se superponen con cierta discrepancia para simular la visión humana, es decir, cada figura representa la imagen obtenida por observación situada en cada ojo.

Según Ferreira (2016, pp. 21-22) “para que se produzca el efecto tridimensional, es necesario que las figuras con diferentes colores sean vistos solo por un ojo”. Por ejemplo, el ojo izquierdo debe ver sólo la figura azul y el ojo derecho debe ver sólo la figura roja. Esta separación visual se obtiene a través de gafas anaglíficas que tienen lentes con diferentes colores y de esta forma pueden filtrar las figuras de un determinado color (Figura 12 derecha). En la Figura 12 izquierda, se observa el anaglifo de un tigre.

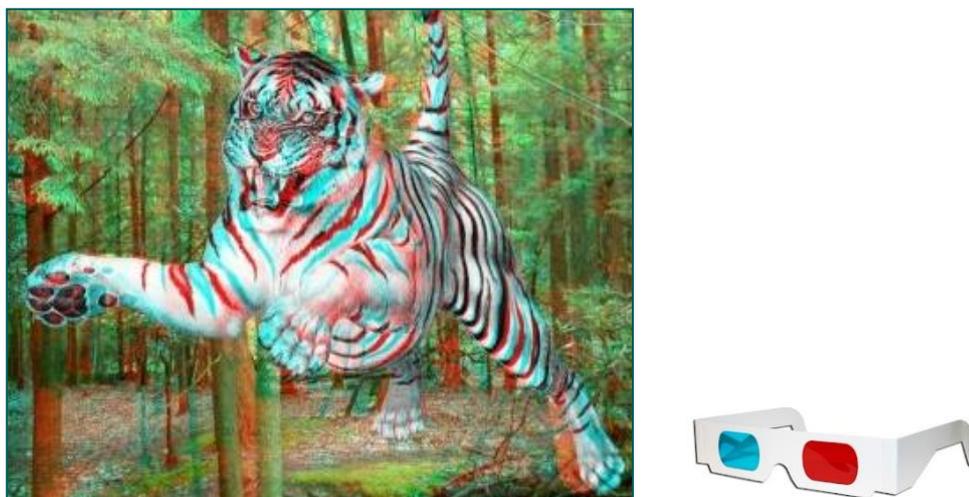


Figura 12. Anaglifo de un tigre y gafas anaglíficas para visualizarlo.⁹

3.1.3 Técnica de ojos cruzados (*cross eyes*)

En esta técnica, los ejes de visión de los ojos se deben de cruzar, enfocando en un punto intermedio lo más cerca posible. Así el ojo izquierdo percibe la imagen de la derecha y el ojo derecho la imagen de la izquierda. Se tienen que hacer bizcos literalmente para poder visualizar las imágenes. La imagen generada virtualmente pareciera ser más pequeña. Cruzando los ejes de visión (haciendo bizcos) se puede observar en tercera dimensión las imágenes de la Figura 13. Este par de imágenes se conoce como

⁹ <http://allmediamx.com/vr/anaglifos.html>

par estereoscópico. Con esta técnica también es requerido cierto entrenamiento y esfuerzo visual, por lo que es posible utilizarla solamente por cortos periodos de tiempo.



Figura 13. Par estereoscópico de una foto aérea.¹⁰

Las técnicas de ojos paralelos y ojos cruzados son válidas para generar imágenes en tres dimensiones de tipo estático para publicaciones de forma electrónica o impresa. Por lo que se necesita buena resolución al imprimirlas. Estas no son útiles si se quisiera elaborar vídeos o imágenes con movimiento, además de que requieren de cierto entrenamiento, siendo casi seguro el agotamiento visual. Sin embargo, en el caso de la técnica de ojos paralelos es posible utilizar gafas especiales para reducir ese tipo de problemas. El formato, que es limitado en cuanto a su tamaño, en las imágenes para ojos paralelos incrementa el requerimiento de una alta resolución en dichas imágenes. Es importante señalar que con estas dos técnicas se pueden visualizar imágenes en color.

Para animaciones en tercera dimensión, película de tipo estereoscópico o imágenes con movimiento, la técnica más utilizada es la de los anaglifos, la cual es compatible con los sistemas clásicos de vídeo y televisión, de un cañón conectado a la computadora o para cine. El uso de los anaglifos involucra la representación única con dos imágenes superpuestas, las cuales son matizadas con distinto color para cada ojo, siendo los más comunes el rojo y el azul.

Martín, et al. (2004) afirman que:

“La visualización de anaglifos no exige entrenamiento visual previo, al menos en la mayor parte de los casos. Este es un sistema que, por su bajo costo es muy empleado sobre todo en publicaciones, tanto escritas como electrónicas. Pero en ocasiones presenta el problema de cansancio visual después de un uso prolongado de las gafas. El anaglifo pese a la forma en que es generado, puede conservar cierta información del color original, pero nunca de la calidad de otros sistemas de visión estereoscópica. Finalmente, no existe limitación de tamaño”. (p. 5).

¹⁰ <https://medium.com/@geos.centricos/el-mundo-en-3d-con-visión-estereoscópica-b5c710ad078d>

Hoy en día el uso de anaglifos es la técnica estereoscópica más utilizada y económica para generar imágenes en tercera dimensión, por lo que en lo sucesivo nos centraremos en esta técnica.

