NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 112, noviembre de 2022, páginas 119-143

Los problemas de geometría
Problemas Comentados LXI

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Soluciones a los problemas de geometría planteados en el artículo anterior mediante los métodos de *Organización de la Información* y *Modelización,* con aportaciones de nuestros lectores y compañeros. Problemas adecuados para los niveles de Primaria y Secundaria. Uso de diagramas, tablas de doble entrada y materiales manipulables en los procesos de solución. Geoplano. Propiedades de las figuras geométricas. Laberintos de rectángulos, problema de Mondrian y método de resolución para estos problemas. Reseña de *José Paulo Viana* y su sección *O problema deste número* de la revista lusitana *Educaçao e Matemàtica.* Más problemas sobre cálculo de aristas, diagonales y superficies de figuras geométricas.

Palabras clave Métodos de resolución de problemas. Problemas, Primaria, Secundaria, Geometría

Abstract Solutions to the geometry problems raised in the previous article through the methods of *Information Organization and Modeling*, with contributions from our readers and colleagues. Problems suitable for Primary and Secondary levels. Use of diagrams, double-entry tables and manipulable materials in the solution processes. Geoboard. Properties of geometric figures. Mazes of rectangles, Mondrian problem and resolution method for these problems. Review of *José Paulo Viana* and his *O problema deste número* section of the Portuguese magazine *Educaçao e Matemàtica.* More problems on the calculation of edges, diagonals and surfaces of geometric figures.

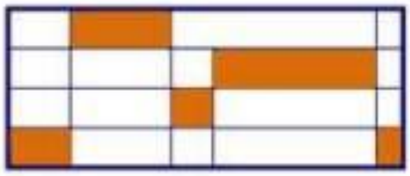
Keywords Solving problem methods, Problems, Primary, Secondary, Geometry.

Con los retos del artículo anterior decidimos que hicieran referencia a la **geometría**. Los problemas presentados procedían de un sitio web denominado “Sobre todo matemáticas…” y cuya dirección es https://matemelga.wordpress.com/ . Entre otros problemas de geometría que aparecen allí hemos seleccionado los siguientes. Sus soluciones han sido aportadas por nuestros lectores habituales y amigos.

Las soluciones de los tres primeros han sido aportadas por Francisco Morales, amigo lector y colaborador de esta sección.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, profesores jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

PARTE COLOREADA



Suponiendo que todos los ángulos que aparecen son rectos y que las líneas horizontales están igualmente separadas, **¿qué fracción de área de la figura es la coloreada**?

Proceso de Resolución:

COMPRENDER

Datos. Hay una figura rectangular dividida a su vez en rectángulos menores. Hay 5 que están coloreados.

Objetivo. Averiguar la fracción de figura que está coloreada.

Relaciones. Todos los ángulos son rectos y las líneas horizontales están separadas a la misma distancia.

Diagrama. El que ofrece el problema.

PENSAR

Organización de la Información

Modelización

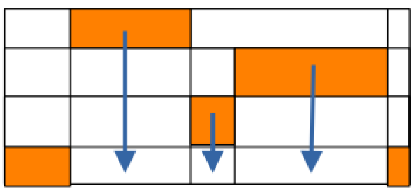
EJECUTAR

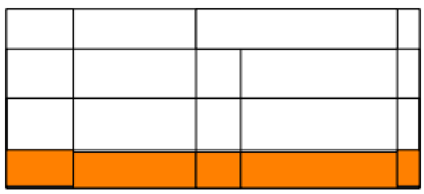
Organizar la información fijándonos en las columnas.

Columna 1ª, hay ¼ coloreado.
Columna 2ª, hay ¼ coloreado.
Columna 3ª, hay ¼ coloreado.
Columna 4ª, hay ¼ coloreado.
Columna 5ª, hay ¼ coloreado.

} ¼ del total es de color naranja

Por modelización, si recortamos los cuadriláteros, y desplazamos los de color naranja hacia la fila inferior, completarían toda esta fila, y dado que las líneas horizontales están a la misma separación, esto supone ¼ de la figura.





RESPONDER

Comprobamos con cualquiera de las estrategias empleadas que la superficie corresponde a un cuarto de la figura, o a una fila completa.

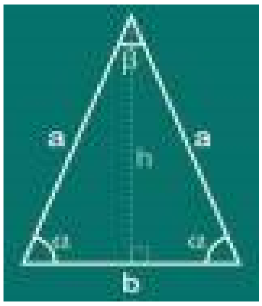
La solución es única.

La fracción de área coloreada es ¼ de la figura principal.

TRIÁNGULOS ISÓSCELES

¿Cuántos triángulos isósceles distintos, de 25 cm de perímetro, pueden construirse si cada lado mide un número natural de centímetros?

Proceso de Resolución:



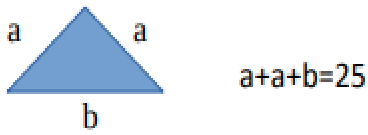
COMPRENDER

Datos. Los triángulos deben ser isósceles, el perímetro será de 25 cm.

Objetivo. Saber la cantidad de triángulos diferentes que se pueden hacer.

Relaciones. Dos lados deben tener la misma longitud, la suma de los 3 lados será de 25 cm, uno de los lados siempre será menor que la suma de los otros dos.

Diagrama



PENSAR

Organización de la información, Modelización

EJECUTAR: Organizar la información en una tabla

Lados iguales	Lado diferente	Suma	Control
5 - 5	15	25	No cumple la relación
6 - 6	13	25	No cumple la relación
7 - 7	11	25	Correcto
8 - 8	9	25	Correcto
9 - 9	7	25	Correcto
10 - 10	5	25	Correcto
11 - 11	3	25	Correcto
12 - 12	1	25	Correcto
13 – 13			Sobrepasa la medida

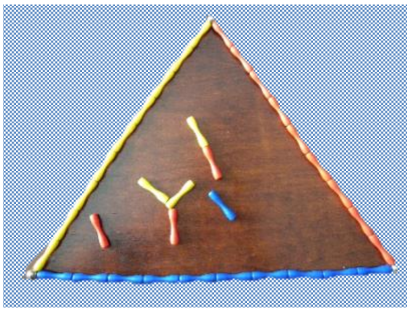
Otro enfoque:

Si damos valores al lado que es diferente ***b***, estos han de ser impares para que al restarlos de 25 nos dé un número par y, por tanto, divisible en dos valores iguales que serán los lados ***a*** buscados. Además el lado ***b*** no puede ser superior a la mitad del perímetro de 25 cm: ***b*** impar y ***b*** < 12,5.

Con todo ello, los triángulos posibles tendrán para ***b*, *a*** y ***a*** los siguientes ternas de valores:

(1, 12, 12), (3,11,11), (5, 10, 10), (7, 9, 9) y ((11, 7, 7)

Por modelización, pueden usarse 25 varillas imantadas, y construir un triángulo cualquiera isósceles. Si tomamos la base como el lado desigual, iremos aumentando/disminuyendo la longitud de la base de 2 en 2 varillas para formar todas las posibilidades.



La relación de que uno de los lados siempre será menor que la suma de los otros dos será fácil de ver, puesto que, si ponemos la base de 13 varillas, los lados iguales de 6 varillas no llegarán a unirse en el tercer vértice.

RESPONDER

<u>Comprobar</u> - Se comprueba en la tabla que son todos isósceles y que sus tres lados suman 25

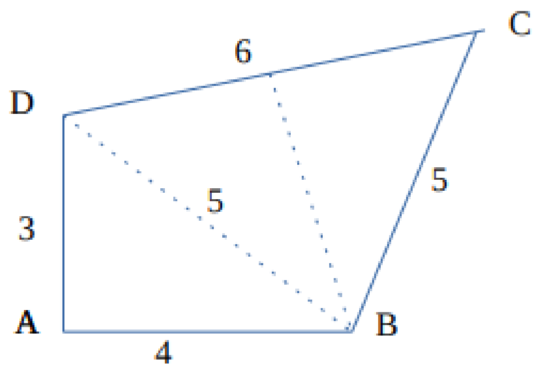
<u>Analizar</u> - Hay varias posibilidades

Hay 6 posibilidades de construir triángulos isósceles de perímetro 25 cm:

7–7–11; 8–8– 9; 9–9–7; 10–10–5; 11–11–3; 12–12–1.

ÁREA DEL CUADRILÁTERO

El cuadrilátero *ABCD* tiene *AB* = 4, *BC* = 5, *CD* = 6, *DA* = 3 y $\widehat{DAB}$ = 90º.
Determina el área del cuadrilátero *ABCD*



Proceso de Resolución:

COMPRENDER

Datos. Hay un cuadrilátero, el lado AB mide 4, el lado BC mide 5, el lado CD mide 6, el lado DA mide 3, el ángulo DAB mide 90º.

Objetivo. Calcular el área del cuadrilátero

Relaciones. El área total del cuadrilátero se puede calcular como la suma de las áreas parciales de los triángulos que se forman en su interior. Si hay dos lados de 3 y 4 cm formando un ángulo de 90º, se forma un triángulo rectángulo. El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

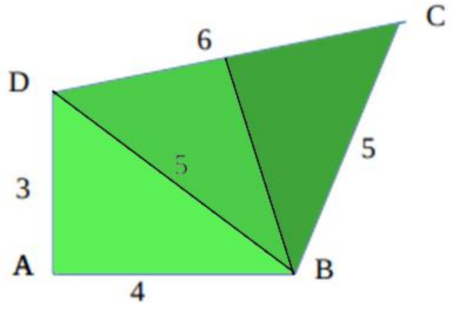
Diagrama

PENSAR

Modelización

EJECUTAR

El triángulo BAD forma una terna pitagórica, por lo que la hipotenusa valdrá 5.



Al representar el dibujo, se forman tres triángulos iguales, de lados 3, 4 y 5.

El área de cada uno es 3x4/2 = 6 cm², por lo tanto el cuadrilátero tendrá 18 cm².

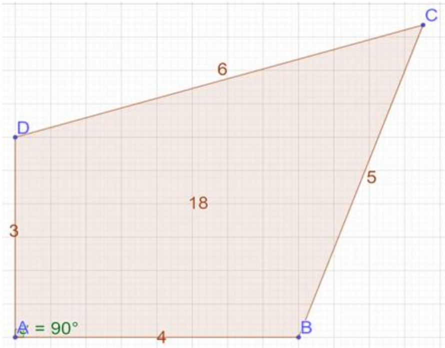
RESPONDER

Comprobar. Puede hacerse la figura en geogebra para comprobar toda la información que da el problema

Analizar. Solución única

El área del cuadrilátero es de 18 cm²

Los siguientes son una reelaboración de nuestro equipo a partir de las soluciones presentadas en la propia web mencionada.



ÁREAS

Un rectángulo está dividido en 9 pequeños rectángulos. En la figura se indican los valores de las áreas de tres de ellos.
¿Cuál es valor del área del rectángulo azul en la esquina inferior derecha?

Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos

Un rectángulo. Dividido en 9 rectángulos más pequeños. Conocemos las áreas de tres de ellos: 8, 12 y 18 unidades cuadradas.

Objetivo

Averiguar el valor del área del rectángulo azul de la esquina inferior derecha.

Relación

Los rectángulos pequeños se han formado al trazar dos rectas paralelas al lado largo del rectángulo y otras dos paralelas al lado corto del mismo. Segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.

Diagrama

El que acompaña al problema.

PENSAR

Estrategias

Organizar la Información

EJECUTAR

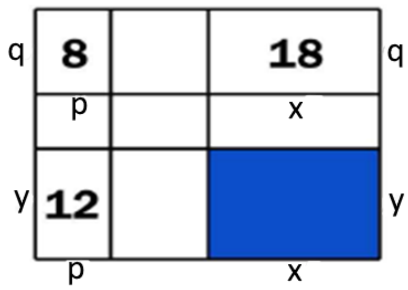
Organizaremos la información disponible más el conocimiento de áreas que tenemos y utilizaremos una técnica algebraica.

Cada rectángulo pequeño tiene dos dimensiones desconocidas, pero de las que sabemos que algunas son iguales entre sí por la propiedad de las rectas paralelas indicada en la relación.