4. Estereoscopia y matemáticas

En la vida académica de un alumno a menudo se muestran mediante diversas representaciones en dos dimensiones distintos conceptos que son de naturaleza tridimensional. Por mencionar algunos casos, en Matemáticas podemos mencionar las características y propiedades de los cuerpos geométricos, el álgebra de vectores en el espacio o las superficies de revolución; en Física podemos considerar los campos electromagnéticos o en Química la estructura y propiedades de los enlaces atómicos de una molécula.

Existen distintas herramientas computacionales que permiten proyectar en un plano imágenes tridimensionales. Estos programas permiten incorporar ciertas señales de tridimensionalidad que contribuyen a la comprensión de los objetos observados, pero en muchos casos dichas señales no son suficientes para algunas representaciones. Es aquí cuando las técnicas de estereoscopia ofrecen una valiosa herramienta para el profesor.

Actualmente, diversas ciencias destacan por el uso y aplicación de la estereoscopia, entre las que se pueden mencionar la Medicina, la Geología, la Arquitectura, la Química, etc. Una de las ramas de la Geología que más utiliza las imágenes estereoscópicas es la Fotogeología, que estudia diversos acontecimientos geológicos por medio de la fotografía estereoscópica aérea, haciendo uso de pares estereoscópicos para identificar rasgos geológicos en la superficie terrestre que serían prácticamente invisibles con la fotografía tradicional. Algunas técnicas estereoscópicas son muy útiles en la Química para observar moléculas de estructura compleja. También en Medicina la visión estereoscópica se utiliza como herramienta didáctica y en diversos diagnósticos.

En la enseñanza de las Matemáticas el uso de la estereoscopia ha sido poco explotado. Tras una búsqueda en internet sobre libros o materiales que contengan o utilicen alguna técnica estereoscópica, especialmente la de los anaglifos, se localizaron los que se muestran a continuación:

1. Pál, I. (1959). *Térláttatós ábrázoló Mértan*. Hungría.
2. Schmidt, R. (1983). *Geometría Descriptiva con figuras estereoscópicas*. Ed. Reveté S.A. España.
3. Vuibert, H. (1912). *Les Anaglyphes Geometriques*. Librairie Vuibert. Paris.
4. Gliozzi, G. y Gliozzi, M. (1929). *Tavole di Anaglifi Geometrici*. Societa Editrice Internazionale. Italia.
5. Schörner E. (1977). *Darstellende Geometrie Konstruktions grundlagen für Studium und Praxis*. Ed. Carl Hansen Verlag. Alemania.
6. Herrera, F. (1920). *Álbum de Anaglifos Geométricos para el Estudio de la Geometría Métrica en el Espacio*. España.

Como se observa, la mayoría tratan de geometría descriptiva. Imágenes de sus portadas y de alguna de sus páginas se muestran en el Anexo A.

No obstante, la aplicación de la visión estereoscópica en la matemática es bastante amplia, debido a que existen diversas representaciones que tienen elementos tridimensionales, como son las relativas a superficies de sólidos de revolución, los cuerpos geométricos, los vectores y la geometría analítica en el



espacio, etc. Estas imágenes pueden ser apreciadas con una mayor sensación de profundidad y relieve si se utiliza la técnica de los anaglifos, como las mostradas en la Figura 14.

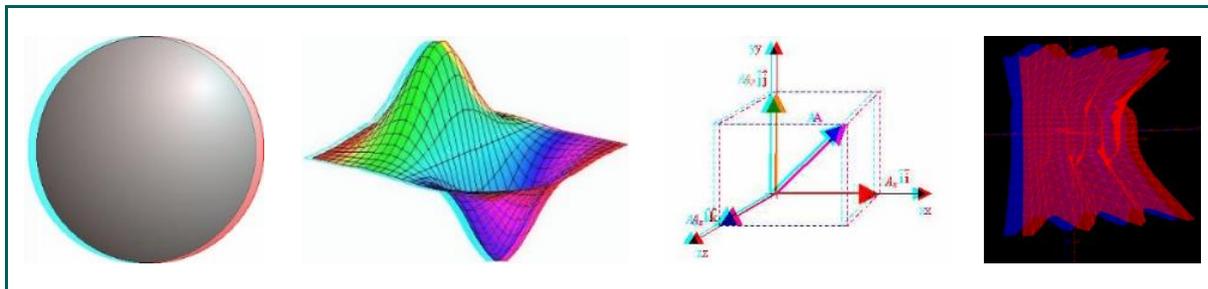


Figura 14. Anaglifos de diversas representaciones matemáticas.

5. GeoGebra y la Estereoscopia

Existen programas que tienen la capacidad de proyectar en el plano objetos de tres dimensiones. Estos incorporan señales de profundidad que permiten la comprensión del objeto en cuestión. Sin embargo, dichas señales pueden resultar limitadas en algunas representaciones.

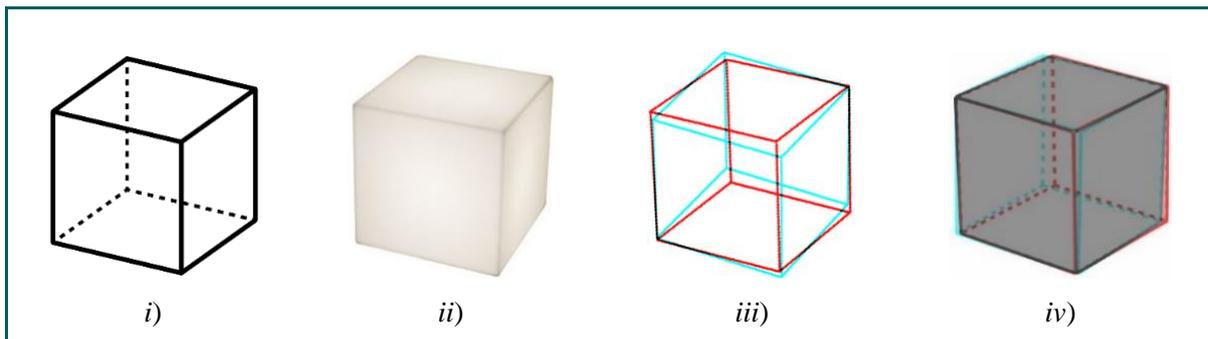


Figura 15. Cuatro representaciones tridimensionales de un cubo.