Al rectángulo de la esquina superior izquierda daremos magnitudes ***p, q***.

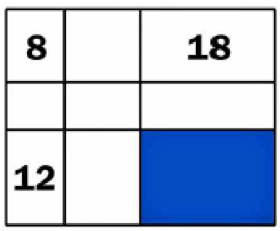
Al rectángulo de la esquina superior derecha daremos magnitudes ***x, q.***

Al rectángulo de la esquina inferior izquierda daremos magnitudes ***p, y.***



Al rectángulo de la esquina inferior derecha daremos magnitudes ***x, y***.

Como sabemos también que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su largo por su ancho, tendremos:



$p{\cdot}q = 8$ $\quad x{\cdot}q = 18$ $\quad p{\cdot}y = 12$

La superficie que debemos calcular es $x{\cdot}y$.

Si multiplicamos los valores de las tres áreas conocidas, obtenemos:

$$p{\cdot}q{\cdot}x{\cdot}q{\cdot}p{\cdot}y = 8\cdot 18\cdot 12 \rightarrow xy\cdot(pq)^2 = 1728 \qquad x{\cdot}y = 1728/(p{\cdot}q)^2$$

De donde: $x{\cdot}y = 1728/64 = 27$

También podíamos habernos dado cuenta de que multiplicando las dos mayores y dividiendo por la menor se podía obtener el valor de $x·y$:

$x·y = (x·q·p·y) / (p·q) = 18·12 / 8 = 27$

<u>Solución</u>

En cualquier caso, obtenemos un área de 27 u^2.

RESPONDER

<u>Comprobación</u>

A partir de la figura podemos conjeturar descomposiciones enteras de los valores de las áreas con el fin de obtener los valores compartidos entre 8 y 12 (el factor 4) y entre 8 y 18 (el factor 2).

Eso hace que los valores de los lados de los rectángulos sean: 2 x 4 = 8; 4 x 3 = 12; 2 x 9 = 18. De donde deducimos que el cuarto rectángulo ha de ser 3 x 9 = 27.

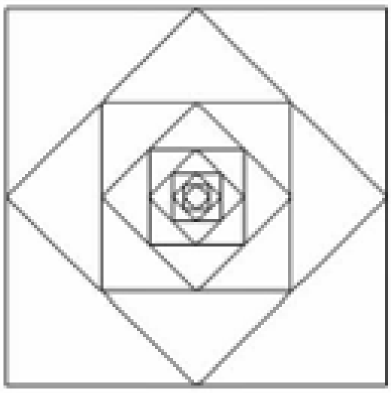
<u>Análisis</u>

La solución es única.

El valor del área del rectángulo azul situado en la esquina inferior derecha del rectángulo original es de 27 unidades cuadradas.

CUADRADOS ENCAJADOS

Consideramos un cuadrado de lado 8.
Al unir los puntos medios de cada par de lados adyacentes obtenemos un segundo cuadrado y si continuamos así, uniendo los puntos medios de los lados adyacentes de cada cuadrado dibujado, obtenemos un nuevo cuadrado.
¿Cuál es el área del sexto cuadrado construido?



Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos

Un cuadrado de lado 8.

Uniendo los puntos medios de cada par de lados adyacentes del cuadrado inicial obtenemos un segundo cuadrado. Continuando de igual forma, uniendo los puntos medios de los lados adyacentes de cada cuadrado dibujado, obtenemos un nuevo cuadrado.

Objetivo

Calcular el área del sexto cuadrado construido.

Relación

El lado de cada cuadrado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles donde el cateto es la mitad del lado del cuadrado anterior.

Diagrama

El que acompaña al problema

Hoja de papel de forma cuadrada para plegar

PENSAR

Estrategias

Organizar la Información

Modelización

EJECUTAR

El proceso de construcción es siempre el mismo. Llamando ***a*** a la longitud del lado de uno cualquiera de los cuadrados observamos que el lado del siguiente cuadrado es el valor de la hipotenusa del triángulo formado por dicho lado y como catetos las mitades de los lados del cuadrado anterior. Utilizando el teorema de Pitágoras podemos calcular el valor de esa hipotenusa:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2\times\frac{a^2}{4}}=\frac{a\times\sqrt{2}}{2}$$

Es decir, tenemos el lado del nuevo cuadrado.

Podemos ahora calcular la superficie de dicho cuadrado de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a\times\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2},$$

O sea, que obtenemos como valor del área del nuevo cuadrado la mitad de la superficie del cuadrado anterior.

Para obtener el área del sexto cuadrado construido, procederemos así.

Las áreas de cada cuadrado forman una progresión geométrica de razón r = 1/2, y como el área del primer cuadrado es $8^2 = 64$, la superficie del sexto cuadrado es

$$64 \text{ x } r^5 = 64 \text{ x } (1/2)^5 = 64 \text{ x } (1/32) = 64/32 = 2 \text{ u}^2$$

Solución

2 unidades cuadradas

RESPONDER

Comprobación

Sobre un modelo en papel será fácil hacer una comprobación sencilla.

Análisis

Mediante la modelización con papel se puede obtener de manera inmediata la relación entre el tamaño de un cuadrado y del siguiente.

Se toma un papel de forma cuadrada y se doblan sus vértices hacia el centro del cuadrado, siguiendo las líneas diagonales del mismo. De esa manera tan intuitiva se encuentra que cada nuevo cuadrado tiene un área que es la mitad de la del cuadrado anterior:

Primer cuadrado:	$A = 8^2 = 64$
Segundo cuadrado:	A = 64/2 = 32
Tercer cuadrado:	A = 32/2 = 16
Cuarto cuadrado:	A = 16/2 = 8
Quinto cuadrado:	A = 8/2 = 4
Sexto cuadrado:	A = 4/2 = 2

Esta manera de proceder se podría también utilizar en lugar de recurrir a las progresiones geométricas, en el caso de que los alumnos no hayan aprendido aún esos conceptos.

La solución es única.

RESPUESTA: **El área del sexto cuadrado construido es de 2 unidades cuadradas.**

Acerca de la resolución de problemas de Geometría hay algunas aproximaciones y sugerencias metodológicas desde los años ochenta. Son el fruto del trabajo conjunto de profesores de la Escuela de Magisterio de La Laguna y profesores en activo en algunos Colegios de Santa Cruz de Tenerife y La Laguna, constituidos en Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas, bajo la dirección del profesor Martín Socas Robayna.

Algunas de las ideas que aún hoy pueden servirnos para encarar con nuestros alumnos la resolución de problemas geométricos son las siguientes:

La Geometría nos ofrece la oportunidad de enseñar a resolver problemas y enseñar resolviendo problemas. En los primeros niveles, la resolución es gráfica o manipulativa, obligando al alumno a ir por otros caminos que no incluyen forzosamente el uso de fórmulas u operaciones. Los aspectos visuales de muchos problemas geométricos ayudan a desarrollar la habilidad para conseguir el razonamiento deductivo formal.

La metodología a utilizar surge de las dificultades que los alumnos encuentran en la resolución de problemas. Estas dificultades se pueden resumir en: falta de comprensión, vocabulario inadecuado, situaciones no familiares, no diferenciación de las informaciones, dificultad para reconocer la estrategia a seguir, dificultad para captar cual es el conocimiento adecuado para aplicar o no discriminación acerca de si la solución obtenida es o no correcta con la información recibida.

Hay varios modelos posibles para plantear la resolución de problemas, siendo lo más adecuado combinar la estrategia general sugerida por G. Polya, las etapas del aprendizaje señaladas por Van Hiele, el método científico y el uso de heurísticos específicos o estrategias.

Desde la Educación Infantil, el niño puede crear o copiar patrones con su material manipulativo. El uso de modelos, tanto físicos como gráficos, es de los heurísticos más utilizados y en los primeros niveles resulta imprescindible que la resolución de cualquier problema comience de forma manipulativa.

El Geoplano es un modelo que ayuda a realizar razonamientos que incidirán en la resolución de problemas. Incluso problemas aritméticos pueden ser resueltos a partir de sus versiones geométricas. Por ejemplo, ciertas propiedades de los números (tales como primo y compuesto) o relaciones entre los números (factor, divisor o múltiplo) pueden ser dibujadas con ejercicios en el Geoplano.

Geoplano. Gobierno de Canarias. Recursos

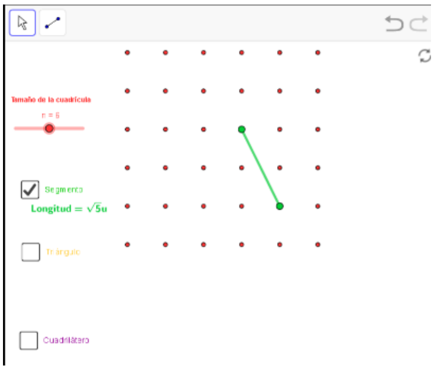
La metodología apropiada para introducir esta manera de trabajar en el aula ha de pasar por:

1) Motivar, proponiendo problemas reales y realistas sacados de la vida real y del entorno del niño o problemas imaginarios que sean atractivos para los niños.

2) Trabajar indistintamente varios "modelos" mediante el planteamiento de problemas más variados.

3) Llegar a la automatización del modelo mediante el razonamiento analógico y no sólo mediante la repetición.

Problemas exclusivamente de Medida, no. Implicar siempre la Geometría como punto de partida. La aritmética y el álgebra son técnicas que habrá que aplicar, pero sobre todo deben realizarse problemas de geometría pura, problemas estáticos y también dinámicos.



El dibujo geométrico es importante (estático). Pero después deberá llegarse a utilizar de manera común las herramientas como Geogebra (dinámico). El uso de Geogebra ha de ser un elemento de comprensión, de búsqueda de la solución y de comprobación de los resultados. Aunque en muchos casos se habrá de buscar después la solución numérica exacta.

Y ahora vamos con los problemas de geometría de otro sitio web importante. Se trata de **Puzzle Library**. Esta es la dirección: https://www.puzzleoftheweek.com/puzzle-library

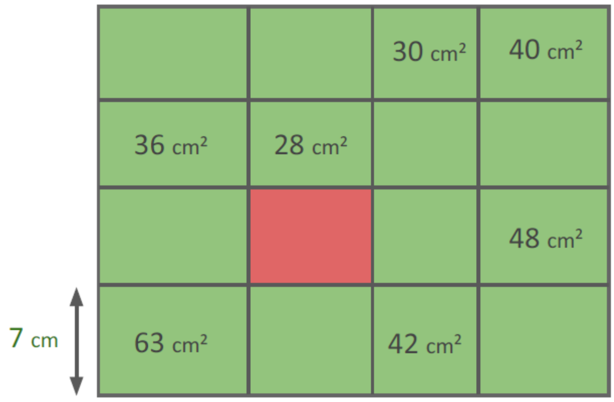
Es, fundamentalmente, un concurso para alumnos y colegios en la que se propone un problema por semana durante todo el curso. De ahí el nombre:

PUZZLEOFTHEWEEK

© 2022 A Sharpe Education

Está creada por Andrew Sharpe y funciona desde 2016. También aparecen las soluciones de los problemas propuestos, así como algunas sugerencias de ampliación del aspecto matemático tratado en el problema. Veamos un ejemplo:

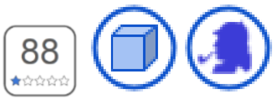
Puzzle nº 088. El Puzle del área de la zona



El diagrama no está a escala.

¿Cuál es el área del rectángulo rojo?

Ampliación: Pruebe más laberintos de área en el libro de Naoki Inaba (The Original Area Mazes) o en areamaze.com

Clasificación: 

Con estos símbolos representan gráficamente las características del problema. En este caso: Problema 88, con poca dificultad, de geometría y lógica.

Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos

Un rectángulo dividido en dieciséis rectángulos más pequeños, mediante el trazado de tres rectas paralelas al lado largo y otras tres paralelas al lado corto.

Conocemos las áreas de siete de ellos: 30, 40, 36, 28, 48, 63 y 42 cm^2, respectivamente.

Objetivo

Calcular el área del rectángulo rojo.

Relación

Los rectángulos pequeños se han formado al trazar dos rectas paralelas al lado largo del rectángulo y otras dos paralelas al lado corto del mismo. Segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.