Para ejemplificar esta situación, en la Figura 15 se muestran cuatro representaciones tridimensionales de un cubo, cada una elaborada con un programa diferente. En las representaciones *i)* y *ii)* las señales de profundidad están dadas por las técnicas de tridimensionalidad denominadas perspectiva y sombreado respectivamente, siendo su sensación de profundidad insuficiente. Las representaciones *iii)* y *iv)* utilizan la técnica estereoscópica del anaglifo, dando una mayor sensación de profundidad y relieve. En particular, la representación *iv)* fue elaborada utilizando GeoGebra 5.0.

Al estudiar Geometría Euclidiana, más específicamente cuerpos geométricos y sus componentes, el alumno observa estos objetos matemáticos, ya sea en las páginas de libros de texto o en el pizarrón en dos dimensiones. Esto es, se le muestran objetos tridimensionales en forma bidimensional.

De acuerdo a Dos Santos (2012, p. 1) “con GeoGebra 5.0 el desarrollo de aplicaciones para la geometría en el espacio son, cada vez, más accesibles y rápidas de elaborar en el aula”. En la Vista Gráfica 3D (Figura 16) se pueden crear objetos tridimensionales que pueden utilizarse en la enseñanza de diversas áreas de las Matemáticas, destacando entre ellas la Geometría Euclídea en el espacio.

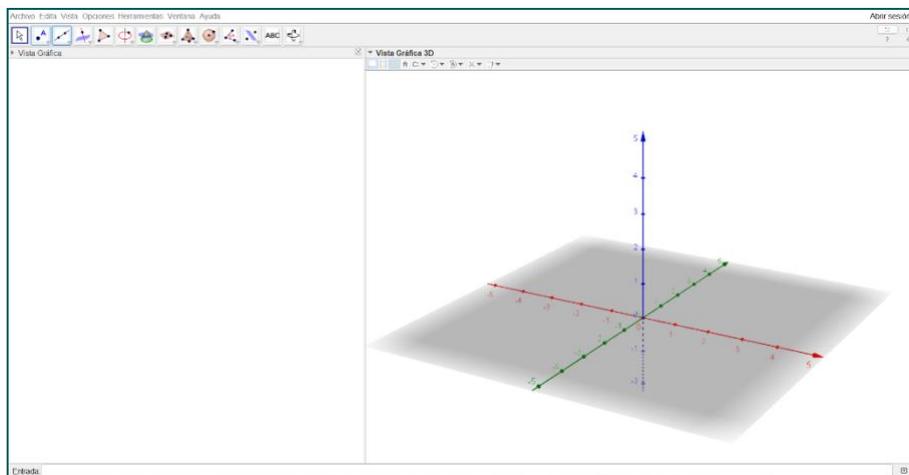


Figura 16. Vista Gráfica 3D de GeoGebra 5.0.

En cuanto a esta característica que tiene GeoGebra 5.0 se puede decir que:

“Constituye una herramienta importante para realizar y comprender estas construcciones geométricas, pues les muestra a los estudiantes visualizar las superficies y sólidos, desde una perspectiva, que enriquece la representación y sus conocimientos, propiciando el interés y motivación por esta temática, y contribuyendo a la resolución de problemas intramatemático y extramatemáticos”. (Estrada, et al., 2021, p. 133).

La Vista gráfica 3D contiene una barra de herramientas, denominada Barra de Estilo (Figura 17), que incluye diversas opciones para visualizar los objetos: Mostrar / Ocultar ejes, Mostrar / Ocultar Cuadrícula, Mostrar / Ocultar plano, Restaurar la vista estándar, Captura, Iniciar / detener la rotación de la vista, Dirección de la Vista, Cuadro de recorte, Tipo de Proyección.



Figura 17. Barra de Estilo de la vista Gráfica 3D de GeoGebra 5.0.

La opción Tipo de proyección (Figura 18) contiene los siguientes elementos: proyección paralela, proyección en perspectiva, proyección para lentes 3D y proyección oblicua. Estos se utilizan para proyectar los objetos tridimensionales de acuerdo a la representación gráfica elegida. En particular el elemento proyección para lentes 3D es el utilizado para generar y visualizar los objetos tridimensionales mediante la técnica estereoscópica de los anaglifos.

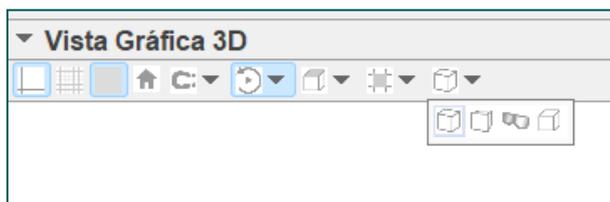


Figura 18. Elementos de la opción Tipo de Proyección.