<u>Diagrama</u>

El que acompaña al problema.

PENSAR

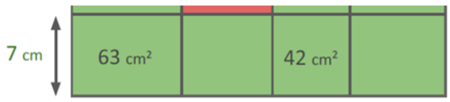
<u>Estrategias</u>

Organizar la Información

EJECUTAR

Este problema se puede resolver encontrando la anchura y la longitud de los rectángulos más pequeños. No podemos encontrarlos todos de inmediato, pero los diagramas siguientes muestran cómo podemos encontrarlos. En cada diagrama se han utilizado los rectángulos azules para calcular las nuevas longitudes (azules). Saber el orden en que deben calcularse las distintas dimensiones es lo que llamamos Organizar la Información. El razonamiento que sigue a continuación se ilustra en las imágenes posteriores.

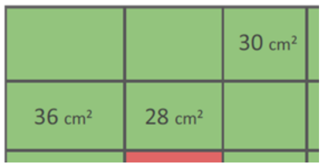
Para los rectángulos de 63 y 42, podemos ver de inmediato que, en sus descomposiciones posibles en dos factores, aparece en ambos el 7.



63 = 7 x 9   y   42 = 7 x 6

Eso nos permite determinar como 7 cm la longitud de su lado vertical y como 9 cm y 6 cm las longitudes de sus lados horizontales.

Ahora podemos trabajar en los rectángulos que se encuentran en las mismas columnas que ellos: 30 y 36. En ambos conocemos el valor del lado horizontal y, por lo tanto, podemos calcular el valor del lado vertical.



30 = 6 x 5   y   36 = 9 x 4

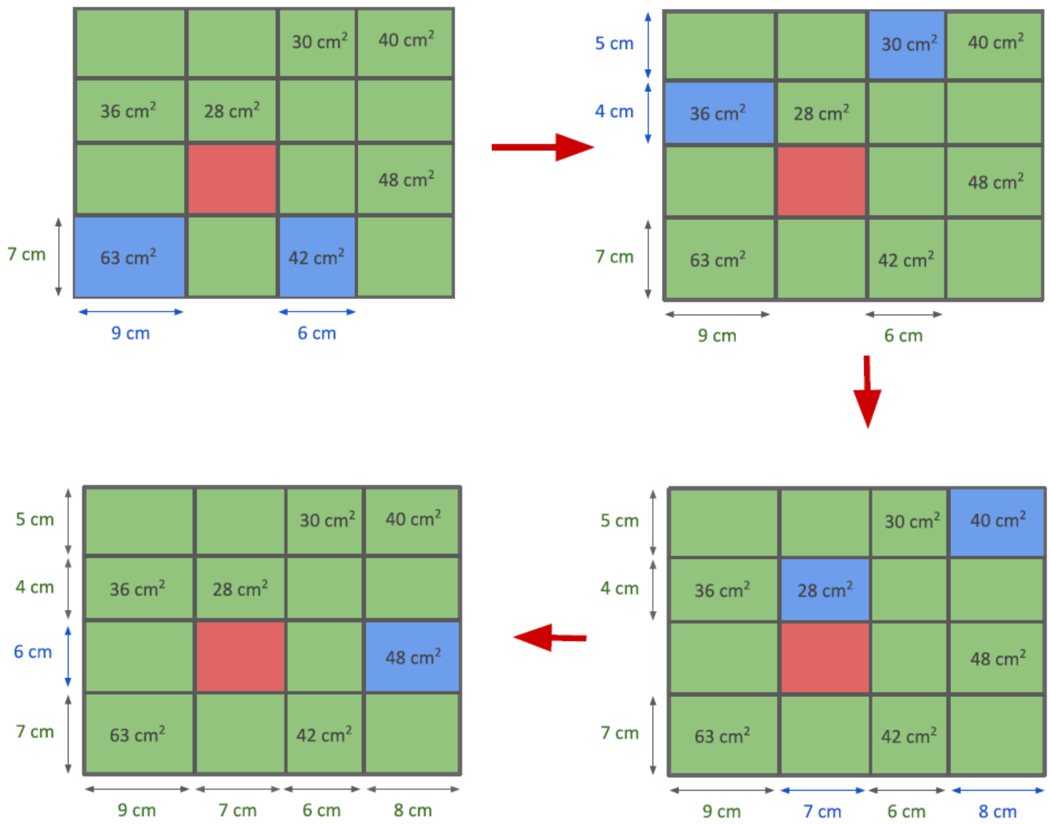
De donde determinamos los valores de sus lados verticales: 5 cm y 4 cm, respectivamente.

A continuación, pasamos a realizar el mismo razonamiento con los rectángulos de 40 y 28, puesto que en ambos conocemos sus lados verticales: 5 y 4, respectivamente.

40 = 5 x 8 y 28 = 4 x 7

Sus lados horizontales miden 8 cm y 7 cm, respectivamente.

Falta trabajar finalmente con el rectángulo de 48 cm^2 de área. De él conocemos el valor de su lado horizontal (8 cm) y el valor de su lado vertical se deducirá del valor de su área: 48 = 8 x 6.



Ahora tenemos la longitud y la anchura del rectángulo rojo (lado horizontal 7 cm; lado vertical 6 cm) y podemos encontrar su área: 7 cm x 6 cm = 42 cm^2.

<u>Solución</u>

42 cm^2

RESPONDER

<u>Comprobación</u>

Como ahora se conocen todos los tramos que separan las rectas paralelas entre sí, podremos hallar el área del rectángulo original y cada una de las áreas de los rectángulos pequeños, comprobando mediante una suma la corrección de los cálculos realizados.

22 x 30 = 660 cm^2 para el rectángulo original

(45 + 35 + 30 + 40) + (36 + 28 + 24 + 32) + (54 + 42 + 36 + 48) + (63 + 49 + 42+ 56) =

= 150 + 120 + 180 + 210 = 660 cm^2 para la suma de los dieciséis rectángulos interiores

Análisis

Solución única

Respuesta: **El área del rectángulo rojo es de 42 cm^2.**

Las soluciones de los problemas de esta web suelen traer, además de la solución, algunas recomendaciones de lecturas o actividades para profundizar en el tema objeto del problema.