Con respecto al uso de GeoGebra 5.0 y los anaglifos en relación a los cuerpos geométricos, se considera que:

“Ayudan en la visualización de sólidos y sus componentes y así facilitar el aprendizaje. La observación de cuerpos geométricos y sus componentes a través de los anaglifos facilita la comprensión de los mismos, porque además de los aspectos didácticos de la visión tridimensional es una tecnología que atrae a los estudiantes”. (Ferreira, 2016, p. 26).

Para que los anaglifos generados en la Vista Gráfica 3D de GeoGebra 5.0 en la  proyección para lentes 3D puedan ser apreciados y provocar el efecto y la sensación de profundidad y relieve deseado, son requeridas las gafas anaglíficas mencionadas anteriormente . En el anexo B se presenta la descripción de su fabricación de forma casera, pero si se quiere evitar el elaborarlas uno mismo, entonces se pueden adquirir en tiendas en línea por internet o en sitios dedicados a la venta de accesorios para fotografía.

En ocasiones se requiere ajustar la posición del anaglifo para obtener una mejor visualización, y para ello GeoGebra 5.0 proporciona una herramienta deslizante (deslizador) que puede variar algunos componentes del anaglifo.

A continuación, se muestran varias capturas de pantalla de algunos applets elaborados en GeoGebra 5.0 por los autores. Estos pueden ser utilizados para el aprendizaje del tema de las propiedades y características de diversos cuerpos geométricos, en particular del cubo, el cilindro recto, los prismas regulares y la pirámide.

En la Figura 19 se muestra una captura de pantalla del applet creado para el aprendizaje de los elementos y propiedades del cubo. Con el deslizador se puede ajustar la longitud de sus lados y resaltar el efecto de profundidad y relieve del anaglifo, al mismo tiempo que se actualizan los valores de sus elementos.

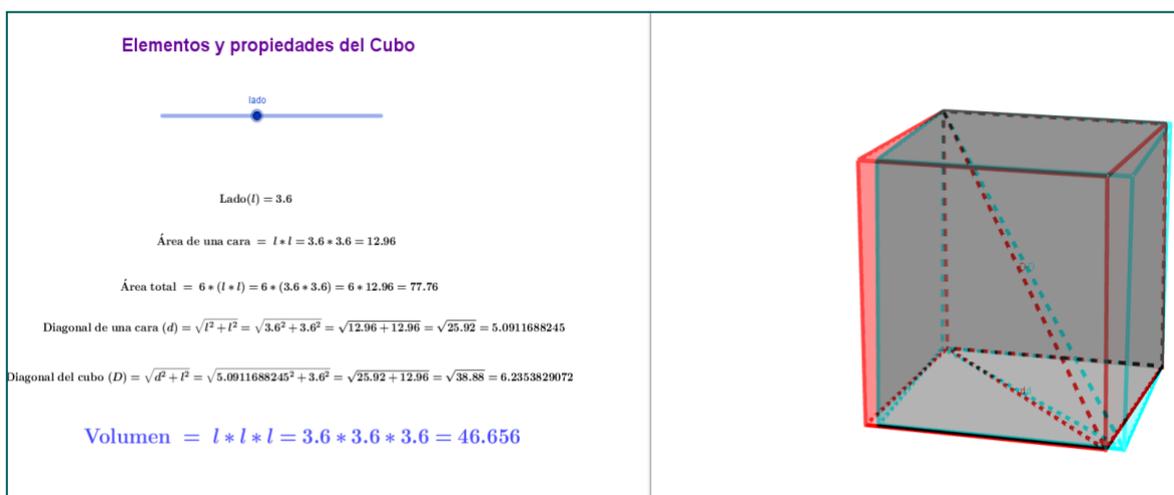


Figura 19. Applet elaborado en GeoGebra 5.0 sobre las propiedades y características del cubo.

En la Figura 20 se muestra una captura de pantalla del applet creado para el aprendizaje de los elementos y propiedades del cilindro recto. Con los deslizadores se pueden ajustar la longitud de la altura y la del radio y así resaltar el efecto de profundidad y relieve del anaglifo, al mismo tiempo se actualizan los valores de sus elementos.

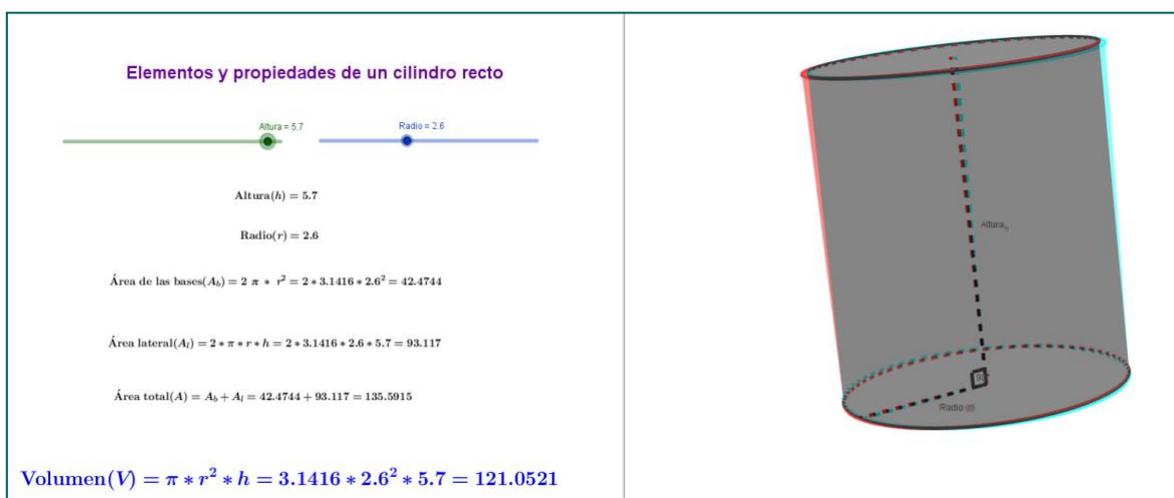


Figura 20. Applet elaborado en GeoGebra 5.0 sobre las propiedades y características del cilindro recto.