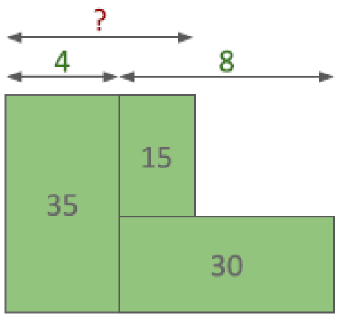
Veamos un ejemplo con el problema que acabamos de resolver.

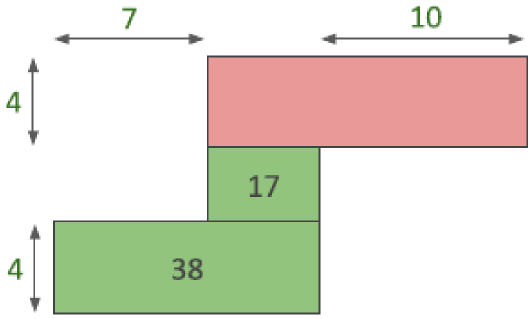
"Para profundizar

Como se indica en el propio problema, este tipo de problema fue diseñado por Naoki Inaba. Tiene dos libros excelentes llenos de laberintos de área que empiezan muy fácil y se ponen muy difíciles. Son libros fantásticos y no puedo dejar de recomendarlos, se llaman **Area Mazes** y **Area Mazes 2**.

Un par de laberintos de área realizados inspirándose en el libro de Naoki Inaba.

Encuentra la longitud marcada con interrogación (**?**) y el área del rectángulo rojo. Los diagramas no están a escala.





El problema que se acaba de resolver es bastante parecido al que resolvimos anteriormente y que tenía por nombre **Áreas**. Allí utilizamos una técnica algebraica especial que se denomina **Método de Mondrian**.

Por lo tanto, es fácilmente comprensible que se puede aplicar dicha técnica a este último **Puzzle 088**. Se procede así:

Primero asignamos incógnitas a los distintos segmentos horizontales y verticales sobre el diagrama del problema. Vemos que el rectángulo rojo que nos piden calcular está determinado por los lados b y f. Por tanto, su área será bf."

		30	40	h
36	28			g
			48	f
63		42		e
a	b	c	d	

		30	40	h
36	28			g
			48	f
63		42		e
a	b	c	d	

Ahora, establecemos una igualdad entre áreas. Hacemos un producto con todas las longitudes de los segmentos horizontales y verticales que determinan todos los rectángulos de la figura y, a continuación, los agrupamos de dos en dos para obtener las diferentes áreas conocidas en la figura:

a*b*c*d*e*f*g*h* = ae*bg*ch*df

y también podemos agrupar de esta otra forma a*b*c*d*g*f*e*h = ag*bf*ce*dh,

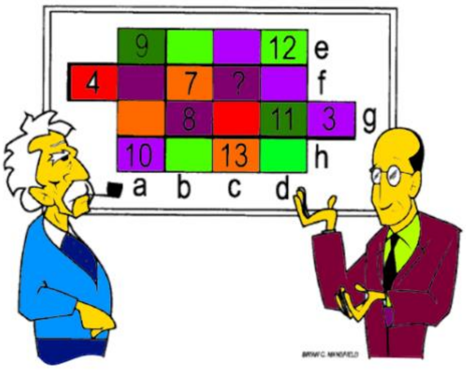
Por tanto, como ambas igualdades tienen los primeros términos idénticos, también lo son los segundos términos: ***ae*bg*ch*df = ag*bf*ce*dh***

Y sustituyendo los valores conocidos tenemos: 63*28*30*48 = 36****bf****42*40

Y de ahí: ***bf*** = (63*28*30*48)/(36* 42*40)

Es decir: ***bf*** = (2 540 160)/(60 480) = 42.

El Problema matemático de **Mondrian** consiste en dividir una cuadrícula de dimensiones n x n, en rectángulos y cuadrados de lados enteros e incongruentes entre sí (es decir, que no haya dos iguales), de tal modo que la diferencia entre la superficie del rectángulo mayor y el menor sea la menor posible.



Hace tiempo que no hablamos de la estupenda revista lusa **Educaçao e Matemàtica** y sus estupendos problemas de geometría.

Primero debemos resumir el artículo de la sección "**Permanencias**" de dicha Revista, publicado en el nº 163, correspondiente al primer trimestre de 2022. En él se hace un homenaje a la figura de **José Paulo Vian**a, encargado desde los comienzos de la sección de la revista denominada **O problema deste número**, que es el lugar de donde hemos obtenido esos problemas a los que nos hemos referido.

El título de ese artículo es "**El problema de este número. Más de 30 años dando problemas**" y está firmado por **El equipo editorial de E *e* M.**

Dicho artículo comienza dando las gracias a José Paulo Viana por los 33 años que se cumplen desde el comienzo de la sección dedicada a la resolución de problemas. Y construye una pequeña historia de la sección más antigua de la revista, dando para ello la palabra a los cinco lectores que más resoluciones y a tres de sus alumnos en el E. S. *Vergílio Ferreira*, donde trabaja desde hace 20 años.

El comienzo de esta historia nos lleva a 1988, como cuenta el propio José Paulo Viana:

“Todo empezó gracias a Eduardo Veloso, a quien siempre le gustaron los problemas y defendió que debían desempeñar un papel esencial en la enseñanza de las matemáticas. Así que decidió empezar proponiendo, justo en el nº 8 de Educación y Matemáticas, un problema a los lectores. Para subrayar su importancia, la declaración apareció en la portada de la revista. Fui una de las personas que respondió y, al ver que me gustaban estas cosas, me invitaron a formar parte de la redacción de EM y a dinamizar la aún embrionaria sección. Al principio, sólo publicamos la respuesta enviada por uno de los lectores. Sin embargo, a menudo hay enfoques muy diferentes y es una pena que los lectores no los conozcan. Por ello, uno de los principales "puntos fuertes" de la sección se convirtió pronto en mostrar estrategias diferentes, inesperadas e incluso brillantes para llegar a la solución. Inicialmente las propuestas estaban dirigidas a los profesores como posibles entusiastas de la resolución de problemas, pero después de algún tiempo y basándonos en la reacción de algunos lectores, nos dimos cuenta de que sería aún más útil e interesante si los problemas pudieran utilizarse en clase. Y eso es lo que intentamos hacer desde entonces.”