En la Figura 21 se muestra una captura de pantalla del applet creado para el aprendizaje de los elementos y propiedades de los prismas regulares. Con los deslizadores se pueden ajustar la cantidad de lados del prisma, la longitud del lado y la altura y resaltar el efecto de profundidad y relieve del anaglifo, de igual manera, se actualizan los valores de sus elementos.

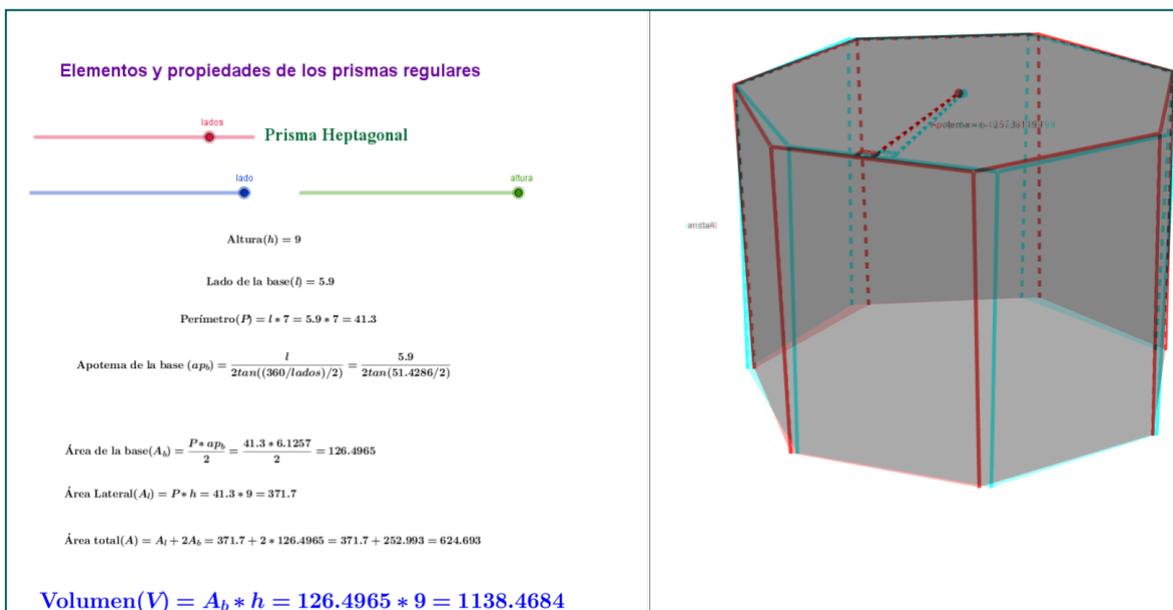


Figura 21. Applet elaborado en GeoGebra 5.0 sobre las propiedades y características de los prismas regulares.

En la Figura 22 se muestra una captura de pantalla del applet creado para el aprendizaje de los elementos y propiedades de la pirámide. Con los deslizadores se pueden ajustar la longitud de la altura y la del lado y resaltar el efecto de profundidad y relieve del anaglifo, al mismo tiempo se actualizan los valores de sus elementos.

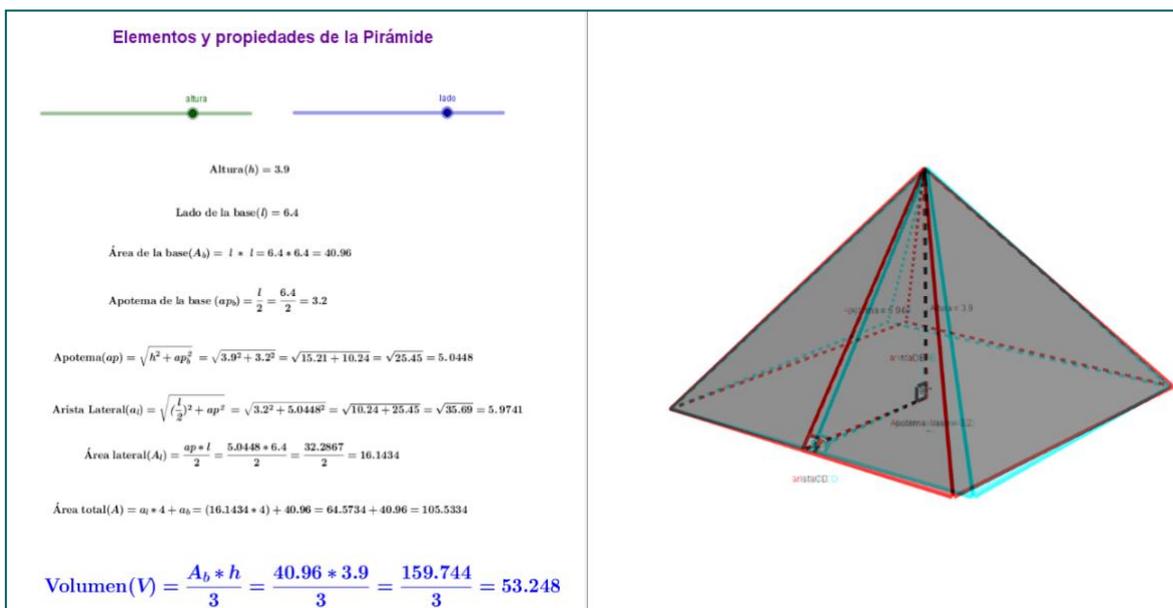


Figura 22. Applet elaborado en GeoGebra 5.0 sobre las propiedades y características de la pirámide.

6. Consideraciones finales

El uso de las nuevas tecnologías, más concretamente el uso de anaglifos combinado con el uso de GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas, puede, si se lleva a cabo correctamente, estimular al estudiante para hacer matemáticas y descubrir, a través de sus experiencias y simulaciones, relaciones y conceptos matemáticos importantes para su crecimiento. En particular, al analizar las propiedades y características de objetos ligados a la Geometría Euclídea, como las de los cuerpos geométricos, se puede conseguir que el alumno, incorporando esta experiencia visual, asimile mejor los contenidos de este tema.

La visualización de figuras tridimensionales que podrían ser un obstáculo se convierte en un elemento motivador para el aprendizaje, ya que el uso de anaglifos, además de ser efectivo, seduce al estudiante al incorporar una técnica con la que a menudo han tenido contacto a través de los videojuegos o el cine con visión estereoscópica.

Es natural en todo cambio que surjan algunas dificultades relacionadas con la adaptación a lo nuevo. La introducción de estas tecnologías en el aula no escapa a esta regla y puede traer problemas que el docente debe tener en cuenta, desde la logística necesaria para llevarlas a cabo hasta los relacionados con el tipo de recursos a utilizar y actividades a proponer, aspectos que deberán tenerse en cuenta a la hora de trabajar con este nuevo enfoque.

Finalmente, se puede decir que en Matemáticas el uso de representaciones estereoscópicas, en especial los anaglifos, es poco explotado aun cuando su aplicación puede ser bastante amplia. Si en otras esferas de la vida (Figura 23) se utilizan, bien valdría la pena experimentar con esta técnica y aprovechar su relación con las Matemáticas.



Figura 23. Uso de anaglifos en distintos ámbitos.

Bibliografía

- Cabezos, B. (2014). *Imágenes estereoscópicas aplicadas a la representación arquitectónica* [Tesis Doctoral]. Universidad Politécnica de Valencia.
- Cabezos, B. & Cisneros, J. (2015). *La estereoscopia en los libros de geometría descriptiva*. Universidad Politécnica de Valencia. DOI: <https://doi.org/10.4995/ega.2015.4058>

- Cuenca, J. (2018). *Análisis de Métodos de estereoscopia 3D en el ámbito de la animación* [Tesis de Maestría]. Universidad Politécnica de Valencia.
- Estrada, M., Nápoles, J. & Rojas, O. (2021). El uso de la opción 3D del GeoGebra en la disciplina de Geometría Analítica en la formación de profesores. *REMATEC*. 16 (38), 120-137.
- Dos Santos, J. (2013). *Introducción al GeoGebra 3D*. XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Diversidad y Matemáticas, Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Granada.
- Ferreira, E. (2016). *Anaglifos: Geometría espacial desde otra perspectiva* [Tesis de Maestría]. Universidad Federal de Bahía.
- Ramírez, I. (2008). *Sistema de visión estereoscópica basado en anaglifo para aplicaciones de realidad virtual* [Tesis de Maestría]. Instituto Politécnico Nacional Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo.

Webgrafía

- Martín S., Suárez J., Rubio R. & Gallego R. (2004). Aplicación de los sistemas de visión estereoscópica en las enseñanzas técnicas [en línea]. Recuperado el 10 de noviembre de 2021, de https://www.researchgate.net/publication/228779560_Aplicacion_de_los_sistemas_de_vision_estereoscopica_en_las_ensenanzas_tecnicas.

Anexo A

En las Figuras 24 a 29 se muestran la portada y una página de algunos libros encontrados en internet que utilizan la técnica estereoscópica de anaglifos.