Se trata de una sección con fuerte interacción con los lectores, no en vano son 33 años de dar problemas, 402 personas que respondieron al menos una vez y 6 personas que respondieron más de 30 veces.

José Paulo Viana nos da una de las claves de la persistencia de la sección:

“*Ese primer impacto con un buen problema nos despierta inmediatamente y nos pone la cabeza a trabajar (y eso sienta bien...). Entonces llega el placer de la búsqueda: ¿Qué puedo hacer? ¿Dónde puedo ir? ¿He visto algo similar? Entonces sentimos que avanzamos, incluso cuando tenemos que volver a probar nuevos caminos. Por último, está esa alegría de llegar al final, de haber superado los obstáculos, de haberse enriquecido. Y el proceso no termina ahí. A menudo, un problema resuelto es el punto de partida de un nuevo problema y de un nuevo proceso de búsqueda*.”

También revela:

> ***"Especialmente con los "Retos "1 de Público, me di cuenta de que había gente, de todo tipo y con diferentes grados de educación, interesada y que los recogía. Creo que a prácticamente todo el mundo le gusta resolver problemas, aunque algunos se asustan si les parece o si les decimos que son matemáticas... El factor inhibidor puede ser el resultado de malas experiencias con nuestra asignatura, que han creado bloqueos. Si, en un momento adecuado, conseguimos presentar un problema sin "ropaje matemático" pero que obligue a pensar, comprobaremos que casi nadie queda indiferente. Algunas de las experiencias más sorprendentes y gratificantes que he tenido han sido en las clases de sustitución. Llegaba a una clase en la que nadie me conocía y yo no conocía a nadie, y al cabo de diez minutos (o veinte, cuando era más difícil superar el hielo y las reticencias iniciales) prácticamente todos, incluso los que tenían malas notas en matemáticas, estaban entusiasmados por resolver un problema."***

Viana pone como primer problema que le impactó el que le presentó su padre y que se denominaba **La batalla de Hastings**:

> ***"Los ejércitos normandos y sajones estaban frente a frente, en escuadra. Los normandos fueron superados porque tenían 512 soldados menos. Sin embargo, lucharon con tal valentía y coraje que lograron disolver y hacer retroceder al enemigo. Al final de la terrible batalla, la mitad de los sajones estaban muertos, pero los normandos sólo tenían unos pocos muertos. Casualmente, el número de supervivientes de cada lado era igual. ¿Cuántos soldados tenía cada ejército y cuántos murieron en la batalla? "***

En palabras de este matemático, "…el texto es inmediatamente desafiante. Los datos parecen ser claramente insuficientes y, en los primeros momentos no creemos que haya una solución. Cuando empezamos a resolver, el progreso es lento, pero nos damos cuenta de que podemos utilizar información que, a primera vista, parecía inútil o irrelevante (por ejemplo, que eran cuadrados o que los muertos eran pocos). De repente, se hace la luz, todo encaja y ahí tenemos la solución, única e inevitable."

"También fue en ese momento cuando me di cuenta de que había un nuevo tipo de problema, que es matemático, pero va más allá, en el que tenemos que relacionar información dispar y ampliar nuestro campo de visión. He crecido."

El resto del artículo expone un cuestionario pasado a los resolutores de la sección de problemas. Sus opiniones son muy interesantes y creemos que nuestros lectores deberían hacerse con dicho artículo y leerlo. Nosotros dejamos aquí el resumen, ampliamente extenso, con los aspectos que pensamos más interesantes como homenaje a tan extraordinario matemático. Dejamos como muestra la opinión de uno de ellos, Jaime Carvalho e Silva, que dice sobre José Paulo Viana:

> ***"Que el trabajo que realiza, fomentando y desarrollando el gusto por resolver problemas matemáticos, está en el corazón de las matemáticas. Hacer matemáticas es resolver problemas y uno aprende matemáticas resolviendo problemas (a todos los niveles)."***

Y sirva de ejemplo el siguiente problema, publicado por José Paulo Viana en la sección *"O Problema de este número"* de Enero/Febrero/Marzo, nº 151 de la revista ***Educaçao e Matemática***.

EL TERRENO DE LETICIA

Leticia ha heredado un terreno con forma de trapecio. Los lados paralelos del trapecio miden 66 y 90 metros. Los otros dos lados tienen 34 y 50 metros de longitud.

¿Cuál es el área del terreno?

Proceso de Resolución

COMPRENDER

Datos

Un terreno con forma de trapecio. Los lados paralelos del trapecio miden 66 y 90 metros. Los otros dos lados tienen 34 y 50 metros de longitud.

Objetivo

Calcular el área del terreno.

Relación

Un trapecio es un cuadrilátero con dos de sus cuatro lados paralelos entre sí.

Diagrama

El que acompaña al problema.

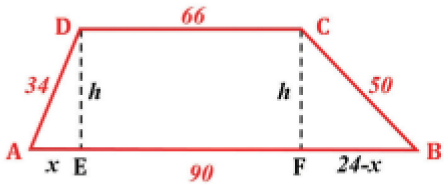
PENSAR

Estrategias

Organizar la Información mediante el uso de propiedades geométricas y el álgebra.

EJECUTAR

Empezar haciendo un esquema del trapecio, utilizando los datos del enunciado:



[Considerando los triángulos rectángulos de la figura obtenemos] el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24 - x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ h = 30 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} x = -16 \\ h = -30 \end{cases}$$

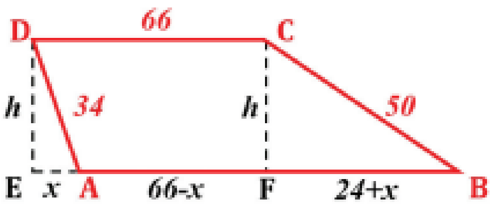
Pero, para la altura positiva h=30, el valor de x es negativo...

Hay que superar esta imposibilidad.

La primera dificultad fue utilizar la figura del enunciado y el problema así es imposible. Conclusión: la configuración trapezoidal no es la "clásica".