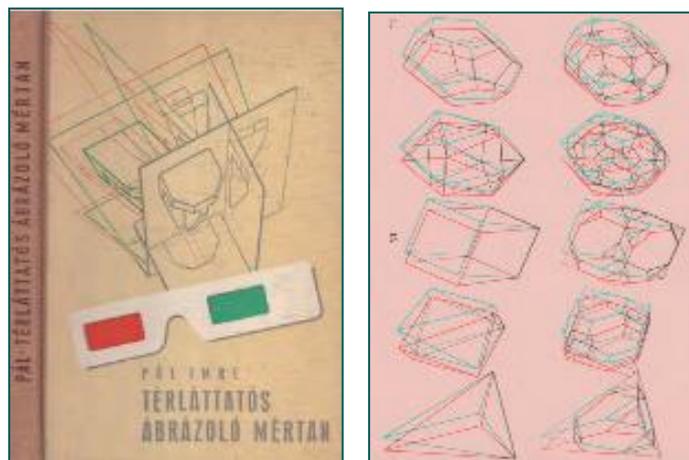


Figura 24. Portada y página del libro Térláttatós ábrázoló Mértan.¹¹

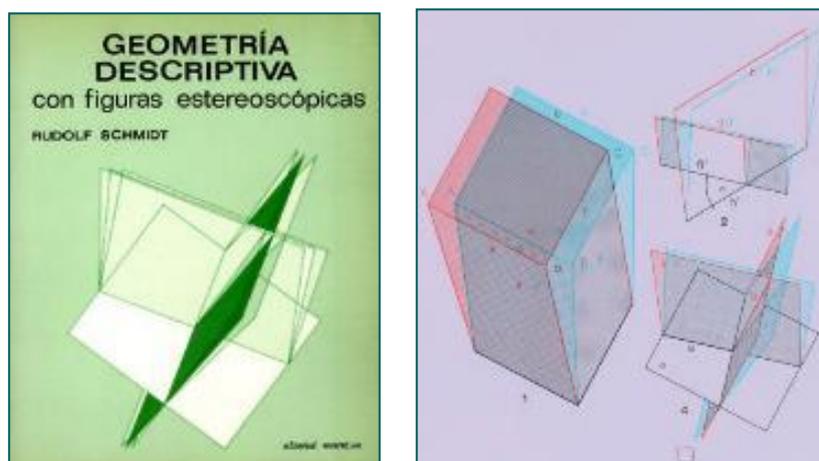


Figura 25. Portada y página del libro Geometría Descriptiva con figuras estereoscópicas.¹²

¹¹ <https://www.libri.hu/konyvek/tudomany-es-termeszet/matematika/>

¹² <https://www.libreriacentral.com/Geometría-descriptiva-con-figuras-estereoscópicas-9788429151350.libro>

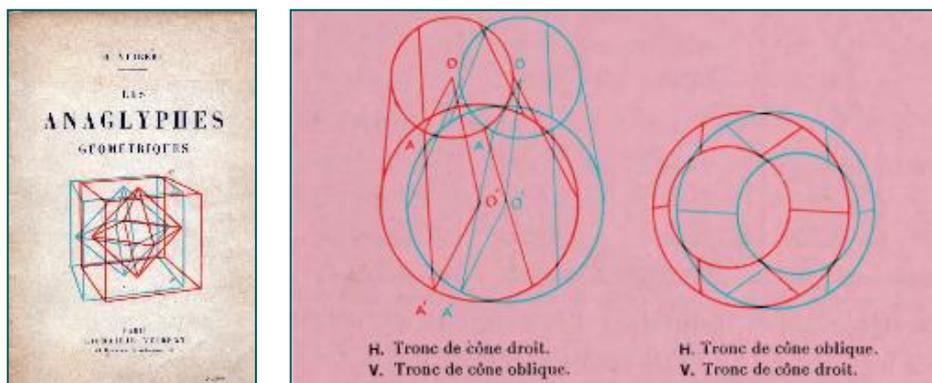


Figura 26. Portada y página del libro Les Anaglyphes Geometriques.¹³

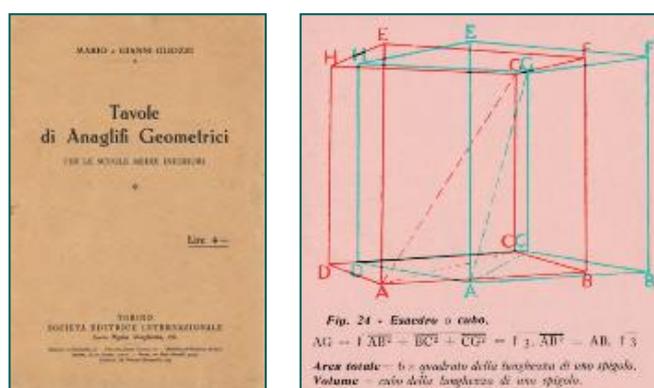


Figura 27. Portada y página del libro Tavole di Anaglifi Geometrici.¹⁴

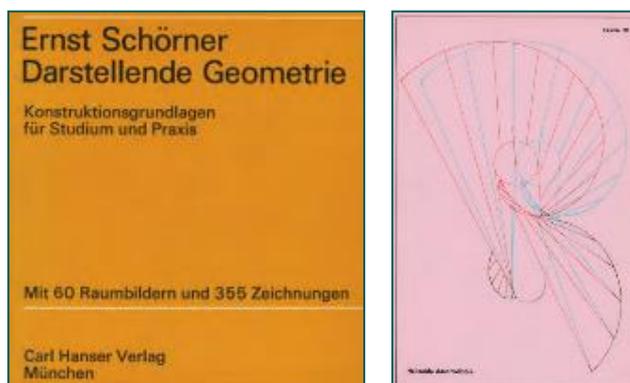


Figura 28. Portada y página del libro Darstellende Geometrie Konstruktions grundlagen für Studium und Praxis.¹⁵

¹³ <https://www.antiq-photo.com/en/collections/museum/photographs/les-anaglyphes-geometriques-h-vuibert/>

¹⁴ <https://picclick.it/Tavole-Di-Anaglifi-Geometrici-Mario-E-Gianni-Gliozzi-373661814212.html>

¹⁵ <https://www.booklooker.de/Bücher/Angebote/>

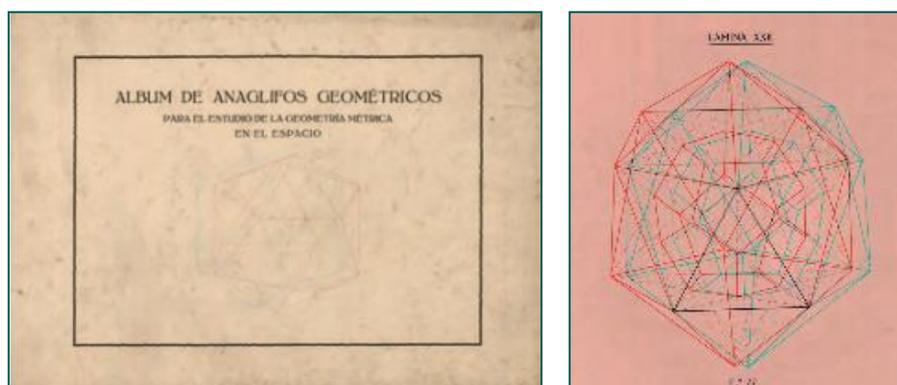


Figura 29. Portada y página del libro Álbum de Anaglifos Geométricos para el Estudio de la Geometría Métrica en el Espacio. (Cabezos y Cisneros, 2015)

Anexo B

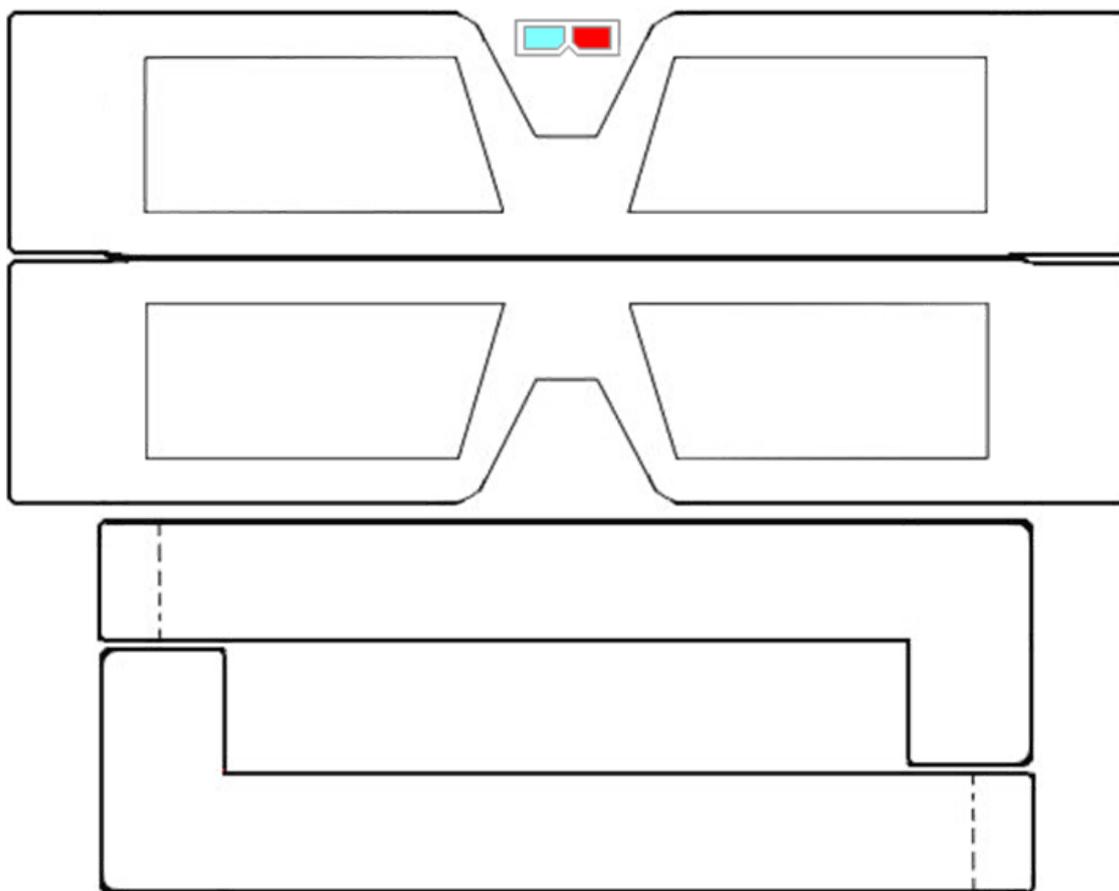


Figura 20. Molde para elaborar gafas anaglíficas.

La elaboración de las gafas anaglíficas es un procedimiento sencillo y económico. Los materiales requeridos son cartulina, papel celofán rojo y azul (también se puede utilizar mica delgada), pegamento y tijeras. Los pasos para su fabricación son los siguientes:

1. Recortar la cartulina en hojas tamaño carta.
2. Imprimir en la cartulina el molde de la figura 20 o uno similar que se descargue de internet.
3. Recortar los dos colores del papel celofán de manera que se ajusten al molde. No cortarlos justo, es necesario dejar un poco de espacio para poder pegarlo.
4. Pegar los papeles recortados en la cartulina recordando que el color rojo va en lado izquierdo y el azul en el derecho.
5. Doblar y pegar el molde por la mitad.
6. Doblar y pegar el extremo de cada una de las patillas.

Listo, ya se tienen las gafas anaglíficas para visualizar en 3D.

José Francisco Villalpando Becerra. Profesor Titular de matemáticas y computación en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Guadalajara, Guadalajara, México. Maestro en Sistemas de Información y Lic. en Matemáticas por la Universidad de Guadalajara, México. Autor de varios libros de Matemáticas y de diversos artículos sobre la Enseñanza de las Matemáticas con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación.

Email: francisco.villalpando@academicos.udg.mx.

María José Aceves Sepúlveda. Profesora de matemáticas en el Departamento de Ciencias Exactas y Terrestres de la Universidad Autónoma de Guadalajara, Zapopan, México. Maestra en Enseñanza de las Matemáticas y Lic. en Matemáticas por la Universidad de Guadalajara, México. Autora de varios artículos sobre la Enseñanza de las Matemáticas con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación.

Email: marijo_aceves@hotmail.com.