Para entender mejor el valor negativo obtenido para x, podemos construir en Geogebra el trapecio con los datos del enunciado y mover el punto C hasta conseguir una base menor igual a 66.

El terreno nunca puede tener la forma que se muestra en la imagen. Analizando estos resultados, el valor negativo de x indica fuertemente que el triángulo ADE debe ser simétrico a la forma mostrada en la imagen. El trapecio tendría que tener este otro aspecto



A partir de los triángulos rectángulos DEA y CFB, tenemos este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24 + x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ h = 30 \end{cases}$$

Ahora todo tiene sentido. La altura del trapecio es de 30 metros. Así que:

$$A_{trapézio} = \frac{90 + 66}{2} \times 30 = 2340\, m^2$$

<u>Solución:</u> **2340 m²**

RESPONDER

Comprobación

La construcción en Geogebra dará plena satisfacción a las posibles dudas planteadas.

Análisis

La solución es única.

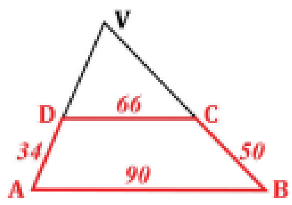
Respuesta: **El área del terreno de Leticia es de 2340 m^2.**

La solución que presentamos es la que figura en el número 151 de la revista ***Educação e Matemática***, con algunas modificaciones para adaptarlo a nuestra manera de trabajar.

Hubo otras soluciones presentadas.

Por ejemplo, hubo una que comenzó por no especificar los datos numéricos del problema. Resolvió un sistema de 3 ecuaciones para un caso general (en lugar de utilizar las medidas 66, 90, 34 y 50), obteniendo una fórmula para la altura del trapecio (y otras dos para las medidas de longitud de las bases de los triángulos). Tras concretar [con los datos del problema], se encontró un valor "muy grande" (40) para una de las "bases" y un valor negativo (-16) para la otra.

Otra estrategia muy diferente fue considerar que como [ABCD] es el paralelogramo de Leticia, si extendemos sus lados, obtenemos un triángulo [VBA] semejante a [VCD].



Recurriendo a esa semejanza, podemos determinar las longitudes de [VD] y de [VC].

$$\textit{Como}\ \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{90}{66} = \frac{15}{11}\ \textit{então:}$$

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VD}+34} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VD} = 93{,}5 \text{ e } \frac{\overline{VC}}{\overline{VC}+50} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VC} = 137{,}5$$

Así se llega a conocer las medidas de los lados del triángulo [VBA] y también su área. Aplicando, por ejemplo, la fórmula de Herón (el semiperímetro de este triángulo es igual a 202,5), tendremos:

$$A_{AVD} = \sqrt{202{,}5 \times (202{,}5 - 90) \times (202{,}5 - 187{,}5) \times (202{,}5 - 127{,}5)} = 5062{,}5$$

Podemos utilizar el mismo proceso para determinar el área del triángulo [VCD], pero sabemos que, debido a la ya referida semejanza entre triángulos, ésta será dada por:

$$\left(\frac{11}{15}\right)^2 \times 5062{,}5 = 2722{,}5.$$

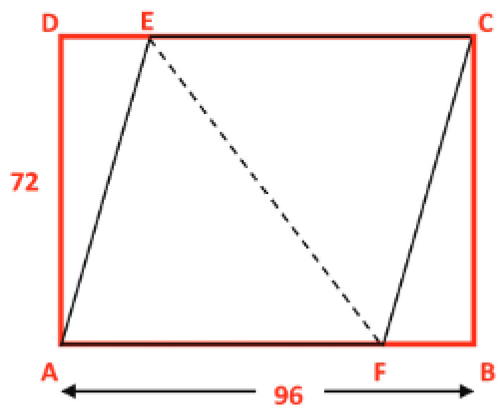
De esta manera el área del trapecio [ABCD] es igual a 5062,5 – 2722,5 = 2340 m^2.

Nuevos retos

Y para redondear el artículo, unos cuantos retos más para satisfacer el deseo de nuestros lectores de afrontar problemas de geometría.

UN ROMBO EN EL RECTÁNGULO

Los lados del rectángulo ABCD miden 72 y 96 mm, respectivamente. El polígono AFCE es un rombo. **¿Cuál es la medida de la diagonal EF del rombo?**



Educaçao e Matemática nº 161 Tercer Trimestre 2021 O problema de este número

José Paulo Viana

Puzzle nº 083 El Puzle de las Diagonales

Alyson dibuja un montón de figuras formadas por diferentes números de líneas verdes rectas (como la de abajo).

Dentro de la figura, une todas las esquinas entre sí utilizando líneas grises.
Se da cuenta de que una de sus figuras tiene tres veces más líneas grises que verdes.
¿Cuántas líneas verdes hay en esa figura?

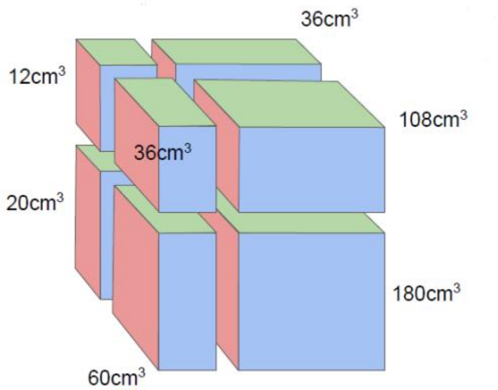
Ampliación:

¿Cuántas líneas grises hay en una forma que tiene **n** líneas verdes?

Clasificación: 

Puzzle nº 33 El Puzle de Cubos Cortados

Un cubo se ha cortado tres veces para crear ocho cuboides. Cada cuboide tiene aristas de longitudes enteras mayores que 1. Se muestra el volumen de siete de los cuboides.



(*El dibujo no está hecho a escala*.)

¿Cuál es la longitud de una de las aristas del cubo original?

Bueno, ya saben, aunque seamos pesados terminaremos con nuestro *mantra* particular:

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan lo que les pedimos: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones (o las dudas y errores encontrados) para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a lo largo de este largo año deseando que la sexta ola haya terminado por fin y a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**